

Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten.

Von

H. Seifert in Dresden.

In den Anwendungen der Topologie hat man es häufig mit Mannigfaltigkeiten zu tun, die nicht nur „stetig“ sind, sondern überdies gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen: Die Punkte der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m sind z. B. in folgender Weise auf Koordinaten bezogen: Zu jedem Punkte p von \mathfrak{M}^m gibt es eine Umgebung¹⁾ $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{M}^m)$, deren Punkte in umkehrbar eindeutiger, stetiger Weise auf reelle „örtliche“ Koordinaten x_1, \dots, x_m bezogen sind derart, daß die Koordinaten x_1, \dots, x_m und y_1, \dots, y_m zweier solcher Umgebungen $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{M}^m)$ und $\mathfrak{U}(q|\mathfrak{M}^m)$ in den etwa gemeinsamen Punkten durch eine k -mal stetig differenzierbare oder sogar analytische Transformation miteinander zusammenhängen, deren Funktionaldeterminante $\neq 0$ ist. Wir wollen alsdann \mathfrak{M}^m als *k -mal stetig differenzierbare, bzw. analytische Mannigfaltigkeit* bezeichnen. Auf einer solchen Mannigfaltigkeit hat es einen Sinn, von k -mal stetig differenzierbaren, bzw. analytischen Funktionen zu reden. Es ist eine offene Frage, ob sich jede Mannigfaltigkeit zu einer differenzierbaren oder sogar analytischen machen läßt²⁾. — Eine Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m ist sicher k -mal stetig differenzierbar, wenn sie *k -mal stetig differenzierbar* in einen euklidischen Raum \mathfrak{R}^n *eingelagert* ist. Das soll heißen: Zu jedem Punkte p von \mathfrak{M}^m gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$, in der \mathfrak{M}^m durch $n - m$ Gleichungen

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

darstellbar ist³⁾. Dabei seien f_1, \dots, f_{n-m} k -mal stetig differenzierbar und ihre Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1) Unter Umgebungen verstehen wir im folgenden immer offene Mengen.

2) Auf die Wichtigkeit dieser Frage machte gelegentlich Herr C. Carathéodory aufmerksam.

3) Die Funktionen f_1, \dots, f_{n-m} sind also nur in der Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$ definiert.

habe überall den Rang $n - m$. Sind diese Gleichungen — etwa nach x_{m+1}, \dots, x_n — auflösbar, so kann man auf \mathcal{M}^m x_1, \dots, x_m als örtliche Koordinaten in p benutzen.

Es ist bekannt, daß sich jede m -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m topologisch in einen euklidischen Raum \mathcal{R}^n von genügend hoher Dimension einbetten läßt, nämlich sicher in den \mathcal{R}^{2m+1} ⁴⁾. Die Einlagerung läßt sich sogar so vornehmen, daß die Simplexe einer beliebigen simplizialen Zerlegung von \mathcal{M}^m in (geradlinige) Simplexe des \mathcal{R}^{2m+1} übergehen. \mathcal{M}^m wird also zwar singularitätenfrei (ohne Selbstdurchdringung), aber nicht differenzierbar eingelagert sein, vielmehr Ecken, Kanten usw. aufweisen. Es liegt nahe, aus einer solchen simplizialen Einlagerung von \mathcal{M}^m in \mathcal{R}^n eine differenzierbare durch Abrundung der Ecken, Kanten usw. abzuleiten. Doch scheint dies für $n > 3$ auf erhebliche Schwierigkeiten zu stoßen.

Eine andere hierher gehörige Frage ist es, ob man von einer k -mal stetig differenzierbaren Einlagerung von \mathcal{M}^m zu einer analytischen, also speziell algebraischen Einlagerung gelangen kann^{4a)}. Wie wir sehen werden, läßt sich eine geschlossene \mathcal{M}^m , die zweimal stetig differenzierbar in den \mathcal{R}^n eingelagert ist, in einen reellen Zweig einer algebraischen Mannigfaltigkeit deformieren, falls es auf \mathcal{M}^m $n - m$ Felder von orientierten Normalen gibt, die in jedem Punkte linear unabhängig sind, wofür wir kurz sagen, daß \mathcal{M}^m ein Feld von *normalen* $(n - m)$ -*Beinen* besitzt. Es ist nun leider nicht so, daß jede geschlossene Mannigfaltigkeit ein solches Feld zuläßt. Zunächst scheiden, wie leicht zu sehen ist, die nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten aus. Aber auch eine orientierbare Mannigfaltigkeit gestattet im allgemeinen kein Feld von normalen $(n - m)$ -Beinen⁵⁾. Dagegen gibt es offenbar ein solches Feld im Falle $n - m = 1$ und, wie wir zeigen werden, auch noch für $n - m = 2$.

§ 1.

Stetige Normalenfelder auf Mannigfaltigkeiten.

\mathcal{M}^m sei eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit, die zweimal stetig differenzierbar in den euklidischen \mathcal{R}^n eingelagert ist. Unter der

⁴⁾ H. Seifert und W. Threlfall, *Topologie* (Leipzig 1934), § 11.

^{4a)} Zusatz bei der Korrektur: Die Frage nach der analytischen Einlagerung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit behandelt H. Whitney in der soeben erschienenen Arbeit: *Differentiable manifolds in Euclidean space*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21 (1935), S. 462—464. In der Arbeit: *Sphere-spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21 (1935), S. 464—468, des gleichen Verfassers findet sich auch ohne Beweis der Satz 1 des § 1 ausgesprochen.

⁵⁾ Beispiele hierfür finden sich bei E. Stiefel, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comment. math. Helvet. 8.

ε -Umgebung U_ε von \mathcal{M}^m verstehen wir die Gesamtheit der Punkte, deren Abstand von \mathcal{M}^m kleiner als ε ist. Ist P ein fester Punkt aus U_ε , p ein variabler von \mathcal{M}^m , so wird wegen der Geschlossenheit von \mathcal{M}^m die untere Grenze der Strecken Pp von mindestens einem Punkte p^* angenommen. Pp^* ist dann notwendig ein Lot auf \mathcal{M}^m , und die Länge von Pp^* ist $< \varepsilon^6$). Wir sprechen von einer *normalen Umgebung* U_ε , wenn man aus jedem Punkte P von U_ε genau ein Lot auf \mathcal{M}^m fällen kann, dessen Länge $< \varepsilon$ ist. Da wir die Einlagerung von \mathcal{M}^m als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt haben, gibt es stets eine normale Umgebung (Anhang 1). Wir beweisen nun den

Satz 1: *Ist die orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m in den euklidischen \mathcal{R}^{m+1} oder \mathcal{R}^{m+2} zweimal stetig differenzierbar eingelagert, so kann man in jedem Punkt von \mathcal{M}^m eine orientierte Normale errichten, so daß ein über ganz \mathcal{M}^m stetiges Normalenfeld entsteht.*

Beweis: a) Der Satz ist klar, wenn \mathcal{M}^m im \mathcal{R}^{m+1} liegt. Denn dann gibt es in jedem Punkte von \mathcal{M}^m genau eine Normale, die wir etwa so orientieren, daß sie vom Innengebiet nach dem Außengebiet weist⁷⁾.

b) Es liege jetzt \mathcal{M}^m im \mathcal{R}^{m+2} . Im einfachsten Falle $m = 1$ ist \mathcal{M}^1 eine geschlossene Kurve im \mathcal{R}^3 . Man bringt in diesem Falle in einem Ausgangspunkte eine beliebige orientierte Normale an und führt sie stetig längs der Kurve herum. Das kann man offenbar immer so einrichten, daß nach einer vollständigen Durchlaufung der Kurve die Normale in die Ausgangslage zurückkehrt. Man braucht dabei garnicht zu benutzen, daß die Kurve gerade im euklidischen Raum liegt. Vielmehr besitzt eine geschlossene Raumkurve in jeder beliebigen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ein stetiges Normalenfeld.

Dies ändert sich, wenn wir eine Dimension höher steigen. Eine geschlossene Fläche in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit besitzt im allgemeinen kein stetiges Normalenfeld, wofür die komplexe projektive Gerade — eine Kugelfläche — in der komplexen projektiven Ebene — einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit — ein Beispiel darstellt⁸⁾. Wir müssen also zum Beweise des Satzes 1 im Falle $m > 1$ ausnutzen, daß die einbettende Mannigfaltigkeit der euklidische Raum \mathcal{R}^{m+2} ist.

⁶⁾ Liegt P auf \mathcal{M}^m , so ist die Länge des „Lotes“ 0.

⁷⁾ Jede geschlossene, topologisch im \mathcal{R}^{m+1} gelegene Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m zerlegt den \mathcal{R}^{m+1} bekanntlich in zwei Gebiete und ist orientierbar.

⁸⁾ Gäbe es ein stetiges Normalenfeld auf der komplexen projektiven Geraden S^2 in der komplexen projektiven Ebene, so könnte man die S^2 durch Verschieben ihrer Punkte in der positiven Normalrichtung in eine punktfremde $'S^2$ deformieren. Daher wäre die Schnittzahl $\mathcal{S}(S^2, S^2) = \mathcal{S}(S^2, 'S^2) = 0$, während sie in Wahrheit $= 1$ ist (Beweis bei B. L. van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Annalen 102 (1929)).

Wir betrachten zu dem Zwecke neben \mathfrak{M}^m die *Umgebungs-Mannigfaltigkeit* \mathfrak{U}^{m+1} , die von den Endpunkten der sämtlichen an \mathfrak{M}^m angreifenden und auf \mathfrak{M}^m senkrechten Einheitsvektoren (kurz *Einheitsloten*) gebildet wird. Dabei wählen wir die Längeneinheit so klein, daß \mathfrak{U}^{m+1} ganz in einer normalen Umgebung von \mathfrak{M}^m liegt. Da die Einheitslote in einem bestimmten Punkte p von \mathfrak{M}^m eine Einheitskreisscheibe überdecken, so entspricht dem Punkte p eine geschlossene Kurve in \mathfrak{U}^{m+1} , nämlich der Rand dieser Kreisscheibe. Durch jeder Punkt von \mathfrak{U}^{m+1} geht genau eine solche Kurve hindurch, da man aus jedem Punkte P von \mathfrak{U}^{m+1} genau ein Einheitslot Pp fällen kann. Wir werden diese Kurven, mit denen \mathfrak{U}^{m+1} übersponnen ist, *Fasern* und \mathfrak{U}^{m+1} einen *gefaserten* Raum nennen. Ferner sagen wir, daß die Punkte einer Faser *über* dem Punkte p von \mathfrak{M}^m liegen, der dieser Faser entspricht. In dem bereits erledigten Falle $m = 1$ würde die Umgebungsmannigfaltigkeit ein Schlauch sein, der die Raumkurve \mathfrak{M}^1 umschließt; aus ihm werden die Fasern durch die Normalebene der Raumkurve ausgeschnitten.

Im Falle eines beliebigen m sei w eine Umgebung eines Punktes p von \mathfrak{M}^m und q ein Punkt in w . Verschiebt man die Normalebene in q parallel nach p und projiziert sie dort orthogonal auf die Normalebene in p , so ist damit, falls w hinreichend klein ist, eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung der Normalebene in q auf die in p gegeben, und damit auch eine eindeutige Beziehung zwischen den Einheitsloten in q und in p . Daraus geht hervor, daß die Gesamtheit \mathfrak{B} der über w liegenden Punkte homöomorph zum topologischen Produkte aus der Umgebung w und einer Kreislinie H ist.

$$\mathfrak{B} = w \times H,$$

wobei die Fasern von den Produkten $q \times H$ gebildet werden.

Unter einer *Schnittmannigfaltigkeit* von \mathfrak{U}^{m+1} wollen wir eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^m$ verstehen, die mit jeder Faser genau einen Punkt gemeinsam hat. Die aus den Punkten einer Schnittmannigfaltigkeit auf \mathfrak{M}^m gefällten Normalen bilden offenbar ein stetiges Normalenfeld, und umgekehrt liefert jedes stetige Normalenfeld eine Schnittmannigfaltigkeit. Satz 1 wird also bewiesen sein, wenn wir in \mathfrak{U}^{m+1} eine Schnittmannigfaltigkeit konstruiert haben.

Wir legen eine bestimmte simpliziale Zerlegung von \mathfrak{M}^m zugrunde. Ihre Simplexe der Dimension d seien

$$e_i^d; \quad (i = 1, \dots, \alpha^d; \quad d = 0, 1, \dots, m).$$

Obere Indizes deuten auf die Dimension hin; α^d ist die Anzahl der d -dimensionalen Simplexe. Wir können die Zerlegung so fein, die Simplexe also

so klein wählen, daß die über e_i^d liegende Punktmenge dem topologischen Produkte

$$e_i^d \times H$$

homöomorph ist.

Zwischen den Simplexen, die wir mit bestimmten Orientierungen versehen, bestehen gewisse Berandungsrelationen. Wir brauchen im folgenden nur die Ränder der Dreiecke:

$$(1, 1) \quad \mathcal{R}d e_k^\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} e_l^1 \quad (k = 1, \dots, \alpha^2).$$

Der Zerlegung von \mathcal{M}^m in die Simplexe e_i^d entspricht eine analoge Zerlegung der Umgebungsmannigfaltigkeit \mathcal{U}^{m+1} in Produkte $e_i^d \times H$. Insbesondere ist das über einer Strecke e_l^1 liegende Produkt ein gefasertes Kreisring $e_l^1 \times H$ und das über einem Dreieck e_k^α liegende Produkt ein gefasertes Vollring $e_k^\alpha \times H$. Wir konstruieren nun die Schnittmannigfaltigkeit Schritt für Schritt, indem wir zunächst über jedem 0-Simplexe e_s^0 einen Punkt E_s^0 der zu konstruierenden Schnittmannigfaltigkeit wählen. Auf den beiden Randkreisen des Kreisringes $e_l^1 \times H$ verbinden wir die bereits gewählten Punkte E_s^0 und E_t^0 durch einen Bogen E_l^1 , der jede Faser des Kreisringes genau einmal durchsetzt (Fig. 1) und der der zu konstruierenden Schnittmannigfaltigkeit zugerechnet wird. Man hat bei der Wahl von E_l^1 noch unendlich viele Möglichkeiten,

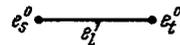
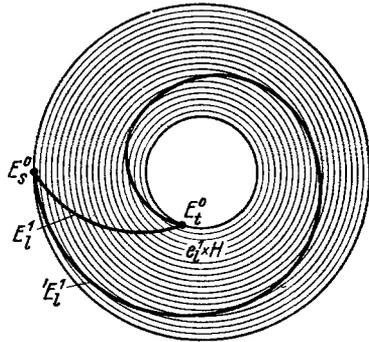


Fig. 1.

da man E_l^1 im einen oder andern Sinn beliebig oft um den Kreisring herumführen kann. (In der Fig. 1 ist außer E_l^1 z. B. E_l^1 ein möglicher Verbindungsbogen.) Wir versuchen nun, die Schnittmannigfaltigkeit, die auf dem Rande eines gefaserten Vollringes $e_k^\alpha \times H$ bereits definiert ist, stetig ins Innere fortzusetzen. Wir müssen also ein Elementarflächenstück E_k^α konstruieren, das jede Faser des Vollringes in einem Punkte trifft und den Rand $\sum \beta_{kl} E_l^1$ hat. Ein solches Flächenstück gibt es aber nur dann, wenn die geschlossene Kurve $\sum \beta_{kl} E_l^1$ im Vollring in einen Punkt zusammenziehbar ist. Das wird im allgemeinen nicht der Fall sein. Vielmehr wird $\sum \beta_{kl} E_l^1$ homolog einem Vielfachen der Faser H sein:

$$(1, 2) \quad \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} E_l^1 \sim \lambda_k H \quad (\text{in } e_k^\alpha \times H).$$

Wir setzen dabei voraus, daß die Fasern in bestimmter Weise orientiert sind und zwar gleichmäßig über die ganze Mannigfaltigkeit U^{m+1} , was wegen der Orientierbarkeit von U^{m+1} und \mathfrak{M}^m möglich ist⁹⁾. Die Konstruktion der Schnittmannigfaltigkeit kommt also bereits hier zum Stillstand, es sei denn, daß alle λ_k verschwinden.

Wir werden nun sehen, daß man durch geeignete Wahl der E_l^1 alle λ_k zu Null machen kann. Zu dem Zwecke betrachten wir neben der gegebenen simplizialen Zerlegung von \mathfrak{M}^m die duale Zellteilung. Die zu e_i^d duale Zelle sei z_i^{m-d} und sie sei so orientiert, daß die Schnittzahl

$$(1.3) \quad \mathcal{S}(e_i^d, z_i^{m-d}) = +1$$

wird. Dabei ist eine feste Orientierung von \mathfrak{M}^m vorausgesetzt. Entsprechend den Berandungsrelationen (1.1) hat man die dualen Berandungsrelationen

$$(1.4) \quad \mathcal{R}d z_l^{m-1} = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \beta_{kl} z_k^{m-2}. \quad (l = 1, \dots, \alpha^1)$$

Da die Zellen z_k^{m-2} den Simplexen e_k^2 und damit den Zahlen λ_k eindeutig entsprechen, kann man die $(m-2)$ -dimensionale Zellenkette

$$(1.5) \quad z^{m-2} = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \lambda_k z_k^{m-2}$$

bilden.

Wir beweisen, daß z^{m-2} homolog Null ist. Eine Zellenkette z^{m-2} ist nach dem Kriterium von H. Hopf¹⁰⁾ dann und nur dann nullhomolog, wenn die Schnittzahl mit jeder beliebigen mod τ geschlossenen Kette $e^2 = \sum \varepsilon_k e_k^2$ durch τ teilbar ist; dabei ist τ eine beliebige ganze Zahl > 1 . Daß $e^2 \bmod \tau$ geschlossen ist, bedeutet, daß die Koeffizienten in

$$\mathcal{R}d e^2 = \sum \varepsilon_k \beta_{kl} e_l^1$$

durch τ teilbar sind:

$$(1.6) \quad \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \beta_{kl} \equiv 0 \pmod{\tau}. \quad (l = 1, \dots, \alpha^1)$$

Die Schnittzahl $\mathcal{S}(e^2, z^{m-2})$ ist nun nach (1.3)

$$(1.7) \quad \mathcal{S}\left(\sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k e_k^2, \sum_{k=1}^{\alpha^2} \lambda_k z_k^{m-2}\right) = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k.$$

Um zu zeigen, daß $\sum \varepsilon_k \lambda_k \equiv 0 \pmod{\tau}$ ist, multiplizieren wir die Homologien (1.2) mit ε_k und addieren:

$$(1.8) \quad \sum_{l=1}^{\alpha^1} \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \beta_{kl} E_l^1 \sim \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k H \quad (\text{in } U^{m+1}).$$

⁹⁾ U^{m+1} ist orientierbar als $(m+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathfrak{R}^{m+2} .

¹⁰⁾ H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104, S. 657, Hilfssatz I.

Die linke Seite ist nach (1.6) das τ -fache einer Kette K^1 :

$$(1.9) \quad \tau K^1 \sim \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k H \quad (\text{in } \mathcal{U}^{m+1}).$$

Nun benutzen wir die Tatsache, daß \mathcal{M}^m im euklidischen \mathcal{R}^{m+2} liegt. Die eindimensionalen geschlossenen Ketten K^1 und H sind punktfremd zu \mathcal{M}^m und haben folglich bestimmte Verschlingungszahlen mit \mathcal{M}^m . Da überdies τK^1 und $\sum \varepsilon_k \lambda_k H$ einander homolog sind in \mathcal{U}^{m+1} , also im Außenraum von \mathcal{M}^m , so sind ihre Verschlingungszahlen mit \mathcal{M}^m gleich¹¹⁾:

$$(1.10) \quad \tau \mathcal{V}(K^1, \mathcal{M}^m) = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k \mathcal{V}(H, \mathcal{M}^m).$$

$\mathcal{V}(H, \mathcal{M}^m)$ ist $= \pm 1$. Denn H ist ein Kreis vom Radius 1, der in einer Normalebene von \mathcal{M}^m liegt. Die Verschlingungszahl ist aber definitionsgemäß gleich der Schnittzahl dieser Kreisscheibe mit \mathcal{M}^m , also ± 1 . Aus (1.10) folgt daher

$$\sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k \equiv 0 \pmod{\tau}.$$

Also ist in der Tat z^{m-2} homolog 0, und es gibt daher eine Kette

$$z^{m-1} = \sum_{i=1}^{\alpha^1} \delta_i z_i^{m-1},$$

deren Rand z^{m-2} ist; daher

$$(1.11) \quad \lambda_k = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} \delta_l.$$

Wir ersetzen nun den Bogen E_l^1 durch den neuen Bogen

$$'E_l^1 = E_l^1 - \delta_l H.$$

Dann erhält man an Stelle von (1.2) mit Hilfe von (1.11) die Homologie

$$\sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} 'E_l^1 = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} E_l^1 - \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} \delta_l H \sim \lambda_k H - \lambda_k H = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß man durch geeignete Wahl der Bogen E_l^1 alle λ_k zu Null machen kann. Wir denken uns von vornherein die E_l^1 in dieser Weise gewählt. Dann läßt sich die Schnittmannigfaltigkeit in \mathcal{U}^{m+1} , die bisher nur über den Simplexen der Dimensionen 0 und 1 von \mathcal{M}^m definiert ist, auch über den 2-dimensionalen Simplexen definieren. Man hat nur in die nullhomologe Kurve $\sum \beta_{kl} E_l^1$ ein Flächenstück E_k^2 einzuspannen, das jede Faser des Vollringes $e_k^2 \times H$ genau einmal trifft.

Ist $m = 2$, so ist damit schon die Existenz der Schnittmannigfaltigkeit bewiesen. Im Falle $m > 2$ betrachten wir ein 3-Simplex e_k^3 . Über

¹¹⁾ Bei der Bildung der Verschlingungszahl ist natürlich \mathcal{M}^m als m -dimensionale Kette, nicht als Punktmenge zu verstehen.

ihm liegt das Produkt $e_i^3 \times H$. Auf dem Kreise H charakterisieren wir die Punkte durch den Mittelpunktswinkel φ , der von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren kann. Da über jedem Punkte p auf dem Rande von e_i^3 bereits ein Punkt P der Schnittmannigfaltigkeit liegt, ist damit jedem Punkte p ein mod 2π bestimmter φ -Wert zugeordnet. Die Funktion $\varphi(p)$ ist zunächst unendlich vieldeutig auf dem Rande von e_i^3 . Da dieser Rand aber als Kugelfläche einfach zusammenhängend ist, so zerfällt $\varphi(p)$ in unendlich viele Zweige von lauter eindeutigen Funktionen. Setzt man nämlich $\varphi(p)$ längs eines geschlossenen Weges der Kugelfläche stetig fort, so muß man genau zu dem Ausgangswerte zurückkommen, da sich der Weg stetig zusammenziehen läßt. Wir greifen einen solchen Zweig heraus und setzen die Funktion $\varphi(p)$ in das Innere von e_i^3 stetig fort, wodurch die Schnittmannigfaltigkeit über den 3-Simplex von \mathfrak{M}^m definiert ist. Damit ist sie zugleich auf der Randsphäre eines 4-Simplexes gegeben, falls deren vorhanden sind, und man kann sie nach dem gleichen Verfahren in deren Inneres fortsetzen. So steigt man Schritt für Schritt bis zu den n -Simplex auf. Damit ist die Schnittmannigfaltigkeit konstruiert und Satz 1 bewiesen.

Eine unmittelbare Folge von Satz 1 ist es, daß unsere \mathfrak{M}^m im \mathfrak{R}^{m+2} sogar ein stetiges Feld von Zweibeinen besitzt. In der Tat ist in einer Normalebene durch eine orientierte Normale zugleich in der darauf senkrechten Normalen eine bestimmte Orientierung festgelegt, nämlich durch die Forderung, daß die beiden orientierten Normalen zusammen mit einer bestimmten Orientierung von \mathfrak{M}^m eine vorgegebene Orientierung von \mathfrak{R}^{m+2} ergeben sollen.

Wir wollen uns nun Rechenschaft davon geben, an welcher Stelle die Übertragung unserer Konstruktion des Normalenfeldes von dem behandelten Fall (\mathfrak{M}^m im \mathfrak{R}^{m+2}) auf den allgemeinen Fall (\mathfrak{M}^m im \mathfrak{R}^{m+k} , $k > 2$) versagt. Ist die orientierbare Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m in den \mathfrak{R}^{m+k} eingelagert, so kann man die Umgebungsmannigfaltigkeit \mathfrak{U}^{m+k-1} wie bisher als die Gesamtheit der Endpunkte aller Einheitslote definieren. Sie ist durch $(k-1)$ -dimensionale Sphären H^{k-1} „gefasert“. Die Existenz eines stetigen Normalenfeldes ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Schnittmannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^m$, die jede Faser genau einmal trifft. Versucht man $\overline{\mathfrak{M}}^m$ schrittweise zu konstruieren, indem man sie der Reihe nach über den Simplexen der Dimension 0, 1, ... von \mathfrak{M}^m definiert, so zeigt es sich, daß man bis zu den Simplexen der Dimension k einschließlich gelangen kann. Über der k -dimensionalen Randsphäre s^k eines $(k+1)$ -Simplexes e^{k+1} ist dann \mathfrak{M}^m definiert. Es ist also jedem Punkte von s^k ein Punkt von $s^k \times H^{k-1}$ und damit von H^{k-1} zugeordnet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich diese Ab-

bildung der Sphäre s^k in die Sphäre H^{k-1} in das Innere von e^{k+1} stetig fortsetzen läßt, besteht darin, daß die Abbildung von s^k in H^{k-1} unwesentlich, d. h. in eine Abbildung deformierbar ist, die ganz s^k in einen Punkt überführt. Das ist aber im allgemeinen unmöglich, da es z. B. wesentliche Abbildungen der 3-Sphäre auf die 2-Sphäre gibt¹²⁾.

Es ist nicht bekannt, ob für $k > 2$ nur der Beweis versagt oder der Satz falsch ist. Dagegen weiß man, daß die m -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeiten \mathfrak{M}^m ungerader Charakteristik kein stetiges normales k -Beinfeld im \mathfrak{R}^{m+k} zulassen¹³⁾. Da andererseits eine \mathfrak{M}^m im \mathfrak{R}^{m+2} ein stetiges Normalenfeld und damit auch ein Zweibeinfeld besitzt, so folgt

Satz 2: *Eine orientierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m von ungerader Charakteristik läßt sich nicht (zweimal stetig differenzierbar) in den euklidischen \mathfrak{R}^{m+2} , also erst recht nicht in den \mathfrak{R}^{m+1} einlagern.*

Daß sich eine Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m von ungerader Charakteristik N , also von ungerader Dimension auch nicht simplizial in den \mathfrak{R}^{m+1} einlagern läßt, folgt nebenbei bemerkt so: Ließe sich \mathfrak{M}^m simplizial in den \mathfrak{R}^{m+1} einlagern, so würde sie Rand eines $(m+1)$ -dimensionalen Innengebietes sein, das zusammen mit \mathfrak{M}^m eine berandete Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^{m+1}$ bildet. Die Verdoppelung¹⁴⁾ von $\overline{\mathfrak{M}}^{m+1}$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^{m+1} von ungerader Dimension. Ihre Charakteristik ist also $= 0$. Andererseits ist sie, wenn mit \overline{N} die Charakteristik von $\overline{\mathfrak{M}}^{m+1}$ bezeichnet wird, gleich $2\overline{N} - N$, während doch N als ungerade vorausgesetzt wurde.

§ 2.

Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten.

Satz 3: *Ist eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m zweimal stetig differenzierbar in den euklidischen \mathfrak{R}^n eingelagert und gibt es auf \mathfrak{M}^m $n - m$ unabhängige stetige Felder von orientierten Normalen (nach § 1 sind solche für $n - m = 1$ und 2 stets vorhanden), so läßt sich \mathfrak{M}^m durch eine beliebig kleine isotope Deformation in einen reellen Zweig einer algebraischen Mannigfaltigkeit überführen.*

Es genügt, den Beweis für den Fall $n - m = 2$ zu führen, da er im allgemeinen Falle analog verläuft. — Trägt man auf jeder Normalen

¹²⁾ H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931), S. 637—665.

¹³⁾ Vgl. Fußnote 5).

¹⁴⁾ Vgl. das in Fußnote 4) angeführte Buch S. 129.

der beiden stetigen Normalenfelder von \mathfrak{M}^m aus in der positiven Richtung die Einheitsstrecke ab, so ergeben sich zwei Felder von normalen Einheitsvektoren

$$s = (s_1, \dots, s_n) \quad \text{und} \quad t = (t_1, \dots, t_n).$$

Von den Komponenten s_i und t_i wissen wir nur, daß sie stetige Funktionen auf \mathfrak{M}^m sind. Wir leiten zunächst aus s und t zwei differenzierbare Felder von normalen Vektoren u und v ab, etwa auf die folgende Weise: Die auf \mathfrak{M}^m stetigen Funktionen s_1, \dots, s_n lassen sich nach einem bekannten Satze zu stetigen Funktionen im ganzen \mathfrak{R}^n erweitern¹⁵⁾. Wir approximieren nun s_1, \dots, s_n durch Polynome p_1, \dots, p_n und betrachten das Feld der auf \mathfrak{M}^m angreifenden Vektoren

$$p = (p_1, \dots, p_n).$$

Nimmt man von diesen Vektoren die Normalkomponenten, so erhält man ein Feld $u = (u_1, \dots, u_n)$, wie wir es suchen. Auf dieselbe Weise ergibt sich aus dem t -Feld das Feld $v = (v_1, \dots, v_n)$ normaler Vektoren. Bei hinreichender Genauigkeit der Polynomapproximation werden u und v in jedem Punkte p von \mathfrak{M}^m linear unabhängig sein. — Ein beliebiger in p angreifender normaler Vektor pP läßt sich nun in der Form $Fu + Gv$ schreiben. Die hiermit definierten Funktionen F und G von P sind in einer gewissen normalen Umgebung U_η eindeutig und besitzen stetige Ableitungen erster Ordnung (Anhang 2). Sie lassen sich in der durch den Punkt p von \mathfrak{M}^m gehenden Normalebene als affine Koordinaten auffassen, wobei die Basisvektoren des Koordinatensystems die in p angreifenden Vektoren u, v sind. Die gemeinsamen Nullstellen von F und G in U_η erfüllen gerade die Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^m . Nach dem Weierstraßschen Approximationssatze existieren nun zwei Polynome $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ und $\Psi(x_1, \dots, x_n)$, so daß in einer vorgegebenen, abgeschlossenen normalen Umgebung $\bar{U}_\omega \subset U_\eta$

$$(2.1) \quad |F - \Phi| < \omega, \quad |G - \Psi| < \omega$$

und außerdem für die Ableitungen

$$(2.2) \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \right| < \delta, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x_r} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_r} \right| < \delta,$$

gilt, wobei $\delta (> 0)$ beliebig klein vorgegeben werden kann^{15a)}. Schlägt man um einen Punkt p von \mathfrak{M}^m in der Normalebene von p den Kreis mit dem Radius ω , so liegt dieser „ ω -Kreis“ ganz in \bar{U}_ω . Φ und Ψ sind im ω -Kreise Polynome in den affinen Koordinaten F und G . Die Größe δ

¹⁵⁾ v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923), S. 75.

^{15a)} De la Vallée Poussin, Cours d'Analyse inf. II (2. Aufl.), S. 134.

in den Formeln (2.2) sei nun so klein gewählt, daß die Funktionaldeterminante

$$(2.3) \quad \frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(F, G)} > 0$$

in jedem ω -Kreise ist. Alsdann besitzen Φ und Ψ im ω -Kreise genau eine gemeinsame Nullstelle. Denn die Funktionen $\Phi = \Phi(F, G)$ und $\Psi = \Psi(F, G)$ vermitteln eine Selbstabbildung der FG -Ebene, die innerhalb des ω -Kreises dieser Ebene definiert ist. Die Abbildung der ω -Kreisscheibe läßt sich wegen (2.1) in die identische deformieren, ohne daß bei der Deformation ein Randpunkt den Nullpunkt überstriche; man hat nur jeden Bildpunkt auf der Verbindungsstrecke mit dem Originalpunkt in diesen zu verschieben (Fig. 2). Also ist der Abbildungsgrad im Nullpunkt gleich dem Abbildungsgrad der identischen Abbildung, also $= 1$, also ist der Nullpunkt Bildpunkt von mindestens einem Punkte. Es können sich auch nicht mehrere Punkte in den Nullpunkt abbilden, da wegen (2.3) eine hinreichend kleine Umgebung eines jeden inneren Punktes der Kreisscheibe topologisch mit dem Grad 1 abgebildet wird.

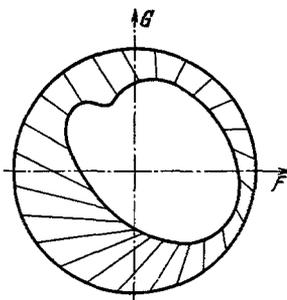


Fig. 2.

Die Mannigfaltigkeit

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0,$$

so weit sie in der ω -Umgebung von \mathfrak{M}^m liegt, schneidet also jeden ω -Kreis in genau einem Punkte. Diese Punkte bilden die reellen Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit oder einen reellen Zweig einer solchen, und \mathfrak{M}^m ist in diesen isotop deformierbar, was wir beweisen wollten.

Ob sich \mathfrak{M}^m sogar in eine aus einem einzigen reellen Zweige bestehende algebraische Mannigfaltigkeit deformieren läßt, bleibt unentschieden. Nur für die Fälle $n - m = 1$ (\mathfrak{M}^m im \mathfrak{R}^{m+1}) und $n = 3$, $m = 1$ (Knoten im \mathfrak{R}^3) werden wir den Beweis erbringen.

Satz 4: *Eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^{n-1} , die zweimal stetig differenzierbar in den \mathfrak{R}^n eingelagert ist, läßt sich durch eine beliebig kleine isotope Deformation in eine (aus einem einzigen reellen Zweige bestehende) algebraische Mannigfaltigkeit überführen.*

Beweis: $F(x_1, \dots, x_n)$ sei der Abstand des Punktes (x) von \mathfrak{M}^{n-1} , den wir negativ oder positiv rechnen, je nachdem (x) innerhalb oder außerhalb von \mathfrak{M}^{n-1} liegt. F ist in ganz \mathfrak{R}^n stetig und besitzt in einer hinreichend kleinen normalen Umgebung U_r von \mathfrak{M}^{n-1} stetige Ableitungen erster Ordnung (Anhang 3). Wir schlagen nun um den Koordinatenanfangspunkt eine $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre \mathfrak{S} mit einem so

großen Radius r_0 , daß \mathcal{U}_η ganz im Innern von \mathfrak{S} liegt. Ferner wählen wir eine abgeschlossene normale Umgebung $\bar{\mathcal{U}}_\omega \subset \mathcal{U}_\eta$ von \mathfrak{M}^{n-1} . Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz existiert ein Polynom Φ , so daß innerhalb \mathfrak{S}

$$|F - \Phi| < \omega$$

und für die Ableitungen von F in $\bar{\mathcal{U}}_\omega$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \right| < \delta$$

gilt, wobei $\delta (> 0)$ beliebig klein vorgegeben werden kann. Die Nullstellen von Φ liegen dann sämtlich in $\bar{\mathcal{U}}_\omega$ und eventuell außerhalb \mathfrak{S} . Sind A und B die beiden Punkte auf der Normalen in einem (variablen) Punkte p von \mathfrak{M}^{n-1} , die von p den Abstand ω haben, so ist Φ im Punkte A , der im Innern von \mathfrak{M}^{n-1} liegen möge, negativ und im Punkte B positiv, also hat Φ auf der Strecke AB mindestens eine Nullstelle. Wir nehmen weiter an, daß δ so klein gewählt war, daß auf jeder Strecke AB

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F} > 0$$

wird. Alsdann liegt auf AB genau eine Nullstelle von Φ . Sollte Φ außerhalb \mathfrak{S} noch Nullstellen besitzen, so kann man diese dadurch beseitigen, daß man zu Φ das Polynom

$$\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^k$$

hinzufügt, wobei $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ist. Für genügend großes k ist dieses Polynom einschließlich seiner ersten Ableitungen im Innern von \mathfrak{S} praktisch null, während es außerhalb \mathfrak{S} sehr rasch anwächst. Das Polynom

$$\bar{\Phi} = \Phi + \left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^k$$

wird dann nur in Punkten von $\bar{\mathcal{U}}_\omega$ verschwinden und zwar auf jeder Strecke AB genau einmal. $\bar{\Phi} = 0$ stellt also eine algebraische Mannigfaltigkeit $\bar{\mathfrak{M}}^{n-1}$ dar, die ganz in $\bar{\mathcal{U}}_\omega$ liegt und jede normale Strecke AB genau einmal trifft. Dann kann man aber \mathfrak{M}^{n-1} in $\bar{\mathfrak{M}}^{n-1}$ deformieren, indem man die Punkte von \mathfrak{M}^{n-1} auf ihren Normalen verschiebt.

§ 3.

Approximation von Knoten durch algebraische Kurven.

Satz 5: *Zu jedem Knoten des euklidischen \mathfrak{R}^3 gibt es eine nur aus einem Zweige bestehende algebraische Kurve, die ebenso verknötet ist.*

Beweis: Ist der Knoten als doppelpunktfreier, geschlossener Streckenzug gegeben, so führen wir ihn durch geeignete Abrundung der Ecken in einen äquivalenten Knoten \mathfrak{M}^1 , der zweimal stetig differenzierbar im \mathfrak{R}^3 liegt, über. \mathcal{U}_ε sei eine normale ε -Umgebung von \mathfrak{M}^1 ; wir können

annehmen, indem wir ε hinreichend klein wählen, daß sich aus jedem Punkte der Begrenzung \mathfrak{M}^2 von \mathfrak{U}_ε genau ein Lot von der Länge ε auf \mathfrak{M}^2 fallen läßt. \mathfrak{M}^2 ist dann eine Ringfläche und \mathfrak{U}_ε ihr Inneres. Wir führen nun ein Lot pP von der Länge ε mit seinem Fußpunkte p auf dem Knoten \mathfrak{M}^1 herum und richten es so ein, daß der Punkt P auf \mathfrak{M}^1 eine geschlossene Kurve c beschreibt, die mit \mathfrak{M}^1 die Verschlingungszahl 0 hat, oder, was dasselbe besagt, so daß c im Außenraum $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ nullhomolog ist¹⁶⁾. Dieses stetige Feld von Vektoren pP auf \mathfrak{M}^1 wird nun, wie beim Beweise des Satzes 3 durch ein differenzierbares Feld von normalen Vektoren u ersetzt, und auf die gleiche Weise wird ein weiteres Feld v konstruiert, so daß u und v in jedem Punkte von \mathfrak{M}^1 linear unabhängig sind. Sind dann F und G die affinen Koordinaten in den Normalebene von \mathfrak{M}^1 mit den Basisvektoren u und v , so sind $F = 0$ und $G = 0$ zwei sich in \mathfrak{M}^1 schneidende und von Normalen von \mathfrak{M}^1 gebildete Regelflächen, die wir nur innerhalb \mathfrak{U}_ε betrachten, wo sie zwei durch \mathfrak{M}^1 gehende Bänder bilden. c_1 und c_3 seien die beiden Randkurven des Bandes $F = 0$, c_2 und c_4 die des Bandes $G = 0$. Es sind doppel-punktfreie punktfremde Kurven auf der Ringfläche \mathfrak{M}^2 , die sämtlich im Außenraum $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ nullhomolog sind. Es gibt dann in $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ vier singularitätenfreie orientierbare berandete Flächen $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_4$, die untereinander punktfremd sind und bzw. die Kurven c_1, \dots, c_4 zum Rand haben (Anhang 4). Das Band $F = 0$ zusammen mit \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_3 ist eine geschlossene Fläche \mathfrak{F} , die mit der aus dem Band $G = 0$, \mathfrak{D}_2 und \mathfrak{D}_4 bestehenden geschlossenen Fläche \mathfrak{G} genau den Knoten \mathfrak{M}^1 gemeinsam hat. Wir setzen nun die Funktionen F und G , die bisher nur in $\mathfrak{U}_\varepsilon + \mathfrak{M}^2$ definiert sind, in den Außenraum $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ stetig fort, so daß F genau in den Punkten von \mathfrak{F} und G in den Punkten von \mathfrak{G} verschwindet.

Zu dem Zwecke bemerken wir, daß die abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{U}_\varepsilon + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{F}$ den \mathfrak{R}^3 in genau zwei Gebiete \mathfrak{Z} und \mathfrak{A} zerlegt. Da F auf der Fläche \mathfrak{F} überall verschwinden soll, ist F auf der Begrenzung von \mathfrak{Z} und ebenso auf der Begrenzung von \mathfrak{A} bereits definiert, und zwar ist auf der Begrenzung des einen Gebietes, etwa von \mathfrak{A} , überall $F \geq 0$, auf der Begrenzung von \mathfrak{Z} dagegen $F \leq 0$. Dann läßt sich aber F stetig in \mathfrak{A} und ebenso in \mathfrak{Z} fortsetzen, so daß in \mathfrak{A} überall $F > 0$, in \mathfrak{Z} dagegen $F < 0$ wird¹⁷⁾. Analog wird die Funktion G auf

¹⁶⁾ Vgl. das in Fußnote 4) angeführte Buch S. 281.

¹⁷⁾ Ist z. B. Q ein Punkt in \mathfrak{A} , P ein variabler Punkt auf der Begrenzung \mathfrak{B} von \mathfrak{A} und bezeichnen (Q, P) und (Q, \mathfrak{B}) die Abstände des Punktes Q von P , bzw. \mathfrak{B} , so setze man

$$F(Q) = (Q, \mathfrak{B}) + \max_{(Q, P)} \frac{(Q, \mathfrak{B})}{(Q, P)} F(P).$$

Vgl. Fußnote 15).

den ganzen \mathfrak{R}^3 erweitert. Man schließt nun die Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{G} in eine große Kugel \mathfrak{S} ein und approximiert F und G innerhalb \mathfrak{S} durch Polynome Φ und Ψ , so daß Φ und Ψ außerhalb $\mathfrak{S} \neq 0$ werden, was man wie beim Beweise von Satz 4 erreicht. Die gemeinsamen Nullstellen von Φ und Ψ liegen dann bei genügend genauer Approximation in \mathfrak{U}_ε und bilden (man vergleiche den Beweis des Satzes 3) einen in \mathfrak{M}^3 isotop deformierbaren Knoten, der somit aus allen reellen Punkten einer algebraischen Kurve besteht.

Anhang I. (S. 3).

Existenz der normalen Umgebung von \mathfrak{M}^m .

Es genügt, den Fall $n - m = 2$ zu betrachten, da der Beweis im allgemeinen Falle analog verläuft. In einer Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$ eines Punktes p von \mathfrak{M}^m mit den Koordinaten a_1, \dots, a_n läßt sich \mathfrak{M}^m durch die Gleichungen

$$(A.1) \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

darstellen, wobei f und g stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen und die Funktionalmatrix

$$(A.2) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

den Rang 2 hat. Ist nun q mit den Koordinaten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ein beliebiger zu dieser Umgebung gehöriger Punkt von \mathfrak{M}^m , Q mit den Koordinaten x_1, \dots, x_n ein Punkt auf der durch q gehenden Normalebene, so bestehen die Gleichungen

$$(A.3) \quad x_\nu - \bar{x}_\nu - \varrho f_\nu(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \sigma g_\nu(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \quad (\nu = 1, \dots, n), \\ f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \quad g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0.$$

Dabei setzen wir zur Abkürzung $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$, ferner $f_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ usw. Das System (A.3) läßt sich nach $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \varrho, \sigma$ auflösen, da die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \varrho f_{11} + \sigma g_{11} & \varrho f_{12} + \sigma g_{12} & \dots & f_1 & g_1 \\ \varrho f_{21} + \sigma g_{21} & 1 + \varrho f_{22} + \sigma g_{22} & \dots & f_2 & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1 & f_2 & \dots & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

für $\varrho = \sigma = 0$ in

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^n \begin{vmatrix} f_\mu g_\mu \\ f_\nu g_\nu \end{vmatrix}^2$$

übergeht, also, da der Rang der Funktionalmatrix (A. 2) gleich 2 sein sollte, $\neq 0$ ist. Genauer gibt es nach dem Satze über implizite Funktionen zu dem Punkt $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ eine Umgebung \mathfrak{A} und zu der Stelle $\bar{x}_1 = a_1, \dots, \bar{x}_n = a_n, \varrho = 0, \sigma = 0$ eine $(n+2)$ -dimensionale Umgebung \mathfrak{B} derart, daß zu jedem Wertsystem x_1, \dots, x_n aus \mathfrak{A} ein und nur ein Wertsystem $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \varrho, \sigma$ aus \mathfrak{B} gehört. — Da die linken Seiten von (A. 3) stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen, so haben auch $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \varrho, \sigma$, als Funktionen von x_1, \dots, x_n betrachtet, stetige Ableitungen erster Ordnung.

Nehmen wir nun an, \mathfrak{M}^m besäße keine normale Umgebung, dann gäbe es zu jeder Zahl der Nullfolge $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$ einen Punkt Q_i in der ε_i -Umgebung von \mathfrak{M}^m , durch den wenigstens zwei Lote von einer Länge $< \varepsilon_i$ hindurchgehen. Diese Punkte haben, weil \mathfrak{M}^m als geschlossen vorausgesetzt wurde, einen Häufungspunkt p auf \mathfrak{M}^m , und man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge Q_1, Q_2, \dots selbst nach p konvergiert. Sei $Q_i q_i$ eines der von Q_i auf \mathfrak{M}^m gefällten Lote. Dann konvergieren auch die Fußpunkte q_i nach p , da die Längen der Lote nach 0 gehen. Sie liegen daher schließlich in der Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$, in der die Darstellung (A. 1) gilt. Es bestehen also für genügend großes i zwischen den Koordinaten x_1^i, \dots, x_n^i von Q_i und den Koordinaten $\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_n^i$ von q_i die Gleichungen (A. 3), in denen man an Stelle von $x_r, \bar{x}_r, \varrho, \sigma$ nur $x_r^i, \bar{x}_r^i, \varrho^i, \sigma^i$ zu schreiben hat. Aus

$$\lim_{i=\infty} (x_r^i - \bar{x}_r^i) = 0$$

folgt nun wegen (A. 3) und weil die Funktionalmatrix (A. 2) den Rang 2 hat, $\lim \varrho^i = 0, \lim \sigma^i = 0$. Für genügend großes i liegen also die Punkte q_i in der Umgebung \mathfrak{A} von p und die Stellen $\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_n^i, \varrho^i, \sigma^i$ in der Umgebung \mathfrak{B} . Dann sind aber, wie wir gesehen haben, die Werte $\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_n^i, \varrho^i, \sigma^i$ eindeutig durch x_1^i, \dots, x_n^i bestimmt, im Widerspruch zu der Annahme, daß zu jedem Punkte Q_i zwei verschiedene Normalen gehören.

Anhang 2 (S. 10).

Differenzierbarkeitseigenschaften.

Um die benutzten Differenzierbarkeitseigenschaften der Komponenten u, v , der Vektoren u, v sowie der Funktionen F, G nachzuweisen, dürfen wir uns auf eine Umgebung des Punktes P von \mathfrak{M}^{n-2} beschränken, in der \mathfrak{M}^{n-2} durch die Gleichungen (A. 1) dargestellt wird. Zwischen den Koordinaten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ eines Punktes q von \mathfrak{M}^{n-2} und den Koordinaten

x_1, \dots, x_n eines Punktes Q der durch q gehenden Normalebene bestehen dann die Gleichungen (A. 3), auf Grund welcher die $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \varrho, \sigma$ stetig differenzierbare Funktionen von x_1, \dots, x_n sind:

$$(A. 4) \quad \bar{x}_v = h_v(x_1, \dots, x_n),$$

$$(A. 5) \quad \varrho = r(x_1, \dots, x_n), \quad \sigma = s(x_1, \dots, x_n).$$

Im Punkte q greifen die beiden voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{f} = (f_1(\bar{x}_v), \dots, f_n(\bar{x}_v))$ und $\mathfrak{g} = (g_1(\bar{x}_v), \dots, g_n(\bar{x}_v))$ an, die die Normalebene von q aufspannen; sie werden durch die Substitution (A. 4) stetig differenzierbare Funktionen von x_1, \dots, x_n . Das Vektorfeld $\mathfrak{p}(x_1, \dots, x_n)$, das im ganzen \mathfrak{R}^n definiert ist und dessen Komponenten Polynome in x_1, \dots, x_n sind, betrachten wir nun insbesondere auf \mathfrak{M}^{n-2} . Der im Punkte q angreifende Vektor ist

$$\mathfrak{p}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \mathfrak{p}(h_1(x_v), \dots, h_n(x_v)) = \bar{\mathfrak{p}}(x_1, \dots, x_n).$$

Er ist also stetig differenzierbar in x_1, \dots, x_n . Seine Projektion auf die von \mathfrak{f} und \mathfrak{g} aufgespannte Normalebene läßt sich in der Form schreiben

$$(A. 6) \quad \mathfrak{u} = \alpha \mathfrak{f} + \beta \mathfrak{g},$$

wobei sich α und β aus den Vektorgleichungen

$$(\bar{\mathfrak{p}} - \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{f} = 0, \quad (\bar{\mathfrak{p}} - \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{g} = 0$$

berechnen:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{f} & \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f} \\ \bar{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{g} & \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} & \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f} \\ \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} & \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g} \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} & \bar{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{f} \\ \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} & \bar{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{g} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} & \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f} \\ \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} & \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g} \end{vmatrix}}.$$

α und β sind stetig differenzierbare Funktionen von x_1, \dots, x_n , da wegen der linearen Unabhängigkeit von \mathfrak{f} und \mathfrak{g} der Nenner $\neq 0$ ist. Ebenso beweist man die stetige Differenzierbarkeit der Koeffizienten γ und δ in dem Vektor

$$(A. 7) \quad \mathfrak{v} = \gamma \mathfrak{f} + \delta \mathfrak{g}.$$

Der Vektor von q nach Q ist nun einerseits nach (A. 3) $= \varrho \mathfrak{f} + \sigma \mathfrak{g}$, andererseits $= F\mathfrak{u} + G\mathfrak{v}$. Mit Hilfe von (A. 6) und (A. 7) erhält man daraus für F und G die Ausdrücke

$$F = \frac{\begin{vmatrix} \varrho & \sigma \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}, \quad G = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varrho & \sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}.$$

Da $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, \sigma$ stetig differenzierbar sind und der Nenner wegen der linearen Unabhängigkeit von \mathfrak{u} und \mathfrak{v} nicht verschwindet, sind schließlich F und G stetig differenzierbare Funktionen von x_1, \dots, x_n .

Anhang 3 (S. 11).

In der Umgebung $U(p|\mathcal{R}^n)$ eines Punktes p von \mathcal{M}^{n-1} , in der für \mathcal{M}^{n-1} die Darstellung

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

gilt, bestehen zwischen den Koordinaten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ eines Punktes q von \mathcal{M}^{n-1} und den Koordinaten x_1, \dots, x_n eines Punktes Q auf der durch q gehenden Normalen die Gleichungen

$$x_v - \bar{x}_v - \varrho f_v(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0, \quad \left(f_v = \frac{\partial f}{\partial x_v}\right)$$

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0,$$

aus denen sich wie im Anhang 1 die \bar{x}_v und ϱ als stetig differenzierbare Funktionen von x_1, \dots, x_n ergeben. Für den Abstand qQ erhält man dann

$$\sqrt{\Sigma(x_v - \bar{x}_v)^2} = \varrho \sqrt{\Sigma f_v^2}.$$

Da f zweimal stetig differenzierbar und $\Sigma f_v^2 \neq 0$ ist, so ist dies eine stetig differenzierbare Funktion von x_1, \dots, x_n . Die Quadratwurzel ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Vektor $\text{grad } f$ in das Außen- oder Innengebiet von \mathcal{M}^m weist.

Anhang 4 (S. 13).

$\mathcal{R}^3 - U_*$ ist eine von der Ringfläche \mathcal{M}^2 berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^3 , die wir mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung versehen. Auf der Ringfläche \mathcal{M}^2 sei c'_1 eine doppelunktpunktfreie geschlossene Kurve, die aus Kanten der simplizialen Zerlegung besteht und in \mathcal{M}^3 homolog null ist. Die zweidimensionale Kette, deren Rand c'_1 ist, läßt sich nun durch „Umschalten“¹⁸⁾ an den Kanten und Ecken in eine singularitätenfreie orientierbare Fläche \mathcal{D}'_1 überführen, die aus Dreiecken einer passenden Unterteilung der gegebenen simplizialen Zerlegung besteht und abgesehen vom Rand c'_1 ganz im Innern von \mathcal{M}^3 liegt. Da \mathcal{D}'_1 zweiseitig in \mathcal{M}^3 liegt — denn \mathcal{D}'_1 ist ebenso wie \mathcal{M}^3 orientierbar —, so kann man \mathcal{D}'_1 durch beliebig kleine Deformationen in drei weitere punktfremde Flächen $\mathcal{D}'_2, \mathcal{D}'_3, \mathcal{D}'_4$ überführen, die abgesehen von ihren Rändern c'_2, c'_3, c'_4 im Innern von \mathcal{M}^3 liegen. Endlich sind die Kurven c'_1, \dots, c'_4 durch eine topologische Deformation der Ringfläche \mathcal{M}^2 in die vorgegebenen Kurven c_1, \dots, c_4 überführbar. Diese Deformation läßt sich zu einer Deformation von ganz \mathcal{M}^3 erweitern, wodurch die Flächen $\mathcal{D}'_1, \dots, \mathcal{D}'_4$ in die gewünschten in c_1, \dots, c_4 eingespannten Flächen $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_4$ übergehen.

¹⁸⁾ F. Frankl und L. Pontrjagin, Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. Math. Ann. 102 (1930), S. 785—789.

(Eingegangen am 11. August 1935.)