

*Schw./fran.*  
**LEHRBUCH**

DER  
**TOPOLOGIE**

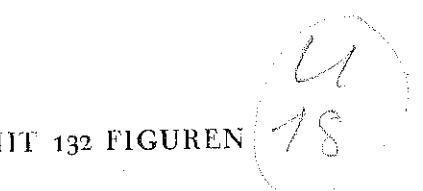
VON

**H. SEIFERT UND W. THRELFALL**

PRIV.-DOZ., DR. RER. TECHN., DR. PHIL.

A. O. PROF., DR. PHIL.

MIT 132 FIGUREN



SG



A 1956 B

Bibliothek d. Mathematischen  
Institutes d. Universität Münster  
Roxeler Str. 64

1934

LEIPZIG UND BERLIN  
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

## Vorwort.

Den ersten Anlaß zur Abfassung des vorliegenden Lehrbuches gab eine Vorlesung, die der eine von uns (Threlfall) an der Technischen Hochschule Dresden gehalten hat. Aber nur ein Teil dieser Vorlesung ist in das Buch übernommen worden. Der Hauptinhalt ist in der Folgezeit in engem täglichen Gedankenaustausch zwischen beiden Verfassern entstanden.

Wenn wir in diesem Buche eine Einführung und einen Überblick über die zur Zeit in Blüte stehende Disziplin der Topologie zu geben versuchen, so wollen wir unser Ziel nicht dadurch erreichen, daß wir die allgemeinen Sätze in möglichster Vollständigkeit zusammenstellen und beweisen. Vielmehr werden wir die Begriffe, die sich als brauchbar erwiesen haben, definieren und die Methoden, die von Erfolg gewesen sind und uns aussichtsreich erscheinen, systematisch entwickeln und an Beispielen durchführen.

Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt. Für die wenigen allgemein bekannten Sätze, die ohne eigene Beweisführung benutzt werden, sind in Fußnoten Literaturstellen angegeben, wo man den Beweis in der gerade benötigten Form findet. — Wir beschränken uns auf die kombinatorische oder algebraische Topologie, machen aber unter möglichster Umgehung mengentheoretischer Schwierigkeiten von der méthode mixte Gebrauch. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht demnach der von L. E. J. Brouwer eingeführte Begriff des simplizialen Komplexes und der Mannigfaltigkeit. — Für einen mit der Gruppentheorie und den darin heute üblichen Bezeichnungen nicht vertrauten Leser haben wir in einem Schlußkapitel die benutzten Hilfssätze zusammengestellt; man mag es nötigenfalls zwischen dem zweiten und dritten Kapitel lesen. Nach Möglichkeit sind die Kapitel unabhängig voneinander lesbar gemacht worden. Auf ein brauchbares, ausführliches alphabetisches Sachverzeichnis wurde Wert gelegt. Die Anmerkungen am Schlusse des Buches geben Hinweise auf weitere Literatur und sollen das Fortschreiten in Theorien ermöglichen, in die im Buche nur der erste Schritt getan werden konnte. Mehrere Theorien konnten des beschränkten Raumes wegen überhaupt nicht aufgenommen werden. Besonders schmerzlich war es uns, den Alexanderschen Dualitätssatz sowie die Alexandroffsche Theorie der abgeschlossenen Punktmengen und Projektionsspektren fortlassen zu müssen. Wir hoffen diese Lücken in einem weiteren Bande auszufüllen, falls nicht inzwischen andere Lehrbücher der Topologie uns diese Aufgabe abnehmen.

Herrn Professor E. Trefftz sind wir in erster Linie für das Zustandekommen des Buches verpflichtet, da er uns nicht nur unter eigenen Opfern

an Arbeitszeit die Muße gegeben hat, die uns zur Ausarbeitung nötig war, sondern uns auch häufig durch verständnisvolles Eingehen auf unsere Sorgen und durch sachlichen Rat aufmunterte. In gleicher Weise danken wir der Arbeitsgemeinschaft der Dresdener Mathematiker, insbesondere Herrn Prof. C. Weber, für wissenschaftliche Mitarbeit. Von auswärtigen Kollegen haben uns unterstützt die Herren L. Bieberbach und K. Reide-meister, die die Korrektur gelesen haben, ferner F. Hausdorff, H. Kneser (vgl. insbesondere § 58), B. L. van der Waerden, dessen Prager Vortrag [1] und dessen mündliche Anregungen auf die Anlage des Buches von Einfluß gewesen sind. Für zahlreiche einzelne Hinweise bei der Korrektur danken wir überdies den Herren cand. math. W. Hantzsche und cand. math. H. Wendt in Dresden. Der Verlag hat uns in vorbildlicher Weise die Mithilfe der Korrektur erleichtert und unsere typographischen Wünsche erfüllt.

Dresden, im Januar 1934.

H. Seifert. W. Threlfall.

Ziffern in eckigen Klammern weisen auf das alphabetisch nach Verfassern geordnete Literaturverzeichnis, kleine hochgestellte Ziffern auf die Anmerkungen am Ende des Buches hin.

## Inhaltsverzeichnis.

### Erstes Kapitel.

#### Anschauungsmaterial.

§	Seite	Seite	
1. Hauptproblem der Topologie . . . . .	1	4. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten . . . . .	15
2. Geschlossene Flächen . . . . .	5		
3. Isotop, homotop, homolog . . . . .	13		

### Zweites Kapitel.

#### Simplizialer Komplex.

5. Umgebungsraum . . . . .	21	11. Schema eines simplizialen Komplexes. . . . .	44
6. Abbildungen . . . . .	24	12. Endlich, rein, homogen . . . . .	46
7. Punktmengen in Zahlenräumen . . . . .	28	13. Normalunterteilung . . . . .	49
8. Identifizieren . . . . .	31	14. Beispiele von Komplexen . . . . .	50
9. $n$ -Simplex . . . . .	36		
10. Simplizialer Komplex . . . . .	42		

### Drittes Kapitel.

#### Homologiegruppen.

15. Ketten . . . . .	58	21. Berechnung der Homologiegruppen aus den Inzidenzmatrizen . . . . .	71
16. Rand, geschlossene Ketten . . . . .	59	22. Blockketten . . . . .	78
17. Homologe Ketten . . . . .	61	23. Ketten mod 2, Zusammenhangszahlen, Eulersche Formel . . . . .	81
18. Homologiegruppen . . . . .	63	24. Pseudomannigfaltigkeiten und Orientierbarkeit . . . . .	88
19. Berechnung der Homologiegruppen in einfachen Fällen . . . . .	66		
20. Homologien mit Division . . . . .	69		

### Viertes Kapitel.

#### Simpliziale Approximation.

25. Singuläres Simplex . . . . .	92	29. Prismen des Zahlenraumes . . . . .	100
26. Singuläre Ketten . . . . .	94	30. Beweis des Approximationssatzes . . . . .	104
27. Singuläre Homologiegruppen . . . . .	96	31. Deformation und simpliziale Approximation von Abbildungen . . . . .	113
28. Approximationssatz, Invarianz der simplizialen Homologiegruppen . . . . .	99		

### Fünftes Kapitel.

#### Eigenschaften im Punkte.

32. Homologiegruppen eines Komplexes in einem Punkte . . . . .	120	35. Invarianz des Randes . . . . .	127
33. Invarianz der Dimension . . . . .	125	36. Invarianz der Pseudomannigfaltigkeit und der Orientierbarkeit . . . . .	128
34. Invarianz der Reinheit eines Komplexes . . . . .	127		

**Sechstes Kapitel.**  
**Flächentopologie.**

§	Seite	§	Seite
37. Geschlossene Flächen . . . . .	130	40. Berandete Flächen . . . . .	142
38. Überführung in die Normalform	135	41. Homologiegruppen der Flächen	144
39. Verschiedenheit der Normalfor- men, Hauptsatz . . . . .	140		

**Siebentes Kapitel.****Fundamentalgruppe.**

42. Fundamentalgruppe . . . . .	149	48. Fundamentalgruppe und Homo- logiegruppe . . . . .	171
43. Beispiele . . . . .	156	49. Freie Deformation geschlossener Wege . . . . .	174
44. Kantenwegegruppe eines simpli- zialen Komplexes . . . . .	158	50. Fundamentalgruppe und Defor- mation von Abbildungen . . . . .	176
45. Kantenwegegruppe eines Flä- chenkomplexes . . . . .	162	51. Fundamentalgruppe in einem Punkte . . . . .	177
46. Erzeugende und Relationen . .	165	52. Fundamentalgruppe eines zu- sammengesetzten Komplexes . .	177
47. Kantenkomplexe und geschlos- sene Flächen . . . . .	169		

**Achtes Kapitel.****Überlagerungskomplexe.**

53. Unverzweigter Überlagerungs- komplex . . . . .	181	56. Universelle Überlagerung . . .	194
54. Grundweg und Überlagerungsweg	184	57. Reguläre Überlagerung . . . .	195
55. Überlagerung und Untergruppe der Fundamentalgruppe . . . .	188	58. Monodromiegruppe . . . . .	198

**Neuntes Kapitel.****Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.**

59. Allgemeine Eigenschaften . . .	204	64. Berandete dreidimensionale Man- nigfaltigkeiten . . . . .	221
60. Darstellung durch ein Polyeder	206	65. Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten aus Knoten .	224
61. Homologiegruppen . . . . .	211		
62. Fundamentalgruppe . . . . .	214		
63. Heegaard-Diagramm . . . . .	219		

**Zehntes Kapitel.****n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.**

66. Sternkomplex . . . . .	228	72. Zellenmäßige Approximation .	254
67. Zellenkomplex . . . . .	233	73. Schnittzahlen singulärer Ketten.	257
68. Mannigfaltigkeiten . . . . .	236	74. Invarianz der Schnittzahlen .	260
69. Poincaréscher Dualitätssatz .	242	75. Beispiele . . . . .	268
70. Schnittzahlen von Zellenketten .	246	76. Orientierbar und zweiseitig .	272
71. Duale Basen . . . . .	249	77. Verschlingungszahlen . . . .	277

**Elf tes Kapitel.**  
**Stetige Abbildungen.**

§	Seite	§	Seite
78. Abbildungsgrad . . . . .	283	80. Fixpunktformel . . . . .	288
79. Spurformel . . . . .	285	81. Anwendungen . . . . .	289

**Zwölftes Kapitel.****Hilfssätze aus der Gruppentheorie.**

82. Erzeugende und Relationen . .	293	85. Freies und direktes Produkt .	300
83. Homomorphe Abbildung und Faktorgruppe . . . . .	297	86. Abelsche Gruppen . . . . .	304
84. Abelschmachen von Gruppen .	299	87. Normalform ganzzahliger Matri- zen . . . . .	311

Anmerkungen . . . . .	315
Literaturverzeichnis . . . . .	329
Sachverzeichnis . . . . .	342

## Erstes Kapitel. Anschauungsmaterial.

### § I. Hauptproblem der Topologie.

Die Topologie hat es mit solchen Eigenschaften geometrischer Figuren zu tun, die bei topologischen Abbildungen, d. h. umkehrbar eindeutigen und umkehrbar stetigen Abbildungen ungeändert bleiben. Unter einer geometrischen Figur verstehen wir zunächst eine Punktmenge im dreidimensionalen (oder einem höherdimensionalen) Raum; eine stetige Abbildung ist eine solche, die in einem kartesischen Koordinatensystem dieses Raumes durch stetige Funktionen vermittelt wird. Die abbildenden Funktionen brauchen nur für die Punkte der Figur, nicht für den ganzen Raum definiert zu sein. Die Eigenschaften, die bei topologischen Abbildungen ungeändert bleiben, heißen topologische Eigenschaften der Figur, und zwei Figuren, die sich topologisch aufeinander abbilden lassen, heißen homöomorph.

Homöomorph sind z. B. Halbkugelfläche und Kreisscheibe, denn man kann durch Orthogonalprojektion die Halbkugel auf die (in der Fig. 1 schraffierte) Kreisscheibe topologisch abbilden. Allgemeiner sind zwei Flächen, die man durch Verbiegen und Verzerrn ineinander deformieren kann, wie Kugelfläche, Würfeloberfläche und Ellipsoid oder wie Kreisring und Zylindermantel (endlicher Länge), homöomorph.

Leicht lassen sich beliebig viele Beispiele homöomorpher Figuren angeben, darunter auch solche, denen man die Homöomorphie nicht auf den ersten Blick ansieht, wie z. B. die euklidische Ebene und die punktierte Kugelfläche, das ist die Kugelfläche, aus der man einen Punkt entfernt hat. Beide lassen sich durch stereographische Projektion topologisch aufeinander beziehen, und sie sind überdies dem Inneren einer Kreisscheibe homöomorph (§ 6, 2. und 3. Beispiel).

Mehr Schwierigkeiten bietet es im allgemeinen, nachzuweisen, daß zwei Punktmengen nicht homöomorph sind. Klar ist, daß Punkt und Strecke nicht homöomorph sind, da diese beiden Punktmengen nicht einmal eindeutig aufeinander abgebildet werden können. Leicht sieht man auch noch ein, daß Strecke und Kreisscheibe sich nicht topologisch aufeinander abbilden lassen; denn sind  $A, B, C$  drei Punkte der Kreisscheibe, so

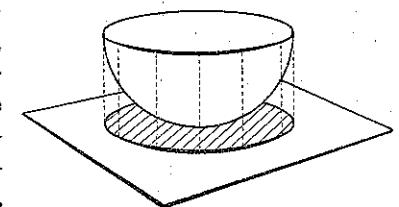


Fig. 1.

kann man  $A$  stetig in  $B$  überführen, ohne  $C$  zu treffen. Diese Eigenschaft der Kreisscheibe bleibt bei topologischer Abbildung erhalten, sie kommt aber der Strecke nicht zu, da man bei stetiger Überführung des einen Endpunktes der Strecke in den anderen notwendig über den Mittelpunkt kommt. Dieser einfache Schluß versagt dagegen, wenn man eine Kreisscheibe mit einer Vollkugel vergleicht. Denn wollte man die Kreisscheibe dadurch auszeichnen, daß es in ihr geschlossene, sie zerlegende Kurven gibt, so müßte man von der Vollkugel zeigen, daß eine geschlossene Kurve sie niemals zerlegt. Warum aber kann eine geschlossene Kurve nicht so in der Vollkugel liegen, daß sie alle Punkte einer die Vollkugel zerlegenden Fläche durchläuft? Zwar kann dergleichen nicht vorkommen. Doch läßt sich mit so einfachen Hilfsmitteln wie die topologische Verschiedenheit von Strecke und Kreisscheibe nicht mehr beweisen, daß Kreisscheibe, Vollkugel und die entsprechenden höherdimensionalen Gebilde nichthomöomorph sind (Beweis siehe § 33).

Der Homöomorphiebegriff spielt in der Topologie dieselbe Rolle wie der Kongruenzbegriff in der Elementargeometrie. Wie zwei Figuren elementargeometrisch nicht wesentlich verschieden sind, wenn sie einander kongruent sind, so sind sie topologisch nicht wesentlich verschieden, wenn sie sich topologisch aufeinander abbilden lassen, d. i. homöomorph sind. Während aber zwei kongruente Figuren immer durch eine kongruente Abbildung des ganzen Raumes starr ineinander bewegt werden können, braucht es für homöomorphe Figuren keine topologische Abbildung des ganzen Raumes zu geben, die sie ineinander überführt.

Beispielsweise ist eine Kreislinie in eine verknottete Kurve, z. B. in die sog. Kleeblattschlinge (Fig. 2), nicht durch eine topologische Abbildung (also erst recht nicht durch eine Deformation) des ganzen Raumes überführbar (S. 180). Dagegen sind beide Kurven homöomorph, denn man kann die Punkte des Knotens umkehrbar eindeutig und stetig auf die der Kreislinie abbilden, und nur auf diese Punkte, nicht auf die des einbettenden Raumes kommt es für die Beziehung der Homöomorphie an.

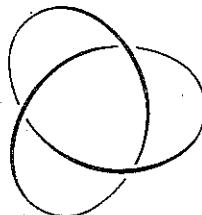


Fig. 2.

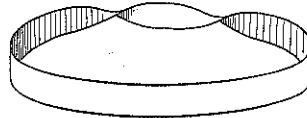


Fig. 3.

Ebenso sind homöomorph, aber nicht durch eine topologische Selbstabbildung des ganzen Raumes ineinander überführbar ein um ein Vielfaches von

$2\pi$  torquiertes geschlossenes Band (Fig. 3) und ein untordiertes Band, was man erkennt, wenn man die Bänder zu zwei kongruenten rechteckigen Streifen aufschneidet und entsprechende Punkte dieser Streifen einander zuordnet.

Knoten und Kreislinie, torquiertes und untordiertes Band sind topologisch äquivalente Figuren, die sich nur durch ihre Einlagerung in den dreidimensionalen Raum voneinander unterscheiden. Der Unterschied zwischen beiden würde verschwinden, wenn man den dreidimensionalen

Raum als Teilraum des vierdimensionalen betrachtete und Deformationen in diesem zuließe; dann wären Kreis und Knoten so gut wie Kreis und Ellipse ineinander ohne Selbstdurchdringungen deformierbar.<sup>1</sup>

Wir trennen daher hinfür die „inneren“ topologischen Eigenschaften einer Figur, das sind die, die bei allen topologischen Abbildungen der Figur erhalten bleiben, von den übrigen Eigenschaften, die von der Einlagerung abhängen und die nur bei topologischen Abbildungen des gesamten Raumes sich nicht ändern.

Diesen Unterschied wollen wir noch an einem weiteren Beispiel erläutern. Wenn eine Kreislinie im Raum um eine Gerade rotiert, die in ihrer Ebene liegt, aber sie nicht trifft, so überstreicht sie eine Ringfläche, die man auch einen Torus nennt. Durch irgendeinen Punkt  $O$  der Ringfläche geht eine erzeugende Kreislinie hindurch; wir nennen sie einen Meridiankreis  $a$  der Ringfläche. Überdies geht durch den Punkt der Kreis hindurch, der von ihm während der Rotation beschrieben wird; er möge ein Breitenkreis  $b$  heißen (Fig. 4). Meridian- und Breitenkreis sind in einer von topologischen Selbstabbildungen des Raumes unabhängigen Weise voreinander ausgezeichnet. Jener nämlich läßt sich durch das Innere des von der Ringfläche berandeten Vollringes hindurch auf einen Punkt zusammenziehen, dieser nicht. Die aus Ringfläche und Meridiankreis bestehende Figur läßt sich daher nicht in die aus Ringfläche und Breitenkreis bestehende durch eine topologische Selbstabbildung des gesamten Raumes überführen. Diese Bevorzugung des Meridiankreises vor dem Breitenkreis ist aber keine innere Eigenschaft der Ringfläche. Denn man kann die Ringfläche, wenn auch nicht durch Deformation im Raum, topologisch so auf sich abbilden, daß Meridian- und Breitenkreis ihre Rollen vertauschen. Zu dem Zwecke denke man sich die Ringfläche als eine elastische Haut und schneide diese längs  $a$  und  $b$  auf. Man kann dann die aufgeschnittene Fläche durch Verbiegen und Verzerrern in ein ebenes Quadrat auseinanderbreiten (Fig. 5).

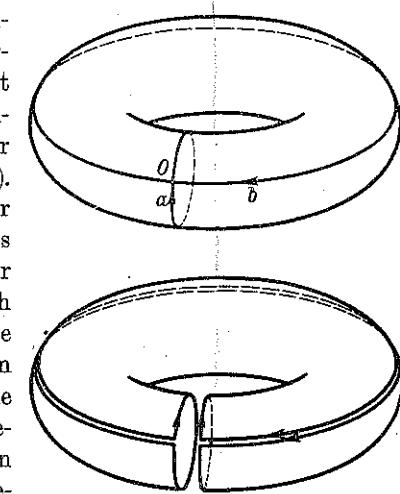


Fig. 4.

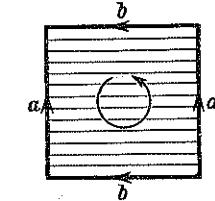


Fig. 5.

Wenn man nun das Quadrat um eine Diagonale umklappt, so ist das eine topologische Selbstabbildung des Quadrates, bei der sich  $a$  und  $b$  vertauschen; ihr entspricht eine ebensolche Selbstabbildung der Ringfläche. — Ein weiteres typisches Beispiel für den Gegensatz zwischen topologischen inneren und Einbettungseigenschaften ist die im nächsten Paragraphen erwähnte Orientierbarkeit und Zweiseitigkeit einer Fläche.

Unter den topologischen Eigenschaften macht sich daher ein analoger Unterschied geltend wie in der Differentialgeometrie, wo bekanntlich die inneren metrischen Eigenschaften, die einer Fläche unabhängig von ihrer Lage im Raum zukommen und die durch die erste metrische Grundform bestimmt sind, den metrischen Eigenschaften der aus Fläche und Raum bestehenden Figur gegenüberstehen, die durch die zweite Grundform festgelegt werden.

Das Hauptproblem der Topologie besteht darin, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Figuren homöomorph sind und wo möglich alle Klassen nichthomöomorpher Figuren aufzuzählen. Obwohl es ausgedehnte Theorien über beliebige Teilmengen des euklidischen Raumes gibt\*), werden wir es nicht mit einem so allgemeinen Begriff der Figur zu tun haben. Er würde uns in unerwünschte mengentheoretische Schwierigkeiten verwickeln. Eng genug, um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, und weit genug, um fast alle interessanten Figuren zu umfassen, ist der von L. E. J. Brouwer eingeführte Begriff des Komplexes, der sich im Laufe der Untersuchungen weiter zu dem der Mannigfaltigkeit verengt. Die hier behandelte Topologie wird also nicht eine mengentheoretische, sondern eine Topologie der Komplexe und Mannigfaltigkeiten sein.

Die Eigenschaft, die den Komplex vor beliebigen Punktmengen eines Raumes auszeichnet, ist seine Triangulierbarkeit: Er ist eine Punktmenge, die sich aus endlich oder abzählbar unendlich vielen nicht notwendig geradlinigen Strecken, Dreiecken, Tetraedern oder den entsprechenden höherdimensionalen Bausteinen zusammensetzt. Dieses Zusammensetzen braucht aber nicht notwendig in einem Raum zu erfolgen, man kann vielmehr, wenn man will, von einem einbettenden Raum völlig absehen. Durch die Triangulierbarkeit werden die meisten der sog. pathologischen Punktmengen von der Betrachtung ausgeschlossen, und es wird ein enger Anschluß an die Gegenstände geometrischer Anschaugung erreicht, so daß man die Topologie der Komplexe auch eine Kautschuktopologie genannt hat. Komplexe sind z. B. alle Riemannschen Flächen, die euklidischen Räume beliebiger Dimension selbst sowie die in ihnen liegenden offenen Teilmengen und algebraischen Kurven und Flächen, die projektive Ebene und der projektive Raum, alle euklidischen und nichteuklidischen Raumformen und Diskontinuitätsbereiche metrischer Bewegungsgruppen, ferner Lagen- und Phasenräume mechanischer Systeme.

Um der Lösung des Hauptproblems näherzukommen, werden wir topologisch invariante und der Berechnung zugängliche Eigenschaften der Komplexe suchen, die als Unterscheidungsmerkmale dienen können. Die wichtigsten solchen Eigenschaften, die im Mittelpunkt unserer Untersuchungen stehen, sind die Homologiegruppen und die Fundamentalgruppe eines Komplexes.

Einstweilen aber wollen wir zusehen, wie weit wir das Hauptproblem

\*) Literatur bei Tietze-Vietoris [8] I. c. I.

ohne diese Hilfsmittel fördern können. Wir versuchen uns daher ohne weitere Vorbereitungen an einem Teilproblem, indem wir fragen, welche nichthomöomorphen geschlossenen Flächen es gibt.

## § 2. Geschlossene Flächen.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Ringfläche längs Meridian- und Breitenkreis zu einem ebenen Quadrate auseinandergeschnitten. Dieses Quadrat zusammen mit der Angabe, daß gegenüberliegende Seiten als äquivalent, d. h. als nicht verschieden zu betrachten sind, heißt das Poincarésche Fundamentalpolygon der Ringfläche. Es bestimmt die Ringfläche, wenigstens was ihre inneren topologischen Eigenschaften betrifft, vollständig. Nicht bestimmt sind dagegen die zufälligen metrischen und die Einbettungseigenschaften wie Flächeninhalt, Lage im Raum usw. Aber mit diesen Eigenschaften hat es die Flächentopologie nicht zu tun. Vom Standpunkte der Flächentopologie aus sind alle Ringflächen, die man aus dem Fundamentalpolygon durch Zusammenbiegen und Aneinanderheften zugeordneter Seiten erhalten kann, gleichwertig, z. B. ist die Rotationsringfläche flächentopologisch von einem verknoteten Schlauch nicht zu unterscheiden. Man wird die Möglichkeit der Zerschneidung einer Fläche in ein oder mehrere Polygone direkt zur Definition der geschlossenen Fläche erheben und unter einer geschlossenen Fläche ein solches Gebilde verstehen, das aus endlich vielen Polygonen durch paarweise Aneinanderheften der Polygonseiten erhalten werden kann. Damit wird die Figur der geschlossenen Fläche aus dem umgebenden Raum herausgehoben und erhält eine von diesem unabhängige Existenz als zweidimensionale Mannigfaltigkeit, ein Begriff, der später seine genaue Definition finden wird.

Die Zerschneidung der Ringfläche zum Quadrat führt nun dazu, eine ganze unendliche Reihe geschlossener Flächen durch Polygone mit paarweiser Kantenzuordnung darzustellen. Zu dem Zwecke schneiden wir aus der Ringfläche ein ungefähr kreisförmiges Loch heraus. Der Lochrand  $l$  möge durch den Punkt  $O$  hindurchgehen. Nach einer Deformation entsteht die gelochte Ringfläche oder der Henkel (Fig. 6). Das Loch können wir auch in die zum Quadrat aufgeschnittene Ringfläche eintragen (Fig. 7) und danach den kreisförmigen Lochrand  $l$  im Punkte  $O$  aufschneiden. Es ent-

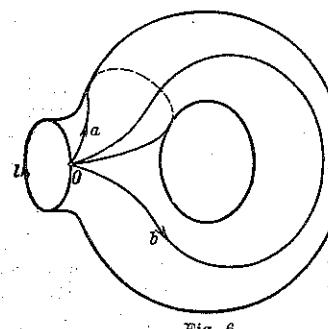


Fig. 6.

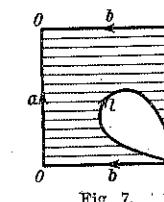


Fig. 7.

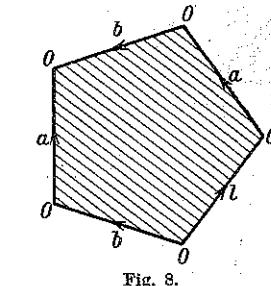


Fig. 8.

steht ein Fünfeck (Fig. 8), in das sich der Henkel nach Aufschneiden längs der beiden Kurven  $a$  und  $b$  ausbreiten läßt. Das Fünfeck hat eine freie Kante, den Lochrand  $l$ , während die übrigen Kanten wieder paarweise über Kreuz einander zugeordnet sind.

Nimmt man nun zwei zu Fünfecken aufgeschnittene Henkel und heftet sie mit ihren Lochrändern aufeinander (Fig. 9), so entsteht nach Weglöschen des gemeinsamen Lochrandes  $l$  ein Achteck mit einer paarweisen Seitenzuordnung, wie sie Fig. 10 zeigt. In dieses kann man daher die *Doppelring-*

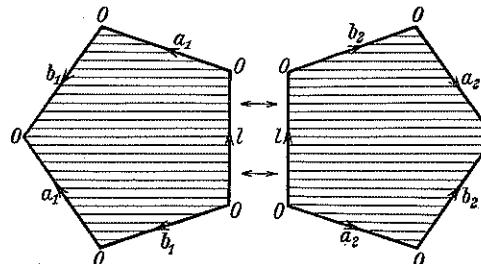


Fig. 9.

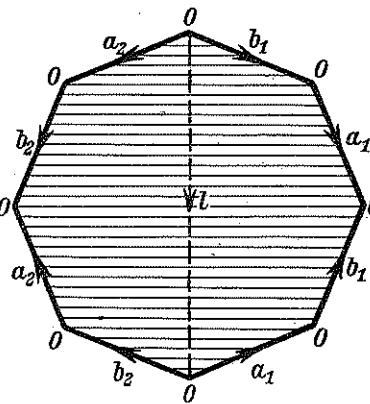


Fig. 10.

*fläche* (auch Brezelfläche genannt) einwickeln, indem man die acht Zipfel in einen Punkt zusammenbiegt.<sup>2</sup> In der Figur bringen wir, wie wir es schon im Falle der Ringfläche getan haben, die paarweise Zuordnung dadurch zum Ausdruck, daß wir zugeordnete Seiten mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen und Pfeile derart auf sie setzen, daß bei der Zuordnung Pfeilspitze auf Pfeilspitze fällt. Alsdann kann man die Zuordnung und damit die geschlossene Fläche durch eine einzige Formel beschreiben; sie wird erhalten, indem man den Rand des Polygons in bestimmtem Sinne durchläuft und die Seiten mit dem Exponenten +1 (den wir meist fortlassen werden) oder mit -1 versieht, je nachdem die betreffende Seite in der Pfeilrichtung oder entgegen der Pfeilrichtung durchlaufen wird. Im Falle der Doppelringfläche lautet der Ausdruck bei der aus der Figur ersichtlichen Wahl der Seitenorientierungen und bei geeignet vorgegebenem Umlaufsinn des Achteckes

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$

An ein kreisförmiges Loch der Doppelringfläche, dessen Rand durch den Punkt  $O$  hindurchgeht, läßt sich ein weiterer Henkel ansetzen. Nach Weglöschen des Lochrandes erhält man ein 12-Eck. Wie man die Doppelringfläche nach einer unwesentlichen Deformation auch als Kugel mit zwei angesetzten Henkeln auffassen kann, so wickelt dieses 12-Eck die Kugel mit drei angesetzten Henkeln ein. Allgemein gewinnt man die zum  $4h$ -Eck aufgeschnittene *Kugel mit  $h$  angesetzten Henkeln*, wofür wir, da es uns auf Deformationen nicht ankommt, auch sagen können: die Ringfläche mit  $h-1$  angesetzten Henkeln. Die paarweise Seitenzuordnung

des  $4h$ -Ecks, des Fundamentalpolygons der Kugel mit  $h$  Henkeln, ist durch die Seitenfolge

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \quad (h)$$

auf dem Randkreise bestimmt. Jede Folge  $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$  entspricht einem Henkel, den man zum Fünfeck aufgeschnitten erhält, wenn man die vier Seiten vom Polygon durch eine Diagonale  $l$  abschneidet.

Auch der *Kugelfläche* selbst kommt ein bestimmtes Fundamentalpolygon zu, auf das man sie nach Seitenidentifizierung umkehrbar eindeutig und stetig abbilden kann. Man erhält es, wenn man sie längs eines Bogens  $a$  mit den Endpunkten  $O$  und  $P$  aufschneidet. Es entsteht dadurch ein Zweieck mit dem Randkreise

$$a a^{-1}, \quad (0)$$

das im Gegensatz zu den übrigen Fundamentalpolygona zwei verschiedene, d. h. nicht zu identifizierende Eckpunkte  $O$  und  $P$  auf sich trägt (Fig. 11). Um die Kugelfläche zu erhalten, werden die beiden Seiten des Zweiecks wie zwei Bügel eines Portemonnaies um die Scharniere  $O$  und  $P$  zusammengeklappt, wobei sich die Kreisfläche zum kugelförmigen Beutel schließt.

In der Kugel mit  $h$  angesetzten Henkeln ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ) haben wir nur die eine Hälfte aller topologisch verschiedenen geschlossenen Flächen vor uns. Wie diese erste Hälfte sich aus dem Henkel ableitet, so die andere Hälfte aus dem Möbiusbande. — Das *Möbiusband* ist ein um  $\pi$  tordiertes geschlossenes Band (Fig. 12). Es wird von einer Strecke  $c$  mit dem Anfangspunkte  $O$  und dem Endpunkt  $P$  überstrichen, wenn sie mit ihrem Mittelpunkte  $M$  um eine sie nicht treffende Achse rotiert, und zwar so, daß sie immer mit der Achse in einer Ebene bleibt und sich während einer vollen Umdrehung der Ebene um die Achse selbst in der gedrehten Ebene durch den Winkel  $\pi$  um ihren Mittelpunkt dreht.

Schneidet man das Möbiusband längs der Strecke  $c$  auf, so entsteht ein Rechteck mit dem Randkreise

$$cr' cr''^{-1}$$

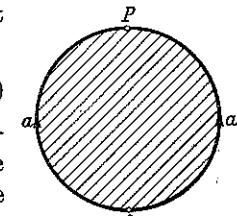


Fig. 11.

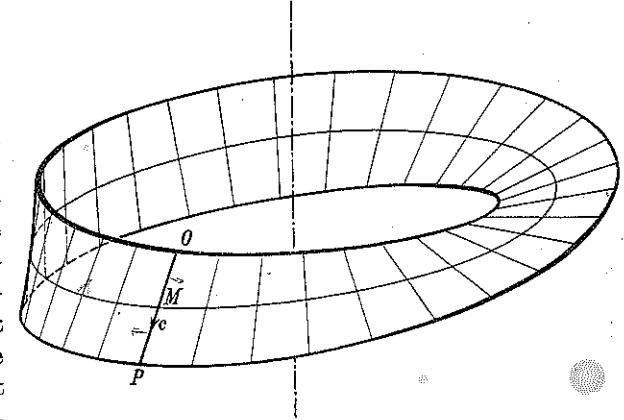


Fig. 12.

und zwei verschiedenen (nicht äquivalenten) Eckpunkten  $O$  und  $P$  (Fig. 13). Die beiden freien Seiten  $r'$  und  $r''$  setzen sich zum Rande des Möbiusbandes zusammen, der eine einzige geschlossene Kurve, ein topologischer Kreis ist. Die beiden anderen zusammenzuschließenden Seiten  $c$  und  $c'$  treten jetzt aber nicht, wie im Falle der bisher betrachteten Fundamentalpolygone, mit verschiedenen Exponenten auf dem Randkreise auf, sondern beziehen beide vom Umlaufsinn des Randkreises den gleichen Exponenten. Da-

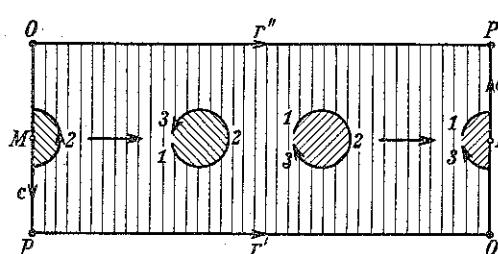


Fig. 13.

für sagt man auch: sie sind verkehrt oder nach der zweiten Art einander zugeordnet, während man den früheren Fall als Zuordnung nach der ersten Art oder direkte Zuordnung bezeichnet.

Der Henkel und das Möbiusband werden beide von einem einzigen topologischen Kreise berandet, d. i. von einer dem Kreise homöomorphen Kurve. Aber sie unterscheiden sich dadurch, daß der Henkel *zweiseitig*, das Möbiusband *einsseitig* im euklidischen Raum liegt. Damit ist folgendes gemeint. Wenn eine Fliege auf dem Möbiusband herumkriecht, ohne seinen Rand zu überschreiten, so wird sie einmal — z. B. wenn sie die Mittellinie des Möbiusbandes durchläuft hat — in eine zu ihrer Ausgangsstellung antipodische Stellung geraten. Das Möbiusband hat also nicht wie der Henkel zwei durch den Rand getrennte Seiten, deren eine man schwarz, deren andere man weiß anstreichen kann, so daß die Farben nirgends als am Rande zusammenstoßen, sondern es hat nur eine einzige Seite.

Mit Recht kann man einwenden, daß diese Einseitigkeit noch keine innere Eigenschaft der Fläche zu sein braucht und daß sie daher noch keinen Grund für die Unmöglichkeit einer topologischen Abbildung des um  $\pi$  tordierten auf das untordierte Band abgibt. Verschiebt man aber, statt die Fliege auf der Fläche kriechen zu lassen, einen kleinen gerichteten Kreis mit drei numerierten Punkten 1 2 3 in der Fläche, der man keine noch so geringe Dicke zusprechen darf, so gelingt es beim Möbiusband, den Kreis verkehrt mit sich zur Deckung zu bringen, so daß die Punkte 1 2 3 in der Fläche in die Punkte 3 2 1 fallen (Fig. 13). Ist dies bei einer Fläche möglich, so nennen wir sie *nichtorientierbar*, im anderen Falle *orientierbar*, weil man alsdann die durch einen kleinen gerichteten Kreis gegebene Orientierung der Umgebung eines Punktes in eindeutiger Weise an jede Stelle der Fläche verschieben kann. Die Orientierbarkeit ist eine innere Eigenschaft der Fläche. Die Zweiseitigkeit dagegen läßt sich nur definieren, wenn man die Fläche in einen dreidimensionalen Raum einbettet; sie hängt von der Art dieser Einbettung ab und darf nicht mit der Orientierbarkeit verwechselt werden. Orientierbare Flä-

chen kann man in der Tat, wie sich später zeigen wird, zwar nicht in den euklidischen, aber in andere dreidimensionale Räume so einbetten, daß sie einseitig darin liegen (§ 76).

Wie man nun vom Henkel zur geschlossenen Ringfläche gelangt, wenn man seinen kreisförmigen Rand mit einer Kreisscheibe zudeckelt oder, was dasselbe besagt, den Lochrand des Henkels auf den Rand einer gelochten Kugel aufsetzt, so erhält man aus dem berandeten Möbiusband eine geschlossene Fläche, indem man seinen Randkreis mit einer Kreisscheibe verschließt oder an ihn den Rand einer gelochten Kugel ansetzt. Freilich, im dreidimensionalen Raum läßt sich dieses Zudecken nicht bewirken (§ 64), es sei denn, daß man Selbstdurchdringung zuläßt. Nun kann man allerdings zeigen, daß sich die Zusammenheftung in einem vierdimensionalen Raum ohne Selbstdurchdringung bewirken läßt, das geschlossene Möbiusband also eine Fläche des vierdimensionalen Raumes ist.<sup>3</sup> Für die inneren topologischen Eigenschaften dieser geschlossenen Fläche ist aber die Möglichkeit der Einbettung unwesentlich; wir werden sie schon vollständig diskutieren können, wenn wir den Rand einer Kreisscheibe topologisch auf den Rand des Möbiusbandes abbilden und entsprechende Punkte als nichtverschieden voneinander ansehen. In der Nähe jedes Punktes wird sich dann das geschlossene Möbiusband wie ein ebenes Flächenstück verhalten. Die Frage aber, ob sich die so definierte Fläche im großen in den Raum legen läßt und ob man die Verheftung längs des ganzen Randkreises im Raum vornehmen kann, bleibt unerörtert.

Das so geschlossene Möbiusband ist nächst der Kugelfläche die wichtigste geschlossene Fläche der Mathematik, die projektive Ebene. Man pflegt sie in der projektiven Geometrie nicht als geschlossenes Möbiusband einzuführen, sondern durch Schließen der euklidischen Ebene mit einer uneigentlichen Geraden. Bei dieser Auffassung entsprechen die Punkte der projektiven Ebene in einem projektiven Koordinatensystem umkehrbar eindeutig den Systemen dreier reeller Verhältniszahlen  $x_1 : x_2 : x_3$ , wobei nur das System  $0 : 0 : 0$  auszuschließen ist. Deutet man  $x_1, x_2, x_3$  als homogene kartesische Koordinaten<sup>4</sup>), so daß  $x = \frac{x_1}{x_3}$  und  $y = \frac{x_2}{x_3}$  gewöhnliche kartesische Koordinaten der euklidischen Ebene sind, so schließt sich diese durch die uneigentliche (unendlich ferne) Gerade mit der Gleichung  $x_3 = 0$  zur projektiven Ebene. Deutet man  $x_1, x_2, x_3$  als kartesische Koordinaten des dreidimensionalen Raumes, so lassen sich hiernach die projektiven Punkte umkehrbar eindeutig den durch den Nullpunkt gehenden Geraden zuordnen.

<sup>3)</sup> G. Kowalewski, Analytische Geometrie (Leipzig 1923), § 14, S. 32. Im übrigen findet man Grundtatsachen der projektiven Geometrie in einer für unsere Zwecke geeigneten Form dargestellt z. B. in F. Klein, Nichteuklidische Geometrie (Berlin 1928), Kap. I; L. Bieberbach, Projektive Geometrie (Leipzig 1931); Hilbert Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie (Berlin 1932); H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1923).

Wir wollen jetzt die topologische Übereinstimmung der Mannigfaltigkeit dieser Geraden mit der Mannigfaltigkeit der Punkte, die das geschlossene Möbiusband ausmachen, nachweisen. Schlägt man um das Zentrum des Geradenbüschels die Kugel vom Radius 1, so wird sie von jeder Büschelgeraden in zwei Diametralpunkten durchstoßen. Es sind damit die Punkte der projektiven Ebene ebenfalls in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise auf die Paare von Diametralpunkten der Einheitskugel abgebildet, und man erhält somit die projektive Ebene, wenn man in der Menge aller Punkte der Kugelfläche Diametralpunkte als nicht verschieden ansieht.

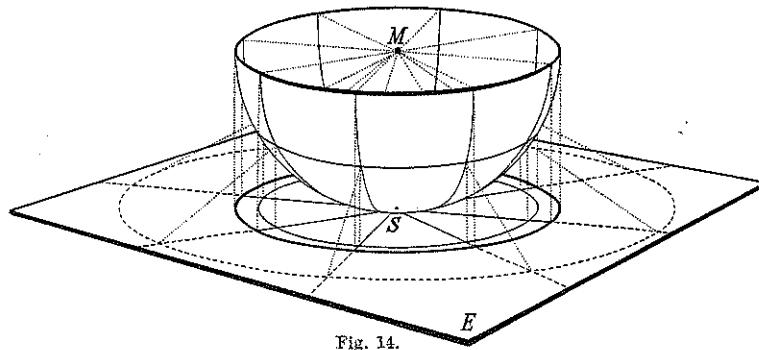


Fig. 14.

Um die projektive Ebene darzustellen, kann man sich daher auf die Punkte der unteren Halbkugelfläche als Repräsentanten projektiver Punkte beschränken, und wenn man die Grenze der unteren Halbkugel, den Äquatorkreis, überschreitet, zum Diametralpunkte dieses Kreises überspringen. Projiziert man jetzt noch die untere Halbkugelfläche normal auf die Tangentialebene  $E$  im Südpol  $S$  (Fig. 14), so hat man die projektive Ebene damit auf die Einheitskreisfläche abgebildet, die durch Identifizieren von Diametralpunkten ihres Randkreises zu schließen ist. Die Punkte des Randkreises entsprechen dabei paarweise denen der uneigentlichen (unendlich fernen) projektiven Geraden, mit der die euklidische Ebene zur projektiven geschlossen wurde.

Aus dieser Abbildung erkennt man ersten die Übereinstimmung der projektiven Ebene mit dem geschlossenen Möbiusbande. Man hat nur aus der Kreisfläche ein mittleres Band durch zwei vom Mittelpunkt gleich weit abstehende parallele Strecken  $r'$  und  $r''$  herauszuschneiden (Fig. 15), es wird dann durch Diametralpunktidentifizierung des berandenden Kreises zum Möbiusband. Die beiden übrigbleibenden Kreissegmente aber setzen sich längs der beiden Kanten  $b$  zu der das Möbiusband schließenden Kreisscheibe mit dem Rande  $r'r''$  zusammen (Fig. 16).

Wie sich die projektive Ebene topologisch als geschlossenes Möbiusband darstellt, so läßt sich das Möbiusband hiernach als eine gelochte projektive Ebene auffassen. Daraus ergibt sich eine neue Darstellung des Möbiusbandes. Denn es ist offenbar für die entstehende berandete Fläche

topologisch gleichgültig, wo das kreisförmige Loch in der projektiven Ebene angebracht wird. Wir können es also auch in die Mitte der Kreisscheibe setzen, die durch Diametralpunktidentifizierung ihres Randes zur projektiven Ebene geschlossen wird, und erhalten damit die in Fig. 17 gegebene Darstellung des Möbiusbandes. Diametralpunkte des äußeren

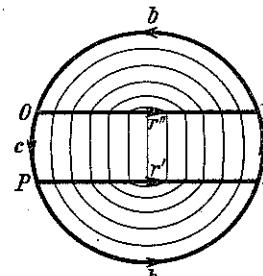


Fig. 15.

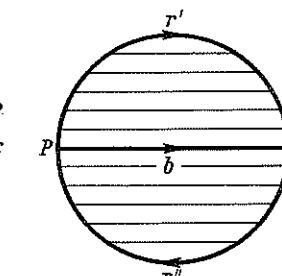


Fig. 16.

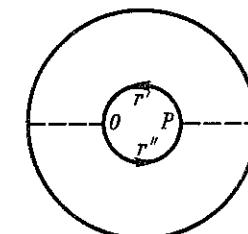


Fig. 17.

Randkreises sind zu identifizieren. Der innere Kreis ist der Rand des Möbiusbandes. Der Zusammenhang mit der ursprünglichen Form des Möbiusbandes (Fig. 13) wird durch Zerschneiden des Kreisringes längs der gestrichelten Strecken und Zusammensetzen längs der äußeren Halbkreise hergestellt.

Zweitens verschafft uns die Abbildung auf die Kreisfläche das *Fundamentalpolygon der projektiven Ebene*. Wir haben nur den Einheitskreis als ein Polygon, und zwar als ein Zweieck aufzufassen, das von zwei Seiten  $a$  und  $a$  berandet wird. Alsdann drückt sich die Diametralpunktidentifizierung des Randkreises durch die Formel

$$aa$$

aus. Dabei fällt der Anfangspunkt der Seite  $a$  mit ihrem Endpunkt in den Punkt  $O$  der projektiven Ebene zusammen (Fig. 18), und  $a$  ist das Bild einer projektiven Geraden, durch die man die projektive Ebene somit zum Fundamentalpolygon aufschneiden kann.

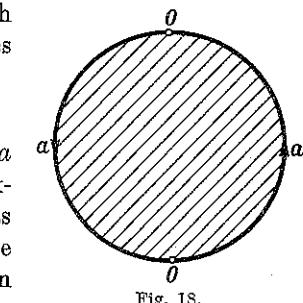


Fig. 18.

Hiermit ist die projektive Ebene in die Reihe der durch ein Fundamentalpolygon dargestellten geschlossenen Flächen eingegordnet. Daß sie nicht in dem Maße wie etwa die Ringfläche als geschlossene Fläche des euklidischen Raumes bekannt ist, liegt daran, daß sie sich — wie alle nichtorientierbaren Flächen — nicht ohne Selbstdurchdringung in den euklidischen Raum legen läßt (Beweis siehe § 64).

Aus der topologischen Übereinstimmung des Möbiusbandes, der gelochten projektiven Ebene und des mit Diametralpunktidentifizierung des einen Randkreises versehenen Kreisringes folgt, daß man aus einer beliebigen geschlossenen Fläche ein und dieselbe neue Fläche erhält, wenn

man ein kreisförmiges Loch in sie schneidet und dann entweder auf den Lochrand ein Möbiusband oder eine gelochte projektive Ebene aufsetzt oder den Lochrand durch Diametralpunktidentifizierung schließt. Das auf ein kreisförmiges Loch aufgesetzte Möbiusband nennt man zuweilen eine *Kreuzhaube*.\*)

Die uns noch fehlenden geschlossenen Flächen gewinnen wir nun, wenn wir an eine Kugel mehrere Möbiusbänder ansetzen. Gleches Verfahren wie mit den Henkeln: wir schneiden in die projektive Ebene (Fig. 18) ein Loch mit dem Rande  $l$  hinein, der durch den Punkt  $O$  hindurchgeht. Durch Aufschneiden des Lochrandes im Punkte  $O$  entsteht aus dem Fundamentalpolygon der projektiven Ebene ein Dreieck mit dem Randkreise  $a_1 a_1 l$  und durch Aneinandersetzen zweier solcher Dreiecke mit den Randkreisen  $a_1 a_1 l$  und  $a_2 a_2 l^{-1}$  längs der Lochränder und Weglöschen der Nahtlinie  $l$  ein Viereck mit dem Randkreise

$$a_1 a_1 a_2 a_2$$

(Fig. 19). Es ist das Fundamentalpolygon der Kugel mit zwei aufgesetzten Möbiusbändern.

Diese Fläche ist unter dem Namen des einseitigen Schlauches oder der *nichtorientierbaren Ringfläche* bekannt. Schneidet man nämlich das Fundamentalpolygon längs der von der Nahtlinie  $l$  verschiedenen Diagonale  $m$  in zwei Dreiecke auseinander und setzt diese längs ihrer Kanten  $a_2$  wieder zusammen, so erhält man ein neues Viereck (Fig. 20) mit dem Randkreise  $a_1 m a_1^{-1} m$ ,

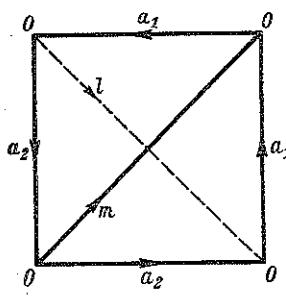


Fig. 19.

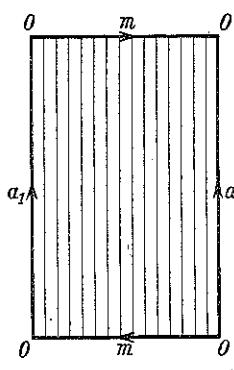


Fig. 20.

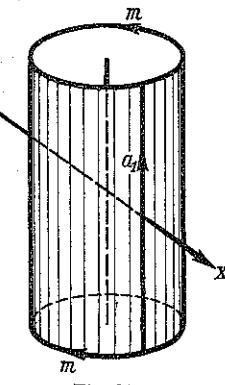


Fig. 21.

in das sich offenbar dieselbe Fläche einwickeln läßt. Dieses Viereck kann man, wenn man die beiden Kanten  $a_1$  zusammenbiegt, als einen Zylinder auffassen (Fig. 21); seine beiden begrenzenden Kreise  $m$  sind punktweise, aber so zu identifizieren, daß sie nicht längs der Mantellinie parallel verschoben zur Deckung kommen — dies würde zur orientierbaren

\*.) Die Rechtfertigung dieser Benennung sowie eine ausführliche Darlegung der anschaulichen Verhältnisse findet sich in dem S. 9 angeführten Buche von Hilbert Cohn-Vossen auf S. 279 f.

Ringfläche führen —, sondern daß solche Punkte zusammenfallen, die durch Umklappen um eine mittelsenkrechte Gerade  $x$  der Zylinderachse ineinander übergehen.

Durch Aneinandersetzen der Randkreise im euklidischen Raum läßt sich diese Identifizierung nur bewirken, wenn man den Zylinder sich selbst durchdringen läßt (Fig. 22). Schneidet man den so erhaltenen einseitigen Schlauch der Länge nach durch, so zerfällt er in zwei Möbiusbänder, deren eines in Fig. 23 gezeichnet ist.

Durch Aufsetzen von  $k$  Möbiusbändern auf die Kugel erhält man eine geschlossene Fläche, die sich in das Fundamentalpolygon mit dem Randkreise

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_k a_k \quad (k)$$

einwickeln läßt.

Weder wissen wir, ob die geschlossenen Flächen, die wir so erhalten haben, alle geschlossenen Flächen ausmachen, noch haben wir bisher bewiesen, daß sich keine zwei von ihnen topologisch aufeinander abbilden lassen. Der erste Zweifel ließe sich leicht beheben; wir tun es in § 38. Die topologische Verschiedenheit dagegen erfordert zu ihrem Beweise (§ 39) den Begriff und die topologische Invarianz der Homologiegruppen.

Mit den eben aufgezählten Flächen sind noch nicht alle Flächen erschöpft. Nur die geschlossenen Flächen haben wir bisher gewonnen; sie sind dadurch charakterisiert, daß sie sich mit endlich vielen Polygonen überdecken lassen und unberandet sind. Flächen, zu deren Parkettierung unendlich viele Polygone erforderlich sind, heißen *unendlich*.<sup>4</sup> Zu ihnen gehört die euklidische Ebene und das einschalige Hyperboloid des euklidischen Raumes.

### § 3. Isotop, homotop, homolog.

Die Methoden, mit denen wir die Nichthomöomorphie von Mannigfaltigkeiten, z. B. der geschlossenen Flächen, beweisen werden, beruhen grob gesprochen auf einer Klassifikation der niederdimensionalen Gebilde, die sich in die Mannigfaltigkeiten hineinlegen lassen. Wir wollen dies am einfachsten Beispiele, den Kurven auf Flächen erläutern.

Wir betrachten zunächst doppelpunktfreie, mit einem bestimmten Durchlaufungssinne versehene Kurven, also topologische Bilder von orientierten Kreisen. Zu einer naheliegenden Einteilung aller solchen geschlossenen Kurven gelangt man, wenn man zwei Kurven  $a$  und  $b$ , die sich auf der

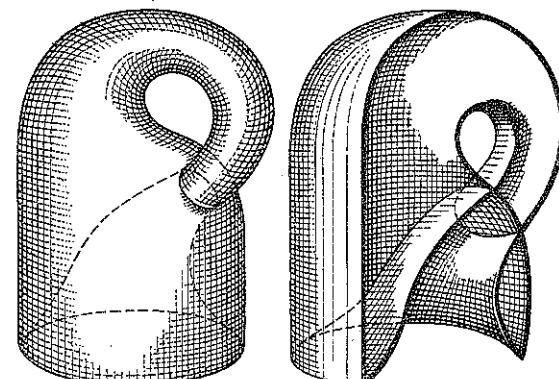


Fig. 22.

Fig. 23.

Fläche ineinander stetig deformieren lassen, als äquivalent betrachtet. Dabei haben wir zunächst sog. isotope Deformationen im Auge, das sind solche, bei denen alle Zwischenlagen, die  $a$  bei der Überführung in  $b$  annimmt, wieder doppelpunktfreie Kurven sind.  $a$  und  $b$  heißen als dann isotop. Isotop sind z. B. irgend zwei gleich orientierte Meridiankreise auf der Ringfläche, ebenso die beiden ebenen Kurven I und II der Fig. 24, nicht aber ist I isotop mit III. Die isotopen Deformationen, die sich mathematisch schwer behandeln lassen, werden im folgenden nur eine untergeordnete Rolle spielen im Vergleich zu den homotopen Deformationen.

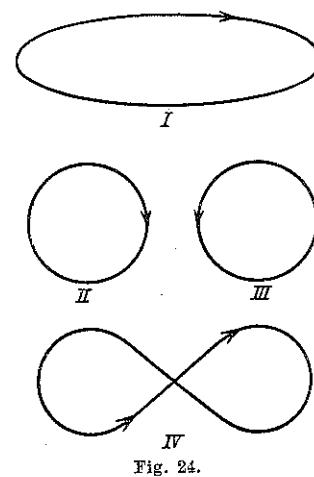


Fig. 24.

sie homotop, genauer frei homotop. Isotope Kurven sind natürlich erst recht homotop. Alle vier Kurven der Fig. 24 sind einander homotop in der Ebene, denn jede ist sogar nullhomotop, d. h. in einen Punkt zusammenziehbar. Einander nicht homotop sind ein Meridiankreis der Ringfläche und der entgegengesetzte durchlaufene; ebensowenig sind ein Meridiankreis und ein Breitenkreis homotop, und alle Meridian- und Breitenkreise sind nicht nullhomotop. — Ohne Bezugnahme auf eine Deformation hätten wir die Homotopie zweier Kurven auch so erklären können: Zwei Kurven  $a$  und  $b$  sind homotop auf der Fläche  $\mathfrak{F}$ , wenn sich ein Kreisring (Fig. 25) stetig (nicht notwendig topologisch) so in die Fläche  $\mathfrak{F}$  abbilden lässt, daß die beiden orientierten Randkreise  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  in  $a$  und  $b$  übergehen.

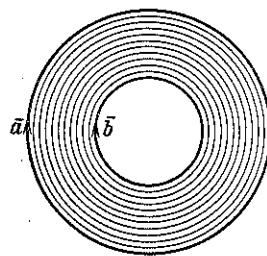


Fig. 25.

Wenn dies nämlich möglich ist, so entspricht einer konzentrischen Überführung von  $\bar{a}$  in  $\bar{b}$  eine homotope Deformation von  $a$  in  $b$ , und umgekehrt: wenn man  $a$  homotop in  $b$  überführt, so wird dabei gerade ein „singulärer“ Kreisring, d. h. das stetige Bild eines Kreisringes überstrichen.

Hier liegt nun eine Verallgemeinerung nahe, die uns zu der größten und sicher wichtigsten Klasseneinteilung der geschlossenen Kurven, zu den Homologieklassen, führt. Man braucht nur den Kreisring — das ist topologisch eine zweifach gelochte Kugelfläche — durch eine zweifach gelochte orientierbare Fläche beliebigen Geschlechtes  $h$  zu ersetzen (die Fig. 26 zeigt den Fall  $h = 1$ ) und sie stetig (nicht notwendig umkehrbar ein-

deutig) in  $\mathfrak{F}$  abzubilden. Wenn sich diese Abbildung so vornehmen lässt, daß die (wie in der Figur orientierten) Lochränder  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  in zwei vorgegebene Kurven  $a$  und  $b$  übergehen, so heißen  $a$  und  $b$  einander homolog.

So sind z. B. die beiden Kurven  $a$  und  $b$  auf der in Fig. 27 gezeichneten Fläche  $\mathfrak{F}$  (Kugel mit 3 Henkeln) homolog. Denn sie bilden den Rand

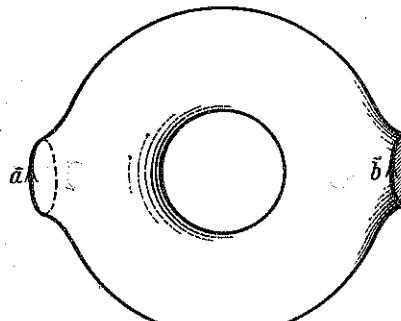


Fig. 26.

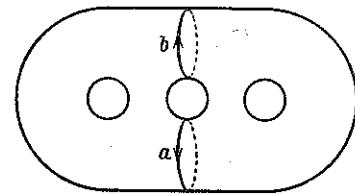


Fig. 27.

einer jeden der beiden zweifach gelochten Ringflächen, in die  $\mathfrak{F}$  durch  $a$  und  $b$  zerlegt wird. Die Homologieklassen lassen sich, wie wir später zeigen werden, als Elemente einer abelschen Gruppe, der Homologiegruppe der Dimension 1, auffassen. Sie ist eine topologische Invariante der Fläche  $\mathfrak{F}$ . Mit ihrer Hilfe gelingt es, die im vorigen Paragraphen aufgezählten Flächen als verschieden zu erweisen. Beispielsweise gibt es auf der Kugelfläche nur eine Homologieklasse, auf der projektiven Ebene zwei, während die Homologiegruppen der übrigen geschlossenen Flächen unendlich sind. Natürlich bedürfen die hier nur flüchtig angedeuteten Begriffe einer genaueren Definition und die Sätze der Beweise, die den Hauptgegenstand der folgenden Kapitel ausmachen werden.

#### § 4. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

Während die Frage nach den topologisch verschiedenen Flächen durch eine vollständige Theorie beantwortet werden kann, ist das entsprechende Problem in drei und mehr Dimensionen ungelöst. Man kann schon die dreidimensionalen topologisch verschiedenen Räume nicht vollständig aufzählen. Die mehrdimensionale Frage ist nicht nur an sich interessant, sondern auf sie haben Probleme aus der Theorie der Differentialgleichungen und aus der Funktionentheorie zweier unabhängiger komplexer Veränderlicher geführt. Freilich liegt der Gegenstand einer solchen Theorie der Anschauung ferner. Während alle orientierbaren geschlossenen Flächen als Riemannsche Flächen in der Funktionentheorie auftreten, haben von dreidimensionalen geschlossenen Räumen vor allem zwei eine Rolle in der außertopologischen Mathematik gespielt: der projektive und der sphärische Raum.

Der (reelle) projektive Raum entsteht aus der Forderung, den euklidischen Raum durch neue Punkte so zu ergänzen, daß in der neuen Punktmenge die projektiven Transformationen umkehrbar eindeutig werden. Man er-

reicht dies in bekannter Weise, indem man den euklidischen Raum durch eine uneigentliche Ebene, die Bildebene der Fluchtebene einer projektiven Abbildung des euklidischen Raumes, schließt. Der projektive Raum ist im Gegensatz zum euklidischen Raum ein geschlossener Raum; er läßt sich mit endlich vielen Tetraedern überdecken (§ 14).

Zum *sphärischen Raum* aber schließt sich der euklidische Raum, wenn man die Forderung der umkehrbaren Eindeutigkeit an die konformen Abbildungen, das sind die Kugelverwandtschaften des euklidischen Raumes, stellt.\*.) Unter diesen befindet sich die Abbildung durch reziproke Radien, bei der der Mittelpunkt der Einheitskugel (Inversionskugel) kein Bild im euklidischen Raum hat. Man hat nun den euklidischen Raum durch den Bildpunkt dieses einen Punktes (und nicht durch die Punkte einer ganzen uneigentlichen Ebene) zu schließen, um zum sphärischen Raum zu gelangen. Die hier vorgenommene Schließung ist das dreidimensionale Analogon der Schließung der Zahlen ebene zur Zahlkugel. In der Tat werden wir in § 14 sehen, daß der sphärische Raum die zwangsläufige Verallgemeinerung der Kugelfläche auf drei Dimensionen ist.<sup>5</sup>

Die übrigen mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten, die in der Mathematik auftreten, sind häufig nicht Punktmanigfaltigkeiten, sondern ihre Elemente sind Gegenstände anderer Art. Einen Fall einer nicht aus Punkten bestehenden, allerdings noch zweidimensionalen Mannigfaltigkeit haben wir bereits kennengelernt: die Menge aller durch einen Punkt des dreidimensionalen euklidischen Raumes gehenden nichtorientierten Geraden. Diese Mannigfaltigkeit ließ sich auf die projektive Ebene so abbilden, daß benachbarte Geraden in benachbarte Punkte übergehen. Andere Beispiele liefern die sämtlichen Lagen eines mechanischen Systems. Ein besonders einfacher Fall ist z. B. das ebene Doppelpendel. Es besteht aus zwei in einem Gelenk  $B$  miteinander verbundenen starren Stäben

Fig. 28.

ben  $l_1$  und  $l_2$ , deren einer mit seinem freien Ende an einem festen Aufhängepunkt  $A$  befestigt ist (Fig. 28). Im übrigen ist das Doppelpendel in der Ebene frei beweglich. Die sämtlichen verschiedenen Lagen, die es anzunehmen vermag, lassen sich durch die beiden Winkel beschreiben, die die beiden Stäbe mit der vertikalen Richtung bilden. Jede Lage ist also durch zwei bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmte Parameterwerte  $\varphi$  und  $\psi$  festgelegt. Die Gesamtheit der Lagen läßt sich daher durch ein Quadrat einer  $\varphi\psi$ -Ebene von der Seitenlänge  $2\pi$  darstellen, dessen Gegenseiten zu identifizieren sind. Auf die gleiche Punktmenge ließ sich die Ringfläche stetig abbilden. Die sämtlichen Lagen des Doppelpendels können wir daher auf die Punkte der Ringfläche derart beziehen, daß nahe beieinander gelegene Punkte der Ringfläche wenig verschiedenen Lagen des Doppelpendels entsprechen. Eine periodische Bewegung des Doppelpendels, das ist eine solche, die in die Anfangslage zurückkehrt, bildet sich alsdann in eine geschlossene Kurve auf der Ringfläche ab.<sup>6</sup>

\*.) F. Klein, Höhere Geometrie (Berlin 1926) § 50; W. Blaschke, Differentialgeometrie I (Berlin 1921) § 40.

pendels entsprechen. Eine periodische Bewegung des Doppelpendels, das ist eine solche, die in die Anfangslage zurückkehrt, bildet sich alsdann in eine geschlossene Kurve auf der Ringfläche ab.<sup>6</sup>

Statt die beiden Stäbe mit Scharnieren zu befestigen, können wir Kugelgelenke benutzen. Die sämtlichen Lagen des so entstehenden sphärischen Doppelpendels lassen sich auf die Paare von Punkten zweier Kugelflächen so abbilden, daß benachbarte Lagen benachbarten Paaren von Punkten der beiden Kugeln entsprechen. Jede Lage ist durch vier Parameter, etwa durch die geographische Breite und Länge auf den beiden Kugeln bestimmt, der „Lagenraum“ des sphärischen Doppelpendels ist daher eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit.

Eine andere vierdimensionale Mannigfaltigkeit, von der wir sogleich zeigen werden, daß sie auf dieselbe Weise wie die eben betrachtete aus Paaren der Punkte zweier Kugeln besteht und daher mit dieser topologisch übereinstimmt, wird von den sämtlichen orientierten Geraden des dreidimensionalen projektiven Raumes gebildet. Wir denken uns diesen reellen projektiven Raum in den komplexen projektiven Raum eingebettet, dessen Punkte die Quadrupel komplexer Verhältniszahlen  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$  sind, wobei nur das Quadrupel  $0 : 0 : 0 : 0$  auszuschließen ist. Wir behaupten nun zunächst, daß sich die Menge der orientierten Geraden umkehrbar eindeutig und stetig auf die Punkte der nullteiligen Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

(deren Punkte alle komplex sind, d. h. komplexe Koordinaten haben) abbilden läßt. Jede reelle Gerade schneidet die nullteilige Kugel in zwei verschiedenen konjugiert komplexen Punkten  $P$  und  $\bar{P}$ , und umgekehrt bestimmt jedes Paar konjugiert komplexer Punkte der nullteiligen Kugel eine reelle Verbindungsgerade  $g$ . Sind  $P_1, P_2, P_3$  drei reelle Punkte auf  $g$ , so ist durch eine Orientierung von  $g$  eine bestimmte zyklische Reihenfolge der drei Punkte, etwa die Folge  $P_1 P_2 P_3$  gegeben. Da die Doppelverhältnisse

$$(P P_1 P_2 P_3) = \lambda \quad \text{und} \quad (\bar{P} P_1 P_2 P_3) = \bar{\lambda}$$

konjugiert komplexe nichtreelle Zahlen sind, so hat genau eines von beiden, etwa  $\lambda$  einen positiven Imaginärteil. Diese Eigenschaft des Doppelverhältnisses  $\lambda$  bleibt unverändert bei zyklischer Vertauschung von  $P_1, P_2, P_3$ . Denn es ist

$$(P P_2 P_3 P_1) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

und

$$(P P_3 P_1 P_2) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Damit ist der orientierten Geraden  $g$  in eindeutiger Weise der Punkt  $P$  zugeordnet. Die umgekehrt orientierte Gerade  $g$  führt dann zum Punkte  $\bar{P}$ . Denn

$$(P P_1 P_3 P_2) = \frac{1}{\lambda}$$

hat negativen Imaginärteil. Damit ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den orientierten Geraden und den Punkten der nullteiligen Kugel hergestellt. Nun wird die nullteilige Kugel von zwei Scharen komplexer Geraden überspannen.\*)

\*) F. Klein, Höhere Geometrie (Berlin 1926) § 45 oder E. Study, Geometrie der Kreise und Kugeln. Math. Ann. 86 (1922) oder L. Bieberbach, Höhere Geometrie (Leipzig 1933).

$r$  sei eine Gerade der „rechten“ und  $l$  eine der „linken“ Schar. Durch jeden Punkt  $P$  der nullteiligen Kugel geht dann genau eine Gerade der linken [rechten] Schar, die  $r[l]$  in einem bestimmten Punkte  $P_r[P_l]$  trifft. Jedem Punkte  $P$  der Kugel entspricht damit umkehrbar eindeutig ein Paar eines Punktes auf  $r$  und eines Punktes auf  $l$ . Unsere Behauptung, daß die orientierten reellen Geraden des projektiven Raumes sich umkehrbar eindeutig den Punktpaaren zweier Kugelflächen zuordnen lassen, wird also erbracht sein, wenn wir gezeigt haben, daß die sämtlichen Punkte von  $r[l]$ , d. h. aber die sämtlichen (reellen und komplexen) Punkte einer projektiven Geraden eine reelle Kugelfläche ausmachen. Hierzu überzeugt man sich, wenn man auf der projektiven Geraden ein projektives Koordinatensystem  $\mu_1 : \mu_2$  einführt.  $\mu_1 : \mu_2$  durchläuft dann alle möglichen komplexen Zahlen einschließlich  $\infty$ . Diese Zahlen aber erfüllen gerade die Zahlenkugel.

Wie der Lagenraum des sphärischen Doppelpendels, so ist damit auch die Mannigfaltigkeit aller reellen orientierten Geraden des projektiven Raumes auf die Mannigfaltigkeit der Punktpaare zweier Kugelflächen derart bezogen, daß wenig verschiedenen Geraden benachbarte Punktpaare entsprechen.

Nicht nur die Lage mechanischer Systeme, auch ihre Bewegungszustände geben zur Bildung mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, der sog. *Phasenräume* Anlaß.<sup>7</sup> Unter dem Bewegungszustand eines Massenpunktes wird dabei seine Lage im Raum und seine Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach verstanden. Sei z. B. ein einzelner Massenpunkt gezwungen, sich im Schwerkraftfeld auf einer festen Kugelfläche zu bewegen, und sei ihm eine ein für allemal feste Energie, die sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammensetzt und so groß sei, daß er den höchsten Kugelpunkt durchlaufen kann, auf den Weg gegeben. Jeder mögliche Bewegungszustand ist dann durch die Lage des Punktes auf der Kugelfläche gegeben — das erfordert zwei Bestimmungsstücke — und durch die Richtung der Geschwindigkeit — das ist ein drittes Bestimmungsstück, denn der Betrag der Geschwindigkeit ist durch die vorgeschriebene Gesamtenergie und die Lage bereits festgelegt. Die Bewegungszustände sind daher umkehrbar eindeutig den gerichteten Linienelementen der Kugelfläche zugeordnet: Der Phasenraum ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, und zwar läßt er sich auf den dreidimensionalen projektiven Raum abbilden, wie wir in § 14 Aufgabe 2 sehen werden. Die Bewegungszustände entsprechen somit den Punkten des (reellen) dreidimensionalen projektiven Raumes in der Weise, daß wenig verschiedene Bewegungszustände sich in benachbarte Punkte abbilden.

Schon bei Schließung des Möbiusbandes zur projektiven Ebene haben wir den naiven Begriff der Figur als einer Punktmenge des euklidischen Raumes verlassen und die Flächen durch Aneinanderheften von Polygonen erklärt. Während aber für die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten die Einbettung in den Raum noch als eine natürliche Gegebenheit der Anschauung zu rechtfertigen wäre, wird die Befreiung vom umgebenden Raum zur Notwendigkeit, sobald man sich den höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten zuwendet, deren Elemente nicht aus Punkten bestehen. Sie durch Punktmengen zu repräsentieren und in einen mehr-

dimensionalen euklidischen Raum einzubetten, wäre im allgemeinen eine künstliche und unsachgemäße Zutat. Mit der Einbettung in den Raum fällt aber zugleich unser bisheriger Begriff der topologischen Abbildung und der Homöomorphie. Denn die Stetigkeit der Abbildung zweier Figuren hatten wir anfangs als Stetigkeit der abbildenden Koordinatenfunktionen erklärt. Trotzdem haben wir auch von der Mannigfaltigkeit der Lagen des Doppelpendels ausgesagt, sie stimme mit der Punktmenge der Ringfläche überein. Es muß also das Wesen der Stetigkeit noch auf andere Weise als auf dem Umwege über die Koordinatenfunktionen erfassbar sein.

Was ist es nun, das die Lagen- und Phasenräume mit den Punktmengen des euklidischen Raumes gemeinsam haben und das sie einer stetigen Abbildung fähig macht? In ihnen weiß man, welche Elemente (Lagen und Bewegungszustände) die unmittelbare Nachbarschaft eines Elementes ausmachen; zu jedem Elemente gibt es — freilich vielfältig wählbare — Teilmengen, die Umgebungen des Punktes bilden. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung ist nun stetig, wenn sie Umgebungen in Umgebungen überführt. Umkehrbar eindeutig lassen sich auch die Punktmengen der Kugelfläche und der Ringfläche aufeinander beziehen, da sie gleiche Mächtigkeit haben. Daß beide Flächen nicht homöomorph sind, besagt, daß die eineindeutige Abbildung nicht so gewählt werden kann, daß dabei benachbarte Punkte stets in benachbarte Punkte übergehen. Damit also eine Menge mathematischer Dinge Gegenstand der Topologie sei, damit sie einen raumartigen Charakter erhalte, ist die Festsetzung von Umgebungen die Mindestforderung. Welche Teilmengen die Umgebung eines Elementes ausmachen, darüber wird man im allgemeinen nicht im Zweifel sein. Im euklidischen Raum z. B. wird eine Umgebung eines Punktes jedenfalls alle Punkte einer um den Punkt geschlagenen Kugel enthalten müssen; je nachdem wir die Kugel größer oder kleiner wählen, erhalten wir eine größere oder kleinere Umgebung. Im sphärischen Raum ist eine Punktmenge nur dann Umgebung des neu hinzugekommenen uneigentlichen Punktes, wenn sie alle Punkte außerhalb einer genügend großen Kugel enthält. Die Umgebung einer projektiven Geraden wird alle Geraden enthalten müssen, die ganz im Innern einer die betreffende Geraden als Achse umgebenden genügend „schlanken“ einschaligen Hyperboloides liegen; usw.

Mit der Zurückführung der Stetigkeit und der topologischen Abbildung auf den Umgebungs begriff haben wir die zu betrachtenden Figuren so weit von dem einbettenden Raum der Anschauung befreit, daß dieser selbst den übrigen raumartigen Gegenständen der Topologie, z. B. den geschlossenen Flächen, als gleichberechtigte Figur an die Seite tritt. Wenn man, was wir tun wollen, daran festhält, den Raum als kontinuierliche Punktmenge in die Geometrie einzuführen, so ist der Umgebungs begriff am tiefsten mit dem Wesen des Raumes überhaupt verknüpft. Wir werden bedeutsame Begriffe und Sätze kennenlernen, die

von der Entfernung, der Geradlinigkeit, ja sogar der Dimension des Raumes nichts enthalten. Welche Punkte aber in der Nähe eines Punktes liegen, das muß feststehen, wenn man eine Punktmenge noch als Raum ansprechen soll. Steht nichts weiter von der Punktmenge fest, so wollen wir sie einen **Umgebungsraum** nennen (§ 5).

Der Umgebungsbegriß dient dazu, den allgemeinsten Raumbegriff allererst mathematisch zu definieren, d. h. ihn zu konstruieren, von der vagen Anschauung unabhängig zu machen und auf die derzeitigen Grundbegriffe der Mengenlehre zurückzuführen. Darüber hinaus aber liegt die mathematische Brauchbarkeit des so erhaltenen Begriffes in seiner Weite: wo immer in einer Menge mathematischer Gegenstände sich uns eine Festsetzung von Umgebungen darbietet, die gewissen Axiomen genügt, da werden wir diese Menge als einen Raum im weitesten Sinne ansprechen und die für einen beliebigen Umgebungsraum abgeleiteten Begriffe und Sätze auf den betreffenden Gegenstandsbereich übertragen.

Wenn wir nunmehr daran gehen, die in diesen einleitenden Betrachtungen gestreiften Begriffe und Sätze nach dem Vorbilde der synthetischen Geometrie streng zu begründen, indem wir sie einer Theorie der Umgebungsräume unterordnen, so müssen wir von neuem anheben und uns zunächst weit von aller unmittelbaren Anschauung entfernen. Nur gelegentlich werden Beispiele die Beziehung zwischen den allgemeinen Untersuchungen und den geometrischen Problemen dieses ersten Kapitels erkennen lassen. Erst vom VI. Kapitel, der Flächentopologie an treten die geometrischen Einzelprobleme wieder in den Vordergrund. Trotzdem werden auch das Thema des nächsten Kapitels nicht ausschließlich allgemeine Umgebungsräume ausmachen. Wir werden uns vielmehr sehr bald ganz speziellen Umgebungsräumen, den schon erwähnten Komplexen, zuwenden. Zwischen dem von uns benutzten sehr weiten Begriff des Umgebungsraumes und dem des Komplexes hat ihren Platz die von uns nicht behandelte mengentheoretische Topologie, die die Theorie der topologischen Räume\*) und der Punktmengen in ihnen, darunter die Dimensionstheorie\*\*) umfaßt.

\*) Vgl. F. Hausdorff [1], [2] und P. Alexandroff [16].

\*\*) Vgl. Tietze-Vietoris [8] l. c. V. und Nöbeling [1].

## Zweites Kapitel. Simplizialer Komplex.

### § 5. Umgebungsraum.

Eine endliche oder unendliche nichtleere Menge mathematischer Gegenstände, welche Punkte der Menge genannt werden, heißt ein **Umgebungsraum**, wenn zu jedem Punkte gewisse Teilmengen als seine Umgebungen definiert sind; diese Umgebungen sollen den beiden folgenden Axiomen genügen:

**Axiom A:** Zu jedem Punkte  $P$  des Umgebungsraumes gibt es wenigstens eine Umgebung; jede Umgebung von  $P$  enthält  $P$ .

Ist  $\mathfrak{M}$  der Umgebungsraum, so bezeichnen wir eine *Umgebung von  $P$*  mit

$$\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M}).$$

**Axiom B:** Mit einer Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$  ist auch jede diese Umgebung enthaltende Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  eine Umgebung von  $P$ .

Beispiele von Umgebungsräumen sind: 1. Die Menge  $\mathfrak{M}$  aller ganzen Zahlen, in der als Umgebung einer beliebigen Zahl jede diese Zahl enthaltende Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  erklärt wird; 2. dieselbe Menge, wenn als Umgebung einer Zahl jede Teilmenge erklärt wird, die die Zahl selbst, die vorangehende und die zweitfolgende Zahl enthält; 3. dieselbe Menge, wenn als einzige Umgebung jeden Punktes die ganze Menge erklärt wird.

Diese Beispiele wollen nur die Allgemeinheit des Begriffes Umgebungsraum deutlich machen, sonst haben sie keine Bedeutung für die folgenden Untersuchungen.<sup>8</sup>

Von Wichtigkeit ist dagegen das Beispiel des *n-dimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^n$* . Ein Punkt ist hier ein *n*-tupel von reellen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  $\mathfrak{R}^n$  besteht aus der Gesamtheit dieser Zahlen-*n*-tupel.<sup>9</sup>  $x_1, x_2, \dots, x_n$  heißen die Koordinaten des Punktes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Unter einer *Umgebung des Punktes  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$*  verstehen wir jede Teilmenge des  $\mathfrak{R}^n$ , die alle inneren Punkte eines den Punkt  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  umgebenden Würfels enthält; d. h. alle Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , die den Ungleichungen genügen

$$|x_i - \bar{x}_i| < \eta. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Gibt es also ein  $\eta$  derart, daß der  $\eta$ -Würfel um  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  zu einer vorgegebenen Teilmenge gehört, dann und nur dann ist die Teilmenge Umgebung des Punktes  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ . Insbesondere ist der ganze  $\mathfrak{R}^n$

Umgebung jedes seiner Punkte. Durch diese Festsetzung von Umgebungen wird der Zahlenraum zu einem Umgebungsraum.

Unter der Entfernung zweier Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  versteht man die nichtnegative Zahl

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}. \quad (2)$$

Eine mit der bisherigen übereinstimmende Umgebungsdefinition ist dann die folgende: Umgebung von  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  ist jede Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die alle Punkte einer Umgebungskugel enthält; die Punkte der Umgebungskugel sind diejenigen, deren Entfernung von  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  kleiner als ein geeignet gewähltes  $\varepsilon > 0$  ist; sie genügen also der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 < \varepsilon^2. \quad (3)$$

Insbesondere machen die Punkte dieser Kugel, für sich allein genommen, eine Umgebung von  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  aus. Eine solche Umgebung nennen wir bisweilen eine (kugelförmige)  $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ; je nach Wahl von  $\varepsilon$  erhalten wir eine größere oder kleinere  $\varepsilon$ -Umgebung. Der Sprachgebrauch des bürgerlichen Lebens wird unter einer Umgebung eine solche Punktmenge verstehen, die keine allzuweit entfernten Punkte enthält. Wir bezeichnen eine Punktmenge bereits als Umgebung, wenn nur in ihr sich alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebungskugel befinden.

Sind uns zwei Mengen  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  gegeben, so verstehen wir unter ihrer Vereinigungsmenge  $\mathfrak{U} + \mathfrak{B}$  die Menge derjenigen Punkte, die zu  $\mathfrak{U}$  oder zu  $\mathfrak{B}$  (oder auch zu beiden) gehören, und unter ihrem Durchschnitt die Menge der Punkte, die sowohl zu  $\mathfrak{U}$  als zu  $\mathfrak{B}$  gehören. Ist der Durchschnitt zweier Mengen leer, so sagen wir, die Mengen sind punktfremd.

Ist  $\mathfrak{N}$  eine nichtleere Teilmenge eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{M}$ , so setzen wir ein für alle mal als Umgebung  $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{N})$  eines Punktes  $Q$  von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{N}$  den Durchschnitt irgendeiner Umgebung  $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})$  mit  $\mathfrak{N}$  fest.  $\mathfrak{N}$  wird dadurch zum Umgebungsraume. Denn Axiom A ist offenbar erfüllt. Axiom B ist erfüllt, denn eine die Umgebung  $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{N})$  umfassende Teilmenge  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{N}$  ist Durchschnitt der Umgebung  $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M}) + \mathfrak{B}$  von  $Q$  in  $\mathfrak{M}$  mit der Teilmenge  $\mathfrak{N}$ , also Umgebung von  $Q$  in  $\mathfrak{N}$ . Jede nichtleere Teilmenge eines Umgebungsraumes ist daher wieder ein Umgebungsraum. Da der Zahlenraum bereits zum Umgebungsraum gemacht wurde, so werden durch diese Erklärung alle Teilmengen eines Zahlenraumes, insbesondere alle Kurven und Flächen des dreidimensionalen Raumes zu Umgebungsräumen, und die Umgebungen auf ihnen sind völlig bestimmt.

Sei z. B.  $\mathfrak{M}$  die Zahlengerade  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathfrak{N}$  die Punktmenge  $0 \leq x < 1$ . Eine Teilmenge von  $\mathfrak{N}$  ist hier Umgebung  $\mathfrak{U}(0|\mathfrak{N})$  des Punktes  $x = 0$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, daß alle Punkte  $0 \leq x < \varepsilon$  zu dieser Teilmenge gehören.

$\mathfrak{N}$  sei jetzt eine beliebige, möglicherweise leere Teilmenge eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{M}$  und  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{M}$ .  $P$  heißt

Häufungspunkt von  $\mathfrak{N}$ , wenn jede Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$  von  $P$  unendlich viele Punkte von  $\mathfrak{N}$  enthält;

Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{N}$ , wenn in jeder Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$  sowohl Punkte von  $\mathfrak{N}$  als auch solche liegen, die nicht zu  $\mathfrak{N}$  gehören;

innerer Punkt von  $\mathfrak{N}$ , wenn es eine nur aus Punkten von  $\mathfrak{N}$  bestehende Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$  gibt; alsdann gehört  $P$  notwendig zu  $\mathfrak{N}$ .

Die Gesamtheit der Begrenzungspunkte bildet die Begrenzung von  $\mathfrak{N}$ . Jeder Punkt von  $\mathfrak{N}$  ist entweder Begrenzungspunkt oder innerer Punkt.

In dem oben erwähnten Beispiel der Teilmenge  $\mathfrak{N}$ :  $0 \leq x < 1$  auf der Zahlengeraden  $\mathfrak{M}$  sind alle Punkte  $0 \leq x \leq 1$  Häufungspunkte von  $\mathfrak{N}$ ,  $x = 0$  und  $x = 1$  sind Begrenzungspunkte, die Punkte  $0 < x < 1$  innere Punkte. — Die leere Teilmenge hat weder Häufungspunkte, noch Begrenzungspunkte, noch innere Punkte. Fällt  $\mathfrak{N}$  mit  $\mathfrak{M}$  zusammen, so sind alle Punkte innere Punkte.

Die Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{M}$  heißt offen in bezug auf  $\mathfrak{M}$ , wenn kein Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{N}$  zu  $\mathfrak{N}$  gehört, abgeschlossen, wenn alle Begrenzungspunkte zu  $\mathfrak{N}$  gehören.

Es hat keinen Sinn, von einem einzelnen Umgebungsraume  $\mathfrak{N}$  zu sagen, er sei offen oder abgeschlossen, oder ein Punkt von  $\mathfrak{N}$  sei Begrenzungspunkt oder innerer Punkt, wenn nicht zugleich der umfassende Umgebungsraum  $\mathfrak{M}$  mit angegeben wird, in bezug auf den diese Begriffe allein definiert sind. Eine Teilmenge  $\mathfrak{N}$  ist z. B. möglicherweise in bezug auf  $\mathfrak{M}$  nicht offen, während sie in bezug auf eine Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  (z. B. immer in bezug auf sich selbst) offen ist.

Die Strecke  $0 \leq x \leq 1$  ist eine abgeschlossene Teilmenge der Zahlengeraden,  $0 < x < 1$  eine offene.  $0 \leq x < 1$  ist weder offen noch abgeschlossen. Die leere Teilmenge, ebenso wie die Teilmenge  $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$  ist zugleich offen und abgeschlossen.

Klar ist: Die Vereinigungsmenge beliebig vieler offener Teilmengen ist selbst offen; der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen ist abgeschlossen.

Eine offene Teilmenge ist auch dadurch charakterisiert, mit jedem Punkte eine ganze Umgebung zu enthalten, eine abgeschlossene Teilmenge dadurch, Komplementärmenge einer offenen zu sein.\*)

Unter der abgeschlossenen Hülle einer Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{M}$  wird der Durchschnitt aller  $\mathfrak{N}$  umfassenden abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathfrak{M}$  verstanden. Die abgeschlossene Hülle ist also die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $\mathfrak{M}$ , die  $\mathfrak{N}$  umfaßt.

Vom Begrenzungspunkte einer Teilmenge ist der Begriff des Grenzpunktes einer Folge wohl zu unterscheiden. Eine unendliche Folge (in der ein und derselbe Punkt mehrfach auftreten darf) konvergiert nach einem Punkte, einem Grenzpunkte der Folge, wenn in beliebig vorgegebener Umgebung des Punktes fast alle Punkte der Folge, d. h. alle bis auf endlich viele, liegen. Bei dem zugrunde gelegten allgemeinen Begriffe

\*) Unter der Komplementärmenge der Teilmenge  $\mathfrak{N}$  einer Menge  $\mathfrak{M}$  versteht man die Gesamtheit der Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die nicht zu  $\mathfrak{N}$  gehören; man bezeichnet sie mit  $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ .

des Umgebungsraumes kann es eintreten, daß eine Folge konvergent ist und doch nach verschiedenen Punkten konvergiert\*), ein Übelstand, den Punktfolgen von Zahlenräumen und Komplexen nicht mehr aufweisen.

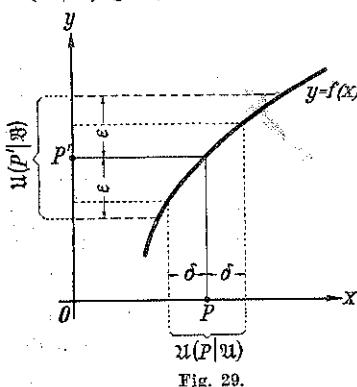
### § 6. Abbildungen.

Ist jedem Punkte  $P$  eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{A}$  genau ein Punkt  $P'$  eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{B}$  zugeordnet, so ist damit eine eindeutige *Abbildung*  $T$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  gegeben.  $P' = T(P)$  heißt der *Bildpunkt* von  $P$ , die Menge  $\mathfrak{A}'$  aller Bildpunkte von  $\mathfrak{A}$  die *Bildmenge* von  $\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{A}'$  ist eine Teilmenge von  $\mathfrak{B}$ , die auch mit ganz  $\mathfrak{B}$  zusammenfallen kann. Die Abbildung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  heißt *eineindeutig*, wenn je zwei verschiedene Punkte von  $\mathfrak{A}$  verschiedene Bildpunkte haben. In diesem Falle gibt es eine *reziproke Abbildung* von  $\mathfrak{A}'$  auf  $\mathfrak{A}$ , die jedem Punkte  $P'$  den Originalpunkt  $P$  zuordnet; sie wird mit  $T^{-1}$  bezeichnet. — Man pflegt von einer Abbildung der Menge  $\mathfrak{A}$  in die Menge  $\mathfrak{B}$  zu sprechen, wenn die Bildpunkte eine (möglicherweise mit  $\mathfrak{B}$  zusammenfallende) Teilmenge von  $\mathfrak{B}$  ausmachen, und von einer Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{B}$ , wenn sicher jeder Punkt von  $\mathfrak{B}$  Bildpunkt, also  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$  ist.

Geht  $\mathfrak{A}$  bei der Abbildung  $T$  in eine Teilmenge von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  bei einer weiteren Abbildung  $U$  in eine Teilmenge eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{C}$  über, so ist damit zugleich  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{C}$  abgebildet. Diese Abbildung heißt das *Produkt der Abbildungen*  $T$  und  $U$  und wird mit  $UT$  bezeichnet [man achte auf die Reihenfolge der Faktoren, die so festgesetzt wird, weil der Bildpunkt eines Punktes  $P$  durch  $U(T(P)) = UT(P)$  gegeben wird].

Eine Abbildung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  heißt *stetig in einem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{A}$* , wenn es zu jeder Umgebung  $U(P|\mathfrak{B})$  des Bildpunktes  $P'$  eine Umgebung  $U(P|\mathfrak{A})$  gibt, deren Bild ganz zu  $U(P|\mathfrak{B})$  gehört. Die Abbildung heißt *stetig schlechthin*, wenn sie in jedem Punkte stetig ist.

Diese Definition ist mit der klassischen Definition der Stetigkeit in Einklang. Eine Funktion  $y = f(x)$  z. B. vermittelt eine Abbildung der  $x$ -Achse, einer Zahlengeraden, in die  $y$ -Achse, eine andere Zahlengerade, und sie heißt stetig im Punkte  $P = \bar{x}$ , wenn es zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so gibt, daß für alle  $x$  des Intervall  $|x - \bar{x}| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ . Das heißt zu vorgegebener  $\varepsilon$ -Umgebung  $U(P|\mathfrak{B})$  des Bildpunktes  $y = f(x)$  muß es eine  $\delta$ -Umgebung  $U(P|\mathfrak{A})$  des Originalpunktes  $\bar{x}$  geben, die sich ganz in die  $\varepsilon$ -Umgebung abbildet (Fig. 29).



\*) Wenn z. B. als einzige Umgebung eines jeden Punktes die ganze Menge definiert ist, so konvergiert jede unendliche Folge gegen jeden Punkt.

Allgemeiner läßt sich jede Abbildung  $T$  einer Teilmenge  $\mathfrak{A}$  des  $m$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^m$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_m$  auf eine Teilmenge  $\mathfrak{A}'$  des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^n$  mit den Koordinaten  $y_1, y_2, \dots, y_n$  durch  $n$  Funktionen

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

vermitteln. Es gilt der

**Satz I:** Die Abbildung  $T$  ist dann und nur dann stetig, wenn die Abbildungsfunktionen (1) stetig sind. [Eine Funktion  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  von mehreren Veränderlichen nennt man bekanntlich in der Analysis in einem Punkte  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  stetig, wenn es zu vorgegebenem  $\varepsilon (> 0)$  ein  $\delta (> 0)$  so gibt, daß für alle Punkte des Definitionsbereiches von  $f$ , deren Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_m$  den Ungleichungen

$$|x_i - \bar{x}_i| < \delta$$

genügen,

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)| < \varepsilon$$

[gilt.]

**Beweis:** Unter der  $\delta$ -Würfelumgebung  $W_\delta(P|\mathfrak{A})$  eines Punktes  $P$  von  $\mathfrak{A}$  sei die Menge aller Punkte von  $\mathfrak{A}$  verstanden, die innerhalb des  $\delta$ -Würfels um  $P$  liegen. In jeder Umgebung  $U(P|\mathfrak{A})$  liegt eine  $\delta$ -Würfelumgebung bei hinreichend kleiner Wahl von  $\delta$ . Denn  $U(P|\mathfrak{A})$  ist der Durchschnitt von  $\mathfrak{A}$  mit einer Umgebung  $U(P|\mathfrak{R}^m)$ , und diese enthält einen  $\delta$ -Würfel.

a) Die Abbildung  $T$  sei stetig.  $W_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$  sei eine vorgegebene  $\varepsilon$ -Würfelumgebung des Bildpunktes  $P'$  von  $P$ . Wegen der Stetigkeit von  $T$  gibt es eine Umgebung  $U(P|\mathfrak{A})$ , deren Bild in  $W_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$  liegt. In  $U(P|\mathfrak{A})$  liegt eine  $\delta$ -Würfelumgebung, die sich somit ebenfalls in die vorgelegte  $\varepsilon$ -Würfelumgebung abbildet; d. h. aber, daß die Abbildungsfunktionen (1) stetig sind.

b) Die Abbildungsfunktionen (1) seien stetig. Zu vorgelegter Umgebung  $U(P'|\mathfrak{A}')$  gibt es eine darin enthaltene  $\varepsilon$ -Würfelumgebung  $W_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$  und dazu wieder eine  $\delta$ -Würfelumgebung  $W_\delta(P|\mathfrak{A})$ , deren Bild zu  $W_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$ , also erst recht zu  $U(P'|\mathfrak{A}')$  gehört, d. h.  $T$  ist stetig.

**Satz II:** Ist die Abbildung des Umgebungsraumes  $\mathfrak{A}$  in den Umgebungsraum  $\mathfrak{B}$  stetig, so auch die Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf die Teilmenge  $\mathfrak{A}'$  der Bildpunkte von  $\mathfrak{A}$ , und umgekehrt folgt aus der Stetigkeit der Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  auch die  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$ .

**Beweis:** Eine beliebige Umgebung  $U(P'|\mathfrak{A}')$  ist Durchschnitt einer Umgebung  $U(P'|\mathfrak{B})$  mit  $\mathfrak{A}'$ . Ist nun  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  stetig abgebildet, so gibt es eine Umgebung  $U(P|\mathfrak{B})$ , deren Bild ganz in  $U(P'|\mathfrak{B})$ , also schon im Durchschnitt von  $U(P'|\mathfrak{B})$  und  $\mathfrak{A}'$ , also in  $U(P'|\mathfrak{A}')$  liegt. Da  $U(P'|\mathfrak{A}')$  beliebig angenommen war, so heißt das, daß die Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  stetig ist. — Ist umgekehrt die Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  stetig, so bilde man zu beliebig vorgegebenem  $U(P'|\mathfrak{B})$  die Umgebung  $U(P'|\mathfrak{A}') =$  Durchschnitt von  $U(P'|\mathfrak{B})$  und  $\mathfrak{A}'$ . Wegen der Stetigkeit der Abbildung von

$\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  gibt es eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ , deren Bild ganz zu  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$ , also erst recht zu  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$  gehört. — Mit anderen Worten: es ist für die Definition der Stetigkeit gleichgültig, ob man die Umgebungen von  $P'$  in  $\mathfrak{A}'$  oder  $\mathfrak{B}$  wählt.

Satz III: Ist  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  stetig abgebildet und geht dabei eine Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{A}$  in die Teilmenge  $\mathfrak{N}'$  von  $\mathfrak{A}'$  über, so ist auch die Abbildung von  $\mathfrak{N}$  auf  $\mathfrak{N}'$  stetig.

Beweis: Wegen der Stetigkeit der Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  gibt es zu einer beliebigen Umgebung  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$  des Bildpunktes  $P'$  eines Punktes  $P$  von  $\mathfrak{N}$  eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ , die sich in  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$  abbildet. Der Durchschnitt von  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$  mit  $\mathfrak{N}$  ist eine Umgebung von  $P$  in  $\mathfrak{N}$ , die sich erst recht in  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$  abbildet, also ist die Abbildung von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{A}'$  stetig, also nach dem vorigen Satze auch die von  $\mathfrak{N}$  auf  $\mathfrak{N}'$ .

Satz IV: Wenn  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{A}'$  auf  $\mathfrak{A}''$  stetig abgebildet ist, so auch  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}''$  — offenbar.

Eine Abbildung  $T$  von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}'$  heißt *topologisch*, wenn sie eineindeutig und samt ihrer reziproken Abbildung  $T^{-1}$  stetig ist. Ist  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$  eine Umgebung eines Punktes  $P$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $T^{-1}$  eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$ , die sich in  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$  abbildet. Das Bild von  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$  bei der Abbildung  $T$  ist also eine  $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$  umfassende Punktmenge, also wieder eine Umgebung von  $P'$ . Daher gilt

Satz V: Eine topologische Abbildung führt, ebenso wie ihre reziproke, Umgebungen in Umgebungen über, und umgekehrt ist jede eineindeutige Abbildung mit dieser Eigenschaft topologisch.

Von einer topologischen Abbildung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  sprechen wir, wenn  $\mathfrak{A}$  sich auf eine Teilmenge  $\mathfrak{A}'$  von  $\mathfrak{B}$  topologisch abbildet, die auch mit  $\mathfrak{B}$  zusammenfallen kann.

Zwei Umgebungsräume heißen *homöomorph*, wenn sie sich topologisch aufeinander abbilden lassen.

Die beiden Sätze (III) und (IV) gelten auch dann noch, wenn man sie statt für stetige für topologische Abbildungen ausspricht. Daraus folgt insbesondere, daß zwei Umgebungsräume, die einem dritten homöomorph sind, auch einander homöomorph sind (Transitivität des Homöomorphismus).

Wir interessieren uns nur für solche Eigenschaften von Umgebungsräumen und ihren Teilmengen, die durch topologische Abbildungen nicht zerstört werden. Die Eigenschaft einer Teilmenge eines Zahlenraumes, eine Gerade zu sein, gehört z. B. nicht zu diesen Eigenschaften; denn bei topologischer Abbildung auf einen anderen Zahlenraum geht die Geradlinigkeit im allgemeinen verloren.

Dagegen ist die Eigenschaft einer Teilmenge eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{M}$ , Umgebung eines Punktes  $P$  zu sein, eine topologische invariante Eigenschaft; denn bei einer topologischen Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}'$  geht eine Umgebung eines Punktes  $P$  von  $\mathfrak{M}$  in eine Umgebung des Bild-

punktes  $P'$  von  $\mathfrak{M}'$  über. Das gleiche gilt von den Begriffen Begrenzungspunkt, innerer Punkt, Häufungspunkt einer Teilmenge, Grenzpunkt einer Folge, offene Teilmenge, abgeschlossene Teilmenge. — Z. B. wird die Eigenschaft eines Punktes  $R$  von  $\mathfrak{M}$ , Begrenzungspunkt einer Teilmenge  $\mathfrak{N}$  zu sein, nicht zerstört bei einer topologischen Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}'$ , d. h., geht bei dieser Abbildung  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{N}'$ ,  $R$  in  $R'$  über, so ist auch  $R'$  Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{N}'$ . Da nämlich die Umgebungen von  $R$  in  $\mathfrak{M}$  und die von  $R'$  in  $\mathfrak{M}'$  einander umkehrbar eindeutig entsprechen, so gibt es in jeder Umgebung von  $R'$  sowohl Punkte von  $\mathfrak{N}'$  als auch solche, die nicht zu  $\mathfrak{N}'$  gehören, da das Entsprechende für die Umgebungen von  $R$  in  $\mathfrak{M}$  richtig ist. — Ähnlich beweist man die topologische Invarianz der übrigen angeführten Begriffe. — Auch die Eigenschaft einer Abbildung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$ , stetig oder topologisch zu sein, ist topologisch invariant, d. h. ersetzt man  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  durch homöomorphe Umgebungsräume  $\mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{B}'$ , so ist die entsprechende Abbildung von  $\mathfrak{A}'$  in  $\mathfrak{B}'$  ebenfalls stetig bzw. topologisch.

1. Beispiel: Die Strecke  $0 \leq x \leq 1$  einer Zahlengeraden auf die Strecke  $0 \leq y \leq 1$  einer anderen Zahlengeraden topologisch abzubilden. — Die Abbildung wird nach Satz I von einer stetigen Funktion  $y = f(x)$  bewirkt.  $f(x)$  muß überdies jeden Wert zwischen 0 und 1 genau einmal annehmen. Aus der Analysis ist bekannt, daß eine solche Funktion entweder monoton ansteigt oder abnimmt. Daraus folgt, daß  $f(x)$  für  $x = 0$  entweder seinen kleinsten oder größten Wert hat, daß also die Randpunkte der einen in die des andern Strecke übergehen.

2. Beispiel: Stereographische Projektion der punktierten Kugelfläche auf die Zahlenebene. Als Teilmenge des dreidimensionalen Zahlenraumes ist die Einheitskugelfläche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

ein Umgebungsraum, und sie bleibt es, wenn man sie punktiert, d. h. einen Punkt, etwa den Nordpol  $(0,0,1)$ , aus ihr entfernt. Die punktierte Kugel ist der Zahlenebene homöomorph. Eine topologische Abbildung wird durch stereographische Projektion der Kugelfläche vom Nordpol auf die Zahlenebene  $x_3 = 0$ , die Äquatorebene, hergestellt. Die Abbildung ist eineindeutig, da der einzige Kugelflächenpunkt, der nicht abgebildet wird, der Nordpol, entfernt worden war. Um die Stetigkeit in Richtung von Kugel auf Ebene zu zeigen, müssen wir zu einer vorgegebenen Umgebung eines Punktes  $P'$  der Ebene eine Umgebung des Originalpunktes  $P$  auf der Kugel angeben, die sich ganz in sie abbildet. Eine beliebige Umgebung von  $P'$  enthält nun immer eine  $\varepsilon'$ -Umgebung (Kreisscheibe mit  $P'$  als Mittelpunkt). Eine Kalotte um den Originalpunkt  $P$ , die als Durchschnitt mit einer räumlichen  $\varepsilon$ -Umgebung zugleich eine Umgebung von  $P$  ist, bildet sich bekanntlich bei der stereographischen Projektion in eine Kreisscheibe ab, die  $P'$  zum inneren Punkte, aber im allgemeinen nicht zum Mittelpunkte hat. Wählt man diese Kalotte hinreichend klein, so kann man es daher erreichen, daß ihr Bild in die vorgegebene  $\varepsilon'$ -Umgebung von  $P'$  fällt. — Ebenso zeigt man, daß die Abbildung in Richtung von Ebene auf Kugel stetig ist. Also ist sie topologisch.

Ein anderer Beweis ergibt sich nach Satz I, wenn man die Abbildungsfunktionen aufstellt und ihre Stetigkeit nachweist. Um Bildpunkt- und Originalpunktkoordinaten unterscheiden zu können, führen wir ein mit dem  $x_1 x_2$ -System zusammenfallendes  $\xi_1 \xi_2$ -System in die Äquatorebene ein. Dann lauten die abbildenden Funktionen, wenn der Kugelradius, der in unserem Falle = 1 ist, mit  $r$  bezeichnet wird

und wir die Formeln gleich für  $n$  Dimensionen anschreiben:

$$\xi_i = \frac{r}{r - x_n} x_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$x_i = \frac{2r^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + r^2} \xi_i,$$

$$x_n = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - r^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + r^2} r.$$

Sie sind in der Tat beide für alle Punkte der punktierten Kugel und der Äquatorebene eindeutig und stetig.

**3. Beispiel:** Die Zahlenebene ist dem Inneren einer Kreisscheibe homöomorph. Um die topologische Abbildung herzustellen, hat man die Punkte der unteren Einheitshalbkugelfläche ausschließlich des berandenden Äquatorkreises einmal zentrisch vom Mittelpunkt  $M$  aus (Fig. 14 S. 10), das andere Mal orthogonal auf die Südpole  $S$  berührende Zahlenebene zu projizieren. Beide Abbildungen sind topologisch, und da zwei topologische Abbildungen nacheinander ausgeführt sind, eine topologische Abbildung ergeben, so ist damit eine topologische Abbildung der inneren Punkte des Einheitskreises auf die Zahlenebene hergestellt.

**Aufgaben:** 1. Man zeige, daß homöomorph sind: eine Zylinderfläche von endlicher Höhe  $h$  ausschließlich ihrer beiden Randkreise, ein einschaliges Hyperboloid des Zahnenraumes, eine Kreisringfläche ausschließlich ihrer beiden Randkreise und die zweimal punktierte Kugelfläche.

2. Der Randkreis einer Kreisscheibe sei topologisch auf sich selbst abgebildet. Man zeige, daß sich diese Abbildung zu einer topologischen Selbstabbildung der ganzen Kreisscheibe vervollständigen läßt.

3.  $\mathfrak{M}$  sei eine Teilmenge eines Zahnenraumes und  $P$  ein nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehöriger Punkt. Zu beweisen: Ist  $P$  Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{M}$ , so ist  $P$  auch Häufungspunkt und umgekehrt.

## § 7. Punktmengen in Zahnenräumen.

Die Umgebungsräume, mit denen wir es später zu tun haben, sind von besonderer Art: sie sind Teilmengen eines Zahnenraumes homöomorph. Ihre Struktur ist erheblich spezieller als die der allgemeinen Umgebungsräume, was darin seinen Ausdruck findet, daß für Teilmengen von Zahnenräumen viele Sätze gelten, die sich aus den Axiomen A und B von § 5 nicht folgern lassen. Wir betrachten in diesem Paragraphen Umgebungsräume  $\mathfrak{M}$ , die selbst Teilmengen von Zahnenräumen sind.

Auf Grund der Umgebungsdefinition in Zahnenräumen (S. 21) und der Definition von Umgebungen in Teilmengen (S. 22) ist eine Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{M}$  dann und nur dann Umgebung  $U(P|\mathfrak{M})$  eines Punktes  $P$  in  $\mathfrak{M}$ , wenn zu  $\mathfrak{N}$  alle Punkte von  $\mathfrak{M}$  gehören, deren Abstand von  $P$  kleiner als ein gewisses  $\varepsilon (> 0)$  ist. Die Gesamtheit der Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die weniger als  $\varepsilon$  von  $P$  entfernt sind, also der Durchschnitt der um  $P$  geschlagenen  $\varepsilon$ -Kugel mit  $\mathfrak{M}$ , heißt eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(P|\mathfrak{M})$ .  $U_\varepsilon(P|\mathfrak{M})$  ist offenbar eine in bezug auf  $\mathfrak{M}$  offene Teilmenge von  $\mathfrak{M}$ , weil in Ungleichung (3) von § 5 das Zeichen  $<$  und nicht  $\leq$  steht.

Eine wichtige Eigenschaft, die nicht jedem Umgebungsräume, wohl aber jeder Teilmenge  $\mathfrak{M}$  eines Zahnenraumes zukommt, ist nun die, daß

zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  punktfremde Umgebungen haben. Solche werden z. B. von zwei hinreichend kleinen  $\varepsilon$ -Kugeln um  $P$  und  $Q$  aus  $\mathfrak{M}$  ausgeschnitten.

Hieraus folgt, daß eine konvergente Folge, also eine solche, deren Punkte fast alle in jeder Umgebung eines Punktes  $P$  liegen, den Punkt  $P$  zum einzigen Grenzpunkte hat; denn es können wegen der Existenz punktfremder Umgebungen nicht fast alle Punkte zugleich in jeder Umgebung von  $P$  und von einem andern Punkte  $Q$  liegen.

Von den Sätzen, die über Teilmengen von Zahnenräumen in den Elementen der Analysis bewiesen zu werden pflegen, brauchen wir im folgenden den Häufungsstellensatz, den Satz vom Maximum einer stetigen Funktion und den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit.

**Satz I (Häufungsstellensatz):** Jede unendliche beschränkte Teilmenge eines Zahnenraumes hat wenigstens einen Häufungspunkt.\*.) Unendlich heißt eine Punktmenge, wenn sie unendlich viele Punkte enthält, beschränkt heißt eine Teilmenge eines Zahnenraumes, wenn die Absolutwerte aller Koordinaten unterhalb einer endlichen Schranke liegen.

**Satz II:** Das stetige Bild einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge eines Zahnenraumes in einem anderen Zahnenraum ist wieder beschränkt und abgeschlossen.

**Beweis:** Angenommen, das stetige Bild  $\mathfrak{M}'$  der beschränkten, abgeschlossenen Menge  $\mathfrak{M}$  sei nicht beschränkt und abgeschlossen. Dann gibt es eine aus lauter verschiedenen Punkten von  $\mathfrak{M}'$  bestehende Punktfolge  $P'_1, P'_2, \dots$ , die nach einem nicht zu  $\mathfrak{M}'$  gehörigen Begrenzungspunkte  $R$  konvergiert oder überhaupt keinen Häufungspunkt besitzt. Wählt man zu jedem  $P'_i$  einen Originalpunkt  $P_i$  in  $\mathfrak{M}$ , so besitzt die Menge  $P_1, P_2, \dots$  nach Voraussetzung einen zu  $\mathfrak{M}$  gehörigen Häufungspunkt  $R$ . In jeder Umgebung seines Bildpunktes  $R'$  liegen dann unendlich viele Punkte der Folge  $P'_1, P'_2, \dots$ , was der angenommenen Beschaffenheit dieser Punktfolge widerspricht.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist der

**Satz III (Satz vom Maximum):** Eine stetige Funktion, die in einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge eines Zahnenraumes definiert ist, nimmt einen kleinsten und einen größten Wert an.

Denn durch die stetige Funktion wird eine stetige Abbildung der Teilmenge in die Zahlengerade vermittelt.

Den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit kann man folgendermaßen fassen:

**Satz IV:** Ist eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge  $\mathfrak{U}$  eines Zahnenraumes stetig in einen Umgebungsraum  $\mathfrak{B}$  abgebildet und ist jedem Punkte  $Q$  von  $\mathfrak{B}$  willkürlich eine bestimmte Umgebung  $U^*(Q|\mathfrak{B})$  zugeordnet,

\*.) Den Beweis findet man z. B. in K. Knopp, Funktionentheorie I, Teil S. 22 (S. Göschen 1926). Der dort für zwei Dimensionen angegebene Beweis überträgt sich unmittelbar auf  $n$  Dimensionen.

so gibt es ein  $\delta > 0$  von der Art, daß das Bild der  $\delta$ -Umgebung eines jeden Punktes  $P$  von  $\mathfrak{A}$  von einer solchen Umgebung  $\mathcal{U}^*(Q|\mathfrak{B})$  eines geeignet gewählten Punktes  $Q$  überdeckt wird.

**Beweis:** Angenommen, der Satz sei falsch; dann gibt es für jedes  $\delta$  der Folge  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{i}, \dots$  einen Punkt  $P_i$ , dessen  $\frac{1}{i}$ -Umgebung nicht in eine Umgebung  $\mathcal{U}^*(Q|\mathfrak{B})$  abgebildet wird. Die Folge  $P_1, P_2, \dots$  hat wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{A}$  einen Häufungspunkt  $P$  in  $\mathfrak{A}$ . Ist  $\mathcal{U}^*(P'|\mathfrak{B})$  die vorgegebene Umgebung des Bildpunktes  $P'$ , so gibt es wegen der Stetigkeit der Abbildung eine Umgebung  $\mathcal{U}(P|\mathfrak{A})$ , deren Bild von  $\mathcal{U}^*(P'|\mathfrak{B})$  überdeckt wird. Da in  $\mathcal{U}(P|\mathfrak{A})$  unendlich viele Punkte der Folge liegen, so gibt es ein genügend großes  $i$ , für das die  $\frac{1}{i}$ -Umgebung von  $P_i$  ganz in  $\mathcal{U}(P|\mathfrak{A})$  liegt, ihr Bild also ganz von  $\mathcal{U}^*(P'|\mathfrak{B})$  überdeckt wird. Damit ist ein Widerspruch aufgewiesen.

Fallen die Mengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zusammen und ist die stetige Abbildung die identische, so ergibt sich als Folgerung

**Satz V:** Ist jedem Punkte  $Q$  einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge  $\mathfrak{A}$  eines Zahlenraumes eine willkürliche Umgebung  $\mathcal{U}^*(Q|\mathfrak{A})$  zugeordnet, so gibt es ein  $\delta > 0$  derart, daß die  $\delta$ -Umgebung eines jeden Punktes  $P$  von  $\mathfrak{A}$  von einer solchen Umgebung  $\mathcal{U}^*(Q|\mathfrak{A})$  eines geeignet gewählten Punktes  $Q$  überdeckt wird.

Die übliche Fassung des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit lautet so:

**Satz VI:** Wird eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge  $\mathfrak{A}$  eines Zahlenraumes eindeutig und stetig in einen anderen Zahlenraum  $\mathfrak{B}$  abgebildet, so gibt es zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, daß je zwei Punkte von  $\mathfrak{A}$ , deren Abstand  $< \delta$  ist, in zwei Punkten von  $\mathfrak{B}$  übergehen, die um weniger als  $\varepsilon$  voneinander entfernt sind.

**Beweis:** Man wähle in Satz IV für alle Punkte  $Q$  von  $\mathfrak{B}$  als  $\mathcal{U}^*(Q|\mathfrak{B})$  die  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung von  $Q$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  so, daß die  $\delta$ -Umgebung eines beliebigen Punktes von  $\mathfrak{A}$  in eine solche  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung eines geeigneten Punktes  $Q$  abgebildet wird. Sind dann  $P_1$  und  $P_2$  zwei Punkte von  $\mathfrak{A}$  mit einer Entfernung  $< \delta$ , so gehört der  $\delta$ -Umgebung von  $P_1$  auch der Punkt  $P_2$  an, und da das Bild der  $\delta$ -Umgebung in  $\mathfrak{B}$  von einer  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung überdeckt wird, so haben die Bildpunkte  $P'_1$  und  $P'_2$  in  $\mathfrak{B}$  einen Abstand  $< \varepsilon$ .

Zu späterem Gebrauche stellen wir noch einige weitere Sätze über Punktmengen in Zahlenräumen zusammen.

**Satz VII:** Es sei  $\mathfrak{M}$  eine Teilmenge eines Zahlenraumes (oder homöomorph einer solchen Teilmenge),  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{M}$ ,  $\Omega$  eine Umgebung

von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{M}$ ,  $\Omega_1$  eine Umgebung von  $P$  bezüglich  $\Omega$ . Dann ist  $\Omega_1$  auch Umgebung von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{M}$ .

**Beweis:**  $\Omega$  enthält als Umgebung von  $P$  in  $\mathfrak{M}$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $\mathcal{U}_\varepsilon(P|\mathfrak{M})$ . Ebenso enthält  $\Omega_1$  eine  $\delta$ -Umgebung  $\mathcal{U}_\delta(P|\Omega)$ . Ist dann  $\eta$  der kleinere der beiden Radien  $\varepsilon$  und  $\delta$ , so gehört erst recht  $\mathcal{U}_\eta(P|\mathfrak{M})$  zu  $\Omega$  und  $\mathcal{U}_\eta(P|\Omega)$  zu  $\Omega_1$ . Daher gehört  $\mathcal{U}_\eta(P|\mathfrak{M})$  sogar zu  $\Omega_1$ .  $\Omega_1$  enthält also alle Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die von  $P$  einen Abstand  $< \eta$  haben, und ist daher eine Umgebung von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{M}$ , was zu beweisen war.

Es sei jetzt  $\mathfrak{N}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{M}$ . Die abgeschlossene Hülle  $\mathfrak{N}'$  von  $\mathfrak{N}$  bezüglich  $\mathfrak{M}$  war S. 23 erklärt als der Durchschnitt aller  $\mathfrak{N}$  umfassenden abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathfrak{M}$ . Somit gehören insbesondere alle Begrenzungspunkte von  $\mathfrak{N}$  (bezüglich  $\mathfrak{M}$ ) zu  $\mathfrak{N}'$ . Es gilt sogar: Die abgeschlossene Hülle  $\mathfrak{N}'$  wird genau von  $\mathfrak{N}$  und seiner Begrenzung  $\mathfrak{N}$  gebildet. Man muß zeigen, daß die Vereinigungsmenge  $\mathfrak{N} + \bar{\mathfrak{N}}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  ist. Ist  $R$  ein Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{N} + \bar{\mathfrak{N}}$  bezüglich  $\mathfrak{M}$ , so enthält eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $\mathcal{U}_\varepsilon(R|\mathfrak{M})$  einen Punkt von  $\mathfrak{N} + \bar{\mathfrak{N}}$ , der entweder selbst ein Punkt von  $\mathfrak{N}$  oder ein Begrenzungspunkt  $\bar{R}$  von  $\mathfrak{N}$  ist. In letzterem Falle liegt  $\bar{R}$  um weniger als  $\varepsilon$  von  $R$  entfernt, und da es Punkte von  $\mathfrak{N}$  gibt, die beliebig wenig von  $\bar{R}$  entfernt sind (Definition des Begrenzungspunktes!), so gibt es in jedem Falle Punkte von  $\mathfrak{N}$ , die um weniger als  $\varepsilon$  von  $R$  entfernt sind, d. h.  $R$  ist auch Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{N}$ , gehört also zu  $\bar{\mathfrak{N}}$ . — Ebenso beweist man, daß die Begrenzung von  $\mathfrak{N}$  bezüglich  $\mathfrak{M}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  ist.

$\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  seien zwei punktfremde beschränkte abgeschlossene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und  $d(P_1, P_2)$  die Entfernung eines Punktes  $P_1$  aus  $\mathfrak{M}_1$  von einem Punkte  $P_2$  aus  $\mathfrak{M}_2$ . Die untere Grenze  $\delta$  aller Entfernungen  $d(P_1, P_2)$  heißt die Entfernung der beiden Mengen  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ . — Die untere Grenze wird wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  wirklich angenommen und ist daher wegen der Punktfremdheit  $> 0$ .

Unter dem Durchmesser einer beschränkten abgeschlossenen Menge im  $\mathbb{R}^n$  wird die obere Grenze der Entfernungen je zweier Punkte der Menge verstanden.

### § 8. Identifizieren.

Es kommt in der Geometrie häufig vor, daß man die Punkte eines Umgebungsraumes in Klassen äquivalenter zerlegen und diese Klassen als „Punkte“ eines neuen Umgebungsraumes einführen muß. Projiziert man z. B. die Punkte des euklidischen Raumes parallel auf eine Ebene, so läßt sich dieser Prozeß als eine Klasseneinteilung auffassen: alle Raumpunkte, die denselben Projektionspunkt haben, also alle Punkte einer projizierenden Geraden, bilden eine Klasse, und der Projektionspunkt geht aus ihnen gleichsam dadurch hervor, daß man sie als nicht verschieden betrachtet und mit dem Projektionspunkt identifiziert. — Ein anderes Beispiel! Es liege eine

Translationengruppe der euklidischen Ebene vor, die von einer Verschiebung in der  $x$ -Richtung,  $x' = x + a$ , und einer in der  $y$ -Richtung,  $y' = y + b$ , erzeugt wird. Man pflegt dann alle Punkte als äquivalent anzusehen und in eine Klasse zu tun, die durch Translationen der Gruppe ineinander übergeführt werden können, deren Koordinaten sich also voneinander nur durch Vielfache von  $a$  bzw.  $b$  unterscheiden.

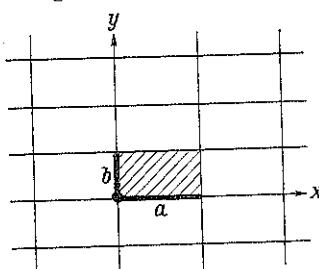


Fig. 30.

Nimmt man aus jeder Klasse einen geeigneten gewählten Repräsentanten heraus, so machen diese Repräsentanten die inneren Punkte eines Rechteckes aus (Fig. 30), zu dem noch ein Eckpunkt und zwei Seiten hinzukommen, also alle Punkte mit Koordinaten, die den Ungleichungen  $0 \leq x < a$ ,  $0 \leq y < b$  genügen. Durch „Identifizieren“ äquivalenter Punkte entsteht jetzt aus der euklidischen Ebene die Ringfläche (§ 1), da die Seite  $x = a$  der Seite  $x = 0$  und die Seite  $y = b$  der Seite  $y = 0$  äquivalent ist. — Schließlich brauchen wir den Prozeß des Identifizierens, um Flächenstücke längs Seiten aneinander zu heften und daraus Flächen zu gewinnen. Z. B. erklären wir in der

Punktmenge der Zahlenebene, die aus zwei Dreiecken gebildet wird (Fig. 31), die Punkte als äquivalent, die bei einer topologischen Abbildung einer Seite des einen Dreiecks auf eine des anderen einander entsprechen, und identifizieren sie. Dann fügen sich die beiden Dreiecke zu einem Viereck zusammen. Diesen Prozeß des Identifizierens wollen wir jetzt auf die Grundbegriffe der Mengenlehre: Menge, Teilmenge, Zuordnung zurückführen.

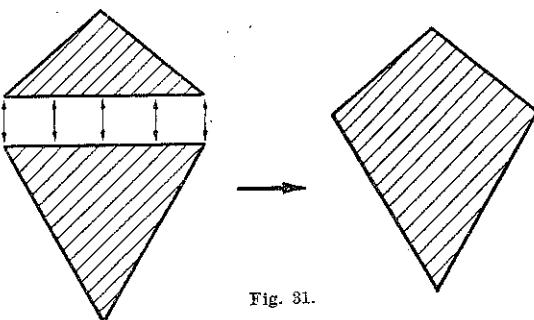


Fig. 31.

Die Punkte eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{M}$  seien in Klassen (Teilmengen) so eingeteilt, daß jeder Punkt zu genau einer Klasse gehört. Die Punkte einer Klasse mögen äquivalente Punkte heißen. Es wird z. B. zugelassen, daß in einer Klasse ein einziger Punkt, in einer anderen unendlich viele Punkte liegen. Wir bilden eine neue Menge  $\mathfrak{M}'$ , deren „Punkte“ die Klassen äquivalenter Punkte von  $\mathfrak{M}$  sind. Dadurch ist eine Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}'$  gegeben; man hat nur einem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{M}$  seine Klasse  $P'$  von  $\mathfrak{M}'$  als Bild zuzuordnen.  $\mathfrak{M}'$  soll durch folgende Festsetzung zu einem Umgebungsraume gemacht werden: Sind  $P_1, P_2, \dots$  alle Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die sich in ein und denselben Punkt  $P'$  von  $\mathfrak{M}'$  abbilden, so wähle man zu jedem Punkte  $P_i$  eine Umgebung  $U(P_i | \mathfrak{M})$  und bilde die Vereinigungsmenge  $U(P_1 | \mathfrak{M}) + U(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots$  in  $\mathfrak{M}'$  ab.

Die Bildmenge wird als Umgebung  $U(P' | \mathfrak{M}')$  definiert. Diese Umgebungen in  $\mathfrak{M}'$  erfüllen offenbar Axiom A. Sie erfüllen auch Axiom B. Denn ist  $U$  eine  $U(P' | \mathfrak{M}')$  umfassende Teilmenge von  $\mathfrak{M}'$ , so ist die Originalmenge  $U$  von  $U$ , d. h. die Menge aller Punkte, die sich in Punkte von  $U$  abbilden, eine Umgebung  $U(P_i | \mathfrak{M})$  des beliebigen Originalpunktes  $P_i$  von  $P'$ ; denn  $U(P_i | \mathfrak{M})$  umfaßt die Umgebung  $U(P_i | \mathfrak{M})$ .  $U$  ist das Bild der Vereinigungsmenge  $U(P_1 | \mathfrak{M}) + U(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots = U$  und daher nach Definition Umgebung von  $P'$ .

Man sagt,  $\mathfrak{M}'$  sowie jeder zu  $\mathfrak{M}'$  homöomorphe Umgebungsraum entstehe aus  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren äquivalenter Punkte.

Ersetzt man  $\mathfrak{M}$  durch einen homöomorphen Umgebungsraum  $M$ , erklärt man in  $M$  die entsprechenden Punkte wie in  $\mathfrak{M}$  als äquivalent, so erhält man durch Identifizieren der äquivalenten Punkte von  $M$  einen Umgebungsraum  $M'$ , der offenbar zu  $\mathfrak{M}'$  homöomorph ist.

Da es zu jeder Umgebung  $U(P' | \mathfrak{M}')$  eine Umgebung des Originalpunktes  $P_i$ , nämlich  $U(P_i | \mathfrak{M})$ , gibt, deren Bild ganz zu  $U(P' | \mathfrak{M}')$  gehört, so gilt

Satz I: Die Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}'$  ist stetig.

Wird umgekehrt ein Umgebungsraum  $\mathfrak{M}$  stetig auf einen beliebigen anderen  $\mathfrak{M}'$  abgebildet, so fragt es sich, wann  $\mathfrak{M}'$  aus  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren derjenigen Punkte entstanden gedacht werden kann, die sich in denselben Punkt von  $\mathfrak{M}'$  abbilden. Hierfür gilt

Satz II: Der Bildraum  $\mathfrak{M}'$  ist nur dann aus dem stetig auf ihn abgebildeten Umgebungsraum  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren aller Punkte mit gleichem Bildpunkten entstanden, wenn das Bild der Vereinigungsmenge  $U(P_1 | \mathfrak{M}) + U(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots$  eine Umgebung des Bildpunktes  $P'$  von  $\mathfrak{M}'$  ausmacht; dabei sind  $P_1, P_2, \dots$  die sämtlichen Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die sich in  $P'$  abbilden, und die Umgebungen  $U(P_1 | \mathfrak{M}), U(P_2 | \mathfrak{M}), \dots$  sind beliebig gewählt.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß jede Umgebung  $U(P' | \mathfrak{M}')$  das Bild einer solchen Vereinigungsmenge  $U(P_1 | \mathfrak{M}) + U(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots$  ist. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit gibt es zu irgendeinem der Punkte  $P_1, P_2, \dots$ , etwa zu  $P_i$ , eine Umgebung  $U(P_i | \mathfrak{M})$ , die sich in  $U(P' | \mathfrak{M}')$  abbildet. Die Menge  $U$ , die aus allen sich in  $U(P' | \mathfrak{M}')$  abbildenden Punkten von  $\mathfrak{M}$  besteht, enthält  $U(P_i | \mathfrak{M})$  als Teilmenge und ist somit nach Axiom B selbst eine Umgebung  $U(P_i | \mathfrak{M})$  von  $P_i$ . Daher ist  $U(P' | \mathfrak{M}')$  Bild der Vereinigungsmenge  $U(P_1 | \mathfrak{M}) + U(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots$ .

Wir geben uns jetzt Rechenschaft von der fast selbstverständlichen Tatsache, daß man das Identifizieren von Punkten schrittweise vornehmen kann und unabhängig von der Reihenfolge immer zum selben Ergebnis gelangt: Entsteht  $\mathfrak{M}'$  aus  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren äquivalenter Punkte und  $\mathfrak{M}''$  ebenso aus  $\mathfrak{M}'$ , so ist dadurch eine Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}''$  gegeben;  $\mathfrak{M}''$  entsteht dann aus  $\mathfrak{M}$ , indem man alle Punkte von  $\mathfrak{M}$  identifiziert, die sich in denselben Punkt von  $\mathfrak{M}''$  abbilden.

**Beweis:** Ein Punkt  $P''$  von  $\mathfrak{M}''$  ist Bildpunkt der Punkte  $P'_1, P'_2, \dots$  von  $\mathfrak{M}'$ ;  $P'_i$  ist seinerseits Bildpunkt der Punkte  $P_{i1}, P_{i2}, \dots$  von  $\mathfrak{M}$ . Die Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}''$  ist stetig, also genügt es nach Satz II zu zeigen, daß  $\sum_i \sum_j \mathcal{U}(P_{ij} | \mathfrak{M})$  sich auf eine Umgebung von  $P''$  abbildet.

Nun geht  $\sum_j \mathcal{U}(P_{ij} | \mathfrak{M})$  in eine Umgebung  $\mathcal{U}(P'_i | \mathfrak{M}')$  über. Denn  $\mathfrak{M}'$  entsteht durch Identifizieren der Punkte  $P_{i1}, P_{i2}, \dots$ . Weiter geht  $\sum_i \mathcal{U}(P'_i | \mathfrak{M}')$  in eine Umgebung  $\mathcal{U}(P'' | \mathfrak{M}'')$  über; denn  $\mathfrak{M}''$  entsteht aus  $\mathfrak{M}'$  durch Identifizieren der Punkte  $P'_1, P'_2, \dots$ . Also bildet sich  $\sum_i \sum_j \mathcal{U}(P_{ij} | \mathfrak{M})$  auf die Umgebung  $\mathcal{U}(P'' | \mathfrak{M}'')$  ab.

**Satz III:**  $\mathfrak{M}$  sei insbesondere eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge eines Zahlenraumes, deren Punkte in Klassen äquivalenter aufgeteilt seien.  $\mathfrak{M}$  sei auf eine Punktmenge  $\mathfrak{M}'$  eines anderen Zahlenraumes eindeutig und stetig so abgebildet, daß jeder Punkt von  $\mathfrak{M}'$  Bildpunkt wird, daß äquivalente Punkte von  $\mathfrak{M}$  in denselben Punkt von  $\mathfrak{M}'$  übergehen und nichtäquivalente Punkte in verschiedene\*); dann entsteht  $\mathfrak{M}'$  aus  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren äquivalenter Punkte.

**Beweis:** Nach Satz II braucht man nur zu zeigen: Sind  $P_1, P_2, \dots$  die sämtlichen in  $P'$  abgebildeten Punkte und ist  $\mathcal{U}(P_i | \mathfrak{M})$  eine willkürliche Umgebung von  $P_i$ , so ist das Bild der Vereinigungsmenge  $\mathcal{U}(P_1 | \mathfrak{M}) + \mathcal{U}(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots$  eine Umgebung  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{M}')$ . Offenbar ist dies Bild eine Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{M}'$ , die  $P'$  enthält. Angenommen,  $\mathfrak{N}$  ist keine Umgebung von  $P'$ ; dann gibt es in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $P'$  Punkte von  $\mathfrak{M}'$ , die nicht zu  $\mathfrak{N}$  gehören. Insbesondere also gibt es zu jedem  $\varepsilon$  der Folge  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{i}, \dots$  einen Punkt  $Q'_i$ , der zur  $\frac{1}{i}$ -Umgebung von  $P'$ , aber nicht zu  $\mathfrak{N}$  gehört. Sind  $Q_1, Q_2, \dots$  irgendwelche Originalpunkte der Folge  $Q'_1, Q'_2, \dots$ , so haben sie wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{M}$  mindestens einen Häufungspunkt  $Q$ . Der Bildpunkt  $Q'$  von  $Q$  enthält dann wegen der Stetigkeit der Abbildung in jeder Umgebung unendlich viele Punkte der Folge  $Q'_1, Q'_2, \dots$ , und da  $P'$  der einzige Häufungspunkt dieser Folge ist, so ist  $Q' = P'$ .  $Q$  ist also einer der Punkte  $P_1, P_2, \dots$ , etwa  $P_1$ . Dann liegen unendlich viele der Punkte  $Q_1, Q_2, \dots$  in  $\mathcal{U}(P_1 | \mathfrak{M})$ , also liegen unendlich viele der Punkte  $Q'_1, Q'_2, \dots$  in  $\mathfrak{N}$ . Das ist ein Widerspruch.

Wir können jetzt die Frage klären, wann aus der Stetigkeit zweier von drei durch die Beziehung  $\psi\varphi = \chi$  (erst  $\varphi$ , dann  $\psi$ ) verknüpften Abbildungen die Stetigkeit der dritten folgt. Wie bereits früher (§ 6) bemerkt, ist  $\chi$  stetig, wenn  $\varphi$  und  $\psi$  es sind. Dagegen folgt aus der Stetigkeit von  $\psi$  und  $\chi$  nicht diejenige von  $\varphi$ , da  $\chi$  z. B. bei beliebiger Wahl von  $\varphi$  stetig ist, wenn  $\psi$  alle Punkte in einen einzigen Punkt übergehen läßt.

\*.) Dies ist freilich bei beliebiger Klasseneinteilung nicht immer möglich.

Aus Satz III folgt nun aber, daß die Stetigkeit von  $\varphi$  und  $\chi$  diejenige von  $\psi$  unter gewissen Bedingungen nach sich zieht. Es gilt nämlich

**Satz IV:** Eine beschränkte abgeschlossene Menge  $\mathfrak{M}$  eines Zahnenraumes werde vermöge einer stetigen Abbildung  $\varphi$  in einen anderen Zahnenraum abgebildet und das Bild  $\mathfrak{M}'$  abermals vermöge einer Abbildung  $\psi$  (von der wir keine Stetigkeit voraussetzen) in einen beliebigen Umgebungsraum. Ist dann  $\mathfrak{M}''$  das Bild von  $\mathfrak{M}'$  und ist die Abbildung  $\psi\varphi = \chi$  eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}''$ , so ist auch  $\psi$  stetig.

**Beweis:**  $P'$  sei ein beliebiger Punkt von  $\mathfrak{M}'$  und  $P'' = \psi(P')$  sein Bildpunkt in  $\mathfrak{M}''$ . Ferner seien  $P_1, P_2, \dots$  alle Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die sich bei  $\varphi$  in  $P'$  abbilden. Wegen der Stetigkeit von  $\chi$  gibt es zu vorgegebener Umgebung  $\mathcal{U}(P'' | \mathfrak{M}'')$  Umgebungen  $\mathcal{U}(P_1 | \mathfrak{M}), \mathcal{U}(P_2 | \mathfrak{M}), \dots$ , die sich alle in  $\mathcal{U}(P'' | \mathfrak{M}'')$  abbilden. Erklärt man nun in  $\mathfrak{M}$  alle Punkte als äquivalent, die in denselben Punkt von  $\mathfrak{M}'$  übergehen, so entsteht nach Satz III  $\mathfrak{M}'$  aus  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren äquivalenter Punkte. Die Vereinigungsmenge  $\mathcal{U}(P_1 | \mathfrak{M}) + \mathcal{U}(P_2 | \mathfrak{M}) + \dots$  geht also in eine Umgebung  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{M}')$  über, die sich ihrerseits in  $\mathcal{U}(P'' | \mathfrak{M}'')$  abbildet. D. h.  $\psi$  ist in  $P'$ , also in jedem Punkte von  $\mathfrak{M}'$  stetig.

Ist in Satz IV  $\varphi$  eine eindeutige, in der Richtung  $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$  stetige Abbildung und setzt man  $\psi = \varphi^{-1}$ , so ist  $\psi\varphi$  die identische Selbstabbildung von  $\mathfrak{M}$ , also sicher stetig. Daher ist auch  $\varphi^{-1}$  stetig. Damit ist bewiesen

**Satz V:** Eine eindeutige und stetige Abbildung einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge eines Zahnenraumes besitzt eine stetige Umkehrung, ist also sogar topologisch.

**1. Beispiel:** Die Menge  $\mathfrak{M}$  sei eine Kreisscheibe (einschließlich Randkreis). Alle Punkte des Randkreises sind zu identifizieren. — Es ergibt sich die Kugelfläche. Denn man kann die Kreisscheibe so stetig auf die Kugelfläche abbilden, daß immer nur äquivalente Punkte in denselben Kugelpunkt übergehen. Die vom Kreisscheibenmittelpunkt nach dem Rand führenden Radien bilde man etwa auf die vom Südpol nach dem Nordpol ziellenden Meridiankreise ab, den Randpunkt eines Radius also immer in den Nordpol. Nach Satz III entsteht dann die Kugelfläche durch Identifizieren aller sich in den Nordpol abbildenden Punkte der Kreisscheibe.

**2. Beispiel:** Erklärt man als eine Umgebung einer Geraden  $g$  in der Menge der durch einen Punkt gehenden Geraden des Zahnenraumes alle Geraden, die einem Kreiskegel um die Gerade  $g$  angehören (und alle diesen Kegel enthaltenden Teilmengen von Geraden), so entsteht ein zu diesem Umgebungsraume (dessen „Punkte“ Gerade sind) homöomorpher Umgebungsraum durch Identifizieren von Diametralpunkten einer Kugelfläche des Zahnenraumes. Es ist der „projektive Ebene“ genannte, in § 2 eingeführte Umgebungsraum.

§ 9.  $n$ -Simplex.

Es seien im  $m$ -dimensionalen Zahlenraum  $\mathbb{R}^m$   $n+1$  linear unabhängige Punkte

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

gegeben;  $0 \leq n \leq m$ . Linear unabhängig heißen  $n+1$  Punkte, wenn sie nicht in einem  $(n-1)$ -dimensionalen linearen Teilraum liegen.\*). Es seien die Koordinaten des Punktes  $P_i$

$$p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}. \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

Der Punkt  $P_i$  sei mit einer Masse

$$\mu_i \geq 0 \quad (2)$$

belegt, und die Gesamtsumme der Massen sei = 1:

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n = 1. \quad (3)$$

Die Massen haben einen bestimmten Schwerpunkt  $X$  mit den Koordinaten

$$x_1 = \sum_0^n \mu_i p_{i1}, \quad x_2 = \sum_0^n \mu_i p_{i2}, \dots, \quad x_m = \sum_0^n \mu_i p_{im}. \quad (4)$$

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  heißen die *baryzentrischen Koordinaten* von  $X$ ; sie sind an die Bedingungen (2) und (3) gebunden. Die Menge aller Punkte  $X$  macht ein (geradliniges)  $n$ -Simplex  $\mathbb{E}^n$  des Zahlenraumes  $\mathbb{R}^m$  aus.  $\mathbb{E}^n$  ist hiernach eine abgeschlossene Teilmenge des Zahlenraumes. Die Punkte  $P_0, P_1, \dots, P_n$  heißen die *Ecken* des  $n$ -Simplexes. Durch Angabe seiner Ecken ist das Simplex vollständig bestimmt und kann daher ebensogut wie mit einem einzigen Buchstaben  $\mathbb{E}^n$  durch die Ecken bezeichnet werden.

Führt man an Stelle der Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ein Parallelkoordinatensystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  durch eine lineare Transformation mit nicht-verschwindender Determinante ein, so transformieren sich die beiden Seiten von (4) in gleicher Weise, und man erhält die Gleichungen

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{i1}, \quad \xi_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{i2}, \dots, \quad \xi_m = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{im}. \quad (5)$$

Darin sind  $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{im}$  die Koordinaten von  $P_i$  im neuen Koordinatensystem. Die Koordinaten des Schwerpunktes drücken sich also in allen Parallelkoordinatensystemen in gleicher Weise durch die baryzentrischen Koordinaten aus.

Insbesondere kann man das Koordinatensystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  so wählen, daß  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  Parallelkoordinaten in dem linearen Raum  $\mathcal{L}^n$  sind,

\*) Über die hier nicht ausführlich erklärten Grundbegriffe der affinen Geometrie vergleiche man Schreier-Sperner, Analytische Geometrie (Leipzig 1931).

dem  $\mathbb{E}^n$  angehört. Dann sind  $\pi_{i, n+1}, \pi_{i, n+2}, \dots, \pi_{i, m}$  alle gleich Null, und das System (5) wird zu

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{i1}, \quad \xi_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{i2}, \dots, \quad \xi_n = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{in}. \quad (6)$$

Spezialisiert man noch weiter und macht die von  $P_0$  nach den Ecken  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ausgehenden Vektoren zu Basisvektoren des Koordinatensystems, so wird  $\pi_{ii} = 1$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ , und alle anderen  $\pi_{ij}$  sind = 0, so daß sich das Gleichungssystem

$$\xi_1 = \mu_1, \quad \xi_2 = \mu_2, \dots, \quad \xi_n = \mu_n \quad (7)$$

ergibt. In diesem Koordinatensystem stimmen also die *baryzentrischen* Koordinaten  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  mit den *Parallel*koordinaten überein. Die Punkte von  $\mathbb{E}^n$  genügen darin den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &\geq 0, \quad \xi_2 \geq 0, \dots, \quad \xi_n \geq 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n &\leq 1. \end{aligned}$$

Das Simplex ist als Teilmenge des Zahlenraumes selbst ein Umgebungsraum. Eine  $\varepsilon$ -Umgebung eines seiner Punkte besteht aus den Punkten, die es mit einer um den Punkt geschlagenen  $\varepsilon$ -Kugel gemein hat.

Das 0-Simplex ist ein einzelner Punkt, das 1-Simplex eine Strecke, das 2-Simplex ein Dreieck, das 3-Simplex ein Tetraeder.

Diejenigen Simplexpunkte, deren baryzentrische Koordinate  $\mu_n = 0$  ist, machen ein  $(n-1)$ -Simplex aus, die  $(n-1)$ -dimensionale Seite  $\mathbb{E}_n^{n-1}$  von  $\mathbb{E}^n$ , die dem Punkte  $P_n$  gegenüberliegt; denn die Formeln (2) bis (4) gelten für diese Punktmenge, wenn man nur den Index  $n$  durch  $(n-1)$  ersetzt. Ebenso liegt der Ecke  $P_i$  eine Seite  $\mathbb{E}_i^{n-1}$  gegenüber.

Eine  $k$ -dimensionale Seite des Simplexes  $\mathbb{E}^n$  ist eine Punktmenge, für die  $n-k$  baryzentrische Koordinaten = 0 sind und nur die übrigen  $k+1$  Koordinaten im Einklang mit (2) und (3) variieren. Auch eine  $k$ -dimensionale Seite ist ein Simplex  $\mathbb{E}^k$ . Insbesondere heißen die ein-dimensionalen Seitensimplexe die *Kanten* von  $\mathbb{E}^n$ . Die Ecken einer  $k$ -dimensionalen Seite sind zugleich Ecken von  $\mathbb{E}^n$ , und umgekehrt spannen je  $k+1$  beliebige Ecken von  $\mathbb{E}^n$  ein  $k$ -dimensionales Seitensimplex auf. Es gibt somit  $\binom{n+1}{k+1}$   $k$ -dimensionale Seitensimplexe.

$\mathbb{E}^n$  besteht aus der Gesamtheit der geradlinigen Verbindungsstrecken der Punkte der Seite  $\mathbb{E}_n^{n-1}$  mit der gegenüberliegenden Ecke  $P_n$ . Um den Schwerpunkt aller  $n+1$  Massen zu erhalten, kann man nämlich erst den Schwerpunkt der Massen  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$  bilden — das ist ein Punkt von  $\mathbb{E}_n^{n-1}$  — und dann den Schwerpunkt der in ihm konzentrierten Masse  $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{n-1}$  und der Masse  $\mu_n$  — der liegt auf der Verbindungsstrecke. Jeder Punkt der Verbindungsstrecke ist ein Simplexpunkt, da man die Masse  $\mu_n$  von 1 bis 0 abnehmen lassen kann, ohne das Verhältnis der übrigen  $n$  Massen zu verändern; dabei bewegt sich der Gesamtschwer-

punkt auf der Verbindungsstrecke von  $P_n$  nach dem durch das feste Massenverhältnis bestimmten Punkte der gegenüberliegenden Seite.

Verbindet man alle Punkte einer Punktmenge  $\mathfrak{M}$  eines Zahlenraumes mit einem festen Punkt  $P$  durch geradlinige Strecken, so nennt man diesen Vorgang die *Projektion* der Punktmenge  $\mathfrak{M}$  vom Projektionszentrum  $P$  aus und die Gesamtheit der Verbindungsstrecken den *Projektionskegel*. Das  $n$ -Simplex entsteht alsdann durch Projektion einer seiner  $(n-1)$ -dimensionalen Seiten vom gegenüberliegenden Eckpunkte aus. Man kann daher das  $n$ -Simplex  $\mathbb{E}^n$  durch fortgesetzte Projektion aus einem 0-Simplexe erzeugen: durch Projektion einer Ecke von  $\mathbb{E}^n$ , etwa  $P_0$ , von einer anderen Ecke, etwa  $P_1$ , aus entsteht zunächst eine Kante, durch deren Projektion von einer neuen Ecke  $P_2$  aus eine 2-dimensionale Seite und so fort, bis durch Projektion einer  $(n-1)$ -dimensionalen Seite von der letzten noch nicht als Projektionszentrum benutzten Ecke  $P_n$  aus ganz  $\mathbb{E}^n$  entsteht.

Eine wichtige Eigenschaft eines  $n$ -Simplexes ist seine Konvexität. Unter einem *konvexen Bereich* eines Zahlenraumes verstehen wir eine beschränkte abgeschlossene Menge, die mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält. — Die *Dimension* eines konvexen Bereiches ist diejenige des linearen Raumes  $\mathfrak{L}^r$  niederster Dimension, der ihn enthält. In bezug auf  $\mathfrak{L}^r$  hat der konvexe Bereich innere Punkte, da er  $r+1$  linear unabhängige Punkte und damit ein ganzes  $r$ -Simplex enthält, das innere Punkte in bezug auf  $\mathfrak{L}^r$  besitzt. Wir nennen die Menge der Begrenzungspunkte innerhalb  $\mathfrak{L}^r$  den *Rand des konvexen Bereiches*, die inneren Punkte in bezug auf  $\mathfrak{L}^r$  seine *mittleren Punkte*. Erst später (V. Kapitel) können wir zeigen, daß die Randpunkte und die mittleren Punkte eines konvexen Bereiches durch innere topologische Eigenschaften, die von der Einbettung in einen Zahlenraum unabhängig sind, sich unterscheiden. — Man hüte sich, die mittleren Punkte mit den inneren Punkten eines konvexen Bereiches bezüglich irgendeines einbettenden Zahlenraumes zu verwechseln. Mittlere Punkte sind nur dann innere Punkte, wenn die Dimension des einbettenden Raumes mit der des konvexen Bereiches übereinstimmt; andernfalls ist jeder Punkt des konvexen Bereiches Begrenzungspunkt. — Ein 0-dimensionaler konvexer Bereich besteht aus einem einzigen mittleren Punkte.

Der Projektionskegel eines konvexen Bereiches  $\mathfrak{B}$  von einem Punkte aus ist wieder ein konvexer Bereich; denn zwei Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  des Projektionskegels werden in gewisse (nicht notwendig eindeutig bestimmte) Bildpunkte von  $\mathfrak{B}$  projiziert; diese haben eine ganz zu  $\mathfrak{B}$  gehörige Verbindungsstrecke, und deren Projektionskegel enthält die Verbindungsstrecke ( $Q_1 Q_2$ ).

Nunmehr folgt: Weil ein Punkt  $P_0$  ein 0-dimensionaler konvexer Bereich ist und das  $n$ -Simplex aus ihm durch fortgesetzte Projektion entsteht, ist es selbst ein konvexer Bereich, und zwar offenbar ein  $n$ -dimensionaler. — Es ist überdies der kleinste konvexe Bereich, der die  $n+1$

Ecken von  $\mathbb{E}^n$  enthält, wofür man auch sagt: es ist die *konvexe Hülle* der  $n+1$  Punkte.

Als konvexem Bereich kommt einem  $n$ -Simplex ein bestimmter Rand zu; er besteht offenbar aus seinen sämtlichen Seiten. Seine übrigen Punkte sind mittlere Punkte. — Ein 0-Simplex hat keinen Rand, sondern besteht aus einem einzigen mittleren Punkte.

Jedes Simplex hat einen bestimmten *Mittelpunkt*, das ist der Punkt  $M$  mit den baryzentrischen Koordinaten:

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_n \quad \left( = \frac{1}{n+1} \right).$$

Eine *lineare (affine) Abbildung* eines  $n$ -Simplexes  $\mathbb{E}^n$  auf ein  $r$ -Simplex  $'\mathfrak{E}^r$  ( $r \leq n$ ) wird dadurch hergestellt, daß man die Ecken von  $\mathbb{E}^n$  in die Ecken von  $'\mathfrak{E}^r$  abbildet, also jeder Ecke von  $\mathbb{E}^n$  eine von  $'\mathfrak{E}^r$  zuordnet und keine Ecke von  $'\mathfrak{E}^r$  leer ausgehen läßt, die Massen von  $\mathbb{E}^n$  in die Bildcken hinaubernimmt und dem Schwerpunkt den Schwerpunkt zuordnet. Damit erhält jeder Punkt von  $\mathbb{E}^n$  einen eindeutig bestimmten Bildpunkt in  $'\mathfrak{E}^r$ , und diese lineare Abbildung ist bereits durch die Abbildung der Ecken bestimmt. — Die Abbildung von  $\mathbb{E}^n$  auf  $'\mathfrak{E}^r$  heißt *ausgeartet*, wenn  $r < n$  ist. Alsdann fallen mindestens zwei Ecken von  $\mathbb{E}^n$  in dieselbe Ecke von  $'\mathfrak{E}^r$ . Wenn dagegen  $n = r$  ist, so ist die lineare Abbildung topologisch. — Jede Seite von  $\mathbb{E}^n$  wird linear auf die Seite von  $'\mathfrak{E}^r$  abgebildet, die von den Bildern der Ecken „aufgespannt“ wird. Wenn also zwei Ecken in eine zusammenfallen, so fällt die ganze von ihnen aufgespannte Kante in diese Ecke zusammen.

Will man die lineare Abbildung von  $\mathbb{E}^n$  auf  $'\mathfrak{E}^r$  analytisch verfolgen, so wähle man in den linearen Räumen  $\mathfrak{L}^n$  und  $\mathfrak{L}^r$ , denen  $\mathbb{E}^n$  und  $'\mathfrak{E}^r$  angehören, je ein Parallelkoordinatensystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  bzw.  $'\xi_1, '\xi_2, \dots, '\xi_r$ .

$$\pi_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

seien die Koordinaten der Ecken  $P_0, P_1, \dots, P_n$  von  $\mathbb{E}^n$  und

$$'\pi_{ik} \quad (i = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r)$$

die Koordinaten der Bildpunkte  $'P_0, 'P_1, \dots, 'P_n$ , von denen natürlich einige zusammenfallen können. Die Koordinaten des Schwerpunktes der in  $P_0, P_1, \dots, P_n$  angebrachten Massen  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  sind nach Gleichung (4)

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{i1}, \quad \xi_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{i2}, \dots, \quad \xi_n = \sum_{i=0}^n \mu_i \pi_{in}, \quad (8)$$

und der Schwerpunkt der in den Bildpunkten  $'P_0, 'P_1, \dots, 'P_n$  angebrachten Massen  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  entsprechend

$$'\xi_1 = \sum_{i=0}^n \mu_i ' \pi_{i1}, \quad '\xi_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i ' \pi_{i2}, \dots, \quad '\xi_r = \sum_{i=0}^n \mu_i ' \pi_{ir}. \quad (9)$$

Löst man das Gleichungssystem (8), dem man noch die Gleichung (3)

$$\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$$

hinzugefügt hat, nach den Massen  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  auf (was wegen der Unabhängigkeit der Punkte  $P_0, P_1, \dots, P_n$  möglich ist) und setzt ihre Werte in (9) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem von der Form

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \xi_j, \quad \xi_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} \xi_j, \quad \dots, \quad \xi_r = \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} \xi_j.$$

Die lineare Abbildung von  $E^n$  auf  $E^r$  wird also durch eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung von  $\mathbb{L}^n$  auf  $\mathbb{L}^r$  bewirkt.

Ein Simplex wird *orientiert*, indem eine bis auf gerade Permutationen\*) bestimmte Reihenfolge seiner Ecken festgelegt wird. Ein orientiertes Simplex  $E^n$  (für das wir zum Unterschiede vom nichtorientierten lateinische Buchstaben verwenden) ist z. B. durch die Eckenreihenfolge  $P_0, P_1, \dots, P_n$  gegeben, und wir bezeichnen es mit

$$E^n = + (P_0 P_1 \dots P_n).$$

Bei Vertauschung von  $P_0$  mit  $P_1$  kehrt sich die Orientierung des Simplexes um, und wir bezeichnen das umgekehrt orientierte Simplex mit

$$-E^n = - (P_0 P_1 \dots P_n) = + (P_1 P_0 \dots P_n).$$

Wenn wir ein nichtorientiertes Simplex durch seine Ecken bezeichnen wollen, so schreiben wir

$$E^n = (P_0 P_1 \dots P_n)$$

ohne Vorzeichen. Diese Definition der Orientierung ist dadurch nahegelegt, daß die lineare Selbstabbildung des  $n$ -Simplexes, die durch eine Permutation seiner Ecken festgelegt ist, eine positive oder negative Determinante hat, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade ist. Denn jede Permutation der  $n+1$  Ecken kann man bekanntlich durch eine Folge von Transpositionen, d. h. Vertauschungen von nur zwei Ecken, erhalten. Eine lineare Abbildung, die eine Vertauschung zweier Ecken, sagen wir  $P_1$  und  $P_2$ , bewirkt, hat aber negative Determinante. Wir haben nur  $P_0$  zum Anfangspunkte und die nach den übrigen Ecken zielenden Kanten zu Basisvektoren zu machen, dann hat in diesem Koordinatensystem die Abbildung die Gestalt

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_1, \quad x'_3 = x_3, \quad \dots, \quad x'_n = x_n,$$

also die Determinante  $-1$ . Der Schluß versagt, aber die Behauptung bleibt richtig für den trivialen Fall  $n = 1$ . Alle geraden Permutationen eines regelmäßigen Tetraeders sind hiernach dadurch vor den ungeraden geometrisch ausgezeichnet, daß sie sich durch starre Drehungen um den Tetraedermittelpunkt bewirken lassen.

\*) Vgl. z. B. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra (Berlin 1930) I, S. 24.

Zur formalen Vereinfachung orientieren wir auch 0-Simplexe; die Orientierung besteht hier nur in der Zuordnung eines Plus- oder Minuszeichens zu dem betreffenden Simplexe.

Für  $n = 1$  ist durch die Orientierung  $+ (P_0 P_1)$  eine Durchlaufung der Strecke festgelegt, indem  $P_0$  als „Anfangsecke“,  $P_1$  als „Endecke“ gekennzeichnet wird. Ein orientiertes 1-Simplex kann daher durch eine Strecke mit einem aufgesetzten Pfeil dargestellt werden, der vom Anfangspunkt zum Endpunkt weist. — Für  $n = 2$  ist durch die Reihenfolge  $+ (P_0 P_1 P_2)$  und die daraus durch gerade Permutationen hervorgehenden  $+ (P_1 P_2 P_0)$ ,  $+ (P_2 P_0 P_1)$  ein und dieselbe zyklische Durchlaufung der Ecken, also ein bestimmter Umlaufssinn des Dreiecks gegeben. Die Orientierung eines Dreiecks kann man daher durch einen eingezzeichneten Kreis Pfeil angeben. — Für  $n = 3$  bestimmt die Orientierung  $+ (P_0 P_1 P_2 P_3)$  einen Schraubsinn. Eine Schraube, die man von der Ecke  $P_0$  aus in die gegenüberliegende Seite bohrt und dabei gemäß der Reihenfolge der übrigen Ecken dreht, ist eine Rechtsschraube oder eine Linksschraube, je nach der Orientierung des Tetraeders.

Bisher haben wir Simplexe eines Zahlenraumes und ihre linearen Abbildungen betrachtet. Bilden wir jetzt ein solches  $n$ -Simplex  $e^n$  topologisch auf einen anderen Umgebungsraum  $M$  ab (also so, daß jeder Punkt von  $M$  Bildpunkt wird), so nennen wir auch das Bild ein Simplex  $E^n$ , genauer ein *topologisches Simplex*, und  $e^n$  ist das *Urbild* von  $E^n$ . Faßt man denselben Umgebungsraum  $M$  als Bild eines anderen Urbildes  $\bar{e}^n$  auf, so betrachten wir die *topologischen Simplexe*  $E^n$  und  $\bar{E}^n$  dann und nur dann als gleich, wenn sich  $e^n$  auf  $\bar{e}^n$  linear so abbilden läßt, daß zugeordnete Punkte denselben Bildpunkt in  $M$  haben. Auf ein topologisches Simplex übertragen sich daher von seinen Urbildern her die Begriffe Ecke,  $i$ -dimensionale Seite, Mittelpunkt, geradlinige Verbindungsstrecke zweier Punkte, Rand, mittlerer Punkt; nicht aber kann man von der Entfernung zweier Punkte reden, da diese bei linearen Abbildungen zweier Urbilder aufeinander sich ändert. Auch die bisher betrachteten geradlinigen Simplexe des Zahlenraumes kann man als topologische Simplexe auffassen; hier fallen Urbild und Bild zusammen, und die Abbildung ist die identische. Wenn von einem Simplex schlechthin die Rede ist, so ist immer ein topologisches gemeint, das natürlich unter Umständen auch geradlinig sein kann.

Projizieren wir z. B. die Oberfläche eines Tetraeders vom Tetraedermittelpunkte auf die Umkugel, so gehen ihre vier geradlinigen 2-Simplexe in vier topologische Simplexe der Kugelfläche (sphärische Dreiecke) über.

Genau wie ein geradliniges Simplex kann man ein topologisches Simplex durch Angabe einer Reihenfolge seiner Ecken, und zwar auf zwei entgegengesetzte Weisen, orientieren.

Auch ist klar, was unter einer *linearen Abbildung zweier topologischer Simplexe*  $E^n$  und  $\bar{E}^n$  zu verstehen ist: eine topologische Abbildung, bei der die Urbilder zugeordneter Punkte durch eine lineare Abbildung der geradlinigen Urbildsimplexe  $e^n$  und  $\bar{e}^n$  ineinander übergehen.

## § 10. Simplizialer Komplex.

Aus Simplexen setzen sich die Komplexe zusammen. Komplexe sind besondere Umgebungsräume; nur mit ihnen haben wir es hinfert zu tun. Von dem allgemeinen Komplex handeln die Kapitel II—V, VII, VIII, XI, während VI, IX, X besondere Komplexe, die Mannigfaltigkeiten, betreffen. Der Komplex steht daher im Mittelpunkt aller folgenden Überlegungen.

Ein *Komplex* ist ein Umgebungsraum, der einer simplizialen Zerlegung fähig ist. Die simpliziale Zerlegung eines Umgebungsraumes  $\mathfrak{K}$  ist so definiert: Es mögen auf  $\mathfrak{K}$  endlich oder abzählbar unendlich viele Simplexe der Dimensionen 0 bis  $n$  liegen, also topologische Bilder geradliniger Simplexe. Mit jedem Simplex sollen zur Menge dieser Simplexe alle seine Seitensimplexe gehören. Die Simplexe machen eine *simpliziale Zerlegung* des Umgebungsraumes aus, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

- ( $k_1$ ) Jeder Punkt gehört wenigstens einem Simplex an.
- ( $k_2$ ) Jeder Punkt gehört nur endlich vielen Simplexen an.

( $k_3$ ) Zwei Simplexe sind entweder punktfremd, oder das eine ist Seite des anderen, oder sie haben eine gemeinsame Seite, die den Durchschnitt der beiden Simplexe ausmacht. — Hierbei ist an die Gleichheitsdefinition der topologischen Simplexe zu erinnern. Z. B. genügt es dafür, daß zwei topologische 2-Simplexe von  $\mathfrak{K}$  eine gemeinsame Seite haben, noch nicht, daß bei der topologischen Abbildung der beiden geradlinigen Urbilddreiecke in den Komplex die beiden geradlinigen Urbildseiten in ein und dieselbe Punktmenge von  $\mathfrak{K}$  übergehen. Die Abbildung der Urbilddreiecke in  $\mathfrak{K}$  muß vielmehr derart sein, daß aufeinander linear (und nicht beliebig topologisch) bezogene Punkte der beiden geradlinigen Urbildseiten denselben Bildpunkt in  $\mathfrak{K}$  haben.

( $k_4$ ) Ist  $P$  ein Punkt des Umgebungsraumes  $\mathfrak{K}$  und sind  $U(P|\mathfrak{E}_1)$ ,  $U(P|\mathfrak{E}_2), \dots, U(P|\mathfrak{E}_r)$  Umgebungen innerhalb der sämtlichen Simplexe  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_r$  der simplizialen Zerlegung\*, denen  $P$  angehört, so ist die Vereinigungsmenge  $U(P|\mathfrak{E}_1) + U(P|\mathfrak{E}_2) + \dots + U(P|\mathfrak{E}_r)$  eine Umgebung  $U(P|\mathfrak{K})$  von  $P$  in  $\mathfrak{K}$ .

Läßt der Umgebungsraum  $\mathfrak{K}$  sich in dieser Weise in Simplexe einteilen, so heißt er ein Komplex. Ist aus den verschiedenen Möglichkeiten, einen Komplex in Simplexe zu zerlegen, eine herausgegriffen, so nennen wir den auf diese bestimmte Weise in Simplexe eingeteilten Komplex einen *simplizialen Komplex*, wofür wir also genauer sagen müßten: *simplizialer Komplex*, was wir später Gebrauche wollen wir noch angeben, wie man einen simplizialen Komplex aus seinen einzelnen Simplexen durch Identifizieren aufbauen kann. Man denke sich zu den Simplexen der Zerlegung je ein Urbild in einem Zahlenraume genügend hoher Dimension gelegen. Diese Urbilder, die punktfremd nebeneinander liegen mögen, bilden zusammen einen Umgebungsraum  $\mathfrak{M}$ , der stetig auf  $\mathfrak{K}$  abgebildet ist, weil jedes einzelne Simplex sogar topologisch auf eine Teilmenge von  $\mathfrak{K}$  ab-

\*.) Die Dimensionen der Simplexe  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_r$  liegen zwischen 0 und  $n$ ; den Dimensionsindex, den wir stets hochstellen, haben wir hier nicht mit angeschrieben.

Wir werden im Laufe der Entwicklung sehen, daß alle topologisch wichtigen Gebilde Komplexe sind. Zu diesen Nachweisen nutzt uns der

**Hilfsatz:** Eine Punktmenge  $\mathfrak{K}$  eines Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^m$ , die aus endlich oder abzählbar unendlich vielen geradlinigen Simplexen der Dimension 0 bis  $n$  besteht, ist ein simplizialer Komplex, wenn für die Simplexe und ihre Seiten außer der Bedingung ( $k_3$ ) (welche aussagt, daß die Simplexe sich nicht überschneiden oder durchdringen) noch die weitere erfüllt ist: zu jedem Punkte von  $\mathfrak{K}$  gibt es eine Umgebung, die nur mit endlich vielen Simplexen Punkte gemein hat.

**Beweis:**  $\mathfrak{K}$  ist als Teilmenge des Zahlenraumes ein Umgebungsraum. Die gegebenen Simplexe und ihre Seiten machen eine simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  aus. Denn außer ( $k_3$ ) sind offenbar die Bedingungen ( $k_1$ ) und ( $k_2$ ) erfüllt, und es bleibt nur ( $k_4$ ) zu beweisen. Die Umgebung  $U(P|\mathfrak{E}_i)$  von ( $k_4$ ) umfaßt eine gewisse  $\varepsilon_i$ -Umgebung von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{E}_i$ ; sie wird von allen Punkten von  $\mathfrak{E}_i$  gebildet, die von  $P$  im  $\mathfrak{R}^m$  um weniger als  $\varepsilon_i$  entfernt sind. Wählt man dann  $\eta$  positiv und kleiner als  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$  und überdies so klein, daß die  $\eta$ -Umgebung von  $P$  nur mit den Simplexen  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_r$  Punkte gemein hat, was nach der Bedingung des Hilfsatzes möglich ist, so ist diese  $\eta$ -Umgebung von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{K}$  eine Teilmenge von  $U(P|\mathfrak{E}_1) + U(P|\mathfrak{E}_2) + \dots + U(P|\mathfrak{E}_r)$ , also ist diese Vereinigungsmenge ebenfalls Umgebung von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{K}$  und damit die Bedingung ( $k_4$ ) erfüllt.

**Beispiel:** Die Kugelfläche ist ein Komplex, denn das ebenflächige Tetraeder des Zahlenraumes ist ein simplizialer Komplex nach dem letzten Satze, und er läßt sich topologisch durch Projektion vom Mittelpunkte aus auf eine um den Mittelpunkt gelegte Kugelfläche abbilden. Sein topologisches Bild liefert eine simpliziale Zerlegung der Kugelfläche. Andere simpliziale Zerlegungen desselben Komplexes erhält man aus dem Oktaeder oder Ikosaeder. Man vgl. hierzu § 14.

**Beispiel:** Die Zahlenebene ist ein Komplex, da man sie mit gleichseitigen Dreiecken pflanzen kann.

**Beispiel:** Natürlich ist auch ein einzelnes Dreieck der Zahlenebene ein Komplex  $\mathfrak{K}$ , aber eine Zerlegung in unendlich viele Dreiecke, wie sie z. B. die Fig. 32 zeigt, ist keine simpliziale Zerlegung, da für den Eckpunkt  $P$  die Bedingung ( $k_4$ ) verletzt ist. Die Vereinigungsmenge  $U(P|\mathfrak{E}_1) + U(P|\mathfrak{E}_2) + \dots + U(P|\mathfrak{E}_r)$  der Bedingung ( $k_4$ ) ist nämlich hier keine Umgebung  $U(P|\mathfrak{K})$ , denn sie besteht nur aus dem Punkte  $P$ , da es außer dem 0-Simplexe  $P$  kein Simplex der Zerlegung gibt, dem  $P$  angehört. — Weitere Beispiele findet man in § 14.

Zu späterem Gebrauche wollen wir noch angeben, wie man einen simplizialen Komplex aus seinen einzelnen Simplexen durch Identifizieren aufbauen kann. Man denke sich zu den Simplexen der Zerlegung je ein Urbild in einem Zahlenraume genügend hoher Dimension gelegen. Diese Urbilder, die punktfremd nebeneinander liegen mögen, bilden zusammen einen Umgebungsraum  $\mathfrak{M}$ , der stetig auf  $\mathfrak{K}$  abgebildet ist, weil jedes einzelne Simplex sogar topologisch auf eine Teilmenge von  $\mathfrak{K}$  ab-

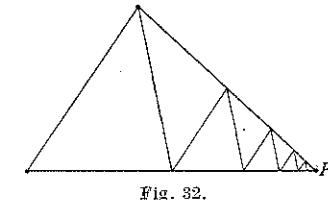


Fig. 32.

gebildet ist. Wenn man jetzt alle Punkte, die denselben Bildpunkt in  $\mathfrak{K}$  haben, für äquivalent erklärt und identifiziert, so erhält man gerade den simplizialen Komplex  $\mathfrak{K}$ . Denn wenn man in  $\mathfrak{M}$  irgendwelche Umgebungen der sämtlichen Originalpunkte eines Punktes von  $\mathfrak{K}$  auswählt, so ist nach  $(k_4)$  das Bild der Vereinigungsmenge dieser Originalumgebungen eine Umgebung des Bildpunktes, also entsteht  $\mathfrak{K}$  nach § 8 Satz II aus  $\mathfrak{M}$  durch Identifizieren äquivalenter Punkte.

### § 11. Schema eines simplizialen Komplexes.

Zwei Simplexe der simplizialen Zerlegung eines Komplexes haben niemals die gleichen Ecken, wegen  $(k_3)$ . Auf Grund dieser Eigenschaft kann man den simplizialen Komplex durch seine sämtlichen Ecken und ein Verzeichnis, in welche von ihnen Simplexe eingespannt sind, geben. Ein solches Verzeichnis heißt das *Schema* des Komplexes. Das Schema des in

Fig. 33 gezeichneten, aus einem Dreieck und einer Strecke bestehenden Komplexes lautet hiernach

$$(P_0 P_1 P_2); (P_0 P_1); (P_1 P_2); (P_2 P_0); \\ (P_2 P_3); (P_0); (P_1); (P_2); (P_3).$$

Später werden wir eine andere Art von Schema, die Inzidenzmatrizen, zur Beschreibung des Komplexes benutzen.

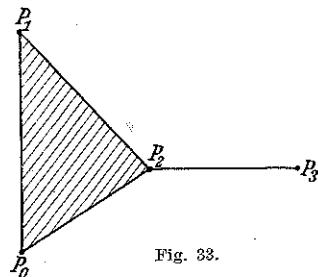


Fig. 33.

Haben zwei simpliziale Komplexe  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  das gleiche Schema, so sind sie homöomorph. Genauer lassen sie sich so topologisch aufeinander abbilden, daß die Simplexe des einen linear in die des andern übergehen. Um diese topologische Abbildung zu bewirken, bemerken wir zunächst, daß ein Punkt  $P$  von  $\mathfrak{K}$  mittlerer Punkt von genau einem Simplexe der simplizialen Zerlegung ist, denn  $P$  gehört wegen  $(k_1)$  mindestens einem Simplexe an und ist daher mittlerer Punkt dieses Simplexes oder einer seiner Seiten. Es kann nicht zwei Simplexe geben, die  $P$  zum mittleren Punkte haben, wegen  $(k_3)$ .

Ist nun  $\mathfrak{E}$  das Simplex von  $\mathfrak{K}$ , das  $P$  zum mittleren Punkte hat, so sucht man zu den Ecken von  $\mathfrak{E}$  die entsprechenden Ecken von  $\mathfrak{K}'$ . Diese sind die Ecken eines Simplexes  $\mathfrak{E}'$ , das durch die Eckenzuordnung linear auf  $\mathfrak{E}$  abgebildet wird. Der Bildpunkt von  $P$  ist der Bildpunkt  $P'$  der gesuchten Abbildung von  $\mathfrak{K}$  auf  $\mathfrak{K}'$ . Damit ist zunächst eine eindeutige Abbildung der Punkte von  $\mathfrak{K}$  auf die von  $\mathfrak{K}'$  hergestellt. Sie ist topologisch. Ist nämlich  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{K}')$  eine Umgebung von  $P'$  in  $\mathfrak{K}'$  und sind  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_r$  die Simplexe, denen  $P'$  angehört, so ist der Durchschnitt von  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{K}')$  mit dem Simplexe  $\mathfrak{E}_i$  ( $i = 1$  oder  $2, \dots, r$ ) eine Umgebung  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{E}_i)$  von  $P'$  im Simplexe  $\mathfrak{E}_i$ , nach der Definition der Umgebung in einer Teilmenge eines Umgebungsraumes. Da nun das Simplex  $\mathfrak{E}$  auf  $\mathfrak{E}_i$  durch die konstruierte lineare Abbildung topologisch abgebildet

ist, so entspricht der Umgebung  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{E}_i)$  eine Umgebung  $\mathcal{U}(P | \mathfrak{E}_i)$  in  $\mathfrak{E}_i$ . Nach  $(k_4)$  ist dann die Vereinigungsmenge  $\mathcal{U}(P | \mathfrak{E}_1) + \mathcal{U}(P | \mathfrak{E}_2) + \dots + \mathcal{U}(P | \mathfrak{E}_r)$  eine Umgebung von  $P$  in  $\mathfrak{K}$ . Ihr Bild in  $\mathfrak{K}'$  gehört zu  $\mathcal{U}(P' | \mathfrak{K}')$ . Also ist die Abbildung in Richtung  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}'$  stetig, und da  $\mathfrak{K}$  nicht vor  $\mathfrak{K}'$  ausgezeichnet ist, auch in der entgegengesetzten Richtung, also topologisch.

Wir beantworten jetzt die Frage, wann eine Menge  $\mathfrak{W}$  von endlich oder abzählbar unendlich vielen Elementen, in der gewisse „ausgezeichnete“ Teilmengen definiert sind, das Schema eines  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplexes in dem Sinne ist, daß die Elemente von  $\mathfrak{W}$  den Ecken des Komplexes umkehrbar eindeutig entsprechen und die ausgezeichneten Teilmengen den Eckenmengen von Simplexen. Folgende drei Bedingungen sind hierfür offenbar notwendig:

(Sch<sub>1</sub>) Jede Teilmenge einer ausgezeichneten Teilmenge ist wieder eine ausgezeichnete Teilmenge, denn mit einem Simplexe gehören alle seine Seitensimplexe zum simplizialen Komplex.

(Sch<sub>2</sub>) Die Höchstzahl der Elemente in einer ausgezeichneten Teilmenge beträgt  $n + 1$ .

(Sch<sub>3</sub>) Jedes Element kommt nur in endlich vielen ausgezeichneten Teilmengen vor, wegen Bedingung  $(k_2)$ .

Um zu zeigen, daß die Bedingungen auch hinreichend sind, konstruieren wir den zugehörigen Komplex geradlinig im  $(2n + 1)$ -dimensionalen Zahlenraume  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Wir stiften zu diesem Zwecke eine eineindeutige Beziehung zwischen den Elementen von  $\mathfrak{W}$  und ebenso vielen Punkten  $P_1, P_2, \dots$  des  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Diese Punkte sollen die beiden Bedingungen erfüllen:

(1) Sie haben keinen Häufungspunkt,

(2) je  $k + 1$  Punkte spannen einen  $k$ -dimensionalen linearen Raum auf, für  $k \leq 2n + 1$ , d. h. der kleinste lineare Raum, dem sie angehören, ist  $k$ -dimensional.

Die beiden Bedingungen sind immer erfüllbar, denn hat man die ersten  $r$  Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_r$  gemäß der Bedingung (2) angenommen, so wählt man den Punkt  $P_{r+1}$  so, daß seine  $x_1$ -Koordinate mindestens um 1 größer ist als jede der  $x_1$ -Koordinaten von  $P_1, P_2, \dots, P_r$  und daß außerdem  $P_{r+1}$  keinem der linearen Räume angehört, die von je  $k$  der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_r$  ( $k \leq 2n + 1$ ) aufgespannt werden. Die letzte Bedingung ist deshalb erfüllbar, weil die zu meidenden endlich vielen linearen Räume höchstens die Dimension  $2n$  haben. Alsdann ist (2) auch für die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{r+1}$  und entsprechend für die ganze Folge erfüllt. (1) gilt, weil die  $x_1$ -Koordinaten über alle Grenzen wachsen, falls die Punktmenge unendlich ist.

Einer ausgezeichneten Teilmenge von  $p + 1$  Elementen in  $\mathfrak{W}$  lassen wir nun das von den zugeordneten Punkten der Folge aufgespannte  $p$ -Simplex entsprechen. So erhält man eine endliche oder unendliche Menge  $\mathfrak{K}$  von geradlinigen Simplexen der Dimension 0 bis  $n$  im  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Daß  $\mathfrak{K}$  ein Komplex ist, ergibt sich leicht aus dem Hilfssatz von S. 43: Wir betrachten zwei Simplexe  $\mathfrak{E}^p$  und  $\mathfrak{E}^q$  von  $\mathfrak{K}$ . Ist  $k+1$  die Anzahl der zu wenigstens einem der beiden Simplexe  $\mathfrak{E}^p$  und  $\mathfrak{E}^q$  gehörigen Ecken, so ist  $k+1 \leq 2n+2$  wegen  $p \leq n$  und  $q \leq n$ . Wegen (2) spannen diese  $k+1$  Ecken ein  $k$ -Simplex  $\mathfrak{E}^k$  auf, von dem  $\mathfrak{E}^p$  und  $\mathfrak{E}^q$  Seiten sind.  $\mathfrak{E}^p$  und  $\mathfrak{E}^q$  sind also entweder punktfremd oder haben eine gemeinsame Seite zum Durchschnitt. Wir müssen ferner zeigen, daß es zu jedem Punkte  $Q$  von  $\mathfrak{K}$  eine Umgebung gibt, die nur mit endlich vielen Simplexen Punkte gemeinsam hat. Wir schlagen um  $Q$  eine Kugel von beliebigem Radius  $\varepsilon > 0$ .  $\bar{x}_1$  sei die  $x_1$ -Koordinate von  $Q$ . Es gibt in  $\mathfrak{K}$  nur endlich viele Ecken, deren  $x_1$ -Koordinaten kleiner als  $\bar{x}_1 + \varepsilon$  sind. Die mit diesen Ecken inzidenten Simplexe von  $\mathfrak{K}$  sind nach (Sch<sub>2</sub>) endlich viele. Nur sie können in die  $\varepsilon$ -Kugel um  $Q$  hineinragen. Daher ist  $\mathfrak{K}$  nach dem Hilfssatz ein Komplex. — Daß  $\mathfrak{K}$  gerade das Schema  $\mathfrak{W}$  hat, folgt unmittelbar aus der Konstruktion von  $\mathfrak{K}$ .

Zugleich ist damit der Satz bewiesen:

*Man kann jeden  $n$ -dimensionalen Komplex geradlinig in den  $(2n+1)$ -dimensionalen Zahlenraum legen, d. h. es gibt zu jedem  $n$ -dimensionalen Komplex einen geradlinigen Komplex im  $\mathbb{R}^{2n+1}$  mit demselben Schema.*

Das Schema eines Komplexes gibt einen besseren Überblick über die Struktur möglicher simplizialer Komplexe als die weniger einfache ursprüngliche Definition. Darüber hinaus aber eröffnet es uns einen Ausblick auf ein Verfahren, Topologie zu treiben, das wir in diesem Buche nicht ausbauen werden, das streng kombinatorische. In ihm hätte man das Schema nicht als eine bloße zweckmäßige Beschreibung des als Umgebungsraum definierten Komplexes anzusehen, sondern das Schema selbst wäre die Definition des simplizialen Komplexes, aus dem andere „elementarverwandte“ Komplexe durch gewisse Abänderungen (kombinatorische Unterteilungen z. B.) hervorgehen. Die Beziehung der Elementarverwandtschaft würde an Stelle des Homöomorphismus treten; wie man sie sich im einzelnen etwa zu denken hat, zeigt das Beispiel, das wir gelegentlich in der Flächentopologie benutzen müssen (S. 134). Das einzelne Simplex wäre in der streng kombinatorischen Topologie also eine ausgezeichnete Menge endlich vieler Ecken, die nicht mit „kontinuierlicher Raumsaue“ ausgegossen werden. Die höchstens abzählbar vielen Ecken des Schemas und ihre ausgezeichneten Teilmengen machen die ursprünglichen Gegenstände, die Elementarverwandtschaft die Relation der streng kombinatorischen Topologie aus, während für uns die (kontinuierlich vielen) Punkte und ihre Umgebungen die ursprünglichen Gegenstände und die stetige Abbildung die ursprüngliche Relation sind.<sup>10</sup>

## § 12. Endlich, rein, homogen.

Ein simplizialer Komplex  $\mathfrak{K}$  heißt *endlich* oder *unendlich*, je nachdem er aus endlich oder unendlich vielen Simplexen aufgebaut ist. In einem endlichen Komplex hat jede unendliche Punktmenge wenigstens einen Häufungspunkt; denn da nur endlich viele Simplexe vorhanden sind, so muß es ein Simplex geben, in dem unendlich viele Punkte der Menge liegen. Ist  $\mathfrak{K}$  dagegen unendlich, so bilden die Mittelpunkte aller Simplexe ein Beispiel für eine unendliche Menge ohne Häufungspunkt. Ist nämlich  $P$  ein be-

liebiger Punkt von  $\mathfrak{K}$ , so machen die Simplexe  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_r$ , denen  $P$  angehört, nach (k<sub>4</sub>) zusammen eine Umgebung von  $P$  aus, und diese enthält nur endlich viele Punkte der Menge, nämlich die Mittelpunkte der Simplexe  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_r$  und die von deren Seiten. Damit sind die Begriffe „endlich“ und „unendlich“ als topologisch invariant erkannt: Ein endlicher simplizialer Komplex kann nicht homöomorph einem unendlichen sein, oder: läßt ein Komplex eine Zerlegung in endlich viele Simplexe zu, so gibt es keine simpliziale Zerlegung in unendlich viele Simplexe (vgl. 3. Beispiel von § 10). Wir sind also berechtigt, unter Fortlassung des Wortes „simplizial“ einfach von endlichen und unendlichen Komplexen zu reden. — Der endliche Komplex, den die Kugelfläche bildet, wird durch Entfernen eines Punktes, „Punktieren“, zu einem unendlichen Komplex, nämlich zur Zahlenebene, wie wir S. 27 sahen.

Greift man aus einem simplizialen Komplexe eine beliebige, nichtleere Menge von Simplexen heraus, so bilden diese Simplexe zusammen mit ihren Seiten einen *Teikomplex*  $\mathfrak{K}_1$  von  $\mathfrak{K}$ . Dies ist offenbar wieder ein simplizialer Komplex.

Ein Teikomplex  $\mathfrak{K}_1$  heißt *isoliert* (in  $\mathfrak{K}$ ), wenn jedes Simplex von  $\mathfrak{K}_1$ , das ein Simplex von  $\mathfrak{K}_1$  zur Seite hat, ebenfalls zu  $\mathfrak{K}_1$  gehört.  $\mathfrak{K}$  ist auf eindeutige Weise in eine bestimmte maximale Anzahl  $\tau$  (einschließlich  $\infty$ ) von isolierten punktfreien Teikomplexen zerlegbar. Ist  $\tau = 1$ , so heißt  $\mathfrak{K}$  *zusammenhängend*. Ein zusammenhängender simplizialer Komplex ist offenbar auch dadurch charakterisiert, daß man je zwei Ecken  $P$  und  $Q$  durch einen Kantenweg verbinden kann; das ist eine Reihe von orientierten Kanten, deren erste  $P$  zum Anfangspunkt, deren letzte  $Q$  zum Endpunkt hat, während der Endpunkt einer beliebigen mit dem Anfangspunkt der folgenden übereinstimmt.

Einen isolierten Teikomplex kann man topologisch invariant charakterisieren als eine nichtleere Teilmenge von  $\mathfrak{K}$ , die zugleich offen und abgeschlossen ist, oder was dasselbe ist, eine nichtleere Teilmenge ohne Begrenzung.

Beweis: Klar ist, daß ein isolierter Teikomplex eine nichtleere Teilmenge ohne Begrenzung ist. — Sei umgekehrt  $\mathfrak{K}$  eine beliebige nichtleere Teilmenge ohne Begrenzung auf  $\mathfrak{K}$ . Ist  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{E}^i$  ein Simplex der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}$ , auf dem  $P$  liegt, so gehört ganz  $\mathfrak{E}^i$  zu  $\mathfrak{K}$ . Angenommen  $P'$  wäre ein nicht zu  $\mathfrak{K}$  gehöriger Punkt von  $\mathfrak{E}^i$ . Wir beziehen dann die geradlinige Verbindungsstrecke  $PP'$  (linear) auf einen von 0 bis 1 wachsenden Parameter  $s$  und bilden die obere Grenze  $\bar{s}$  der Parameterwerte aller zu  $\mathfrak{K}$  gehörigen Punkte. In jeder Umgebung des zu  $\bar{s}$  gehörigen Punktes  $\bar{P}$  gibt es dann sowohl Punkte von  $\mathfrak{K}$  als auch solche, die nicht zu  $\mathfrak{K}$  gehören, d. h.  $\bar{P}$  ist Begrenzungspunkt von  $\mathfrak{K}$  entgegen der Voraussetzung. Somit ist  $\mathfrak{K}$  ein Teikomplex  $\mathfrak{K}_1$  von  $\mathfrak{K}$ , der mit jedem Punkt  $P$  alle Simplexe von  $\mathfrak{K}$  enthält, auf denen  $P$  liegt; also ist  $\mathfrak{K}_1$  sogar isoliert.

Aus dieser topologischen Kennzeichnung des isolierten Teikomplexes

ergibt sich auch die topologische Invarianz des Begriffs „zusammenhängend“ und die der Zahl  $\tau$ .

Ein  $n$ -dimensionaler simplizialer Komplex heißt *rein*, wenn jedes  $k$ -Simplex ( $k < n$ ) Seite von wenigstens einem  $n$ -dimensionalen ist, anderenfalls heißt er *unrein*. Unter dem *Rande* eines reinen  $n$ -dimensionalen Komplexes versteht man die Gesamtheit der  $(n-1)$  Simplexe, die mit einer ungeraden Anzahl von  $n$ -Simplexen inzident sind. Bestehe der reine Komplex z. B. aus vier ebenflächigen Dreiecken des euklidischen Raumes, die eine Kante gemein haben und sich um diese wie die Blätter eines fächerartig auseinander geschlagenen Buches um den Buchrücken herumlagern. Dann wird der Rand von allen Dreiecksseiten mit Ausnahme der gemeinsamen Kante gebildet. — Diese Randdefinition steht im Einklang mit der früheren Definition des Randes eines Simplexes S. 39, denn das einzelne Simplex ist ein reiner Komplex. Auch der Rand eines konvexen Bereiches S. 38 sowie der eines Elementes S. 51 ordnet sich der hier gegebenen Randdefinition unter, sobald wir den konvexen Bereich und das Element als einen reinen Komplex erkannt haben werden (S. 52).

Daß auch die Begriffe „ $n$ -dimensional“, „rein“, „Rand“ topologisch invariant sind, können wir erst später beweisen (V. Kap.). Durch dieses spätere Ergebnis rechtfertigt es sich, wenn wir bisweilen an den Komplex  $\mathbb{E}^n$  die Dimension als oberen Index setzen:  $\mathbb{E}^n$ . Nur die Dimension 0 können wir schon jetzt als topologisch invariant erkennen: Ein nulldimensionaler Komplex besteht aus lauter isolierten Punkten, deren jeder seine eigene Umgebung ist, was für keine höhere Dimension mehr gilt.

Unter den Komplexen nehmen die homogenen Komplexe eine Vorzugsstelle ein. *Homogen* heißt ein  $n$ -dimensionaler Komplex, wenn es zu jedem seiner Punkte eine Umgebung gibt, die sich topologisch auf das Innere einer  $n$ -dimensionalen Vollkugel abbilden läßt. Das Innere der  $n$ -dimensionalen Vollkugel wird von den Punkten des  $n$ -dimensionalen Zahrraumes gebildet, deren Koordinaten der Ungleichung  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$  genügen. — Beispielsweise ist die Kugelfläche ein homogener zweidimensionaler Komplex; der Vollkreis (mit Randkreislinie) dagegen ein nicht-homogener, da die Randpunkte, wie sich im V. Kapitel zeigen wird, die Homogenitätsbedingung nicht erfüllen. Ebenso ist der Kantenkomplex des Tetraeders ein nichthomogener eindimensionaler Komplex. — So schaulich nahe die Homogenität eines Komplexes liegt — ist doch der dreidimensionale euklidische Raum ein homogener Komplex —, so ist sie dennoch der mathematischen Behandlung in mehr als drei Dimensionen nicht so leicht zugänglich (§ 68), daß wir sie in den Mittelpunkt unserer Untersuchungen stellen könnten.

### § 13. Normalunterteilung.

Unser späteres Ziel, aus einer gegebenen simplizialen Zerlegung eines Komplexes Eigenschaften dieses Komplexes abzulesen, die von der besonderen Wahl der Zerlegung unabhängig sind, läßt sich nicht dadurch erreichen, daß man die möglichen verschiedenen Zerlegungen ein und desselben Komplexes charakterisiert; denn die Mannigfaltigkeit dieser Zerlegungen läßt sich nicht überblicken. Dennoch müssen wir, um unserem Ziele näherzukommen, aus einer vorgelegten simplizialen Zerlegung weitere Zerlegungen desselben Komplexes durch Unterteilung ableiten lernen. Nur dadurch, daß wir eine gegebene Zerlegung beliebig fein unterteilen, setzen wir sie später (im IV. Kap.) zu einer beliebigen andern Zerlegung und zu dem Komplex als bloßer Punktmenge in Beziehung.

Die Unterteilung des simplizialen Komplexes besteht darin, daß man jedes Simplex in kleinere Teilsimplexe so zerlegt, daß wieder ein simplizialer Komplex entsteht. Wir brauchen später nur eine bestimmte solche Unterteilung, die sogenannte *Normalunterteilung*. Sie wird folgendermaßen erhalten: Man unterteile zuerst jede Kante des simplizialen Komplexes durch ihren Mittelpunkt; sie zerfällt dadurch in zwei 1-Simplexe. Danach projiziere man vom Mittelpunkt eines jeden 2-Simplexes geradlinig die bereits unterteilten Randsimplexe. Den Mittelpunkt eines topologischen Simplexes haben wir mit Benutzung des geradlinigen Urbildsimplices definiert (S. 41); ebenso wird die Projektion der unterteilten Randkanten im Urbilde vorgenommen, und sie überträgt sich danach auf das topologische Simplex. Dieses zerfällt dadurch in 6 Teil-2-Simplexe, weil der Projektionskegel eines 1-Simplexes ein 2-Simplex ist. — Weiter projiziert man danach vom Mittelpunkte jedes 3-Simplexes seine bereits unterteilten Randseiten und erhält aus jedem 3-Simplexe  $4!$  Teil-3-Simplexe und überdies neue 2- und 1-Simplexe und ein neues 0-Simplex, das Projektionszentrum. So fährt man fort bis zu den  $n$ -Simplexen. Fig. 34 zeigt ein normalunterteiltes 2-Simplex.

Die Normalunterteilung eines simplizialen Komplexes  $\mathbb{E}^n$  ist wieder ein simplizialer Komplex. Dies folgt z. B. aus dem Hilfssatz von § 10, wenn man  $\mathbb{E}^n$  geradlinig in einen Zahrraum legt und dort die Unterteilung vornimmt.

Da die Normalunterteilung als simplizialer Komplex erkannt ist, kann man von ihr wieder die Normalunterteilung bilden. So fortlaufend, gelangt man zur  $g$ -fachen Normalunterteilung. Durch genügend große Wahl von  $g$  kann man es erreichen, daß die Teilsimplexe beliebig klein werden. Genauer gilt der

**Hilfssatz:** Ein Teilsimplex der  $g$ -fachen Normalunterteilung eines geradlinigen  $n$ -Simplexes  $\mathbb{E}^n$  hat Platz in einem zu  $\mathbb{E}^n$  ähnlich gelegenen, im Verhältnis  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^g$  verkleinerten Simplexe.

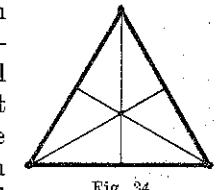


Fig. 34.

**Beweis:** Es genügt, den Spezialfall  $g = 1$  zu beweisen, da sich der Hilfssatz durch  $g$ -malige Anwendung dieses Spezialfalles ergibt. — Ist  $E^n$  das betrachtete Teilsimplex von  $\mathbb{E}^n = (P_0 P_1 \dots P_n)$ , so ist es keine Einschränkung, anzunehmen, daß seine Ecken  $M_0, M_1, \dots, M_n$  gerade die Mittelpunkte der Seiten  $(P_0), (P_0 P_1), \dots, (P_0 P_1 \dots P_n)$  sind. Die baryzentrischen Koordinaten von  $M_i$  sind (nach S. 39)

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_i = \frac{1}{i+1}, \quad \mu_{i+1} = \mu_{i+2} = \dots = \mu_n = 0. \quad (1)$$

In dem Parallelkoordinatensystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , dessen Basisvektoren von  $P_0$  nach den Ecken  $P_1, P_2, \dots, P_n$  führen, stimmen die Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , der Reihe nach mit den baryzentrischen Koordinaten  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  überein (nach S. 37).  $\mathbb{E}^n$  ist durch die Ungleichungen bestimmt

$$\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0, \quad \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq 1. \quad (2)$$

Wir betrachten das zu  $\mathbb{E}^n$  ähnlich gelegene, im Verhältnis  $\frac{n}{n+1}$  verkleinerte Simplex ' $\mathbb{E}^n$ '

$$\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0, \quad \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq \frac{n}{n+1}. \quad (3)$$

Da die Koordinaten (1) von  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) den Ungleichungen (3) genügen, so gehören die Ecken von  $E^n$  und damit wegen seiner Konvexität  $E^n$  selbst zu ' $\mathbb{E}^n$ '.

**Aufgabe:** Die Punkte eines Umgebungsraumes seien so in Simplexe aufgeteilt, daß  $(k_1), (k_2)$  und  $(k_4)$  erfüllt sind und zwei Simplexe entweder punktfremd oder inzident sind oder ein oder mehrere gemeinsame Seiten besitzen; dann gelangt man durch Normalunterteilung aller Simplexe zu einem simplizialen Komplex. [Man führe den Nachweis, daß für die Normalunterteilung auch  $(k_3)$  von § 10 erfüllt ist, daß also zwei ihrer Simplexe, wenn sie nicht punktfremd oder inzident sind, nur längs einer gemeinsamen Seite aneinander grenzen, durch vollständige Induktion über die Dimension des Komplexes.]

#### § 14. Beispiele von Komplexen.

Da der Begriff des Komplexes von großer Allgemeinheit ist, erweisen wir jetzt, um uns über seinen Umfang zu unterrichten, einige bekannte und wichtige Umgebungsräume als Komplexe, die uns später zugleich als das einfachste Beispielmaterial dienen sollen.

##### $n$ -dimensionales Element.

Die Menge von Punkten des  $n$ -dimensionalen Zahlenraums  $\mathbb{R}^n$ , deren Koordinaten der Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

genügen, heißt die Einheitsvollkugel des Zahlenraums. Ein topologisches Bild der Vollkugel wird  $n$ -dimensionales Element genannt. Für  $n = 2$  heißt es auch Elementarflächenstück. Die Punkte, für die das Gleichheits-

zeichen in (1) gilt, machen den Rand der Vollkugel bzw. nach topologischer Abbildung den Rand des Elementes aus (vgl. S. 38). Die topologisch invariante Bedeutung des Randes wird sich erst im fünften Kapitel herausstellen.

Jeder konvexe  $n$ -dimensionale Bereich  $\mathfrak{B}^n$  im  $\mathbb{R}^n$  ist ein  $n$ -dimensionales Element.

Zum Beweise schlagen wir um einen mittleren Punkt  $O$  von  $\mathfrak{B}$  eine ganz zu  $\mathfrak{B}$  gehörige Vollkugel  $f$ , deren Rand  $\bar{f}$  heißen möge (Fig. 35). Wir zeigen zuerst, daß ein von  $O$  ausgehender Strahl den Rand  $\bar{\mathfrak{B}}$  von  $\mathfrak{B}$  in genau einem Punkte trifft. Wegen der Beschränktheit von  $\mathfrak{B}$  trifft der Strahl mindestens einen Randpunkt von  $\mathfrak{B}$ . Weil  $\bar{\mathfrak{B}}$  als Rand von  $\mathfrak{B}$  eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist (S. 31), so gibt es unter den Punkten, die der Strahl mit  $\bar{\mathfrak{B}}$  gemein hat, einen mit größter Entfernung von  $O$ , er heiße  $\bar{P}$ . Alle Punkte auf  $OP$  mit Ausnahme von  $\bar{P}$  sind mittlere Punkte von  $\mathfrak{B}$ . Um dies einzusehen, verbinde man  $\bar{P}$  mit allen Punkten von  $f$ . Wegen der Konvexität gehören alle Verbindungsstrecken zu  $\mathfrak{B}$ . Man kann daher um jeden Punkt der Strecke  $OP$  eine Kugel schlagen, die ganz zu  $\mathfrak{B}$  gehört, nämlich die zu  $f$  bezüglich des Ähnlichkeitszentrums  $\bar{P}$  ähnlich gelegene Kugel.

Der Schnittpunkt von  $OP$  mit  $\bar{f}$  heiße  $\bar{p}$ . Durch die Zuordnung  $\bar{P} \leftrightarrow \bar{p}$  ist eine eindeutige Abbildung von  $\bar{\mathfrak{B}}$  auf  $\bar{f}$  gegeben. Diese Abbildung ist in Richtung  $\bar{p} \rightarrow \bar{P}$  stetig. Wäre nämlich die Abbildung in einem Punkte  $\bar{p}$  unstetig, so gäbe es zu einer vorgegebenen Umgebung  $U(\bar{P} | \bar{\mathfrak{B}})$  auf  $\bar{f}$  eine nach  $\bar{p}$  konvergierende Punktfolge  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots$  derart, daß alle Punkte der Bildfolge  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$  außerhalb  $U(\bar{P} | \bar{\mathfrak{B}})$  liegen. Diese Bildfolge hat auf  $\bar{\mathfrak{B}}$  einen Häufungspunkt, der auf dem Strahle  $OP$  liegen muß und daher nur der Punkt  $\bar{P}$  sein kann, so daß im Widerspruch zur Annahme fast alle Punkte  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$  in  $U(\bar{P} | \bar{\mathfrak{B}})$  liegen. Die Abbildung ist dann nach Satz V S. 35 auch in Richtung  $\bar{P} \rightarrow \bar{p}$  stetig, also topologisch. — Die Abbildung von  $\bar{\mathfrak{B}}$  auf  $\bar{f}$  kann man zu einer des ganzen Bereiches  $\mathfrak{B}$  auf die Vollkugel  $f$  vervollständigen, indem man die Strecken  $OP$  linear auf die Strecken  $O\bar{p}$  abbildet.

Da das geradlinige  $n$ -Simplex ein konvexer Bereich des Zahlenraums  $\mathbb{R}^n$  ist, so ist es topologisch auf die Vollkugel abbildbar. Diese und damit das  $n$ -dimensionale Element ist hierdurch als (reiner) Komplex erwiesen.

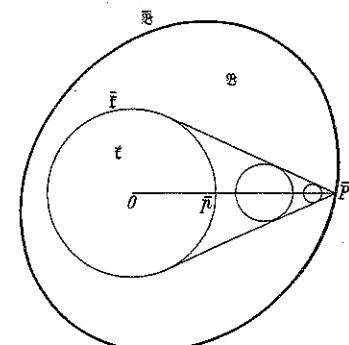


Fig. 35.

$n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$ .

Die Menge von Punkten des  $(n+1)$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\mathbb{R}^{n+1}$ , deren Koordinaten der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \quad (n \geq 0)$$

genügen, heißt die  $n$ -dimensionale Einheitssphäre des  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; ein topologisches Bild von ihr heißt  $n$ -Sphäre schlechthin oder  $n$ -dimensionaler sphärischer Raum und wird mit  $\mathbb{S}^n$  bezeichnet. Die 0-Sphäre ist ein Punktelpaar.

Der Rand eines  $(n+1)$ -dimensionalen konvexen Bereiches  $\mathfrak{B}^{n+1}$  ist eine  $n$ -Sphäre, denn wir haben soeben eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{B}^{n+1}$  auf die  $(n+1)$ -dimensionale Einheitsvollkugel angegeben, bei der der Rand von  $\mathfrak{B}^{n+1}$  in den Rand der Vollkugel übergeht. Insbesondere ist daher die  $n$ -Sphäre homöomorph dem Rande eines  $(n+1)$ -Simplexes, womit zugleich die einfachste simpliziale Zerlegung der  $n$ -Sphäre angegeben ist. Für  $n=2$  wird diese Zerlegung von den 4 Dreiecken eines Tetraeders gebildet.

Wir brauchen gelegentlich neben dieser tetraedralen Zerlegung noch eine andere simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{S}^n$ , die Verallgemeinerung der Oktaederteilung der Kugelfläche auf  $n$  Dimensionen. Seien

$$v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$$

die Einheitsvektoren, die vom Nullpunkt  $O$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  nach den Punkten

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$$

führen. Die Vektoren

$$\varepsilon_1 v_1, \varepsilon_2 v_2, \dots, \varepsilon_{n+1} v_{n+1} \quad (\varepsilon_k = \pm 1) \quad (2)$$

„spannen“ ein  $(n+1)$ -Simplex auf, nämlich das  $(n+1)$ -Simplex, dessen Ecken  $O$  und die Endpunkte der Vektoren (1) sind. Es gibt  $2^{n+1}$  Vorzeichenkombinationen in (1) und daher ebenso viele Simplexe. Je zwei haben zum Durchschnitt eine Seite, die von den gemeinsamen Vektoren aufgespannt wird, oder sie haben nur den Punkt  $O$  gemeinsam; alsdann sind die Vektoren des einen  $(n+1)$ -Simplexes entgegengesetzt denen des andern. Die  $2^{n+1}$  Simplexe bilden also einen simplizialen Komplex nach dem Hilfssatz von § 10. Er ist, wie leicht zu sehen, konvex und daher ein  $(n+1)$ -dimensionales Element. Sein Rand, eine  $n$ -Sphäre, wird von  $2^{n+1}$   $n$ -Simplexen gebildet, deren Ecken je die Endpunkte eines Vektorraumes (2) sind. Dies ist die „oktaedrale“ Zerlegung der  $n$ -Sphäre. Sie ist im Gegensatz zur tetraedralen zentrisch symmetrisch, d. h. sie geht bei Diametralpunktvertauschung, also bei der Abbildung

$$x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2, \dots, x'_{n+1} = -x_{n+1}$$

in sich über.

Durch die Hyperebene  $x_{n+1} = 0$  wird die  $n$ -Sphäre in zwei Halb-Sphären zerlegt, das sind  $n$ -dimensionale Elemente, was man z. B. erkennt, wenn man sie parallel zur  $x_{n+1}$ -Achse in die Hyperebene  $x_{n+1} = 0$  projiziert. Die  $n$ -Sphäre entsteht also aus zwei  $n$ -dimensionalen Vollkugeln dadurch, daß man ihre Ränder topologisch aufeinander abbildet und identifiziert.<sup>11</sup>

Eine weitere Erzeugungsweise der  $n$ -Sphäre besteht darin, daß man solche Randpunkte der  $n$ -dimensionalen Vollkugel

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1,$$

die spiegelbildlich zur Äquatorhyperebene  $x_n = 0$  liegen, identifiziert. Denn die Äquatorhyperebene zerlegt die Vollkugel in zwei  $n$ -dimensionale Elemente, deren Randsphären zu identifizieren sind.

Die punktierte  $n$ -Sphäre, das ist die  $n$ -Sphäre nach Entfernung eines ihrer Punkte, ist dem Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$  homöomorph; denn die Formeln der stereographischen Projektion (S. 28) gelten für beliebige Dimension  $n$ . Man kann die stereographische Projektion dadurch künstlich umkehrbar eindeutig machen, daß man einen uneigentlichen (oder unendlich fernen) Punkt — Bild des Projektionszentrums — zum  $\mathbb{R}^n$  hinzunimmt und als seine Umgebungen die Bilder von Umgebungen des Projektionszentrums auf der  $n$ -Sphäre erklärt, das sind im  $\mathbb{R}^n$  Punktmengen, die alle Punkte außerhalb einer genügend großen Kugel und natürlich den uneigentlichen Punkt selbst umfassen. Man kann also sagen, daß die  $n$ -Sphäre durch Schließung des Zahlenraumes mit einem einzigen uneigentlichen Punkte entsteht.

Simplexstern  $\mathfrak{St}^n$ .

Ist  $\mathfrak{S}^{n-1}$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler endlicher simplizialer Komplex, so erhält man daraus einen Simplexstern genannten, später vielfach gebrauchten  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplex  $\mathfrak{St}^n$ , dessen Schema aus demjenigen von  $\mathfrak{S}^{n-1}$  dadurch hervorgeht, daß man eine neue Ecke  $O$  hinzunimmt und jedes  $i$ -Simplex  $\mathfrak{E}^i = (P_0 P_1, \dots, P_i)$  mit  $O$  zu einem  $(i+1)$ -Simplexe  $(OP_0 P_1, \dots, P_i)$  zusammenfaßt. Der Punkt  $O$  heißt Mittelpunkt, der Komplex  $\mathfrak{S}^{n-1}$  Außenrand des Simplexsternes; der Außenrand eines Simplexsternes hat nichts mit dem Rande eines Simplexes oder eines konvexen Bereiches zu tun. Beispielsweise bilden alle Simplexe eines simplizialen Komplexes, die eine Ecke gemeinsam haben, einen Simplexstern. Einen  $\mathfrak{St}^2$  zeigt Fig. 36; die Simplexe des Außenrandes  $\mathfrak{S}^1$  sind darin stark ausgezogen.

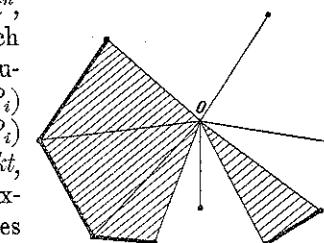


Fig. 36.

Jeder konvexe  $n$ -dimensionale Bereich eines Zahlenraumes  $\mathbb{R}^n$ , dessen Rand ein aus geradlinigen  $(n-1)$ -Simplexen bestehender Komplex  $\mathfrak{S}^{n-1}$  ist, gibt zur Bildung eines  $\mathfrak{St}^n$  Anlaß. Man hat nur die geradlinigen Sim-

plex von einem mittleren Punkte  $O$  des konvexen Bereiches aus zu projizieren. Nach dem Hilfssatze von § 10 über Komplexe im Zahlenraume entsteht hierdurch nämlich ein  $n$ -dimensionaler Komplex, der ein  $\mathfrak{St}^n$  ist, weil sein Schema dasjenige eines  $\mathfrak{St}^n$  ist.

## $n$ -dimensionaler projektiver Raum $\mathbb{P}^n$ .

Die durch den Nullpunkt  $O$  gehenden Geraden des  $(n+1)$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\Re^{n+1}$  bilden, als „Punkte“ eines Umgebungsraumes aufgefaßt, für  $n \geq 2$ , wie wir zeigen werden, einen Komplex  $\mathfrak{P}^n$ , den  $n$ -dimensionalen projektiven Raum, wenn man zur Umgebung einer Geraden  $g$  die Geraden rechnet, die durch die Punkte einer räumlichen Umgebung irgendeines Punktes von  $g$  hindurchgehen. Insbesondere erfüllen die Geraden, die  $O$  mit allen Punkten einer kugelförmigen  $\varepsilon$ -Umgebung eines von  $O$  verschiedenen Punktes von  $g$  verbinden, eine spezielle Umgebung von  $g$ , einen „Kreiskegel“ um  $g$ .

Eine Gerade  $g$  durchstößt die Einheits- $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  in zwei diametralen Punkten  $P_1$  und  $P_2$ . Man erhält den projektiven Raum, indem man in der Menge  $\mathfrak{M} = \mathbb{S}^n$  aller  $n$ -Sphärenpunkte Diametralpunkte für äquivalent erklärt und identifiziert. Die Paare von Diametralpunkten der  $n$ -Sphäre sind nämlich eindeutig auf die Geraden abgebildet, die den  $\mathbb{P}^n$  ausmachen. Um einzusehen, daß der  $\mathbb{P}^n$  durch Identifizieren der Paare entsteht, hat man daher nur noch zu zeigen, daß die Vereinigungsmenge zweier beliebiger Umgebungen  $U(P_1|\mathfrak{M})$  und  $U(P_2|\mathfrak{M})$  bei dieser Zuordnung in eine Umgebung von  $g$  übergeht und daß man so alle Umgebungen von  $g$  erhält, ein Beweis, den wir dem Leser überlassen.

Man erhält den  $\mathbb{P}^n$  auch, indem man in einer  $n$ -dimensionalen Vollkugel Diametralpunkte des Randes, einer  $(n-1)$ -Sphäre, identifiziert. Diese Darstellung des  $\mathbb{P}^n$  haben wir in § 2 für  $n=2$  durchgeführt; sie überträgt sich offenbar auf beliebige Dimensionen.

Die sämtlichen Punkte einer durch den Nullpunkt des  $\mathbb{R}^{n+1}$  gehenden Geraden haben (reelle) Koordinaten

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1},$$

die sich nur durch einen gemeinsamen Faktor unterscheiden. Man kann daher diese Geraden und damit die projektiven Punkte umkehrbar eindeutig den Systemen von  $n + 1$  Verhältniszahlen, das sind bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor bestimmte Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , zuordnen. Nur das aus lauter Nullen bestehende System ist auszuschließen, da ihm keine bestimmte Gerade entspricht. Eine Umgebung eines projektiven Punktes  $\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \dots : \bar{x}_{n+1}$  wird von allen Punkten  $x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}$  gebildet, für die bei festen Werten  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}$

$$|x_1 - \bar{x}_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| < \varepsilon$$

ist. Denn diesen projektiven Punkten entsprechen alle Geraden, die vom Anfangspunkt  $O$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  nach den Punkten einer räumlichen Würfel-

umgebung des Raumpunktes  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1})$  führen. Die Größe einer solchen Umgebung hängt nicht nur von dem projektiven Punkte  $\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \dots : \bar{x}_{n+1}$  und der Wahl von  $\varepsilon$  ab, sondern auch von der Wahl des gemeinsamen Faktors der  $\bar{x}$ .

Eine simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{S}^n$  gewinnt man, wenn man in der oktaedralen Teilung der  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$  zur Normalunterteilung übergeht (die immer noch zentrisch symmetrisch ist) und deren diametral gegenüberliegende Simplexe identifiziert. Der Übergang zur Normalunterteilung ist deshalb erforderlich, weil sonst die Komplexbedingung ( $k_3$ ) verletzt wäre. Denn zwei beliebige  $n$ -Simplexe der oktaedralen Zerlegung von  $\mathbb{S}^n$  haben nach Diametralpunktidentifizierung dieselben Ecken (vgl. die Aufg. in § 13).

Topologische Produkte.

Aus zwei Umgebungsräumen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  leitet sich ein neuer Umgebungsraum  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ , das *topologische Produkt* durch folgende Definition ab: Einem Punktpaare, bestehend aus einem Punkte  $A$  von  $\mathfrak{A}$  und einem Punkte  $B$  von  $\mathfrak{B}$  entspricht umkehrbar eindeutig ein Punkt  $A \times B$  des topologischen Produktes  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ . Eine Umgebung des Punktes  $\bar{A} \times \bar{B}$  wird von allen Punkten gebildet, für die  $A$  in einer Umgebung von  $\bar{A}$  in  $\mathfrak{A}$  und  $B$  in einer Umgebung von  $\bar{B}$  in  $\mathfrak{B}$  liegt; überdies wird jede solche Menge umfassende Menge als eine Umgebung von  $\bar{A} \times \bar{B}$  erklärt.

Beispielsweise ist die Zahlenebene das topologische Produkt zweier Zahlengeraden, der  $x_1$ - und der  $x_2$ -Achse. — Sind allgemeiner  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Punktmengen eines Zahlenraumes  $\mathbb{R}^a$  bzw.  $\mathbb{R}^b$ , so läßt sich  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  als eine Punktmenge des Zahlenraumes  $\mathbb{R}^{a+b} = \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$  auffassen. Sind nämlich

$$x_1, x_2, \dots, x_a \quad (A)$$

die Koordinaten eines Punktes  $A$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{K}^a$ , und

$$x_{a+1}, x_{a+2}, \dots, x_{a+b} \quad (B)$$

die Koordinaten eines Punktes  $B$  von  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{K}^b$ , so wählen wir als Punkt  $A \times B$  den Punkt mit den Koordinaten

$$x_1, x_2, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+b}; \quad (A \times B)$$

offenbar ist dann die Menge der Punkte  $A \times B$ , als Teilmenge von  $\mathfrak{M}^{a+b}$  betrachtet, ein zum topologischen Produkte  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  homöomorpher Umgebungsraum.

**Aufgabe:** Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  konvexe Bereiche der Dimensionen  $\alpha$  und  $\beta$  in den Zahlenräumen  $\mathbb{R}^\alpha$  und  $\mathbb{R}^\beta$ , so ist das topologische Produkt  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ , wenn man es wie oben als Teilmenge eines Zahlenraumes  $\mathbb{R}^{\alpha+\beta}$  auffaßt, ein konvexer Bereich der Dimensionen  $\alpha + \beta$ ; sein Rand wird von dem topologischen Produkten des Randes von  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{B}$  und demjenigen des Randes von  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{A}$  gebildet.

**Satz:** Das topologische Produkt zweier Komplexe ist wieder ein Komplex.

Beweis: Man lege eine simpliziale Zerlegung des Komplexes  $\mathfrak{A}$  geradlinig in einen Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$  und eine Zerlegung von  $\mathfrak{B}$  geradlinig

in einen Zahlenraum  $\mathfrak{R}^b$ , was nach S. 46 möglich ist. Dann ist  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  eine Punktmenge des Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^a \times \mathfrak{R}^b$ , und zwar die Vereinigungsmenge der Produkte je eines Simplexes von  $\mathfrak{A}$  mit je einem Simplexe von  $\mathfrak{B}$ . Jedes solche Produkt  $\mathfrak{E}^\alpha \times \mathfrak{E}^\beta$  ist ein konvexer Bereich der Dimension  $\alpha + \beta$ , dessen Rand von den  $(\alpha + \beta - 1)$ -dimensionalen Bereichen  $\mathfrak{E}_\mu^{\alpha-1} \times \mathfrak{E}^\beta$  und  $\mathfrak{E}^\alpha \times \mathfrak{E}_\nu^{\beta-1}$  gebildet wird (vgl. die vorstehende Aufgabe). Dabei bezeichnet  $\mathfrak{E}_\mu^{\alpha-1}$  eine Seite von  $\mathfrak{E}^\alpha$ , und  $\mathfrak{E}_\nu^{\beta-1}$  eine Seite von  $\mathfrak{E}^\beta$ . Die simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{R}^{a+b}$  wird durch schrittweise Projektion konstruiert: man teile zunächst die eindimensionalen konvexen Bereiche (geradlinige Strecken) je durch ihren Mittelpunkt. Nachdem die  $(k-1)$ -dimensionalen Bereiche simplizial zerlegt sind, projizierte man den Rand eines  $k$ -dimensionalen Bereiches von einem mittleren Punkte aus und gewinnt dadurch die simpliziale Zerlegung der  $k$ -dimensionalen Bereiche. Auf diese Weise kann man die Bereiche jeder Dimension simplizial zerlegen. Für die Menge der so erhaltenen Simplexe sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes von § 10 erfüllt, es liegt also eine simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  vor.

Zu späterem Gebrauche stellen wir den folgenden Hilfssatz bereit.

**Hilfssatz:** Das topologische Produkt  $\mathfrak{R}^n \times t$  aus einem Komplexe  $\mathfrak{R}^n$  und der Einheitsstrecke  $0 \leq t \leq 1$  sei vermöge einer Abbildung  $f$  in einen simplizialen Komplex  $K^m$  folgendermaßen abgebildet: für jeden Punkt  $P$  von  $\mathfrak{R}^n$  sollen  $f(P \times 0)$  und  $f(P \times 1)$  demselben Simplexe von  $K^m$  angehören, und es soll die Strecke  $P \times t$  linear in die Verbindungsstrecke von  $f(P \times 0)$  und  $f(P \times 1)$  übergehen. Wenn dann die Teilmengen  $\mathfrak{R}^n \times 0$  von  $f(P \times 0)$  und  $\mathfrak{R}^n \times 1$  bei  $f$  stetig abgebildet werden, so ist  $f$  überhaupt stetig.

**Beweis:** Wir denken uns  $\mathfrak{R}^n$  als Teilmenge eines Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^a$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_a$ .  $\mathfrak{R}^n \times t$  ist dann eine Teilmenge des Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^a \times \mathfrak{R}^1$ , wobei  $\mathfrak{R}^1$  die Zahlengerade mit der Koordinate  $t$  bezeichnet. Ebenso denken wir uns  $K^m$  geradlinig in einem Zahlenraume  $\mathfrak{R}^b$  mit den Koordinaten  $y_1, y_2, \dots, y_b$  gelegen. Dann wird die Abbildung  $f$  durch die Abbildungsfunktionen

$$y_i(x_1, x_2, \dots, x_a, t) = y_i(x_1, x_2, \dots, x_a, 0) \cdot (1-t) + y_i(x_1, x_2, \dots, x_a, 1) \cdot t \\ (i = 1, 2, \dots, b)$$

vermittelt. Da  $y_i(x_1, x_2, \dots, x_a, 0)$  und  $y_i(x_1, x_2, \dots, x_a, 1)$  nach Voraussetzung stetige Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_a$  sind (vgl. S. 25), so ist  $y_i(x_1, x_2, \dots, x_a, t)$  stetig in  $x_1, x_2, \dots, x_a, t$ , d. h.  $f$  ist stetig.

**Aufgaben:** 1. Man zeige, daß  $\mathfrak{E}^n$  durch Identifizieren aller Randpunkte einer  $n$ -dimensionalen Vollkugel entsteht.

2. Ordnet man jedem Punkte  $A \times B$  des topologischen Produktes  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  den Punkt  $A$  von  $\mathfrak{A}$  zu, so ist dies eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  auf  $\mathfrak{A}$ .

3. Ein Massenpunkt sei gezwungen, sich mit konstanter Geschwindigkeit a) auf einer Ringfläche, b) auf einer Kugelfläche zu bewegen. Man zeige, daß der Phasenraum (§ 4)

- a) das topologische Produkt aus Ringfläche und Kreislinie,
- b) der projektive Raum  $\mathbb{P}^3$  ist.<sup>12</sup>

4. Man beweise: Die Einheits-3-Sphäre des vierdimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^4$ , die die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad (3)$$

hat, läßt sich in zwei kongruente (durch eine euklidisch starre Bewegung um den Mittelpunkt ineinander überführbare) Vollringe (topologische Produkte aus „Kreisscheibe und Kreislinie“) zerlegen:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + x_4^2 \quad \text{und} \quad x_1^2 + x_2^2 \geq x_3^2 + x_4^2.$$

Bei stereographischer Projektion vom Nordpol  $(0, 0, 0, 1)$  in die Äquatorhyperebene  $x_4 = 0$  mit den kartesischen Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  (S. 28) geht die gemeinsame Randringfläche, deren Punkte außer (3) die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 \quad (4)$$

erfüllen, in eine Rotationsringfläche mit der  $\xi_3$ -Achse als Rotationsachse über. Diese zerlegt die durch das Bild des Nordpols zum sphärischen Raum geschlossene Äquatorhyperebene somit ebenfalls in zwei Vollringe. Die „Seele“ des ersten ist der Einheitskreis der  $\xi_1, \xi_2$ -Ebene, die des zweiten die  $\xi_3$ -Achse (Fig. 37).

5. Die Ringfläche der Aufgabe 4 läßt sich (sogar durch eine sphärisch starre Bewegung) so im sphärischen Raum deformieren, daß sie mit sich selbst wieder zur Deckung kommt und Breiten- und Meridiankreis vertauscht werden. [Vgl. S. 3 und S. 168, Aufgabe.]

6. Wenn man in der Einheits-3-Sphäre Diametralpunkte identifiziert, also zum projektiven Raum  $\mathbb{P}^3$  übergeht, so wird aus der eben erwähnten Ringfläche ein einschaliges Hyperboloid, das in den projektiven Koordinaten  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$  die Gleichung (4) hat; es ist der Ringfläche homöomorph und zerlegt den  $\mathbb{P}^3$  ebenfalls in zwei Vollringe. Projektiver und sphärischer dreidimensionaler Raum lassen sich daher beide durch eine Ringfläche in zwei (projektiv bzw. sphärischstarr ineinander überführbare) Vollringe zerlegen. Man führe den Beweis durch.

7. Man beweise: Jede (nichtleere) Teilmenge des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes ist ein unendlicher Komplex. [Man schöpfe die Teilmenge durch immer feiner werdende  $n$ -dimensionale Würfel aus und unterteile diese simplizial.]

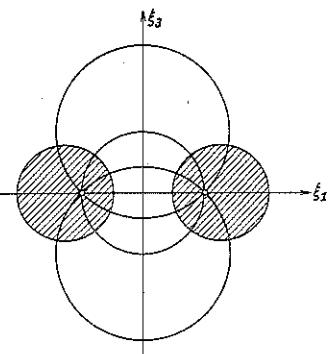


Fig. 37.

$k$ -Kette umkehrbar eindeutig durch einen  $\alpha^k$ -dimensionalen ganzzahligen Vektor\*)

$$(u_1, u_2, \dots, u_{\alpha^k}) \quad (U^k)$$

gegeben, und zwei Ketten  $U^k$  und  $V^k$  werden addiert, indem man ihre zugeordneten Vektoren addiert. Das heißt aber, daß die  $k$ -Ketten eine abelsche Gruppe, nämlich ein  $\alpha^k$ -dimensionales Gitter  $\mathfrak{X}^k$  bilden. Als Basis (§ 86) kann man die orientierten Simplexe  $E_1^k, E_2^k, \dots, E_{\alpha^k}^k$  benutzen. Dann ist, wenn wir, wie immer bei abelschen Gruppen, additive Schreibung benutzen,

$$U^k = u_1 E_1^k + u_2 E_2^k + \dots + u_{\alpha^k} E_{\alpha^k}^k.$$

Als eine Rechenregel notieren wir:

$$\text{aus } m U^k = 0 \text{ und } m \neq 0 \text{ folgt } U^k = 0.$$

Denn alle Elemente von  $\mathfrak{X}^k$  haben unendliche Ordnung.

### § 16. Rand, geschlossene Ketten.

Ist  $\mathfrak{E}^{k-1}$  eine Seite des orientierten Simplexes  $E^k$ , so ist durch die Orientierung von  $E^k$  zugleich in  $\mathfrak{E}^{k-1}$  eine bestimmte „induzierte“ Orientierung festgelegt nach der folgenden Regel: Ist  $P_0$  die der Seite  $\mathfrak{E}^{k-1}$  gegenüberliegende Ecke von  $E^k$  und  $E^k = \varepsilon(P_0 P_1 \dots P_k)$ , so ist die in  $\mathfrak{E}^{k-1}$  induzierte Orientierung durch  $\varepsilon(P_1 P_2 \dots P_k)$  gegeben. Unter dem *Rande* eines orientierten Simplexes  $E^k$  versteht man dann die von den  $(k-1)$ -dimensionalen Seiten gebildete  $(k-1)$ -Kette, in der jedes Simplex mit der induzierten Orientierung und der Vielfachheit 1 genommen wird.\*\*) Bezeichnen jetzt  $E_0^{k-1}, E_1^{k-1}, \dots, E_{\alpha^{k-1}}^{k-1}$  die mit willkürlich vorgegebenen Orientierungen versehenen  $(k-1)$ -dimensionalen Seitensimplexe von  $E^k$ , so ist der Rand von  $E^k$  hiernach die  $(k-1)$ -Kette

$$\partial E^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i (P_0 P_1 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_k) = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i E_i^{k-1}.$$

Hierin ist  $\varepsilon_i = +1$  oder  $= -1$ , je nachdem das willkürlich orientierte Simplex  $E_i^{k-1}$  die induzierte Orientierung besitzt oder nicht. Der Rand wird mit dem Symbole  $\partial$  bezeichnet.

Unter dem Rande einer beliebigen  $k$ -Kette  $U^k = \sum_{z=1}^{\alpha^k} u_z E_z^k$  wird die Summe der Ränder der einzelnen  $k$ -Simplexe verstanden:

$$\partial U^k = \partial \sum_{z=1}^{\alpha^k} u_z E_z^k = \sum_{z=1}^{\alpha^k} u_z \partial E_z^k.$$

\*) Die im folgenden benutzten Begriffe: Vektor, Gitter, abelsche Gruppe, direkte Summe usw. finden sich im XII. Kapitel definiert.

\*\*) Rand(-kette) eines orientierten Simplexes und Rand eines nichtorientierten Simplexes, allgemeiner eines reinen Komplexes (S. 48) sind wohl zu unterscheiden: Jener ist eine lineare Kombination von orientierten Simplexen, dieser eine Punktmenge.

## Drittes Kapitel.

### Homologiegruppen.

Wir haben bisher den Begriff des Komplexes und seiner simplizialen Zerlegung kennengelernt. Alle unsere folgenden Untersuchungen stehen in mehr oder minder unmittelbarer Beziehung zu dem ungelösten Probleme, die Komplexe vollständig zu klassifizieren und auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Dabei sind Eigenschaften des Komplexes nur solche, die nicht an der einzelnen simplizialen Zerlegung haften und durch topologische Abbildungen nicht zerstört werden. Trotzdem beginnen wir damit, eine einzelne simpliziale Zerlegung eines Komplexes zu untersuchen, und wir werden erst im nächsten Kapitel beweisen, daß die wichtigen aus der simplizialen Zerlegung ermittelten Eigenschaften, nämlich die Homologiegruppen, von der gewählten simplizialen Zerlegung unabhängig und topologisch invariant sind.

Die Betrachtungen dieses Kapitels sind insofern rein kombinatorisch, als nirgends von den Begriffen Umgebung, stetig usw. der Kontinuumstopologie Gebrauch gemacht wird. Vielmehr genügt es, unter dem  $n$ -dimensionalen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  sich einfach sein Schema vorzustellen, also eine Menge von „Ecken“, in der gewisse ausgezeichnete Teilmengen als „Simplexe“ erklärt sind, wobei nur die Bedingungen (Sch<sub>1</sub>) bis (Sch<sub>3</sub>) von § 11 erfüllt sein müssen. Der Einfachheit halber betrachten wir immer einen endlichen Komplex.

### § 15. Ketten.

Eine simpliziale  $k$ -dimensionale Kette oder simpliziale  $k$ -Kette auf dem endlichen  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  besteht aus einigen  $k$ -Simplexen von  $\mathfrak{K}^n$ , deren jedes mit einer bestimmten Orientierung und einer bestimmten positiven Vielfachheit genommen ist.

Eine besondere  $k$ -Kette ist die  $k$ -Kette 0, die aus 0  $k$ -Simplexen besteht. Für  $k > n$  ist die  $k$ -Kette 0 die einzige  $k$ -Kette. Ferner ist jedes orientierte  $k$ -Simplex einfach gezählt eine  $k$ -Kette.

Kommt ein  $k$ -Simplex in einer  $k$ -Kette überhaupt nicht vor, so sagt man auch, daß es mit der Vielfachheit 0 vorkommt, und dafür, daß ein orientiertes Simplex  $E^k$  mit der Vielfachheit  $a$  vorkommt, sagt man, daß das entgegengesetzt orientierte Simplex  $-E^k$  mit der Vielfachheit  $-a$  in der Kette vorkommt.

Wir definieren jetzt die Summe zweier Ketten  $U^k$  und  $V^k$ . Sie ist wieder eine  $k$ -Kette  $U^k + V^k$ , die man auf folgende Weise erhält: Kommt ein orientiertes Simplex  $E_z^k$  in  $U^k$  mit der Vielfachheit  $u_z$  und in  $V^k$  mit der Vielfachheit  $v_z$  vor, so kommt  $E_z^k$  in der Kette  $U^k + V^k$  mit der Vielfachheit  $u_z + v_z$  vor. Denkt man sich also alle  $k$ -Simplexe von  $\mathfrak{K}^n$  fest orientiert und mit  $E_z^k$  ( $z = 1, 2, \dots, \alpha^k$ ) bezeichnet(\*), so ist eine

\*) Das  $k$  an  $\alpha^k$  weist, wie obere Indizes überhaupt, auf die Dimension hin und ist nicht als Exponent zu verstehen.

Demnach gelten die Rechenregeln:

$$\partial(U^k \pm V^k) = \partial U^k \pm \partial V^k, \quad (1)$$

$$\partial m U^k = m \partial U^k, \quad (2)$$

$$\text{aus } \partial m U^k = 0 \text{ und } m \neq 0 \text{ folgt } \partial U^k = 0; \quad (3)$$

nach (2) ist nämlich  $\partial m U^k = m \partial U^k$ , und daraus folgt  $\partial U^k = 0$ .

Als Rand einer nulldimensionalen Kette wird die Zahl 0 festgesetzt.

Eine  $k$ -Kette heißt *geschlossen* oder ein *Zykel*, wenn ihr Rand verschwindet, d. h. die  $(k-1)$ -Kette 0 oder im Falle  $k=0$  die Zahl 0 ist. Eine 0-Kette ist also geschlossen.

Wegen (1) sind Summe und Differenz zweier geschlossener Ketten wieder geschlossene Ketten. Die geschlossenen  $k$ -Ketten machen daher ein Teilgitter  $\mathfrak{G}^k$  im Gitter  $\mathfrak{E}^k$  aller  $k$ -Ketten aus. Für  $k=0$  fällt  $\mathfrak{G}^0$  mit  $\mathfrak{E}^0$  zusammen.

Von den Randketten gilt der wichtige

*Satz: Jede Randkette ist geschlossen.*

*Beweis:* Da jede  $(k-1)$ -dimensionale Randkette Summe von Randketten von orientierten  $k$ -Simplexen ist, so genügt es zu zeigen, daß der Rand eines orientierten  $k$ -Simplexes  $E^k$  geschlossen ist. Dabei kann  $k > 1$  angenommen werden, da die Randkette eines 1-Simplexes wie jede 0-Kette geschlossen ist. Sei also

$$E^k = (P_0 P_1 P_2 \dots P_k) \quad (k > 1)$$

und  $\mathfrak{G}^{k-2}$  ein vorgegebenes mit  $E^k$  inzidentes  $(k-2)$ -Simplex. Dann ist es keine Einschränkung anzunehmen, daß gerade  $P_2, P_3, \dots, P_k$  seine Ecken sind, da man in dem Symbol  $(P_0 P_1 P_2 \dots P_k)$  irgendwelche  $k-1$  Ecken durch eine *g e r a d e* Permutation an die letzte Stelle bringen kann. Nach der Definition des Randes ist

$$\partial E^k = (P_1 P_2 \dots P_k) - (P_0 P_1 \dots P_k) + \dots$$

und daher

$$\partial \partial E^k = (P_2 \dots P_k) - (P_2 \dots P_k) + \dots;$$

nur die beiden hingeschriebenen Simplexe enthalten alle Ecken  $P_2, \dots, P_k$ . Da sie sich gegenseitig wegheben, kommt das Simplex  $(P_2 \dots P_k)$  nicht in  $\partial \partial E^k$  vor, es ist also  $\partial \partial E^k = 0$ .

*Beispiel:*  $\mathfrak{K}^n$  sei der in der Fig. 38 gezeichnete Komplex  $\mathfrak{K}^2$ , eine simpliziale Zerlegung des Kreisringes. Die Dreiecke, jedes mit der Vielfachheit 1 genommen, bilden bei der durch die Kreispfeile angegebene Orientierung eine 2-Kette

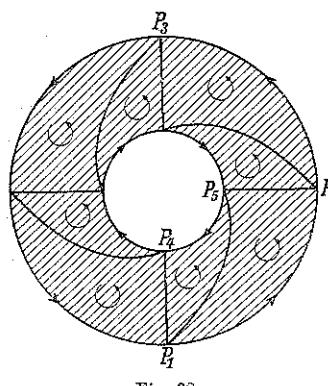


Fig. 38.

$U^2$ . Um den Rand von  $U^2$  zu bestimmen, gehen wir die sämtlichen Kanten durch. Die Kante  $(P_1 P_5)$  kommt sicher nicht in  $\partial U^2$  vor, da die beiden einzigen angrenzenden Dreiecke  $+(P_4 P_1 P_5)$  und  $+(P_2 P_5 P_1)$  in ihr entgegengesetzte Orientierungen in-

duzierien, nämlich die Orientierungen  $+(P_1 P_5)$  und  $+(P_5 P_1)$ . Ebensowenig tritt die Kante  $(P_1 P_4)$  oder irgendeine andere mittlere Kante in  $\partial U^2$  auf. Dagegen wird in der Kante  $(P_1 P_2)$  der äußeren Kontur von dem einzigen daran grenzenden Dreiecke  $+(P_5 P_1 P_2)$  die Orientierung  $+(P_1 P_2)$  induziert.  $+(P_1 P_2)$  kommt also im Rande von  $U^2$  mit der Vielfachheit 1 vor.  $\partial U^2$  besteht daher aus den sämtlichen Kanten der inneren und äußeren Kontur, wobei jede Kante einfach zu zählen und mit der durch den Pfeil angegebenen Orientierung zu nehmen ist.  $\partial U^2$  ist in der Tat geschlossen. Es bilden sogar die Kanten der inneren und äußeren Kontur für sich je eine geschlossene Kette  $B_a^1$  und  $B_a^2$ . Z. B. wird in der Ecke  $P_2$  von der Kante  $+(P_1 P_2)$  die Orientierung  $+(P_2)$ , von der Kante  $+(P_2 P_3)$  dagegen die Orientierung  $-(P_2)$  induziert.

### § 17. Homologe Ketten.

Wenn auch jede Randkette auf  $\mathfrak{K}^n$  geschlossen ist, so ist darum nicht jede geschlossene Kette Randkette. Z. B. berandet die äußere Kontur  $B_a^1$  des eben angeführten Kreisringes nicht. Wenn eine geschlossene  $k$ -Kette  $U^k$  Rand einer  $(k+1)$ -Kette  $U^{k+1}$  auf  $\mathfrak{K}^n$  ist, so heißt  $U^k$  berandend oder *nullhomolog*; in Zeichen

$$U^k \sim 0.$$

Genauer müßte man sagen:  $U^k \sim 0$  auf  $\mathfrak{K}^n$ , was bedeuten soll, daß  $U^{k+1}$  auf  $\mathfrak{K}^n$  liegt, entsprechend

$$U^k \sim 0 \text{ auf } \mathfrak{k},$$

wenn  $\mathfrak{k}$  ein Teilkomplex von  $\mathfrak{K}^n$  ist, dem  $U^{k+1}$  angehört. Ist  $U^k \sim 0$  auf  $\mathfrak{k}$ , so erst recht auf  $\mathfrak{K}^n$ , aber nicht notwendig umgekehrt.

Allgemeiner heißen zwei geschlossene oder ungeschlossene Ketten einander *homolog*, wenn sie sich um eine nullhomologe Kette unterscheiden, d. h. wenn ihre Differenz nullhomolog ist:

$$U^k \sim V^k, \text{ wenn } U^k - V^k \sim 0.$$

Eine Beziehung  $U^k \sim V^k$  heißt eine *Homologie*.

Wegen der Geschlossenheit der nullhomologen Ketten folgt aus  $U^k \sim V^k$   $\partial(U^k - V^k) = 0$ , also  $\partial U^k = \partial V^k$ , d. h. homologe Ketten haben denselben Rand. Ist  $U^k \sim 0$  und  $V^k \sim 0$ , also

$$U^k = \partial U^{k+1}, \quad V^k = \partial V^{k+1},$$

so ist nach § 16 (1)

$$U^k \pm V^k = \partial(U^{k+1} \pm V^{k+1}),$$

somit  $U^k \pm V^k \sim 0$ . Summe und Differenz nullhomologer Ketten sind wieder nullhomologe Ketten. Darum bilden die nullhomologen  $k$ -Ketten ein Teilgitter  $\mathfrak{N}^k$  im Gitter  $\mathfrak{G}^k$  aller geschlossenen  $k$ -Ketten. Man darf also Homologien addieren, subtrahieren und mit einer ganzen Zahl multiplizieren. Dagegen ist es, wie wir sogleich an einem Beispiel sehen werden, nicht erlaubt, durch einen Faktor zu dividieren;

aus  $m U^k \sim 0$  folgt im allgemeinen nicht  $U^k \sim 0$ .

Ferner gilt: ist  $U^k \sim V^k$  und  $V^k \sim W^k$ , so ist  $U^k \sim W^k$ . Mit den Ketten  $U^k - V^k$  und  $V^k - W^k$  ist nämlich auch ihre Summe  $U^k - W^k \sim 0$ . Man kann daher die sämtlichen geschlossenen  $k$ -Ketten in Klassen untereinander homologer Ketten, sog. Homologieklassen einteilen, z. B. bilden die nullhomologen  $k$ -Ketten eine solche Homologieklasse.

1. Beispiel: Wir wollen die eindimensionalen Homologieklassen am Beispiele des Kreisringes (Fig. 38) aufstellen. Wir benutzen die Bezeichnung und das Ergebnis des vorigen Paragraphen; es war

$$\partial U^2 = B_a^1 + B_i^1,$$

also

$$B_a^1 + B_i^1 \sim 0 \quad \text{oder} \quad B_a^1 \sim -B_i^1.$$

$B_a^1$  und  $-B_i^1$  gehören daher derselben Homologieklasse an. — Jede beliebige geschlossene 1-Kette  $U^1$  ist homolog einem Vielfachen von  $B_i^1$ . Enthält  $U^1$  z. B. eine Kante der äußeren Kontur, so kann man diese durch die beiden anderen Seiten des angrenzenden Dreiecks ersetzen, indem man zu  $U^1$  den Rand  $\Delta^1$  dieses passend orientierten Dreiecks addiert. Da  $\Delta^1 \sim 0$ , ist man dadurch zu einer mit  $U^1$  homologen Kette übergegangen. Es gibt daher eine zu  $U^1$  homologe Kette  $'U^1'$ , die keine Kante der äußeren Kontur mehr enthält. Kommt nun in  $'U^1'$  eine „diagonale“ Kante, z. B.  $+(P_1 P_4) + (P_4 P_5)$  vor, so kann man diese ebenso durch die Kanten  $+(P_1 P_4) + (P_4 P_5)$  ersetzen und erhält, wenn man mit allen in  $'U^1'$  auftretenden diagonalen Kanten ebenso verfährt, eine Kette  $"U^1"$ , die weder äußere noch diagonale Kanten enthält, geschlossen und homolog  $U^1$  ist; dann kann aber  $"U^1"$  nur Kanten der inneren Kontur enthalten. Würde eine radiale Kante, etwa  $(P_5 P_2)$  darin auftreten, so müßten sich wegen der Geschlossenheit von  $"U^1"$  die in der Ecke  $P_2$  induzierten Orientierungen wegheben, und da es außer  $(P_5 P_2)$  keine mit  $P_2$  inzidenten Kanten in  $"U^1"$  gibt, so müßte  $(P_5 P_2)$  nullmal in  $"U^1"$  vorkommen.  $"U^1"$  liegt also ganz auf der inneren Kontur und muß wegen der Geschlossenheit alle Kanten der inneren Kontur gleich oft enthalten, also ist in der Tat

$$'U^1 = m B_i^1,$$

wo  $m$  eine ganze Zahl ist.

Während somit jede geschlossene 1-Kette auf der angegebenen Zerlegung des Kreisringes als homolog mit einer der Ketten

$$0, \pm B_a^1, \pm 2 B_i^1, \pm 3 B_i^1, \dots$$

erwiesen ist, sind keine zwei von diesen Ketten einander homolog. Ist nämlich

$$m' B_a^1 \sim m'' B_i^1,$$

so ist  $(m' - m'') B_i^1 = m' B_a^1 \sim 0$ . Hieraus folgt  $m = 0$ , also  $m' = m''$ . Denn wenn die Kette  $m B_i^1$  Rand einer 2-Kette ist, so kommt in dieser irgendeines der an die innere Kontur grenzenden Dreiecke mit der Vielfachheit  $m$  vor. Dann müssen aber, da im Rande der 2-Kette keine mittleren Kanten auftreten können, auch alle anderen Dreiecke mit der Vielfachheit  $m$  vorkommen, also muß die 2-Kette  $= m U^2$  sein. Deren Rand ist  $= m(B_a^1 + B_i^1)$ , also nur dann  $= m B_i^1$ , wenn  $m = 0$  ist. Damit ist gezeigt, daß es unendlich viele Homologieklassen gibt und die Vielfachen von  $B_i^1$  Repräsentanten aus ihnen sind.

2. Beispiel:  $\mathbb{P}^2$  sei die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2$  mit der in der Fig. 39 angegebenen simplizialen Zerlegung. Die gezeichnete Kreisscheibe schließt sich nach § 2 zur projektiven Ebene, wenn man diametral gegenüberliegende Ecken und Kanten des Randkreises als nicht verschieden ansieht. Nach dieser Festsetzung ist die Figur nichts anderes als eine abkürzende Beschreibung des Schemas des simplizialen Komplexes  $\mathbb{P}^2$ , als der die projektive Ebene damit dargestellt ist. So sind z. B. die beiden Punkte  $P$  der Figur ein und derselbe Punkt in der projektiven Ebene,

und die 1-Kette  $A^1$ , die aus den vier orientierten einfach zuzählenden Kanten des oberen Halbkreises besteht, ist dieselbe, die von den vier Kanten des unteren Halbkreises gebildet wird. Orientiert man alle Dreiecke so, daß in jeder mittleren Kante der Kreisscheibe von den beiden daran grenzenden Dreiecken entgegengesetzte Orientierungen induziert werden, so erhält man eine 2-Kette  $U^2$  mit  $\partial U^2 = +2A^1$ , bei der in der Figur gewählten Orientierung der Dreiecke; also ist  $2A^1 \sim 0$ . Die allgemeinsten 2-Ketten, die ein Vielfaches von  $A^1$  zum Rande hat, ist ein Vielfaches von  $U^2$ , etwa  $= k U^2$ . Denn da eine mittlere Kante der Kreisscheibe nicht im Rande dieser 2-Kette auftreten kann, so müssen alle Dreiecke gleich oft darin vorkommen. Der Rand von  $k U^2$  ist aber  $+2k A^1$ ; d. h.  $A^1$ , das eine geschlossene 1-Kette der projektiven Ebene (projektive Gerade) ist, ist nicht  $\sim 0$ , wohl aber das Doppelte. Aus  $2A^1 \sim 0$  folgt also nicht  $A^1 \sim 0$ .

Eine beliebige geschlossene 1-Kette  $U^1$  ist entweder  $\sim 0$  oder  $\sim A^1$ , d. h. es gibt nur zwei 1-dimensionale Homologieklassen. Liegt nämlich die Kette  $U^1$  noch nicht auf dem Rande der Kreisscheibe der Figur, so kann man sie, wie im Falle des Kreisringes, Schritt für Schritt auf den Rand drängen, indem man eine mittlere Kante durch die beiden anderen eines passenden, daran grenzenden Dreiecks ersetzt. Man erhält so eine auf der Kreisperipherie liegende 1-Kette  $'U^1 \sim U^1$ , die wegen ihrer Geschlossenheit in  $\mathbb{P}^2$  nur ein Vielfaches von  $A^1$  sein kann, und da ein gerades Vielfaches von  $A^1$  nullhomolog ist, so ist  $'U^1$  und damit  $U^1$  entweder  $\sim 0$  oder  $\sim A^1$ .

### § 18. Homologiegruppen.

In gruppentheoretischer Hinsicht sind die Homologieklassen nichts anderes als die Restklassen der Zerlegung des Gitters  $\mathbb{G}^k$  der geschlossenen  $k$ -Ketten nach dem eingelagerten Gitter  $\mathfrak{N}^k$  der nullhomologen. Denn es sind zwei geschlossene Ketten  $U^k$  und  $V^k$  dann und nur dann homolog, wenn ihre Differenz nullhomolog ist, wenn sie also derselben Restklasse von  $\mathfrak{N}^k$  in  $\mathbb{G}^k$  angehören. Daher bilden die  $k$ -dimensionalen Homologieklassen selbst eine abelsche Gruppe, wenn unter der Summe zweier Homologieklassen  $H_1^k$  und  $H_2^k$  die Homologieklasse verstanden wird, in der sich die Summe je einer Kette aus  $H_1^k$  und  $H_2^k$  befindet (elementweise Addition). Diese Gruppe, die also die Faktorgruppe  $\mathbb{G}^k/\mathfrak{N}^k$  ist, heißt die  $k$ -te Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$  des simplizialen Komplexes  $\mathbb{P}^n$ . Solange wir es mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung eines Komplexes zu tun haben, ist nicht ersichtlich, warum wir gerade Wert auf die Faktorgruppe des Gitters der geschlossenen und der nullhomologen Ketten legen und nicht z. B. auf die aller  $k$ -Ketten und der geschlossenen. Der Grund liegt darin, daß die Homologiegruppen von der gewählten simplizialen Zerlegung unabhängige topologisch invariante Eigenschaften des Komplexes sind. Ihre topologische Invarianz ist, wie die folgenden Beispiele des

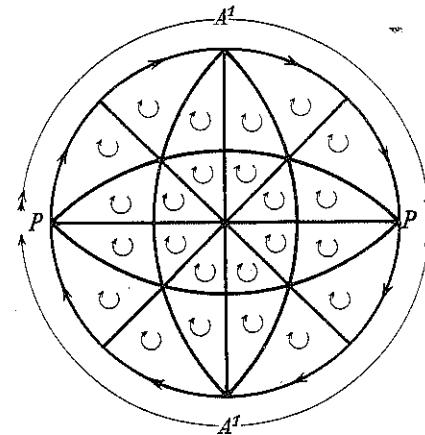


Fig. 39.

Kreisringes, der projektiven Ebene und der Ringfläche zeigen, leicht zu vermuten. Sie ist aber nicht ebenso leicht zu beweisen; der Beweis wird das folgende Kapitel ausfüllen.

Während die Gruppen  $\mathfrak{D}^k$ ,  $\mathfrak{G}^k$ ,  $\mathfrak{N}^k$  Gitter, d. h. freie abelsche Gruppen von endlich vielen Erzeugenden sind, enthält die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$  im allgemeinen außer dem Nullelement noch weitere Elemente endlicher Ordnung, dagegen hat auch  $\mathfrak{H}^k$  immer nur endlich viele Erzeugende als Faktorgruppe der Gruppe  $\mathfrak{G}^k$ , die endlich viele Erzeugende hat. Somit ist  $\mathfrak{H}^k$  direkte Summe aus endlich vielen zyklischen Gruppen, nämlich  $p^k$  freien zyklischen Gruppen und einer Anzahl  $q^k$  zyklischer Gruppen mit endlichen Ordnungen  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{q^k}^k$ , wobei jedes  $c^k$  als Teiler des vorangegangenen angenommen werden darf (§ 86).\*) Die Zahl  $p^k$  und die Ordnungen  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{q^k}^k$  sind durch die Gruppe  $\mathfrak{H}^k$  eindeutig bestimmt und sind für die Gruppe charakteristisch.  $p^k$  heißt die  $k$ -te Bettische Zahl,  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{q^k}^k$  heißen die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  des simplizialen Komplexes  $\mathfrak{K}^n$ . Die Bezeichnung Torsionskoeffizient wird sich später am Beispiele der Linsenräume rechtfertigen (§ 61).

Greift man aus jeder der  $q^k + p^k$  zyklischen Gruppen, deren direkte Summe  $\mathfrak{H}^k$  ist, ein erzeugendes Element heraus, und wählt man weiter in jedem der erzeugenden Elemente, die ja Homologieklassen sind, eine repräsentierende  $k$ -Kette aus, so ergeben sich  $q^k + p^k$  geschlossene  $k$ -Ketten

$$A_1^k, \dots, A_{q^k}^k, B_1^k, \dots, B_{p^k}^k. \quad (1)$$

Jede beliebige geschlossene Kette  $U^k$  ist dann homolog einer linearen Kombination

$$U^k \sim \xi_1 A_1^k + \xi_2 A_2^k + \dots + \xi_{q^k} A_{q^k}^k + \eta_1 B_1^k + \eta_2 B_2^k + \dots + \eta_{p^k} B_{p^k}^k. \quad (2)$$

Dabei kann man wegen  $c_\mu^k A_\mu^k \sim 0$  es erreichen, daß  $0 \leq \xi_\mu < c_\mu^k$  ist, während die  $\eta_\nu$  unbeschränkt variieren können. Nach dieser Normierung sind die Koeffizienten  $\xi_\mu, \eta_\nu$  offenbar eindeutig durch  $U^k$  bestimmt. Man nennt ein solches System von  $q^k + p^k$  geschlossenen  $k$ -Ketten (1) eine Homologiebasis der Dimension  $k$ . Es ist vielfach wichtig, daß man die  $k$ -te Homologiegruppe nicht nur als abstrakte Gruppe kennt und durch die Torsionskoeffizienten und die Bettische Zahl bestimmt, sondern darüber hinaus auch noch eine Homologiebasis ermitteln kann.

Das Auftreten eines Torsionskoeffizienten  $c_\mu^k$  bedeutet topologisch die Existenz einer geschlossenen  $k$ -Kette, die erst  $c_\mu^k$ -mal genommen  $\sim 0$  wird.

Die Bettische Zahl  $p^k$  gibt die Maximalzahl der homolog unabhängigen geschlossenen  $k$ -Ketten an. Endlich viele  $k$ -Ketten  $U_1^k, \dots, U_r^k$  heißen homolog unabhängig, wenn keine Homologie

$$t_1 U_1^k + t_2 U_2^k + \dots + t_r U_r^k \sim 0$$

zwischen ihnen besteht, es sei denn, daß alle Koeffizienten verschwinden. Besteht dagegen eine Homologie zwischen ihnen, so heißen sie homolog ab-

\*) Das hochgestellte  $k$  ist Dimensionsindex und nicht etwa Exponent.

hängig. In der Homologiebasis (1) ist jede der Ketten  $A_\mu^k$  für sich homolog abhängig, wegen  $c_\mu^k A_\mu^k \sim 0$ ; dagegen sind die Ketten  $B_1^k, B_2^k, \dots, B_{p^k}^k$  homolog unabhängig, weil

$$\eta_1 B_1^k + \eta_2 B_2^k + \dots + \eta_{p^k} B_{p^k}^k$$

nur dann  $\sim 0$  ist, wenn alle  $\eta$  verschwinden. Es kann nicht mehr als  $p^k$  homolog unabhängige  $k$ -Ketten geben, da wegen (2) ein geeignetes Vielfaches, z. B. das  $c_1^k$ -fache einer beliebigen geschlossenen  $k$ -Kette homolog einer linearen Kombination der  $p^k$  Ketten  $B_1^k, B_2^k, \dots, B_{p^k}^k$  ist.

Die 0-te Homologiegruppe eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes ist immer die freie zyklische Gruppe. Als Homologiebasis kann man ein orientiertes 0-Simplex, z. B.  $E_1^0$ , nehmen. Denkt man sich nämlich alle 0-Simpexe  $E_1^0, E_2^0, \dots, E_{\alpha^0}^0$  mit dem Vorzeichen + orientiert, und ist

$$U^0 = u_1 E_1^0 + u_2 E_2^0 + \dots + u_{\alpha^0} E_{\alpha^0}^0$$

eine beliebige 0-Kette, so kann man wegen des Zusammenhanges von  $\mathfrak{K}^n$  die beiden Ecken  $E_1^0$  und  $E_2^0$  durch einen Kantenweg verbinden und seine Kanten so orientieren, daß immer aufeinanderfolgende in der gemeinsamen Ecke entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Dadurch wird der Kantenweg zur 1-Kette  $U^1$ , und es ist

$$\partial U^1 = \pm (E_1^0 - E_2^0);$$

somit  $E_2^0 \sim E_1^0$ . Daher ist  $U^0$  homolog dem  $(u_1 + \dots + u_{\alpha^0})$ -fachen von  $E_1^0$ . — Kein von 0 verschiedenes Vielfaches von  $E_1^0$  ist  $\sim 0$ . Im Rande eines 1-Simplices tritt nämlich der eine Eckpunkt mit der Vielfachheit + 1, der andere mit der Vielfachheit - 1 auf. Die Summe der Vielfachheiten ist also 0, was ebenso für den Rand einer beliebigen 1-Kette, d. h. für jede nullhomologe 0-Kette, gilt. Somit ist  $E_1^0$  eine Homologiebasis, und die 0-te Homologiegruppe ist die freie Gruppe von einer Erzeugenden.

Die 0-dimensionalen Homologieklassen kann man mit Hilfe des Begriffes des algebraischen Wertes einer 0-Kette folgendermaßen noch einfacher charakterisieren: Unter dem algebraischen Wert einer 0-Kette verstehen wir die Summe der Vielfachheiten der sämtlichen mit dem Vorzeichen + zu orientierenden 0-Simpexe der Kette. In der Kette  $U^0$  z. B. ist der algebraische Wert  $u_1 + \dots + u_{\alpha^0}$ . Dann kann man sagen: In einem zusammenhängenden Komplex sind zwei 0-Ketten dann und nur dann einander homolog, wenn sie denselben algebraischen Wert haben.

Ebenso leicht beweist man, daß die 0-te Homologiegruppe die freie abelsche Gruppe von  $\tau$  Erzeugenden ist, wenn  $\mathfrak{K}^n$  aus  $\tau$  isolierten Teilkomplexen besteht. Torsionskoeffizienten der Dimension 0 gibt es somit nicht.

Für  $k > n$  besteht die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$  von  $\mathfrak{K}^n$  aus dem Nullelemente allein. Denn es gibt nur eine  $k$ -te Homologieklasse. Sie enthält als einzige  $k$ -Kette die  $k$ -Kette 0. — Für  $k = n$  gibt es ebenso viele Homo-

66 logieklassen wie geschlossene  $n$ -Ketten; mit anderen Worten: aus  $U^n \sim V^n$  folgt stets  $U^n = V^n$ , denn es gibt keine von der  $(n+1)$ -Kette 0 verschiedene  $(n+1)$ -Kette. Nennt man eine Reihe von  $k$ -Ketten  $U_1^k, \dots, U_r^k$  linear abhängig oder unabhängig, je nachdem eine Gleichung

$$t_1 U_1^k + t_2 U_2^k + \cdots + t_r U_r^k = 0$$

mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten besteht oder nicht, so kann man auch sagen: Für  $k = n$  ist linear abhängig dasselbe wie homolog abhängig. Die  $n$ -te Bettische Zahl  $p^n$  ist also gleich der Maximalzahl linear unabhängiger  $n$ -Ketten. Torsionskoeffizienten der Dimension  $n$  gibt es nicht: Aus  $mU^n \sim 0$  folgt nämlich  $mU^n = 0$  und daher, wenn  $U^n \neq 0$  ist  $m = 0$ .

$U^n \neq 0$  ist,  $m = 0$ .  
Es sei noch kurz gesagt, wie man für unendliche Komplexe die Homologiegruppen zu definieren hat. Eine Kette ist wieder ein Aggregat von endlich vielen Simplexen; Rand, Geschlossenheit und Homologie sind wie beim endlichen Komplexe erklärt. Die Elemente der Homologiegruppe der Dimension  $k$  sind wieder die Homologieklassen der  $k$ -dimensionalen geschlossenen  $k$ -Ketten. Dagegen werden die Homologiegruppen eines unendlichen Komplexes im allgemeinen nicht endlich viele Erzeugende haben, so daß sie nicht durch Bettische Zahl und Torsionskoeffizienten charakterisierbar sind.

## § 10. Berechnung der Homologiegruppen in einfachen Fällen.

§ 19. Berechnung der Homologiegruppe  
 1. Im Kreisringe (S. 60) ist jede 1-Kette  $U^1$  homolog einem Vielfachen der Kette  $B_1^1$ , und kein Vielfaches von  $B_1^1$  ist  $\sim 0$ . Die Homologiegruppe der Dimension 1 ist daher die freie zyklische Gruppe und  $B_1^1$  eine Homologiebasis.  $\mathfrak{H}^0$  ist, wie soeben gezeigt, die freie zyklische Gruppe.  $\mathfrak{H}^2$  besteht nur aus dem Nullelemente, da es überhaupt keine geschlossenen von 0 verschiedenen 2-Ketten gibt. Die Bettischen Zahlen sind also

$$p^0 = 1, \quad p^1 = 1, \quad p^2 = 0;$$

Tauionskoeffizienten fehlen in allen Dimensionen.

2. Projektive Ebene (S. 62). Es gibt zwei Homologieklassen der Dimension 1.  $\mathfrak{H}^1$  ist also die Gruppe der Ordnung 2, die Kette  $A^1$  (projektive Gerade) bildet eine Homologiebasis. Da es keine geschlossenen 2-Ketten gibt, so besteht  $\mathfrak{H}^2$  aus dem Nullelemente:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = 0, \quad p^2 = 0;$$

es gibt einen Torsionskoeffizienten der Dimension 1 vom Werte 2.

3. Ringfläche, die in der Zerlegung des nebenstehenden Quadrates gegeben sei (Fig. 40). In dem Quadrat sind gegenüberliegende Seiten zu identifizieren (vgl. S. 3). Die Kanten der Zerlegung zerfallen in mittlere und Randkanten. Randkanten sind die der beiden Seiten  $a$  und  $b$  des Quadrates. Die mittleren Kanten zerfallen in vertikale, horizontale und

diagonale Kanten. Zur Bestimmung der Homologiegruppen gehen wir wie beim Kreisringe vor.

I. Zu jeder geschlossenen 1-Kette  $U^1$  gibt es eine homologe, die sich ganz aus Randkanten zusammensetzt. Jede mittlere vertikale oder diagonale Kante kann nämlich vermöge Addition einer nullhomologen Randkette des rechts angrenzenden Dreiecks durch die beiden anderen Kanten dieses Dreiecks ersetzt werden, jede mittlere horizontale Kante durch die beiden anderen Kanten des darunter liegenden Dreiecks. Nach endlich vielen derartigen Schritten kommt man zu einer homologen Kette  $'U^1 \sim U^1$ , die auf dem Rande des Quadrates liegt. Wegen der Geschlossenheit von  $'U^1$  müssen alle orientierten Kanten der Quadratseite  $a$  gleich oft, etwa  $\alpha$ -mal vorkommen, ebenso alle von  $b$ , etwa  $\beta$ -mal.

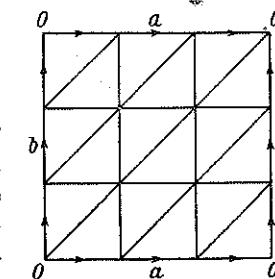


Fig. 4C

Nennen wir die geschlossene 1-Kette, die aus den sämtlichen einfach gezählten Kanten der Quadratseite  $a$  — Orientierung laut Figur! — sich zusammensetzt,  $a^1$ , und führen wir entsprechend die Bezeichnung  $b^1$  ein, so ist hiernach

$$U^1 \sim' U^1 = \alpha a^1 + \beta b^1$$

Die Homologieklassen der geschlossenen Ketten  $a^1$  und  $b^1$  sind also Erzeugende der ersten Homologiegruppe.

II. Es ist  $\alpha a^1 + \beta b^1 \sim 0$  dann und nur dann, wenn  $\alpha = \beta = 0$  ist. Zum Beweise orientieren wir die Dreiecke des Quadrates so, daß in allen mittleren Kanten von den beiden angrenzenden Dreiecken entgegengesetzte Orientierungen induziert werden. Die 2-Kette  $U^2$ , die aus allen diesen orientierten Dreiecken besteht, hat dann überhaupt keinen Rand, da gegenüberliegende Seiten des Quadrates als identisch auf der Ringfläche zu betrachten sind. Sei nun die Kette  $\alpha a^1 + \beta b^1 \sim 0$ ; dann ist diese 1-Kette Rand einer 2-Kette, die alle Dreiecke des Quadrates gleich oft enthalten muß, da die mittleren Kanten aus dem Rande herausfallen müssen. Sie ist daher ein Vielfaches von  $U^2$ , also ebenfalls geschlossen, und es ist daher  $\alpha a^1 + \beta b^1 = 0$ , also  $\alpha = \beta = 0$ , weil die Ketten  $a^1$  und  $b^1$  kein gemeinsames 1-Simplex haben. Somit ist die erste Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^1$  die freie abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden, und  $a^1$  und  $b^1$  (Meridian- und Breitenkreis der Ringfläche) bilden eine Homologieberasis von  $\mathfrak{H}^1$ .  $\mathfrak{H}^0$  und  $\mathfrak{H}^2$  sind freie zyklische Gruppen. Es ist also

$p^0 = 1, p^1 = 2, p^2 = 1$ ; Torsionskoeffizienten fehlen.

Hätte man das Quadrat der Fig. 40 durch mehr als drei vertikale und horizontale und die entsprechenden diagonalen Linien zerlegt, so hätte man für diesen simplizialen Komplex offenbar dieselben Homologiegruppen erhalten. Auch für jede andere vorgelegte, nicht zu verwinkelte simpliziale Zerlegung der Ringfläche wird man das gleiche Ergebnis nachweisen können. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß die Homologiegruppen

von der gewählten Zerlegung der Ringfläche unabhängig sind, daß sie vielmehr schon durch die Ringfläche als Umgebungsraum sich bestimmen. Ehe wir den Beweis dafür erbracht haben (Kap. IV), müssen wir aber mit der Möglichkeit rechnen, daß es Zerlegungen gibt, die zu einem andern Ergebnis führen als die hier benutzte.

4. Simplexstern.  $\mathfrak{R}^n$  sei ein Simplexstern mit dem Mittelpunkte  $O$  und dem Außenrande  $\mathfrak{R}^{n-1}$  und  $U^k$  eine beliebige geschlossene  $k$ -Kette auf  $\mathfrak{R}^n$  ( $k > 0$ ). Man kann  $U^k$  in eine homologe Kette  $'U^k'$  überführen, in der kein  $k$ -Simplex von  $\mathfrak{R}^{n-1}$  mehr vorkommt. Tritt z. B. das Simplex  $E^k = \varepsilon(P_0 P_1 \dots P_k)$  von  $\mathfrak{R}^{n-1}$  in  $U^k$  mit der Vielfachheit  $u$  auf, so subtrahiere man von  $U^k$  den  $u$ -fachen Rand des Simplexes

$$E^{k+1} = \varepsilon(O P_0 P_1 \dots P_k)$$

und erhält eine zu  $U^k$  homologe Kette, in der  $E^k$  nicht mehr auftritt. So beseitigt man der Reihe nach alle auf  $\mathfrak{R}^{n-1}$  liegenden Simplexe von  $U^k$  und gewinnt schließlich eine Kette  $'U^k \sim U^k'$ , deren  $k$ -Simplexe alle mit  $O$  inzident sind. Dann ist aber  $'U^k = 0$ . Kommt nämlich in  $'U^k'$  ein Simplex  $'E^k'$  mit der Vielfachheit  $u$  vor, so kommt die der Ecke  $O$  gegenüberliegende Seite  $'E^{k-1}$  von  $'E^k'$  ebenfalls mit der Vielfachheit  $u$  im Rande von  $'U^k'$  vor. Denn  $'E^k'$  ist das einzige  $k$ -Simplex in  $\mathfrak{R}^n$ , das  $'E^{k-1}$  zur Seite und  $O$  zur Ecke hat. Also ist wegen  $\mathcal{R}'U^k = 0$  auch  $'u = 0$ . Damit ist gezeigt: Auf einem Simplexstern ist für  $k > 0$  jede geschlossene  $k$ -Kette nullhomolog.

$$p^0 = 1, \quad p^1 = \dots = p^n = 0; \quad \text{Torsionskoeffizienten fehlen.}$$

5.  $n$ -Simplex. Da ein  $n$ -Simplex als Simplexstern aufgefaßt werden kann, dessen Mittelpunkt eine Ecke und dessen Außenrand die Gegenseite ist, so sind auch die Homologiegruppen eines  $n$ -Simplexes alle gleich dem Nullelement bis auf die 0-te.

6.  $n$ -Sphäre. Als simpliziale Zerlegung legen wir die tetraedrale zugrunde (§. 52). Es ist danach die  $n$ -Sphäre  $\mathfrak{S}^n$  Rand eines  $n + 1$ -Simplexes  $\mathfrak{G}^{n+1}$ . Nach 5. ist eine geschlossene Kette  $U^k$  auf  $\mathfrak{S}^n$  für  $k > 0$  nullhomolog auf  $\mathfrak{G}^{n+1}$ , also Rand einer Kette  $U^{k+1}$ .  $U^{k+1}$  liegt aber selbst auf  $\mathfrak{S}^n$ , außer wenn  $k + 1 = n + 1$  ist. Also ist für  $0 < k < n$   $U^k \sim 0$  auf  $\mathfrak{S}^n$ , für  $k = n$  dagegen muß  $U^{k+1}$  gleich einem Vielfachen der Kette auf  $\mathfrak{S}^n$ , die aus dem orientierten Simplexe  $E^{n+1}$  besteht, in Formeln sein, die aus dem orientierten Simplexe  $E^{n+1}$  besteht, in Formeln

$$U^{k+1} = u E^{n+1},$$

weil  $E^{n+1}$  das einzige vorhandene  $(n + 1)$ -Simplex ist, also

$$U^k = u \mathcal{R} \partial E^{n+1}.$$

Da  $u \mathcal{R} \partial E^{n+1}$  für  $u \neq 0$  nicht nullhomolog auf  $\mathfrak{S}^n$  ist — denn  $\mathfrak{S}^n$  ist nur  $n$ -dimensional —, haben wir das Ergebnis gewonnen: Die Homologie-

gruppen des Randes eines  $(n + 1)$ -Simplexes bestehen alle aus dem Nullelemente, bis auf die 0-te und die  $n$ -te, die freie zyklische Gruppen sind:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = p^2 = \dots = p^{n-1} = 0, \quad p^n = 1;$$

Torsionskoeffizienten fehlen.

Weniger einfache Beispiele mit beliebig vielen Torsionskoeffizienten beliebiger Werte findet man unter den dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten im IX. Kapitel z. B. § 61 u. § 62 Aufg. 4.

## § 20. Homologien mit Division.

In der Reihe der Gitter  $\mathfrak{L}^k, \mathfrak{G}^k, \mathfrak{N}^k$  läßt sich noch ein weiteres Gitter  $\mathfrak{D}^k$  einschalten, das aus allen  $k$ -Ketten besteht, von denen ein von 0 verschiedenes Vielfaches zu  $\mathfrak{N}^k$  gehört. Die Ketten mit dieser Eigenschaft bilden offenbar ein Gitter. Denn gehört  $c U^k$  und  $d V^k$  zu  $\mathfrak{N}^k$  ( $c \neq 0, d \neq 0$ ), so auch  $c d (U^k \pm V^k)$ , d. h. mit zwei Ketten  $U^k$  und  $V^k$  gehört auch Summe und Differenz zu  $\mathfrak{D}^k$ .  $\mathfrak{N}^k$  ist ein Teilgitter von  $\mathfrak{D}^k$ , und  $\mathfrak{D}^k$  ist seinerseits Teilgitter von  $\mathfrak{G}^k$ . Denn die zu  $\mathfrak{N}^k$  gehörige Kette  $c U^k$  ist wie alle Ketten von  $\mathfrak{N}^k$  geschlossen, und daraus folgt die Geschlossenheit von  $U^k$  nach § 16, Formel (3). Man hat also die folgende Reihe von Gittern

$$\mathfrak{L}^k, \quad \mathfrak{G}^k, \quad \mathfrak{D}^k, \quad \mathfrak{N}^k,$$

in der jedes das folgende enthält.

Die Ketten von  $\mathfrak{D}^k$  heißen *divisions-nullhomolog* (in Zeichen:  $\approx 0$ ).

$$U^k \approx 0$$

bedeutet also: Es gibt eine ganze Zahl  $c \neq 0$ , so daß  $c U^k \sim 0$  ist. Man nennt die divisions-nullhomologen Ketten bisweilen auch Randteiler. Zwei beliebige Ketten  $T_1^k$  und  $T_2^k$  aus  $\mathfrak{L}^k$  heißen einander *divisionshomolog*,

$$T_1^k \approx T_2^k,$$

wenn ihre Differenz  $\approx 0$  ist. Eine solche Beziehung heißt eine Divisionshomologie.

Daß man Divisionshomologien addieren, subtrahieren und mit ganzen Zahlen multiplizieren darf, ist nur ein anderer Ausdruck für die Gittereigenschaft von  $\mathfrak{D}^k$ . Im Gegensatz zu gewöhnlichen Homologien darf man sie aber auch — daher der Name — durch einen von Null verschiedenen Faktor dividieren.

$$b W^k \approx 0 \tag{1}$$

bedeutet nämlich, daß  $c(b W^k) \sim 0$  ist für ein geeignetes  $c \neq 0$ . Diese Relation ist aber, wenn außerdem  $b \neq 0$  ist, gleichbedeutend mit

$$W^k \approx 0. \tag{2}$$

Aus (1) folgt also (2).

Wir betrachten die Restklassenzerlegung von  $\mathfrak{D}^k$  nach dem Teilgitter  $\mathfrak{N}^k$ . Die Restklassen sind Homologieklassen, die als Elemente der Homologie-

gruppe  $\mathfrak{H}^k = \mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$  endliche Ordnung haben. Denn zu jeder Kette aus  $\mathfrak{D}^k$  gibt es ein von Null verschiedenes Vielfaches, das zu  $\mathfrak{N}^k$  gehört. Da umgekehrt jede Kette, von der ein Vielfaches nullhomolog ist, in  $\mathfrak{D}^k$  liegt, so besteht  $\mathfrak{D}^k$  genau aus den Homologieklassen endlicher Ordnung; oder anders ausgedrückt, die Faktorgruppe  $\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k$  ist die Untergruppe der Homologiegruppe, die von den Elementen endlicher Ordnung gebildet wird. Diese Untergruppe heißt *Torsionsgruppe* der Dimension  $k$ . Ihre Ordnung ist gleich dem Produkt der Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$ .

Zerlegt man dagegen  $\mathfrak{G}^k$  nach dem Teilgitter  $\mathfrak{D}^k$ , so ergibt sich eine Einteilung aller geschlossenen Ketten in Klassen untereinander divisionshomologer Ketten. Die Faktorgruppe  $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{D}^k$  heißt die *Bettische Gruppe*<sup>13</sup> der Dimension  $k$ . Auf Grund der gruppentheoretischen Beziehung (§ 83)

$$\mathfrak{G}^k/\mathfrak{D}^k \text{ isomorph mit } (\mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k)/(\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k)$$

kann man die Bettische Gruppe auch als Faktorgruppe der Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k = \mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$  nach der Torsionsgruppe  $\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k$  auffassen. Da nun  $\mathfrak{H}^k$  direkte Summe aus der Torsionsgruppe und einer freien abelschen Gruppe von  $p^k$  Erzeugenden ist, so ist die Bettische Gruppe selbst eine freie abelsche Gruppe von  $p^k$  Erzeugenden. Die Einführung des Gitters  $\mathfrak{D}^k$  bewirkt also eine Zerfällung der Homologiegruppe in einen endlichen Anteil, die Torsionsgruppe, und einen unendlichen Anteil, die Bettische Gruppe, wobei freilich zu beachten ist, daß die Bettische Gruppe nicht etwa als Untergruppe, sondern als Faktorgruppe der Homologiegruppe anzusprechen ist.

Der Homologiebasis tritt nunmehr eine Torsionsbasis und eine Bettische Basis an die Seite. Man stellt die Torsionsgruppe als direkte Summe von zyklischen Gruppen der Ordnungen  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{p^k}^k$  dar, worin  $c_v^k$  die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  bedeuten, wählt aus jeder dieser zyklischen Gruppen ein erzeugendes Element (das ist eine bestimmte Homologieklasse) und daraus wieder einen Repräsentanten aus. Diese  $p^k$  Ketten bilden eine *Torsionsbasis*. — Stellt man entsprechend die Bettische Gruppe als direkte Summe von  $p^k$  freien zyklischen Gruppen dar, greift aus jeder ein erzeugendes Element heraus (das ist eine Klasse untereinander divisionshomologer Ketten) und wählt je einen Repräsentanten daraus, so bilden diese  $p^k$  Ketten eine *Bettische Basis*. Jede beliebige geschlossene Kette ist dann divisionshomolog einer linearen Kombination dieser  $p^k$  Basisketten. In der Homologiebasis

$$A_1^k, A_2^k, \dots, A_{p^k}^k, B_1^k, B_2^k, \dots, B_{p^k}^k$$

von S. 64 bilden die  $A^k$  eine Torsionsbasis, die  $B^k$  eine Bettische Basis. Der Übergang von einer Bettischen Basis

$$B_1^k, B_2^k, \dots, B_{p^k}^k$$

zu einer anderen

$$'B_1^k, 'B_2^k, \dots, 'B_{p^k}^k$$

vollzieht sich durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation

$$'B_u^k \approx \sum_{v=1}^{p^k} b_{\mu v} B_v^k \quad (\mu = 1, 2, \dots, p^k).$$

Im Falle der Ringfläche (§ 19, 3. Beispiel) gibt es keine Torsionsbasis, die Torsionsgruppe besteht aus dem Nullelement; eine Bettische Basis wird von den Ketten  $a^1 (= B_1^1)$  und  $b^1 (= B_2^1)$  — Meridian- und Breitenkreis — gebildet. Im Falle der projektiven Ebene (§ 19, 2. Beispiel) gibt es keine Bettische Basis, und die Bettische Gruppe besteht aus dem Nullelement; eine Torsionsbasis wird von der Kette  $A^1$  — projektive Gerade — gebildet.

Wir stellen die verschiedenen Gruppen und Gitter, die uns bisher begegnet sind, noch einmal zusammen.

$\mathfrak{D}^k$	Gitter aller $k$ -Ketten
$\mathfrak{G}^k$	Gitter der geschlossenen $k$ -Ketten
$\mathfrak{D}^k$	Gitter der divisions-nullhomologen $k$ -Ketten
$\mathfrak{N}^k$	Gitter der nullhomologen $k$ -Ketten
$\mathfrak{H}^k = \mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$	Homologiegruppe
$\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k$	Torsionsgruppe
$\mathfrak{G}^k/\mathfrak{D}^k$ oder $\mathfrak{H}^k/(\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k)$	Bettische Gruppe.

## § 21. Berechnung der Homologiegruppen aus den Inzidenzmatrizen.

Wir haben bisher die Homologiegruppen eines beliebigen simplizialen Komplexes definiert. Wir leiten nunmehr ein allgemeines Verfahren ab, das sie wenigstens für einen endlichen Komplex zu berechnen gestattet. Zu dem Zweck denken wir uns alle Simplexe fest (die 0-Simplexe mit dem Vorzeichen +) orientiert und mit

$$E_z^k \quad (z = 1, 2, \dots, \alpha^k; k = 0, 1, \dots, n)$$

bezeichnet. Alsdann hat man für  $0 \leq k \leq n-1$  die Berandungsrelationen

$$\mathcal{R} \mathcal{D} E_i^{k+1} = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{z,i}^k E_z^k \quad (i = 1, 2, \dots, \alpha^{k+1}). \quad (1)$$

Die Matrix

$$(\varepsilon_{z,i}^k) = E^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

läßt sich als eine Tafel mit doppeltem Eingänge auffassen. Den linken Eingang bilden die orientierten Simplexe der Dimension  $k$ , den oberen die der Dimension  $k+1$ , und im Schnittpunkte der  $z$ -ten Zeile mit der  $i$ -ten Spalte steht der Koeffizient  $\varepsilon_{z,i}^k$ , mit dem das orientierte Simplex  $E_z^k$  in der Randkette des Simplexes  $E_i^{k+1}$  auftritt.  $\varepsilon_{z,i}^k$  ist  $=+1$  oder  $=-1$  oder  $=0$ , je nachdem das orientierte Simplex  $E_z^k$  die von  $E_i^{k+1}$  induzierte Orientierung hat oder die entgegengesetzte oder überhaupt

nicht mit  $E_{\lambda}^{k+1}$  incident ist. Die Matrix  $E^k$  heißt die *Inzidenzmatrix* der Dimension  $k$  der simplizialen Zerlegung des Komplexes.<sup>14</sup>

Die Inzidenzmatrizen  $E^0$  und  $E^1$  eines simplizialen Komplexes, der aus einem einzigen 2-Simplexe  $\mathbb{G}^2$  besteht, sind bei den aus der Fig. 41 zu entnehmenden Orientierungen

$E^0$	$E_1^1$	$E_2^1$	$E_3^1$	$E^1$	$E^2$
$E_1^0$	0	-1	-1	$E_1^1$	+1
$E_2^0$	+1	0	+1	$E_2^1$	+1
$E_3^0$	-1	+1	0	$E_3^1$	-1

Durch die Inzidenzmatrizen ist der simpliziale Komplex vollständig bestimmt. Denn durch sie sind die sämtlichen  $(k-1)$ -dimensionalen Seiten eines Simplexes  $E_x^k$ , von jeder Seite die  $(k-2)$ -dimensionalen Seiten und damit schließlich die Ecken von  $E_x^k$  bestimmt, also ist durch die Inzidenzmatrizen das Schema des Komplexes und damit der Komplex selbst gegeben. Alle Eigenschaften eines simplizialen Komplexes müssen sich daher aus den Inzidenzmatrizen ablesen lassen; insbesondere gilt dies von den Homologiegruppen, die wir jetzt aus den Inzidenzmatrizen ermitteln werden.

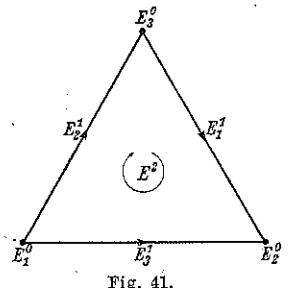


Fig. 41.

Ist in Gleichung (1)  $k > 0$ , so ergibt sich durch nochmalige Randbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\partial \mathcal{R}\partial E_{\lambda}^{k+1} &= \sum_{z=1}^{a^k} \varepsilon_{xz}^k \mathcal{R}\partial E_z^k = \sum_{z=1}^{a^k} \varepsilon_{xz}^k \sum_{i=1}^{a^{k-1}} \varepsilon_{iz}^{k-1} E_i^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{a^{k-1}} \left( \sum_{z=1}^{a^k} \varepsilon_{iz}^{k-1} \varepsilon_{xz}^k \right) E_i^{k-1} = 0,\end{aligned}$$

da der Rand eine geschlossene Kette ist. Also sind wegen der linearen Unabhängigkeit der  $E_i^{k-1}$  die Koeffizienten einzeln  $= 0$ :

$$\sum_{z=1}^{a^k} \varepsilon_{iz}^{k-1} \varepsilon_{xz}^k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, a^{k-1}, z=1, 2, \dots, a^k+1).$$

ein Gleichungssystem, das wir mit Benutzung des Matrizenkalküls\*) durch die eine Matrizengleichung

$$E^{k-1} E^k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (2)$$

ersetzen können. Diese Gleichungen sind der arithmetische Ausdruck dafür, daß jede Randkette geschlossen ist, denn sie sagen nur aus, daß der Rand des Randes eines jeden  $(k+1)$ -Simplexes verschwindet.

\*) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Analytische Geometrie (Leipzig 1932) § 11 oder Schreier-Sperner, Vorlesungen über Matrizen (Leipzig 1932).

### Die orientierten Simplexe

$$E_1^k, E_2^k, \dots, E_{a^k}^k$$

bilden eine spezielle Basis für das Gitter  $\mathbb{X}^k$  aller  $k$ -Ketten. An ihrer Stelle führen wir jetzt in jeder Dimension  $k=0, 1, \dots, n$  eine neue Basis

$$U_1^k, U_2^k, \dots, U_{a^k}^k$$

ein. Für diese Ketten gelten dann die Berandungsrelationen

$$\mathcal{R}\partial U_{\lambda}^{k+1} = \sum_{z=1}^{a^k} \varepsilon_{xz}^k U_z^k, \quad (1')$$

die an Stelle der Berandungsrelationen (1) treten und uns die neuen Matrizen  $'E^k$  liefern. Da der Rand des Randes einer Kette nach wie vor verschwindet, so gelten auch für die neuen, gestrichenen Matrizen die Gleichungen

$$'E^{k-1}'E^k = 0.$$

Wir werden nun die neue Basis für jedes der Gitter  $\mathbb{X}^k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) so zu bestimmen suchen, daß die neuen Matrizen eine möglichst einfache Gestalt, die Normalform  $H^k$ , annehmen. Den Übergang von den ursprünglichen Basen der  $E^k$  zu den endgültigen nehmen wir schrittweise vor. Jeder Schritt besteht darin, daß wir nur eine Basiskette einer bestimmten Dimension ändern. Die Abänderung geschieht durch eine der beiden folgenden elementaren Transformationen:

- a) Ersetzen von  $E_{\tau}^t$  durch  $U_{\tau}^t = E_{\tau}^t + E_v^t$  ( $\tau \neq v$ );
- b) Ersetzen von  $E_{\tau}^t$  durch  $U_{\tau}^t = -E_{\tau}^t$ .

Nach einer Transformation a) stimmen alle Ketten  $U_z^k$  mit den alten  $E_z^k$  überein bis auf  $U_{\tau}^t$ . Es haben sich daher nur die Inzidenzmatrizen  $E^{t-1}$  und  $E^t$  geändert. In  $E^{t-1}$  beschränkt sich die Änderung auf die  $\tau$ -te Spalte. Um sie zu ermitteln, bilden wir

$$\mathcal{R}\partial U_{\tau}^t = \mathcal{R}\partial(E_{\tau}^t + E_v^t) = \sum_{\sigma=1}^{a^{t-1}} (\varepsilon_{\tau\sigma}^{t-1} + \varepsilon_{\sigma v}^{t-1}) U_{\sigma}^{t-1} = \sum_{\sigma=1}^{a^{t-1}} \varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} U_{\sigma}^{t-1};$$

somit ist

$$\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} = \varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} + \varepsilon_{\sigma v}^{t-1}.$$

Man muß also in  $E^{t-1}$  die  $v$ -te Spalte zur  $\tau$ -ten addieren, um  $'E^{t-1}$  zu erhalten. — In der Matrix  $E^t$  wird im linken Eingang  $E_{\tau}^t$  durch  $U_{\tau}^t = E_{\tau}^t + E_v^t$  ersetzt, der obere Eingang bleibt ungeändert. Wenn man bildet

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\partial U_{\lambda}^{t+1} &= \mathcal{R}\partial E_{\lambda}^{t+1} = \cdots + \varepsilon_{\tau\lambda}^t E_{\tau}^t + \cdots + \varepsilon_{v\lambda}^t E_v^t + \cdots \\ &= \cdots + \varepsilon_{\tau\lambda}^t (E_{\tau}^t + E_v^t) + \cdots + (\varepsilon_{v\lambda}^t - \varepsilon_{\tau\lambda}^t) E_v^t + \cdots \\ &= \sum_{\mu=1}^{a^t} \varepsilon_{\mu\lambda}^t U_{\mu}^t,\end{aligned}$$

so erkennt man, daß

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu \lambda}^t &= \varepsilon_{\mu \lambda}^t \quad \text{für } \mu \neq v, \\ \varepsilon_{v \lambda}^t &= \varepsilon_{v \lambda}^t - \varepsilon_{v \tau}^t\end{aligned}$$

ist, d.h.  $E^t$  entsteht aus  $E^t$  durch Subtraktion der  $\tau$ -ten Zeile von der  $v$ -ten.

Eine elementare Transformation b) bewirkt Vorzeichenwechsel in der  $\tau$ -ten Spalte von  $E^{t-1}$  und in der  $\tau$ -ten Zeile von  $E^t$ .

Wie wir soeben die Basis der  $E$  durch elementare Transformation in die Basis der  $U$  verwandelt haben, so können wir auf die Basis der  $U$  eine elementare Transformation anwenden und sie in eine Basis von Ketten  $V$  verwandeln. Die Matrizen  $E^k$  werden dabei dieselben Umformungen erfahren wie soeben die Matrizen  $E^t$ . Insbesondere kann man durch Vorzeichenwechsel der  $\tau$ -ten Zeile von  $E^t$ , darauf folgende Anwendung der Transformation a) und Wiederherstellung des ursprünglichen Vorzeichens der  $\tau$ -ten Zeile auch eine Zeilenaddition in  $E^t$  mittels der Transformationen a) und b) bewirken.

Die elementaren Transformationen a) und b) der Ketten wirken sich daher als elementare Matrizenumformungen aus (Zeilen- und Spaltenaddition, Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit  $-1$ ).\*) Durch solche Umformungen kann man eine ganzzahlige Matrix auf die in § 87 angegebene Normalform bringen. In dieser stehen in der Hauptdiagonale von links oben beginnend die invarianten Faktoren, in einer Anzahl, die gleich dem Range der Matrix ist; alle übrigen Elemente sind 0.

Wir beginnen nun den Normalisierungsprozeß\*\*) der Inzidenzmatrizen, indem wir die Matrix  $E^0$  auf die angegebene Normalform bringen. Durch geeignete elementare Umformungen stellen wir in ihr die invarianten Faktoren etwas um: sie sollen nicht mehr in der Hauptdiagonale links

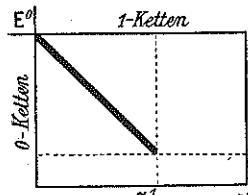


Fig. 42.

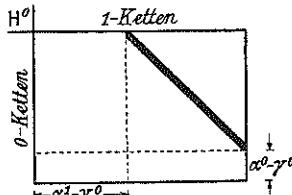


Fig. 43.

\*) Die elementaren Umformungen a) und b) sind, nebenbei bemerkt, spezielle Fälle ganzzahliger unimodularer Transformationen, die die  $E^t$ -Basis in eine neue  $U^t$ -Basis überführen. Allgemein gilt dann, daß hierbei die Variablenreihe  $\varepsilon_{\sigma \tau}^{t-1}$  bei festem  $\sigma$  sich im Index  $\tau$  kogredient zu den  $E_\tau^t$  transformiert, die Variablenreihe  $\varepsilon_{\tau \lambda}^t$  bei festem  $\lambda$  aber kontrageredient, wegen Formel (1). Da wir von der allgemeinen ganzzahligen unimodularen Transformation der Ketten keinen Gebrauch machen, so dürfen wir uns hier auf die elementaren Umformungen a) und b) beschränken. Wegen des allgemeinen Falles verweisen wir auf § 71. Auch die Tatsache, daß jede ganzzahlige unimodulare Transformation sich aus einer Reihe von Transformationen a) und b) zusammensetzen läßt, wird nirgends benutzt, und ihr Nachweis kann daher übergangen werden.

\*\*) Daß die Matrizen  $E^0, E^1, \dots, E^n$  Inzidenzmatrizen eines simplizialen Komplexes sind, spielt bei dem Normalisierungsprozeß keine Rolle. Es wird nur von der Beziehung  $E^{k-1}E^k = 0$  Gebrauch gemacht.

oben stehen (Fig. 42), sondern die rechte obere Ecke der Matrix  $E^0$  abschneiden (Fig. 43). Ihre Anzahl ist gleich dem Range  $\gamma^0$  von  $E^0$ . Hierbei sind auf  $E^1$  schon Zeilenumformungen ausgeübt worden, weil der linke Eingang von  $E^1$  mit dem oberen von  $E^0$  übereinstimmt. Es ist aber nach wie vor das Produkt  $E^0E^1 = 0$ , so daß in der umgeformten Matrix  $E^1$  die letzten  $\gamma^0$  Zeilen aus lauter Nullen bestehen müssen. Jetzt werden die oberen  $\alpha^1 - \gamma^0$ -Zeilen der Matrix  $E^1$  weiter behandelt. Ihren Umformungen entsprechen Spaltenumformungen von  $E^0$ , die sich nur auf die ersten  $\alpha^1 - \gamma^0$ -Spalten erstrecken und, da diese aus Nullen bestehen, an den Werten von  $\varepsilon_{i\lambda}^0$  nichts ändern.  $E^0$  hat danach seine endgültige Gestalt angenommen, die wir  $H^0$  nennen. Durch Ausübung von Spaltenumformungen in  $E^1$ , die auf die Matrix  $H^0$  überhaupt keinen Einfluß haben, wird  $E^1$  auf die Normalform  $H^1$  gebracht, in der die invarianten Faktoren die entsprechende Stellung haben wie in  $H^0$ . Die weiteren Matrizen bis einschließlich  $E^{n-1}$  werden schrittweise ebenso umgeformt.

Die Inzidenzmatrix  $E^k$  ist damit in ihre Normalform  $H^k$  übergeführt. Sie enthält lauter Nullen, außer

auf der die rechte obere Ecke abschneidenden Strecke, vgl. Fig. 44; in dieser stehen erst  $\varrho^k$  von 1 verschiedene Zahlen  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{\varrho^k}^k$ , deren jede ein Teiler der vorangehenden ist und die wir als die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  erkennen werden, sodann  $\gamma^k - \varrho^k$  Einsen.

Nach der Normalisierung der Inzidenzmatrizen ist unser Ziel nun leicht zu erreichen; denn aus den Normalformen  $H^k$  lassen sich die Gitter  $\mathfrak{T}^k, \mathfrak{G}^k, \mathfrak{N}^k$  der sämtlichen, der geschlossenen und der nullhomologen  $k$ -Ketten und damit die Homologiegruppen wie folgt bestimmen.

Von den im oberen Eingange von  $H^{k-1}$  stehenden  $k$ -Ketten ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) haben die  $\gamma^{k-1}$  letzten einen von 0 verschiedenen Rand, da in den  $\gamma^{k-1}$  letzten Spalten von  $H^{k-1}$  die invarianten Faktoren  $c_1^{k-1}, c_2^{k-1}, \dots, c_{\gamma^{k-1}}^{k-1}$  stehen. Wir nennen diese Ketten

$$C_1^k, C_2^k, \dots, C_{\gamma^{k-1}}^k.$$

Die  $\gamma^k$  ersten Ketten im linken Eingange von  $H^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) seien

$$A_1^k, A_2^k, \dots, A_{\gamma^k}^k.$$

Sie sind divisions-nullhomolog ( $\approx 0$ ). Denn in den  $\gamma^k$  letzten Spalten von  $H^k$  stehen die invarianten Faktoren  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{\gamma^k}^k$ , so daß man die Berandungsrelationen hat

$$\mathcal{R} \partial C_i^{k+1} = c_i^k A_i^k \quad (i = 1, 2, \dots, \gamma^k; k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3)$$

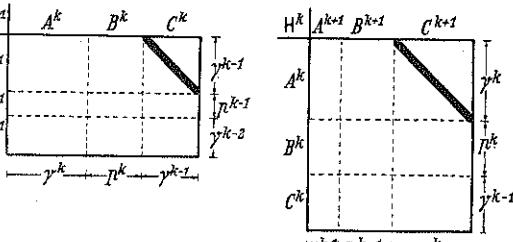


Fig. 44.

Nicht für jedes  $k$  von 0 bis  $n$  müssen die Ketten  $C^k$  und  $A^k$  wirklich vorhanden sein. Z.B. fehlen für  $k=0$  die  $C^0$ , da jede 0-Kette geschlossen ist, und für  $k=n$  fehlen die  $A^n$ , da es keine  $(n+1)$ -Simplexe und daher keine divisions-nullhomologen  $n$ -Ketten außer der  $n$ -Kette 0 gibt. Klar ist, daß eine Kette  $A^k$  nicht zugleich eine Kette  $C^k$  sein kann, da die  $A^k$  als divisions-nullhomologe Ketten geschlossen sind, die  $C^k$  aber nicht. Dagegen werden die  $\alpha^k$  Basis-Ketten der Dimension  $k$  im allgemeinen noch nicht von den Ketten  $A^k$  und  $C^k$  erschöpft sein. Die übrigbleibenden Ketten mögen

$$B_1^k, B_2^k, \dots, B_{p^k}^k$$

heißen. Sie sind wie die  $A^k$  geschlossen, aber nicht divisions-nullhomolog, und es ist ihre Anzahl

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1} \quad (4)$$

für  $0 < k < n$ . Für  $k=0$  ist  $p^0 = \alpha^0 - \gamma^0$ , und für  $k=n$  ist  $p^n = \alpha^n - \gamma^{n-1}$ . Setzt man fest, daß  $\gamma^{-1} = \gamma^n = 0$  ist, so gilt Formel (4) für alle  $k$  von 0 bis  $n$ .

Nun läßt sich, da der obere Eingang von  $H^{k-1}$  eine Basis des Gitters  $\mathfrak{D}^k$  aller  $k$ -Ketten darstellt ( $k=1, 2, \dots, n$ ), jede  $k$ -Kette in der Form schreiben:

$$V^k = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} x_{\lambda}^k A_{\lambda}^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} y_{\mu}^k B_{\mu}^k + \sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_{\nu}^k C_{\nu}^k.$$

Da die Ketten  $A_{\lambda}^k$  und  $B_{\mu}^k$  geschlossen sind, so ist  $V^k$  nur dann geschlossen, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_{\nu}^k \mathcal{R} \partial C_{\nu}^k = \sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_{\nu}^k c_{\nu}^{k-1} A_{\nu}^{k-1} = 0,$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit der Ketten  $A_{\nu}^{k-1}$  nur dann eintritt, wenn alle  $z_{\nu}^k = 0$  sind. — Auch für  $k=0$  ist wegen des Fehlens der Ketten  $C_0^0$  jede geschlossene Kette eine lineare Kombination der Ketten  $A_0^0$  und  $B_0^0$ .

Es wird daher für  $k=0, 1, \dots, n$  das Gitter  $\mathfrak{G}^k$  der geschlossenen  $k$ -Ketten von den  $\gamma^k$  Ketten  $A_{\lambda}^k$  und den  $p^k$  Ketten  $B_{\mu}^k$  aufgespannt.

Wir gehen zum Teilgitter  $\mathfrak{N}^k$  der nullhomologen  $k$ -Ketten über. Damit eine geschlossene  $k$ -Kette

$$V^k = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} x_{\lambda}^k A_{\lambda}^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} y_{\mu}^k B_{\mu}^k \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (5)$$

nullhomolog sei, muß sie Rand einer  $(k+1)$ -Kette sein, also da die  $(k+1)$ -Ketten  $A_{\lambda}^{k+1}$  und  $B_{\mu}^{k+1}$  geschlossen sind, Rand einer linearen Kombination der Ketten  $C_{\lambda}^{k+1}$ , also muß etwa sein

$$V^k = \mathcal{R} \partial \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} z_{\lambda}^{k+1} C_{\lambda}^{k+1} = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} z_{\lambda}^{k+1} c_{\lambda}^k A_{\lambda}^k. \quad (6)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Ketten  $A_{\lambda}^k$  und  $B_{\mu}^k$  müssen daher die rechten Seiten der Gleichungen (5) und (6) Koeffizient für Koeffizient übereinstimmen, also muß gelten

$$x_{\lambda}^k = z_{\lambda}^{k+1} c_{\lambda}^k, \quad y_{\mu}^k = 0.$$

Die  $k$ -Kette (5) ist demnach dann und nur dann homolog 0, wenn die Koeffizienten die Bedingungen

$$x_{\lambda}^k \equiv 0 \pmod{c_{\lambda}^k}, \quad y_{\mu}^k = 0 \quad (7)$$

erfüllen. Auch für  $k=n$  gelten diese Gleichungen noch wegen des Fehlens der Ketten  $A^n$  und weil die einzige nullhomologe  $n$ -Kette die  $n$ -Kette 0 ist. Zur gleichen Homologieklasse gehören somit zwei  $k$ -Ketten  $V^k$  und  $'V^k$  für  $k=0, 1, \dots, n$  dann und nur dann, wenn

$$x_{\lambda}^k \equiv 'x_{\lambda}^k \pmod{c_{\lambda}^k} \quad \text{und} \quad y_{\mu}^k = 'y_{\mu}^k \quad (8)$$

ist. Reduziert man also in (5) die Koeffizienten  $x_{\lambda}^k$  mod  $c_{\lambda}^k$  auf das Intervall

$$0 \leq \xi_{\lambda}^k < c_{\lambda}^k, \quad (9)$$

so erhält man eine homologe Kette

$$V^k \sim \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} \xi_{\lambda}^k A_{\lambda}^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} \eta_{\mu}^k B_{\mu}^k, \quad (10)$$

auf deren rechter Seite wegen der Normierungsbedingung (9) alle  $A_{\lambda}^k$  fehlen, für die  $c_{\lambda}^k = 1$  ist, so daß die erste Summe nur von 1 bis  $\gamma^k$  läuft; dabei bedeutet  $\phi^k$  die Anzahl der von 1 verschiedenen invarianten Faktoren der Matrix  $E^k$ . Wegen (8) sind die Koeffizienten  $\xi_{\lambda}^k$  und  $\eta_{\mu}^k$  durch  $V^k$  eindeutig bestimmt.

Mit anderen Worten: Die zyklischen Untergruppen der Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$ , die je von der Homologieklasse der Ketten  $A_1^k, A_2^k, \dots, A_{\phi^k}^k$  bzw.  $B_1^k, B_2^k, \dots, B_{\phi^k}^k$  erzeugt werden, haben wegen (7) und (8) die Ordnung  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{\phi^k}^k$  bzw. sind freie zyklische Gruppen, und wegen (10) ist jedes Element der Homologiegruppe eindeutig als Summe je eines Elementes dieser Untergruppen darstellbar.  $\mathfrak{H}^k$  ist somit die direkte Summe aus diesen Untergruppen, und  $A_1^k, A_2^k, \dots, A_{\phi^k}^k$  bilden zusammen mit den Ketten  $B_1^k, B_2^k, \dots, B_{\phi^k}^k$  eine Homologiebasis, die Ketten  $B_1^k, B_2^k, \dots, B_{\phi^k}^k$  eine Bettische Basis der Dimension  $k$ .  $p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$  ist die Bettische Zahl und  $c_1^k, c_2^k, \dots, c_{\phi^k}^k$  sind die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$ . Damit sind die Homologiegruppen bestimmt, und es ist der Satz gewonnen:

Satz: Ist  $\alpha^k$  die Anzahl der  $k$ -Simplexe im simplizialen Komplex  $\mathfrak{K}^n$ ,  $\gamma^k$  der Rang der Inzidenzmatrix  $E^k$ , so ist die Bettische Zahl der Dimension  $k$

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$$

$(\gamma^{-1} = \gamma^n = 0)$ , und die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  sind die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren von  $E^k$ ; sie fehlen für  $k=n$ .

Bettische Zahlen und Torsionskoeffizienten nennen wir bisweilen die *numerischen Invarianten* des Komplexes, im Gegensatz zu anderen invariant mit dem Komplex verknüpften mathematischen Gegenständen, wie z. B. der später abzuleitenden Fundamentalgruppe.

## § 22. Blockketten.

Wenn gleich grundsätzlich die Bestimmung der Homologiegruppen aus den Inzidenzmatrizen immer möglich ist, so kann doch die wirkliche Durchführung recht verwickelt werden. Legt man z. B. die in Fig. 40 (S. 67) gegebene simpliziale Zerlegung der Ringfläche zugrunde, so hat man  $c^0 = 9$ ,  $c^1 = 27$ ,  $c^2 = 18$ ; man bekommt es also mit 27-reihigen Matrizen zu tun, deren Aufstellung allein langwierig würde, von ihrer Überführung in die Normalform zu schweigen.

Ein einfacheres Verfahren zur Berechnung der numerischen Invarianten und Homologiegruppen ist daher erwünscht. Dieses gewinnen wir dadurch, daß wir als Glieder der  $k$ -Ketten nicht wie bisher einzelne Simplexe betrachten, sondern ganze Ketten, sog. Blöcke. Wie sich die einzelnen Simplexe zu simplizialen Ketten zusammensetzen, so werden wir aus endlich vielen Blöcken Blockketten aufbauen und diese Blockketten der Berechnung der Homologiegruppen zugrunde legen.

Wir wählen also für jede Dimension  $k = 0, 1, \dots, n$  endliche viele simpliziale Ketten

$$Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_{\alpha^k}^k,$$

die wir  $k$ -Blöcke nennen und die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(Bl<sub>1</sub>)  $Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_{\alpha^k}^k$  sind linear unabhängig, d. h. aus

$$t_1 Q_1^k + t_2 Q_2^k + \dots + t_{\alpha^k} Q_{\alpha^k}^k = 0$$

folgt immer  $t_1 = t_2 = \dots = t_{\alpha^k} = 0$ . Diese Bedingung ist z. B. immer dann erfüllt, wenn niemals zwei Blöcke  $Q_i^k$  und  $Q_j^k$  ein gemeinsames  $k$ -Simplex haben.

Eine aus den Blöcken gebildete lineare Kombination heißt eine *Blockkette*. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Blöcke sind zwei Blockketten  $\sum t_\mu Q_\mu^k$  und  $\sum t'_\mu Q_\mu^k$  dann und nur dann gleich, wenn  $t_1 = t'_1$ ,  $t_2 = t'_2, \dots, t_{\alpha^k} = t'_{\alpha^k}$ . Da die Blockketten spezielle simpliziale Ketten sind, so hat jede Blockkette einen bestimmten Rand, und es gibt geschlossene und nullhomologe Blockketten.

Wir verlangen weiter von den Blöcken:

(Bl<sub>2</sub>) Der Rand einer  $(k+1)$ -dimensionalen Blockkette ist eine  $k$ -dimensionale Blockkette. — Offenbar genügt es zu verlangen, daß der Rand eines jeden  $(k+1)$ -Blockes eine  $k$ -Blockkette ist:

$$\mathcal{R}\mathcal{D} Q_\lambda^{k+1} = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \bar{\varepsilon}_{z\lambda}^k Q_z^k \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \bar{\alpha}^{k+1}). \quad (1)$$

(Bl<sub>3</sub>) Zu jeder geschlossenen simplizialen  $k$ -Kette gibt es eine homologe Blockkette.

(Bl<sub>4</sub>) Ist eine  $k$ -Blockkette nullhomolog, also Rand einer simplizialen  $(k+1)$ -Kette, so ist sie auch Rand einer  $(k+1)$ -dimensionalen Blockkette.

Die Bedingungen (Bl<sub>1</sub>) bis (Bl<sub>4</sub>) sind widerspruchsfrei. Denn ein spezielles Blocksystem wird von den fest orientierten Simplexen von  $\mathbb{R}^n$  gebildet; für sie sind offenbar die vier Bedingungen erfüllt.

Für die Berechnung der Homologiegruppen genügt es nun, an Stelle der feingliedrigen simplizialen Ketten die grobgliedrigen Blockketten zu betrachten. Das Verfahren der Berechnung ist genau dasselbe wie früher. Nur geht man nicht von den Inzidenzmatrizen des simplizialen Komplexes aus, sondern von den *Block-Inzidenzmatrizen*

$$(\bar{\varepsilon}_{z\lambda}^k) = \bar{E}^k,$$

die durch die Berandungsrelationen (1) gegeben sind. Trotzdem führen wir die Ableitung noch einmal durch, damit man sieht, an welchen Stellen die Bedingungen (Bl<sub>1</sub>) bis (Bl<sub>4</sub>) benutzt werden.

Bildet man in (1) für  $k > 0$  auf beiden Seiten noch einmal den Rand, so muß sich die  $(k-1)$ -Kette 0 ergeben, da der Rand des Randes verschwindet. Somit ist

$$\sum_{z=1}^{\alpha^k} \sum_{i=1}^{\alpha^{k-1}} \bar{\varepsilon}_{z\lambda}^k \bar{\varepsilon}_{iz}^{k-1} Q_i^{k-1} = 0,$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit der  $Q_i^{k-1}$  gleichbedeutend mit

$$\sum_{z=1}^{\alpha^k} \bar{\varepsilon}_{z\lambda}^{k-1} \bar{\varepsilon}_{z\lambda}^k = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{E}^{k-1} \bar{E}^k = 0$$

ist. Indem wir auf die in den Eingängen der Matrizen stehenden Blöcke  $Q_\mu^k$  unimodulare Transformationen ausüben, bringen wir wie in § 21 die Matrizen  $\bar{E}^k$  simultan auf eine Normalform  $\bar{H}^k$ .

Die Blockketten, die in den Eingängen der Matrizen  $\bar{H}^k$  stehen, sind immer noch linear unabhängig und zerfallen für jede Dimension in drei Arten:

1. Die Ketten  $\bar{A}_\lambda^k$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, \bar{\alpha}^k$ ); sie sind divisions-nullhomolog.
2. Die Ketten  $\bar{B}_\mu^k$  ( $\mu = 1, 2, \dots, \bar{\beta}^k$ ); sie sind ebenfalls geschlossen, aber kein von 0 verschiedenes Vielfaches ist Rand einer  $(k+1)$ -Blockkette.
3. Die Ketten  $\bar{C}_\nu^k$  ( $\nu = 1, 2, \dots, \bar{\gamma}^{k-1}$ ); sie sind nicht geschlossen, und es ist

$$\mathcal{R}\mathcal{D} \bar{C}_\nu^k = \bar{\varepsilon}_\nu^{k-1} \bar{A}_\nu^k.$$

Dabei ist  $\bar{\gamma}^k$  der Rang von  $\bar{E}^k$ ,  $\bar{\varepsilon}_\nu^k$  sind die invarianten Faktoren von  $\bar{E}^k$ , und es ist  $\bar{\beta}^k = \bar{\alpha}^k - \bar{\gamma}^k - \bar{\gamma}^{k-1}$  (mit  $\bar{\gamma}^{-1} = 0$ ). — Nun folgt wie früher: Die allgemeinste geschlossene  $k$ -Blockkette ist eine lineare

Kombination aus den  $\bar{A}_1^k$  und  $\bar{B}_\mu^k$ , und die nullhomologen  $k$ -Blockketten, die wegen  $(Bl_4)$  zugleich Ränder von  $(k+1)$ -Blockketten sind, sind die Ketten  $\bar{c}^k \bar{A}_2^k$  und die daraus zu bildenden linearen Kombinationen. Jede geschlossene Blockkette und nach  $(Bl_3)$  jede geschlossene simpliziale Kette ist somit homolog einer und nur einer linearen Kombination

$$\xi_1 \bar{A}_1^k + \xi_2 \bar{A}_2^k + \cdots + \xi_{\bar{\gamma}^k} \bar{A}_{\bar{\gamma}^k}^k + \eta_1 \bar{B}_1^k + \eta_2 \bar{B}_2^k + \cdots + \eta_{\bar{p}^k} \bar{B}_{\bar{p}^k}^k,$$

wobei  $0 \leq \xi_i < \bar{c}^k$  ist und die  $\eta_\mu$  beliebig variieren. Somit bilden diejenigen  $\bar{A}^k$ , für die die zugehörigen invarianten Faktoren  $\neq 1$  sind, zusammen mit den  $\bar{B}^k$  eine Homologiebasis und die  $\bar{B}^k$  allein eine Bettische Basis der Dimension  $k$ . Daher ist die Bettische Zahl

$$p^k = \bar{p}^k = \bar{\alpha}^k - \bar{\gamma}^k - \bar{\gamma}^{k-1}, \quad (2)$$

und die Torsionskoeffizienten sind die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren  $c_\nu^k = \bar{c}_\nu^k$  von  $\bar{E}^k$ .

1. Beispiel: Auf der Ringfläche (§ 19) kann man als ein Blocksystem benutzen: die Ecke  $O$ , die 1-Ketten  $a^1$  und  $b^1$  (Meridian und Breitenkreis) und die 2-Kette  $U^2$ , die von den kohärenten orientierten 2-Simplexen gebildet wird.  $(Bl_1)$  ist erfüllt, weil die  $k$ -Blöcke keine gemeinsamen  $k$ -Simplexe haben,  $(Bl_2)$ , weil sie geschlossene Ketten sind.  $(Bl_3)$  ist für  $k=0$  erfüllt, weil je zwei 0-Simplexe eines zusammenhängenden Komplexes homolog sind; für  $k=1$ , weil wir gezeigt haben, daß jede geschlossene 1-Kette  $\sim \alpha a^1 + \beta b^1$  ist; für  $k=2$ , weil alle geschlossenen 2-Ketten Vielfache der aus allen 2-Simplexen bestehenden Blockkette  $U^2$  sind. Schließlich ist  $(Bl_4)$  erfüllt, denn für  $k=0$  ist die einzige nullhomologe 0-Blockkette die Blockkette 0. Für  $k=1$  haben wir S. 67 unter II bewiesen, daß jede nullhomologe 1-Kette, die sich aus den Blöcken  $a^1$  und  $b^1$  zusammensetzt, die 1-Kette 0 ist. Nullhomologe 2-Ketten gibt es nicht. Die Block-Inzidenzmatrizen lauten daher

$\bar{E}^0$	$a^1$	$b^1$	$U^2$
$O$	0	0	$a^1$ 0 $b^1$ 0

Man bestätigt aus ihnen die früher berechneten Homologiegruppen.

2. Beispiel: Ein Blocksystem der oktaedral zerlegten Kugelfläche (§ 14) wird von zwei diametralen Ecken des Äquatorkreises, von den beiden verbindenden Halbkreisen (je aus zwei 1-Simplexen bestehend) des Äquatorkreises und von den beiden Halbkugelflächen, in die die Kugelfläche durch den Äquatorkreis zerschnitten wird, gebildet. — Aus diesem Blocksystem erhält man eines der projektiven Ebenen, wenn man nach Übergang zur Normalunterteilung diametrale Blöcke der Kugelfläche zu einem Block der projektiven Ebene identifiziert. Das so gewonnene Blocksystem weist in jeder Dimension genau einen Block auf. Es läßt sich auf beliebige Dimensionszahl übertragen, und man kann aus ihm die Blockinzidenzmatrizen und daraus die Homologiegruppen des projektiven Raumes  $\mathbb{P}^n$  berechnen. Wir führen die Rechnung nicht durch, weil der Nachweis, daß es sich um ein Blocksystem handelt, etwas umständlich wäre und wir später auf einfacherem Wege zu diesen Homologiegruppen gelangen werden (S. 118).

Zu einem entscheidenden Hilfsmittel wird der Begriff der Blockkette in der Theorie der Mannigfaltigkeiten, z. B. §§ 41, 61, 67.

### § 23. Ketten mod 2, Zusammenhangszahlen, Eulersche Formel.

Die Begriffe Kette und Rand und damit die Entwicklungen der vorangegangenen Paragraphen beruhen wesentlich auf dem Begriff der Orientierung eines Simplexes. Man kann nun eine analoge Theorie der Ketten aufstellen, wenn man von allen Orientierungen absieht. So wie wir in der Theorie mit Orientierung von den Ketten zu den Homologiegruppen und den Bettischen Zahlen gekommen sind, so gelangt man in der Theorie ohne Orientierung von den nichtorientierten Ketten, oder, wie wir sagen werden, von den Ketten mod 2 zu den Zusammenhangsgruppen und den Zusammenhangszahlen, und es wird sich auch später immer zeigen, daß die für die (orientierten) Ketten gültigen Sätze und Methoden sich unmittelbar auf die Ketten mod 2 übertragen lassen. Freilich sind die Zusammenhangsgruppen insofern von geringerer Wichtigkeit, als sie sich aus den Homologiegruppen ableiten lassen. Sie sind andererseits zuweilen von größerer Wichtigkeit, weil sie größere Allgemeinheit besitzen und da noch allgemeine Aussagen ermöglichen, wo die Homologiegruppen versagen; z. B. werden sie uns später dazu dienen, Sätze wie den Dualitätssatz, die für gewöhnliche Ketten nur in orientierbaren Mannigfaltigkeiten gelten, auf nichtorientierbare zu übertragen.<sup>15</sup>

Wir werden also im folgenden von der Orientierung der Simplexe absehen oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwei entgegengesetzte orientierte Simplexe als nicht verschieden betrachten. Dann ist aber das Doppelte einer Kette  $U^k$  auch nicht verschieden von der Kette  $U^k - U^k = 0$ . Eine notwendige Konsequenz ist es daher, zwei Ketten

$$U^k = u_1 E_1^k + u_2 E_2^k + \cdots + u_{\alpha^k} E_{\alpha^k}^k$$

und

$$U'^k = 'u_1 E_1^k + 'u_2 E_2^k + \cdots + 'u_{\alpha^k} E_{\alpha^k}^k$$

als nicht verschieden anzusehen, wenn sich ihre Koeffizienten um gerade Zahlen unterscheiden, wenn also  $u_\nu \equiv 'u_\nu \pmod{2}$  ist für  $\nu = 1, 2, \dots, \alpha^k$ . Man nennt dann auch die Ketten *kongruent* mod 2. Man kann nun einer Klasse einander mod 2 kongruenter Ketten  $U^k, U'^k, \dots$  umkehrbar eindeutig einen  $k$ -dimensionalen Teilkomplex zuordnen: Ein nichtorientiertes Simplex  $E^k$  gehört dann und nur dann diesem Teilkomplex an, wenn das orientierte Simplex  $E^k$  in  $U^k$ , also auch in  $'U'^k$  mit ungerader Vielfachheit vorkommt.\*). Dieser Teilkomplex heißt der zu  $U^k$  (ebenso zu  $'U'^k, \dots$ ) gehörige Teilkomplex. (Er besteht also nicht etwa immer aus allen in  $U^k$  usw. vorkommenden Simplexen!) Eine Kette mod 2 ist nun nichts anderes als ein  $k$ -dimensionaler reiner Teilkomplex. Daß wir die Bezeichnung „Kette mod 2“ und nicht „Teilkomplex“ benutzen, hat seinen Grund darin, daß die Bezeichnung „mod 2“ üblich ist und daß wir später auch singuläre Ketten mod 2 betrachten werden, für die die Bezeichnung Teil-

\*) Hier ist es im Gegensatz zu S. 47 nötig, den „leeren Teilkomplex“ mit unter die Teilkomplexe zu rechnen.

komplex nicht passen würde. Ketten mod 2 werden wir ebenso wie Komplexe mit den deutschen Buchstaben bezeichnen.

Wir müssen nun für die Ketten mod 2 die Summe und den Rand definieren. Dazu gehen wir von zwei gewöhnlichen Ketten  $U^k$  und  $V^k$  aus. Ist

$$W^k = U^k + V^k$$

und bezeichnen  $\mathfrak{U}^k$ ,  $\mathfrak{V}^k$  und  $\mathfrak{W}^k$ , die zugehörigen Ketten mod 2, so definieren wir als *Summe*  $\mathfrak{U}^k + \mathfrak{V}^k$  die Kette mod 2:

$$\mathfrak{W}^k = \mathfrak{U}^k + \mathfrak{V}^k.$$

$\mathfrak{U}^k + \mathfrak{V}^k$  besteht hiernach aus allen Simplexen, die in  $U^k + V^k$  mit ungerader Vielfachheit und daher in genau einer der Ketten  $U^k$  oder  $V^k$  mit ungerader Vielfachheit vorkommen, also aus allen nichtorientierten Simplexen, die in genau einer der Ketten mod 2  $\mathfrak{U}^k$  und  $\mathfrak{V}^k$  auftreten. Wenn dagegen ein Simplex  $\mathfrak{E}^k$  sowohl zu  $\mathfrak{U}^k$  als zu  $\mathfrak{V}^k$  gehört, so kommt es in der Summe nicht mehr vor.

Wir sahen früher, daß man jede Kette durch einen Vektor darstellen kann, dessen Komponenten die Vielfachheiten sind, mit denen die Simplexe in der Kette vorkommen. Dadurch wurde die Kettenaddition auf die Vektoraddition zurückgeführt. Auch bei den Ketten mod 2 ist das möglich. Freilich muß man dann als Komponenten der Vektoren nicht die ganzen Zahlen, sondern die Restklassen mod 2 nehmen. Wir bezeichnen die beiden Restklassen der geraden und der ungeraden Zahlen mit  $\bar{0}$  und  $\bar{1}$ . Dann gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}\bar{0} + \bar{0} &= \bar{0}, & \bar{0} + \bar{1} &= \bar{1}, & \bar{1} + \bar{1} &= \bar{0}, \\ \bar{0} \cdot \bar{0} &= \bar{0}, & \bar{0} \cdot \bar{1} &= \bar{0}, & \bar{1} \cdot \bar{1} &= \bar{1}.\end{aligned}$$

Z. B. besagt die Rechenregel  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ , daß die Summe zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ist. Eine Kette mod 2  $\mathfrak{U}^k$  läßt sich dann als ein Vektor schreiben:

$$\mathfrak{U}^k = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{\alpha^k}),$$

wobei  $\bar{u} = \bar{1}$  oder  $= \bar{0}$  ist, je nachdem das Simplex  $\mathfrak{E}^k$  in  $\mathfrak{U}^k$  vorkommt oder nicht, und die Summe aus  $\mathfrak{U}^k$  und

$$\mathfrak{V}^k = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{\alpha^k})$$

ist gegeben durch

$$\mathfrak{W}^k = (\bar{u}_1 + \bar{v}_1, \bar{u}_2 + \bar{v}_2, \dots, \bar{u}_{\alpha^k} + \bar{v}_{\alpha^k}).$$

Insbesondere entsprechen den Simplexen  $\mathfrak{E}_1^k, \mathfrak{E}_2^k, \dots, \mathfrak{E}_{\alpha^k}^k$  die Einheitsvektoren

$$\mathfrak{E}_1^k = (\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0}), \quad \mathfrak{E}_2^k = (\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{0}), \dots \quad \mathfrak{E}_{\alpha^k}^k = (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{1}),$$

so daß man für  $\mathfrak{U}^k$  auch schreiben kann

$$\mathfrak{U}^k = \bar{u}_1 \mathfrak{E}_1^k + \bar{u}_2 \mathfrak{E}_2^k + \dots + \bar{u}_{\alpha^k} \mathfrak{E}_{\alpha^k}^k. \quad (1)$$

Dabei wird vereinbart, daß man für  $\bar{1} \mathfrak{E}^k$  auch einfach  $\mathfrak{E}^k$  schreiben und  $\bar{0} \mathfrak{E}^k$  unterdrücken darf. Sind alle  $\bar{u} = \bar{0}$ , so schreiben wir  $\mathfrak{U}^k = 0$ .

Unter dem Rand eines orientierten Simplexes  $E^k$  haben wir die Summe der mit den induzierten Orientierungen versehenen  $(k-1)$ -dimensionalen Seiten verstanden. Da in der Theorie der Ketten mod 2 von allen Orientierungen abgesehen wird, so wird man als  $\partial \mathfrak{E}^k$  die Kette mod 2 zu verstehen haben, die von den sämtlichen nichtorientierten  $(k-1)$ -dimensionalen Seiten von  $\mathfrak{E}^k$  gebildet wird:

$$\partial \mathfrak{E}^k = \sum_{i=1}^{\alpha^{k-1}} \bar{\epsilon}_{i,k}^{k-1} \mathfrak{E}_i^{k-1}; \quad (2)$$

darin ist  $\bar{\epsilon}_{i,k}^{k-1} = \bar{1}$  oder  $\bar{0}$ , je nachdem  $\mathfrak{E}_i^{k-1}$  mit  $\mathfrak{E}_k^k$  inzident ist oder nicht. — Der *Rand* einer beliebigen Kette mod 2 (1) ist dann definiert als die Summe der Ränder der einzelnen Simplexe

$$\partial \mathfrak{U}^k = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \bar{u}_z \partial \mathfrak{E}_z^k.$$

Ein  $(k-1)$ -Simplex  $\mathfrak{E}_i^{k-1}$  gehört somit dann und nur dann zu  $\partial \mathfrak{U}^k$ , wenn es mit einer ungeraden Anzahl von Simplexen aus  $\mathfrak{U}^k$  inzident ist. Für 0-dimensionale Ketten mod 2 ist der Rand die Zahl 0.

Nunmehr kann man alle für gewöhnliche Ketten definierten Begriffe auf Ketten mod 2 übertragen.

Eine Kette mod 2  $\mathfrak{U}^k$  heißt *geschlossen*, wenn ihr Rand verschwindet:

$$\partial \mathfrak{U}^k = 0.$$

Z. B. ist in der projektiven Ebene Fig. 39 S. 63 die Gesamtheit der Dreiecke eine geschlossene Kette mod 2, da mit jeder Kante genau zwei Dreiecke inzident sind. Dagegen gibt es auf der projektiven Ebene, wie wir wissen, keine gewöhnliche 2-Kette, die geschlossen wäre. — Jeder im Sinne von § 12 unberandete reine Teilkomplex ist eine geschlossene Kette mod 2.

Alle 0-dimensionalen Ketten mod 2 sind geschlossen.

Eine Kette mod 2  $\mathfrak{U}^k$  heißt *nullhomolog*, wenn sie Rand einer  $(k+1)$ -Kette mod 2 ist. Allgemeiner heißen zwei nicht notwendig geschlossene Ketten mod 2 einander *homolog*, wenn ihre Differenz nullhomolog ist.

Jede nullhomologe Kette mod 2 ist geschlossen, denn der Rand eines einzelnen  $(k+1)$ -Simplexes ist eine geschlossene Kette mod 2.

Man kann nun die geschlossenen Ketten mod 2 in Klassen untereinander homologer einteilen. Diese Homologieklassen bilden eine Gruppe  $\check{H}^k$ , wenn die Addition zweier Homologieklassen durch Addition zweier Repräsentanten geschieht.  $\check{H}^k$  ist offenbar das Analogon der Homologiegruppe  $H^k$  und heißt die  $k$ -te *Zusammenhangsgruppe* des simplizialen Komplexes  $\mathfrak{K}^n$ .  $\check{H}^k$  ist für einen endlichen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  eine endliche Gruppe. Denn es

gibt nur endlich viele verschiedene  $k$ -Ketten mod 2, nämlich  $2^{q^k}$ , also erst recht nur endlich viele Homologieklassen. Da stets  $\mathbb{U}^k + \mathbb{U}^k = 0$  ist, hat jedes Element von  $\mathfrak{H}^k$  die Ordnung 2.  $\mathfrak{H}^k$  ist also direkte Summe von endlich vielen, etwa  $q^k$  Gruppen der Ordnung 2.  $q^k$  heißt die  $k$ -te Zusammenhangszahl von  $\mathfrak{R}^n$ .\*)

Man wird eine Reihe von Ketten mod 2

$$\mathbb{U}_1^k, \mathbb{U}_2^k, \dots, \mathbb{U}_r^k \quad (3)$$

linear unabhängig nennen, wenn eine lineare Gleichung

$$\check{t}_1 \mathbb{U}_1^k + \check{t}_2 \mathbb{U}_2^k + \dots + \check{t}_r \mathbb{U}_r^k = 0 \quad (4)$$

nur dann besteht, wenn alle  $\check{t} = \check{0}$  sind. Sind die Ketten mod 2 (3) überdies geschlossen, so heißen sie homolog unabhängig, wenn eine Homologie

$$\check{t}_1 \mathbb{U}_1^k + \check{t}_2 \mathbb{U}_2^k + \dots + \check{t}_r \mathbb{U}_r^k \sim 0 \quad (5)$$

nur dann besteht, wenn alle  $\check{t} = \check{0}$  sind. Andernfalls spricht man von linear bzw. homolog abhängigen Ketten mod 2. Linear unabhängig sind z. B.  $r$  verschiedene  $k$ -Simplexe.

Ein Beispiel für ein System homolog unabhängiger  $k$ -Ketten mod 2 erhält man, wenn man in jeder der  $q^k$  Gruppen der Ordnung 2, deren direkte Summe  $\mathfrak{H}^k$  ist, das von 0 verschiedene Gruppenelement (d. i. eine Homologieklasse mod 2) nimmt und aus jeder dieser Homologieklassen einen Repräsentanten auswählt. Ein solches System von  $q^k$  Ketten mod 2, die offenbar homolog unabhängig sind, heißt eine Zusammenhangsbasis der Dimension  $k$ . Mehr als  $q^k$  homolog unabhängige Ketten mod 2 kann es nicht geben. Sind nämlich  $\mathbb{U}_1^k, \mathbb{U}_2^k, \dots, \mathbb{U}_r^k$  homolog unabhängig, so sind von allen möglichen linearen Kombinationen  $\check{t}_1 \mathbb{U}_1^k + \check{t}_2 \mathbb{U}_2^k + \dots + \check{t}_r \mathbb{U}_r^k$  keine zwei einander homolog. Es gibt also mindestens  $2^r$  verschiedene Homologieklassen. Da es im ganzen nur  $2^{q^k}$  Homologieklassen geben kann, weil  $2^{q^k}$  die Ordnung von  $\mathfrak{H}^k$  ist, so muß  $r \leq q^k$  sein. Die  $k$ -te Zusammenhangszahl ist also die Maximalzahl homolog unabhängiger  $k$ -Ketten mod 2 und stellt mithin das Analogon der Bettischen Zahl dar.

Wie wir früher die Bettischen Zahlen  $p^k$  aus den Inzidenzmatrizen berechnet haben, so können wir jetzt die Zusammenhangszahlen aus den Inzidenzmatrizen mod 2 ableiten, die aus den Berandungsrelationen (2) entspringen:

$$\check{\mathbb{E}}^{k-1} = (\check{\varepsilon}_{iz}^{k-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, \alpha^{k-1}, \quad z = 1, 2, \dots, \alpha^k, \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Das Verfahren ist fast wörtlich dasselbe wie früher. Nur treten an Stelle der Ketten Ketten mod 2, und die Elemente der Inzidenzmatrizen sind nicht ganze Zahlen, sondern die Restklassen  $\check{0}$  und  $\check{1}$ . Der Matrizengleichung

\*.) Der Name wird sich erst in § 41 (Satz) erklären.

$\check{\mathbb{E}}^{k-1} \check{\mathbb{E}}^k = 0$ , auf der das Normierungsverfahren wesentlich beruhte, entspricht hier die Gleichung

$$\check{\mathbb{E}}^{k-1} \check{\mathbb{E}}^k = \check{0}.$$

Dabei steht  $\check{0}$  abkürzend für eine Matrix von  $\alpha^{k-1}$  Zeilen und  $\alpha^{k+1}$  Spalten, deren sämtliche Elemente  $\check{0}$  sind. Von den elementaren Transformationen a) und b) aus § 21 fällt die zweite fort, da Ersetzung einer Kette mod 2 durch ihre negative wegen  $\check{1} = -\check{1}$  die identische Transformation ist. In der Normalform  $\check{\mathbb{H}}^k$  der Inzidenzmatrix mod 2  $\check{\mathbb{E}}^k$  sind nun alle Elemente  $= \check{0}$  bis auf die Elemente einer schrägen Strecke, die die rechte obere Ecke von  $\check{\mathbb{H}}^k$  abschneidet; diese Elemente sind  $= \check{1}$ .  $\delta^k$  sei ihre Anzahl.

Die Ketten mod 2 in den Eingängen der Matrizen  $\check{\mathbb{E}}^0, \check{\mathbb{E}}^1, \dots, \check{\mathbb{E}}^{n-1}$  sind für jedes  $k$  die  $\alpha^k k$ -Simplexe von  $\mathfrak{R}^n$ . Sie sind also linear unabhängig, und jede  $k$ -Kette mod 2 ist eine lineare Kombination von ihnen. Diese Eigenschaft wird nun offenbar bei elementaren Transformationen nicht zerstört, kommt also auch noch den Ketten mod 2 zu, die in den Eingängen der normierten Matrizen  $\check{\mathbb{H}}^0, \check{\mathbb{H}}^1, \dots, \check{\mathbb{H}}^{n-1}$  stehen. Sie zerfallen für jede Dimension in drei Arten  $\mathbb{A}_\lambda^k, \mathbb{B}_\mu^k, \mathbb{C}_\nu^k$ . Die  $\mathbb{C}_\nu^k$  ( $\nu = 1, 2, \dots, \delta^{k-1}$ ) sind die  $\delta^{k-1}$  letzten im oberen Eingang von  $\check{\mathbb{H}}^{k-1}$ . Sie sind nicht geschlossen, da in einer Spalte je ein Element  $\check{1}$  steht. Die  $\mathbb{A}_\lambda^k$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, \delta^k$ ) sind die  $\delta^k$  ersten im linken Eingang von  $\check{\mathbb{H}}^k$ . Sie sind nullhomolog, denn man hat

$$\mathcal{R} \mathcal{D} \mathbb{C}_\nu^{k+1} = \mathbb{A}_\lambda^k \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \delta^k). \quad (6)$$

Die übrigen Ketten mod 2 heißen  $\mathbb{B}_\mu^k$  ( $\mu = 1, 2, \dots, \alpha^k - \delta^k - \delta^{k-1}$ ). Sie sind geschlossen, aber nicht nullhomolog.\*)

Die allgemeinsten geschlossenen  $k$ -Ketten mod 2 ist eine lineare Kombination aus den  $\mathbb{A}_\lambda^k$  und  $\mathbb{B}_\mu^k$ . Sie ist also, da die  $\mathbb{A}_\lambda^k \sim 0$  sind, homolog einer linearen Kombination

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha^k - \delta^k - \delta^{k-1}} \check{\eta}_\mu \mathbb{B}_\mu^k. \quad (7)$$

Anderseits ist keine solche lineare Kombination  $\sim 0$ , da in den Berandungsrelationen (6) nur die  $\mathbb{A}_\lambda^k$  vorkommen. Mithin stellen die  $\mathbb{B}_\mu^k$  eine Zusammenhangsbasis der Dimension  $k$  dar, und die  $k$ -te Zusammenhangszahl ist

$$q^k = \alpha^k - \delta^k - \delta^{k-1}, \quad (8)$$

wobei  $\delta^{-1} = \delta^n = 0$  zu setzen ist.  $\delta^k$  ist der Rang von  $\check{\mathbb{H}}^k$ , also die Reihenzahl der höchstreihigen Unterdeterminante, die  $\neq \check{0}$ , also  $\check{1}$  ist. Dieser

\*) Die Ketten mod 2  $\mathbb{A}_\lambda^k, \mathbb{B}_\mu^k, \mathbb{C}_\nu^k$  sind im allgemeinen nicht die zu den in § 21 eingeführten Ketten  $A_\lambda^k, B_\mu^k, C_\nu^k$  gehörigen Ketten mod 2. Wenn z. B. eine Kette  $C_\nu^k$  in der normierten Inzidenzmatrix  $\check{\mathbb{H}}^{k-1}$  über einem geraden Torsionskoeffizienten steht, so ist die zugehörige Kette mod 2 geschlossen und findet sich also nicht unter den Ketten mod 2  $\mathbb{C}_\nu^k$ .

Rang ändert sich offenbar nicht bei Zeilen- und Spaltenaddition.  $\delta^k$  ist daher zugleich der Rang der ursprünglichen Inzidenzmatrix mod 2  $\tilde{E}^k$ .

Zwischen der Bettischen Zahl  $p^k$  und der Zusammenhangszahl  $q^k$  besteht eine Beziehung, die wir jetzt klarstellen wollen. Die Inzidenzmatrix  $E^k$  habe  $g^k$  gerade, also  $\gamma^k - g^k$  ungerade invariante Faktoren (worunter auch solche vom Werte 1 sein können). Dann enthält die Diagonalform  $H^k$  von  $E^k$  eine  $(\gamma^k - g^k)$ -reihige Unterdeterminante von ungeradem Werte (nämlich das Produkt der  $\gamma^k - g^k$  ungeraden invarianten Faktoren), während alle  $(\gamma^k - g^k + 1)$ -reihigen Unterdeterminanten gerade sind. Wegen der Invarianz der Determinantenteiler gegenüber elementaren Umformungen (§ 87) gilt dasselbe von  $E^k$ . Geht man von  $E^k$  zur Inzidenzmatrix mod 2  $\tilde{E}^k$  über, indem man alle geraden Elemente durch 0, alle ungeraden durch 1 ersetzt, so folgt, daß  $\tilde{E}^k$  eine  $(\gamma^k - g^k)$ -reihige Unterdeterminante vom Werte 1 hat, während alle  $(\gamma^k - g^k + 1)$ -reihigen Unterdeterminanten = 0 sind. Der Rang  $\delta^k$  von  $\tilde{E}^k$  ist somit

$$\delta^k = \gamma^k - g^k.$$

Setzen wir diese Werte in (8) ein, so folgt

$$q^k = (\alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}) + g^k + g^{k-1}.$$

Die Klammer der rechten Seite ist nach S. 77 die Bettische Zahl  $p^k$ , also gilt

$$q^k = p^k + g^k + g^{k-1}, \quad (11)$$

dabei ist  $g^{-1} = g^n = 0$  zu setzen.

Die Zusammenhangsgruppe der Dimension  $k$  ist daher durch die Homologiegruppen der Dimensionen  $k$  und  $k-1$  bestimmt. — Denn diese Homologiegruppen bestimmen die Bettische Zahl  $p^k$  und die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  und  $k-1$ , also die Zahlen  $g^k$  und  $g^{k-1}$ , die ihrerseits die Zusammenhangszahl  $q^k$  festlegen und damit die Zusammenhangsgruppe bestimmen.

Die Zusammenhangszahl  $q^k$  ist niemals kleiner als die Bettische Zahl  $p^k$ .

Auch für die Ketten mod 2 kann man Blockketten definieren und sie der Berechnung der Zusammenhangsgruppen zugrunde legen. Die Bedingungen, durch die man sie einzuführen hat, entsprechen den Bedingungen ( $Bl_1$ ) bis ( $Bl_4$ ). Die Durchführung stellen wir als Übungsaufgabe.

Von den betrachteten Beispielen von Komplexen, deren Homologiegruppen wir berechnet haben, ist die projektive Ebene S. 66 das einzige, das einen Torsionskoeffizienten, und zwar einen geraden, aufweist. Hier ist  $g^1 = 1$ , also  $q^1 = p^1 + g^1 = 1$ ,  $q^2 = p^2 + g^1 = 1$  im Einklang damit, daß es eine nicht nullhomologe Kette mod 2 der Dimension 1 (projektive Gerade) und eine der Dimension 2 gibt, die von allen Dreiecken der simplizialen Zerlegung gebildet wird. In allen übrigen Beispielen stimmen die Zusammenhangszahlen mit den Bettischen Zahlen überein wegen des Fehlens von Torsionskoeffizienten.

*Eulersche Charakteristik.* Bildet man die Wechselsumme der Zusammenhangszahlen, wozu die Formel (11) auffordert, so erhält man wegen  $g^{-1} = g^n = 0$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k q^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k p^k,$$

und auf Grund der Formel

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$$

von S. 77 und der Formel

$$p^k = \bar{\alpha}^k - \bar{\gamma}^k - \bar{\gamma}^{k-1}$$

von S. 80 ist die rechte Seite weiter

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^k \quad \text{und} \quad = \sum_{k=0}^n (-1)^k \bar{\alpha}^k,$$

worin  $\alpha^k$  die Anzahl der  $k$ -Simplexe einer simplizialen Zerlegung und  $\bar{\alpha}^k$  die Anzahl der  $k$ -Blöcke eines Blocksystems angibt. *Man hat also die Beziehung:*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k p^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \bar{\alpha}^k = -N. \quad (12)$$

Die Zahl  $N$  heißt die Eulersche Charakteristik des simplizialen Komplexes  $\mathfrak{K}^n$ .

Nehmen wir das erst im nächsten Kapitel bewiesene Ergebnis vorweg, daß  $N$  eine topologische Invariante von  $\mathfrak{K}^n$  ist und nicht an der gewählten simplizialen Zerlegung haftet, so stellt Formel (12) die auf Komplexe beliebiger Dimension erweiterte Eulersche Polyederformel dar. Wir wollen die Formel für die Tetraederfläche bestätigen. Die Bettischen Zahlen haben wir in § 19 (6. Beispiel) angegeben. Die Simplexanzahlen  $\alpha^k$  lassen sich ohne weiteres auszählen. Man erhält

$$\sum_0^2 (-1)^k p^k = 1 - 0 + 1 = \sum_0^2 (-1)^k \alpha^k = 4 - 6 + 4 = 2 = -N,$$

so daß die Eulersche Charakteristik für das Tetraeder = -2 wird. Man vergleiche hierzu VI. Kap. § 38 u. § 41.

**Aufgaben:** 1. Man bestätige die Formel  $\sum_{k=0}^n (-1)^k p^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^k$  in den Beispielen von § 19.

2. Zwischen den Charakteristiken  $N(\mathbb{S}^n)$  und  $N(\mathbb{P}^n)$  der  $n$ -Sphäre und des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes besteht die Beziehung  $N(\mathbb{S}^n) = 2 N(\mathbb{P}^n)$ .

3.  $\mathfrak{K}^1$  sei ein eindimensionaler zusammenhängender Komplex von  $\alpha^0$  0-Simplexen und  $\alpha^1$  1-Simplexen. Man beweise mit Hilfe der Formel  $-\alpha^0 + \alpha^1 = -p^0 + p^1$ , daß man genau  $-\alpha^0 + \alpha^1 + 1$  1-Simplexe aus ihm entfernen kann, ohne daß der „Kantenkomplex“ zerfällt.

## § 24. Pseudomannigfaltigkeiten und Orientierbarkeit.

Wir wenden uns nunmehr einer speziellen Klasse von Komplexen zu, den Pseudomannigfaltigkeiten, die eine unseren bisherigen Hilfsmitteln zugängliche Vorstufe der Mannigfaltigkeiten darstellen.

Eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit ist folgendermaßen definiert:

(PM<sub>1</sub>) Sie ist ein reiner endlicher  $n$ -dimensionaler simplizialer Komplex ( $n \geq 1$ ); rein, d. h. jedes  $k$ -Simplex ist mit mindestens einem  $n$ -Simplex inzident (Reinheitsbedingung).

(PM<sub>2</sub>) Jedes  $(n-1)$ -Simplex ist mit genau zwei  $n$ -Simplexen inzident (Unverzweigtheitsbedingung).

(PM<sub>3</sub>) Je zwei  $n$ -Simplexe lassen sich durch eine Reihe von abwechselnd  $n$ - und  $(n-1)$ -Simplexen verbinden, deren jedes mit dem folgenden inzident ist (Verbindbarkeitsbedingung).

Eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn sich ihre  $n$ -Simplexe *kohärent* orientieren lassen, d. h. so, daß in jedem  $(n-1)$ -Simplex von den beiden angrenzenden  $n$ -Simplexen entgegengesetzte Orientierungen induziert werden. Ist keine kohärente Orientierung möglich, so heißt die Pseudomannigfaltigkeit *nichtorientierbar*.

Eine geschlossene  $n$ -Kette auf einer orientierbaren und kohärent orientierten geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit ist vollkommen bestimmt, wenn man von einem einzigen orientierten  $n$ -Simplex weiß, wie oft es in der Kette vorkommt. Jedes an dieses  $n$ -Simplex angrenzende  $n$ -Simplex der Pseudomannigfaltigkeit tritt nämlich in der Kette gleich oft auf, und da man wegen (PM<sub>3</sub>) durch fortgesetzten Übergang zu angrenzenden  $n$ -Simplexen zu jedem  $n$ -Simplex gelangen kann, treten alle  $n$ -Simplexe gleich oft auf. Daher ist die  $n$ -te Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^n$  die freie Gruppe von einer Erzeugenden; mit andern Worten: Die  $n$ -te Bettische Zahl ist  $p^n = 1$ . Eine Basis dieser Homologiegruppe ist eine der beiden Ketten, die durch kohärente Orientierung der Pseudomannigfaltigkeit entstehen. Ebenso zeigt man, daß es auf einer nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeit überhaupt keine geschlossenen  $n$ -Ketten gibt, außer der Kette 0.  $\mathfrak{H}^n$  besteht daher aus dem Nullelemente allein:  $p^n = 0$ . Ob eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit orientierbar ist oder nicht, läßt sich somit an der  $n$ -ten Homologiegruppe erkennen: *Notwendig und hinreichend für die Orientierbarkeit ist der Wert 1 der  $n$ -ten Bettischen Zahl  $p^n$ .*

Dagegen ist die  $n$ -te Zusammenhangszahl für orientierbare und nichtorientierbare geschlossene Pseudomannigfaltigkeiten immer  $q^n = 1$ . Denn es gibt genau eine nicht verschwindende geschlossene  $n$ -Kette mod 2, die Gesamtheit der  $n$ -Simplexe.

Wir werden später (§ 36) die Eigenschaft eines Komplexes, eine Pseudomannigfaltigkeit zu sein, als eine topologisch invariante Eigenschaft erkennen. Dieser Nachweis wird dadurch geführt, daß man die definierenden Eigenschaften (PM<sub>1</sub>) bis (PM<sub>3</sub>) auf Homologieeigenschaften (zu denen wir auch die Zusammenhangszahlen rechnen) zurückführt und die Homo-

logieeigenschaften als invariant erweist. Es ist daher von Bedeutung, daß man die Bedingung (PM<sub>3</sub>) durch die Bedingung  $q^n = 1$  ersetzen kann, genauer, daß das System

$$\begin{aligned} & (I) \quad (PM_1), (PM_2), (PM_3) \\ & \text{äquivalent ist mit} \end{aligned}$$

$$(II) \quad (PM_1), (PM_2), q^n = 1.$$

Daß  $q^n = 1$  eine Folge von (I) ist, sahen wir soeben. Umgekehrt folgt (PM<sub>3</sub>) aus (II): Die  $n$ -dimensionale Kette mod 2  $\mathbb{U}^n$  aller derjenigen  $n$ -Simplexe, die man mit einem festen  $n$ -Simplexe  $\mathfrak{E}^n$  durch eine Reihe abwechselnd inzidenter Simplexe der Dimensionen  $n$  und  $n-1$  verbinden kann, ist geschlossen; denn nach (PM<sub>2</sub>) ist jedes  $(n-1)$ -Simplex von  $\mathfrak{E}^n$  und darum auch von  $\mathbb{U}^n$  mit genau zwei  $n$ -Simplexen inzident. Gäbe es nun noch  $n$ -Simplexe außerhalb  $\mathbb{U}^n$ , so würden sie ebenfalls eine geschlossene  $n$ -Kette mod 2 ausmachen, also wäre  $q^n$  mindestens = 2. Daher erschöpft  $\mathbb{U}^n$  ganz  $\mathfrak{E}^n$ .

Auch über die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit kann man einige allgemeine Aussagen machen.

**Satz I:** Die Normalform  $H^{n-1}$  der Inzidenzmatrix  $E^{n-1}$  hat für eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit  $\mathfrak{E}^n$  die Gestalt (1), für eine nichtorientierbare die Gestalt (2):

$$H^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1), \quad H^{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2).$$

Der Rang ist also im Falle (2) gleich der Spaltenzahl, im Falle (1) um 1 niedriger, und nur im Falle (2) gibt es einen von 1 verschiedenen invarianten Faktor, der den Wert 2 hat.

**Beweis:** Da jedes  $(n-1)$ -Simplex von  $\mathfrak{E}^n$  mit genau zwei  $n$ -Simplexen inzident ist, so stehen in jeder Zeile von  $E^{n-1}$  genau zwei von 0 verschiedene Elemente, je vom Betrage 1. Die Verbindbarkeitsbedingung (PM<sub>3</sub>) besagt: Teilt man die Spalten von  $E^{n-1}$  irgendwie in zwei Klassen, so gibt es eine Zeile, deren beide Einsen in Spalten verschiedener Klassen stehen. Dann ist es aber eine rein arithmetische Tatsache (§ 87), daß es nur die beiden Normalformen (1) und (2) gibt. Die Matrix (1) gehört zu einer orientierbaren Pseudomannigfaltigkeit, weil die  $n$ -Kette im oberen Eingange der ersten Spalte geschlossen ist. Im Falle (2) ist

eine solche geschlossene Kette nicht vorhanden, also die Pseudomannigfaltigkeit nichtorientierbar.

Da die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren von  $E^{n-1}$  die Torsionskoeffizienten der Dimension  $n - 1$  sind, so ist der Satz äquivalent mit dem folgenden

**Satz II:** Eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit  $\mathfrak{K}^n$  hat, wenn sie orientierbar ist, keine Torsionskoeffizienten der Dimension  $n - 1$ , und wenn sie nichtorientierbar ist, genau einen vom Werte 2.

Im nichtorientierbaren Falle gibt es also eine bis auf nulhomologe Ketten eindeutig bestimmte geschlossene  $(n - 1)$ -Kette  $U^{n-1}$ , die zwar nicht selbst, aber doppelt genommen nulhomolog ist. Eine solche Kette erhält man folgendermaßen:  $E_1^n, E_2^n, \dots, E_{\alpha^n}^n$  seien die willkürlich orientierten  $n$ -Simplexe von  $\mathfrak{K}^n$ . Die  $n$ -Kette

$$U^n = E_1^n + E_2^n + \dots + E_{\alpha^n}^n$$

hat wegen der Nichtorientierbarkeit von  $\mathfrak{K}^n$  einen von Null verschiedenen Rand. Ein  $(n - 1)$ -Simplex kommt in  $\partial U^n$  entweder 0-mal oder 2-mal vor, je nachdem die beiden angrenzenden  $n$ -Simplexe in ihm entgegengesetzte oder gleiche Orientierungen induzieren. Daher ist  $\partial U^n$  gleich dem Doppelten einer Kette  $U^{n-1}$ .  $U^{n-1}$  ist also doppelt genommen nullhomolog. Wäre  $U^{n-1}$  selbst schon Rand einer  $n$ -Kette  $V^n$ , so wäre

$$2U^{n-1} = \partial 2V^n = \partial U^n \text{ und also } \partial(U^n - 2V^n) = 0.$$

Da es außer der  $n$ -Kette 0 keine geschlossene  $n$ -Kette auf einer nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeit gibt, folgt  $U^n = 2V^n$  im Widerspruch damit, daß  $U^n$  jedes  $n$ -Simplex nur einfach enthält.

Eine berandete Pseudomannigfaltigkeit ist durch die Eigenschaften  $(PM_1)$  und  $(PM_3)$  bestimmt, während an Stelle von  $(PM_2)$  die Bedingung tritt:

$(PM_2)$  Jedes  $(n - 1)$ -Simplex ist mit höchstens zwei  $n$ -Simplexen inzident, und es gibt mindestens ein  $(n - 1)$ -Simplex, das nur mit einem  $n$ -Simplex inzident ist.

Der Rand der berandeten Pseudomannigfaltigkeit besteht gemäß der Definition des Randes eines reinen Komplexes (Fußnote S. 59) aus der Gesamtheit der  $(n - 1)$ -Simplexe, die mit einem einzigen  $n$ -Simplexe inzident sind. Alle Punkte und Simplexe, die nicht auf dem Rande liegen, heißen mittlere Punkte und Simplexe.

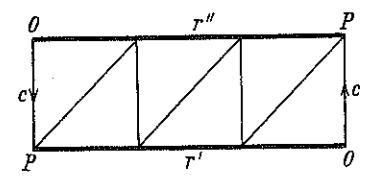


Fig. 45.

Kreisring (S. 60) und Möbiusband (Fig. 45)

sind die einfachsten Beispiele für eine orientierbare bzw. nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit; in der Figur sind die beiden Seiten  $c$  zu identifizieren.

Ein weiteres Beispiel einer berandeten Pseudomannigfaltigkeit ist ein Simplexstern  $\text{St}^n$  mit dem Mittelpunkte  $O$ , dessen Außenrand  $\mathfrak{A}^{n-1}$  eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit ist.  $(PM_1)$  und  $(PM_3)$  sind für  $\text{St}^n$  erfüllt, weil sie für den Außenrand gelten.  $(PM_2)$  ist erfüllt, weil ein  $(n - 1)$ -Simplex des Außenrandes mit einem  $n$ -Simplexe, alle übrigen (mit  $O$  inzidenten)  $(n - 1)$ -Simplexe aber mit zwei  $n$ -Simplexen inzident sind. Ist  $\mathfrak{A}^{n-1}$  orientierbar, so auch  $\text{St}^n$  und umgekehrt. Sei nämlich

$$(O P_1 \dots P_{n-1})$$

ein mit  $O$  inzidentes  $(n - 1)$ -Simplex von  $\text{St}^n$ , und seien

$$E^n = + (O P_1 \dots P_{n-1} P_n) \text{ und } 'E^n = - (O P_1 \dots P_{n-1} P_n')$$

die beiden damit inzidenten  $n$ -Simplexe. Diese induzieren bei der angegebenen Orientierung entgegengesetzte Orientierungen in  $(O P_1 \dots P_{n-1})$ . Versieht man nun die beiden auf  $\mathfrak{A}^{n-1}$  liegenden Seiten von  $E^n$  und  $'E^n$  mit den induzierten Orientierungen

$$E^{n-1} = + (P_1 \dots P_{n-1} P_n), \quad 'E^{n-1} = - (P_1 \dots P_{n-1} P_n'),$$

so induzieren sie in der gemeinsamen Seite  $(P_1 \dots P_{n-1})$  ebenfalls entgegengesetzte Orientierungen. Daraus folgt, daß einer kohärenten Orientierung der  $(n - 1)$ -Simplexe von  $\mathfrak{A}^{n-1}$  eine kohärente Orientierung der  $n$ -Simplexe von  $\text{St}^n$  entspricht und umgekehrt. Offenbar ist die Randkette des kohärent orientierten Sternes  $\text{St}^n$  der kohärent orientierte Außenrand.

Wir haben gesehen, daß eine geschlossene  $n$ -Kette auf einer geschlossenen orientierbaren Pseudomannigfaltigkeit Vielfaches der kohärent orientierten Pseudomannigfaltigkeit ist. Ein entsprechender Satz gilt für eine berandete orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, wenn man auf ihr  $n$ -Ketten betrachtet, deren Ränder auf dem Rande der Pseudomannigfaltigkeit liegen. Der Beweis ist derselbe wie im Falle der Geschlossenheit.

Die Eigenschaft einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit, orientierbar zu sein, drückt sich in der  $n$ -ten Bettischen Zahl aus:  $p^n = 1$ . Für berandete Pseudomannigfaltigkeiten gilt etwas Entsprechendes nicht. Z. B. sind die Homologiegruppen des (nichtorientierbaren) Möbiusbandes die gleichen wie die des (orientierbaren) Kreisringes. Hieran liegt es, daß die topologische Invarianz der Orientierbarkeit für geschlossene Pseudomannigfaltigkeiten einfacher zu beweisen ist als für berandete. Für die ersten ist sie eine unmittelbare Folge aus der Invarianz der Homologiegruppen (IV. Kap.), für die letztere braucht man die Invarianz des Randes und die tiefer liegenden Hilfsmittel des V. Kapitels.

Das Simplex  $\gamma^k$  ebenso wie  $\bar{\gamma}^k$  heißt ein *Urbild* des singulären Simplexes  $\mathfrak{X}^k$ . Urbilder bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben.

Wenn sich dagegen die Urbilder zweier singulärer Simplexe nicht in der erwähnten Art linear abbilden lassen, so sind die singulären Simplexe verschieden, auch wenn sie dieselbe Punktmenge  $\mathfrak{M}$  in  $\mathbb{R}^n$  ausmachen.

Die Dimension  $k$  von  $\mathfrak{X}^k$  kann größer, gleich oder kleiner als die Dimension  $n$  des Komplexes sein, in dem  $\mathfrak{X}^k$  liegt.

Beispiele: Ein Simplex einer simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  kann als singuläres  $k$ -Simplex angesehen werden. Denn es ist das topologische Bild eines geradlinigen Urbildsimplexes des Zahlenraumes. — Ein einzelner Punkt eines Komplexes ist ein singuläres  $k$ -Simplex, wenn man in ihn sich die sämtlichen Punkte eines geradlinigen  $k$ -Simplexes abbilden läßt. Ebenso ist ein Dreieck, das beliebig zerknüllt und unter Umständen auf eine Linie oder einen Punkt komprimiert im euklidischen Raum liegt, ein singuläres 2-Simplex. Eine Peano-Kurve<sup>15)</sup> der Zahlenebene ist ein singuläres 1-Simplex.

Eine  $i$ -dimensionale Seite  $\gamma^i$  von  $\gamma^k$  geht bei der Abbildung von  $\gamma^k$  in  $\mathbb{R}^n$  in eine Teilmenge  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{M}$  über.  $\mathfrak{N}$ , als Bild von  $\gamma^i$  aufgefaßt, heißt eine  $i$ -dimensionale Seite  $\mathfrak{X}^i$  des singulären  $k$ -Simplexes  $\mathfrak{X}^k$  und ist offenbar ein singuläres  $i$ -Simplex.  $\mathfrak{X}^i$  und  $\mathfrak{X}^k$  nennen wir *incident*.

Ein singuläres  $k$ -Simplex  $\mathfrak{X}^k$  wird *orientiert*, indem das Urbild  $\gamma^k$  orientiert wird. Orientierte Simplexe werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ein orientiertes singuläres  $k$ -Simplex  $X^k$  ist also eine Punktmenge  $\mathfrak{M}$  eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$ , die in bestimmter Weise eindeutiges stetiges Bild eines orientierten  $k$ -Simplexes  $x^k$  ist. Ersetzt man das Urbild  $x^k$  durch ein anderes ebenfalls geradliniges Simplex  $\bar{x}^k$ , und kann man  $x^k$  mit Erhaltung der Orientierung linear so auf  $\bar{x}^k$  abbilden, daß zugeordnete Punkte in denselben Punkt von  $\mathfrak{M}$  übergehen, so gelten die beiden orientierten singulären  $k$ -Simplexe, die durch Abbilden von  $x^k$  bzw.  $\bar{x}^k$  auf  $\mathfrak{M}$  bestimmt sind, für nicht verschieden.

Zu jedem orientierten singulären Simplexe  $X^k$  gibt es ein *entgegengesetzt orientiertes*, das mit  $-X^k$  bezeichnet wird. Es wird erhalten, indem man die Orientierung von  $x^k$  umkehrt, die Abbildung von  $x^k$  auf  $\mathfrak{M}$  aber ungeändert läßt.  $X^k$  und  $-X^k$  bestimmen also dasselbe nichtorientierte singuläre Simplex  $\mathfrak{X}^k$ .

Es kann sein, daß  $X^k$  und  $-X^k$  gleich sind, d. h. daß sich  $x^k$  mit Umkehrung der Orientierung so auf sich linear abbilden läßt, daß zugeordnete Punkte demselben Punkte von  $\mathfrak{X}^k$  entsprechen. In diesem Falle heiße das orientierte singuläre Simplex  $X^k$ , ebenso wie das zugehörige nichtorientierte  $\mathfrak{X}^k$  *ausgeartet*. Ein nichtausgeartetes Simplex wird gleichsam von zwei entgegengesetzten orientierten überlagert; diese fallen über einem ausgearteten Simplex in eines zusammen.

1. Beispiel: Ein  $(k-1)$ -Simplex  $\mathfrak{E}^{k-1}$  einer simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  kann als singuläres  $k$ -Simplex  $\mathfrak{X}^k$  aufgefaßt werden, wenn man das Urbild  $\gamma^k$  mit den Ecken  $p_0, p_1, \dots, p_k$  so linear auf  $\mathfrak{E}^{k-1}$  abbildet, daß zwei Ecken, etwa  $p_{k-1}$  und  $p_k$  in dieselbe Ecke von  $\mathfrak{E}^{k-1}$  fallen.  $\gamma^k$  gestattet eine lineare Selbabbil-

## Viertes Kapitel.

### Simpliziale Approximation.

Wir beweisen in diesem Kapitel die topologische Invarianz der im vorigen Kapitel aus dem kombinatorischen Schema eines simplizialen Komplexes berechneten Homologiegruppen. Zu dem Zweck werden singuläre  $k$ -dimensionale Simplexe (§ 25) in den Komplex  $\mathbb{R}^n$  hineingelegt, das sind stetige Bilder von geradlinigen Simplexen eines Zahlenraumes. Aus den singulären Simplexe werden singuläre Ketten (§ 26) gebildet und für diese eine Addition, der Rand, die Geschlossenheit und die Eigenschaft, nullhomolog zu sein (zu bergenden) erklärt; sie werden daraufhin in Klassen singulär-homologer eingeteilt. Die Klassen bilden die  $k$ -te singuläre Homologiegruppe des Komplexes (§ 27). Sie ist ihrer Definition nach topologisch invariant (S. 98) und nicht an eine simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  gebunden. Ist nun eine simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  gegeben, so wird durch das Verfahren der simplizialen Approximation (S. 107) nach vorangegangener Normalunterteilung jede singuläre Kette auf  $\mathbb{R}^n$  in eine simpliziale Kette dieser Zerlegung übergeführt, ohne daß dabei die wesentlichen topologischen Eigenschaften der singulären Kette geändert würden, und damit wird der Beweis der Übereinstimmung von singulären und simplizialen Homologiegruppen erbracht (§ 28). Die Existenz einer approximierenden simplizialen Kette sagt der fundamentale Approximationssatz aus (§ 28).

Simpliziale Approximation bedeutet allgemein Übergang von einer stetigen Abbildung eines Komplexes zu einer „simplizialen“. Daß man jede stetige Abbildung in eine simpliziale Abbildung sogar durch eine „Deformation“ überführen kann, ist der Inhalt des Deformationssatzes (§ 31). Im Anschluß daran wird das Verhalten der Homologiegruppen bei Deformation von Abbildungen untersucht.

#### § 25. Singuläres Simplex.

Ein singuläres  $k$ -Simplex  $\mathfrak{X}^k$  ist eine Punktmenge  $\mathfrak{M}$  eines  $n$ -dimensionalen endlichen oder unendlichen Komplexes<sup>16)</sup>  $\mathbb{R}^n$ , die in bestimmter Weise als eindeutiges stetiges Bild eines geradlinigen Simplexes  $\gamma^k$  eines Zahlenraumes aufgefaßt wird. Deutsche Buchstaben deuten an, daß es sich zunächst um nichtorientierte Simplexe handelt.

Faßt man dieselbe Punktmenge das eine Mal als Bild von  $\gamma^k$ , das andere Mal als Bild eines anderen  $k$ -Simplexes  $\bar{\gamma}^k$  auf, so sehen wir die beiden singulären  $k$ -Simplexe, die beide dieselbe Punktmenge  $\mathfrak{M}$  von  $\mathbb{R}^n$  ausmachen, als *gleich* an, wenn sich  $\gamma^k$  auf  $\bar{\gamma}^k$  linear so abbilden läßt, daß zugeordnete Punkte demselben Punkte in  $\mathbb{R}^n$  entsprechen.

\* Daß  $\mathbb{R}^n$  ein Komplex ist, ist insofern unwesentlich, als man singuläre Simplexe, Ketten und Homologiegruppen ebensogut in jedem beliebigen Umgebungsräume, z. B. in einer beliebigen nichtleeren Teilmenge eines Komplexes definieren kann. Aber nur für Komplexe ist diese Definition fruchtbare.<sup>16)</sup>

<sup>15)</sup> F. Hausdorff, Mengenlehre [2], S. 202.

dung mit Umkehrung der Orientierung, nämlich die, bei der nur die beiden Ecken  $p_{k-1}$  und  $p_k$  sich vertauschen, die übrigen aber fest bleiben. Zugeordnete Punkte bilden sich in denselben Punkt der Punktmenge  $\mathcal{M} = \mathbb{E}^{k-1}$  ab. Das Simplex  $\mathfrak{X}^k$  ist also ein ausgeartetes singuläres Simplex auf  $\mathbb{R}^n$ . Allgemein ist ein singuläres  $k$ -Simplex ausgeartet, wenn es durch lineare Abbildung seines Urbildes  $\mathfrak{x}^k$  auf ein Simplex  $\mathbb{E}^{k-i}$  ( $i > 0$ ) entsteht (S. 39).

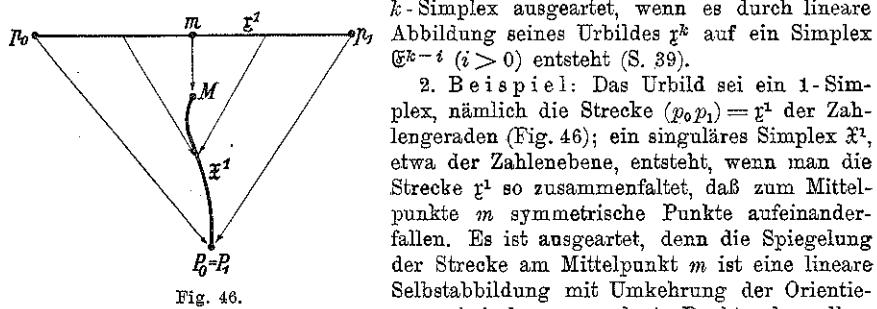


Fig. 46.

Punkte von  $\mathfrak{X}^1$  entsprechen. Singulär, aber nicht ausgeartet wäre das 1-Simplex, wenn man es wieder so zusammenfaltet, daß  $p_0$  und  $p_1$  in den einen und  $m$  in den andern Endpunkt der Bildstrecke fallen, aber nicht immer an  $m$  gespiegelte Punkte denselben Bildpunkt haben.

3. Beispiel: Wenn alle  $k+1$  Ecken eines singulären Simplexes  $\mathfrak{X}^k$  verschieden sind, so ist das Simplex sicher nichtausgeartet, denn bei einer linearen Selbstabbildung des Urbildes  $\mathfrak{x}^k$  mit Umkehrung der Orientierung geht mindestens eine Ecke in eine davon verschiedene über.

Andererseits ist ein singuläres  $k$ -Simplex ( $k > 0$ ) sicher ausgeartet, wenn es aus einem einzigen Punkt besteht, in den sich alle Punkte des Urbildes abbilden. — Ein 0-Simplex ist niemals ausgeartet. Wir erinnern daran, daß wir auch die 0-Simpexe orientiert haben (S. 41).

## § 26. Singuläre Ketten.

Eine singuläre  $k$ -Kette besteht aus endlich vielen — unter Umständen 0 — nichtausgearteten singulären  $k$ -Simplexen eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$ , deren jedes mit einer bestimmten Orientierung und einer bestimmten positiven Vielfachheit versehen ist. Kommt das orientierte singuläre Simplex  $X^k$  in der Kette mit der Vielfachheit  $a$  vor, so sagen wir dafür auch, daß das umgekehrt orientierte Simplex  $-X^k$  mit der Vielfachheit  $-a$  darin vorkommt, und dafür, daß ein singuläres Simplex überhaupt nicht in der Kette vorkommt, sagen wir, daß es mit der Vielfachheit 0 vorkommt.

Da jedes  $k$ -Simplex einer simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  zugleich als singuläres  $k$ -Simplex aufgefaßt werden kann — denn es ist topologisches Bild eines geradlinigen Simplexes —, so sind die im III. Kapitel betrachteten simplizialen Ketten zugleich singuläre Ketten. Simpliziale Ketten sind also nur in bezug auf eine bestimmte simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  definiert und bestehen aus Simplexen dieser simplizialen Zerlegung; die singulären Ketten dagegen sind unabhängig von jeder simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  aus singulären Simplexen aufgebaut.

Unter den singulären  $k$ -Ketten befindet sich die  $k$ -Kette 0, in der überhaupt kein singuläres Simplex vorkommt. Sie wird unter die simplizialen Ketten gerechnet.

Zwei singuläre  $k$ -Ketten werden addiert, indem man die Vielfachheiten addiert, mit denen ein orientiertes singuläres Simplex in den beiden Ketten vorkommt.

Die singulären  $k$ -Ketten von  $\mathbb{R}^n$  bilden bei der Kettenaddition als Verknüpfungsprozeß eine abelsche Gruppe, freilich im allgemeinen eine mit kontinuierlich unendlich vielen Erzeugenden, als die man die fest orientierten nichtausgearteten singulären  $k$ -Simplexe nehmen kann. Das Nullelement wird von der  $k$ -Kette 0 gebildet, das negative Element erhält man, wenn man alle in der Kette vorkommenden singulären Simplexe umorientiert oder, was dasselbe ist, die Orientierung beibehält und dafür alle Vielfachheiten mit  $-1$  multipliziert. Eine singuläre Kette  $V^k$ , in der die singulären orientierten Simplexe  $X_1^k, X_2^k, \dots, X_r^k$  (für die  $X_1^k + X_2^k + \dots + X_r^k$  sei) mit den Vielfachheiten  $v_1, v_2, \dots, v_r$  (und alle übrigen singulären Simplexe mit der Vielfachheit 0) auftreten, kann man somit als eine Summe schreiben

$$V^k = v_1 X_1^k + v_2 X_2^k + \dots + v_r X_r^k. \quad (1)$$

Aus der Definition der singulären Kette folgt unmittelbar die Rechenregel: Ist  $m V^k = 0$  und  $m \neq 0$ , so ist schon  $V^k = 0$ . Diese Rechenregel würde nicht gelten, wenn wir auch ausgeartete Simplexe in die Kettendefinition aufgenommen hätten.

Die Summe (1) hat auch dann noch einen Sinn, wenn man nicht die Verschiedenheit der singulären Simplexe  $X_1^k, \dots, X_r^k$  voraussetzt, sondern zuläßt, daß in (1) gleiche oder entgegengesetzt orientierte Simplexe vorkommen, die man dann zusammenfassen oder gegeneinander wegheben kann. Aus formalen Gründen ist es sogar zweckmäßig, auch ausgeartete singuläre Simplexe zuzulassen, die freilich nicht als Glieder der Kette zählen, sondern gleichbedeutend mit 0 sind. Wenn künftig eine Summe (1) auftritt, so sind alle diese Möglichkeiten zugelassen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil gefordert wird.

Der Grund, warum wir nicht als singuläre Kette einfach das stetige Bild einer bestimmten simplizialen Urbildkette definiert haben, liegt darin, daß wir für diese Ketten keine Addition erklären können, die unabhängig von der Auswahl des Urbildkomplexes wäre. Es liegt uns aber daran, die singulären Homologiegruppen, denen wir uns jetzt zuwenden, als topologische Invarianten des Komplexes  $\mathbb{R}^n$  zu definieren, und zu dem Zwecke ist die Addierbarkeit der singulären Ketten unentbehrlich.

## § 27. Singuläre Homologiegruppen.

Ist  $x^k$  ( $k > 0$ ) Urbild des orientierten singulären Simplexes  $X^k$ , das ausgeartet sein kann, und ist

$$\partial \bar{x}^k = \sum_v x_v^{k-1},$$

so definieren wir als *Rand von  $X^k$*  die singuläre  $(k-1)$ -Kette  $\sum_v X_v^{k-1}$  und schreiben

$$\partial X^k = \sum_v X_v^{k-1}. \quad (1)$$

$X_v^{k-1}$  ist hierin die orientierte  $(k-1)$ -dimensionale Seite von  $X^k$ , deren Urbild die orientierte (und zwar mit der von  $X^k$  induzierten Orientierung versehene) Seite  $x_v^{k-1}$  von  $x^k$  ist. Unter den Seitensimplexen  $X_v^{k-1}$  können ausgeartete vorkommen, auch wenn  $X^k$  nichtausgeartet ist.

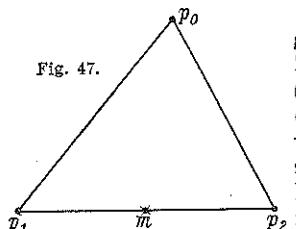


Fig. 47.

Ein Beispiel hierfür liefert ein tütenartig zusammengebogenes Dreieck  $X^2$  (Fig. 48), dessen eine Seite durch Zusammenfallen der Urbildseite  $(p_1 p_2)$  in der Mitte  $m$  (Fig. 47) entsteht, während sonst keine Punkte des Urbildes zusammenfallen. Die zusammengefaltete Seite ist, wie wir S. 94 sahen, ein ausgeartetes Simplex, wenn immer zu  $m$  spiegelbildlich gelegene Punktpaare auf  $(p_1 p_2)$  zur Deckung gebracht werden. Da ausgeartete Simplexe nicht mitzählen, so besteht  $\partial X^2$  aus den beiden singulären 1-Simplexen, die zusammen den Rand der Tüte ausmachen. — In diesem Beispiel hat man sich als Komplex, dem die singulären Simplexe eingelagert sind, etwa den dreidimensionalen Zahlenraum zu denken.

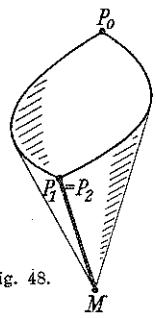


Fig. 48.

Die Randdefinition ist unabhängig von der besonderen Auswahl des Urbildes  $x^k$  von  $X^k$ . Ist nämlich  $\bar{x}^k$  ein anderes Urbild von  $X^k$ , so gibt es nach der Gleichheitsdefinition für singuläre Simplexe eine lineare Abbildung  $T$  von  $x^k$  auf  $\bar{x}^k$  mit Erhaltung der Orientierung, so daß vermöge  $T$  einander entsprechende Punkte denselben Bildpunkt in  $X^k$  haben.

$T$  bildet aber auch die Simplexe von  $\partial \bar{x}^k = \sum_v \bar{x}_v^{k-1}$  linear mit Erhaltung der Orientierung auf die Simplexe von  $\partial x^k = \sum_v x_v^{k-1}$  ab. Also gehen die beiden Ketten  $\sum_v x_v^{k-1}$  und  $\sum_v \bar{x}_v^{k-1}$  wiederum nach der Gleichheitsdefinition singulärer Simplexe in dieselbe singuläre Kette  $\partial X^k$  über.

Der Rand eines singulären Simplexes kann verschwinden. Dies tritt z. B. bei einer zu einem topologischen Kreise zusammengebogenen Strecke  $x^1$  ein. Der Rand besteht aus zwei nur durch die Orientierung unterschiedenen 0-Simplexen.

Der Rand des entgegengesetzten orientierten Simplexes  $-X^k$  von  $X^k$  ist offenbar gleich dem negativen Rande von  $X^k$ :

$$\partial(-X^k) = -\partial X^k.$$

Ist insbesondere  $X^k$  ausgeartet, stimmt also  $X^k$  mit  $-X^k$  überein, so ergibt sich

$$\partial \bar{x}^k = \partial(-X^k) = -\partial X^k.$$

Eine Kette, die gleich ihrer negativen ist, ist aber nach der Rechenregel S. 95 die Kette 0. Der Rand eines ausgearteten singulären Simplexes  $X^k$  ist also die  $(k-1)$ -Kette 0.

Der Rand einer singulären  $k$ -Kette ist erklärt als die Summe der Ränder der einzelnen  $k$ -Simplexe:

$$\partial \sum_v v_v X_v^k = \sum_v v_v \partial X_v^k. \quad (2)$$

Kommen in der Summe  $\sum_v v_v X_v^k$  gleiche oder entgegengesetzte oder ausgeartete Simplexe (die dann gleichbedeutend mit 0 sind) vor, so sind auch deren Ränder gleich, entgegengesetzt oder 0, so daß die rechte Seite von (2) immer ein und dieselbe singuläre Kette ist, wie man auch die linke Seite schreibt. — Der Rand einer nulldimensionalen Kette ist immer die Zahl 0.

Eine singuläre  $k$ -Kette heißt *geschlossen*, wenn ihr Rand verschwindet. Sie heißt *nullhomolog*, wenn sie Rand einer singulären  $(k+1)$ -Kette ist. — Nulldimensionale singuläre Ketten sind also immer geschlossen. Wie bei den simplizialen Ketten (S. 60 und S. 61) beweist man, daß Summe und Differenz geschlossener (nullhomologer) Ketten wieder geschlossen (nullhomolog) sind.

Der Rand eines singulären  $(k+1)$ -Simplexes  $X^{k+1}$  und folglich auch der Rand einer beliebigen singulären  $(k+1)$ -Kette ist eine geschlossene singuläre  $k$ -Kette, denn der Rand des Urbildes  $x^{k+1}$  ist geschlossen. Mit anderen Worten: Jede nullhomologe singuläre Kette ist geschlossen.

Zwei singuläre Ketten, die nicht notwendig geschlossen zu sein brauchen, heißen einander *homolog* (auf  $\mathbb{R}^n$ ), wenn ihre Differenz nullhomolog ist. Zur Homologie zweier Ketten ist die Übereinstimmung im Rande notwendig, vgl. S. 61. — Auch Homologie mit Division kann man für singuläre Ketten definieren. Eine singuläre Kette heißt *divisions-nullhomolog* ( $\approx 0$ ), wenn es ein von 0 verschiedenes Vielfaches gibt, das nullhomolog ist.

Die geschlossenen singulären  $k$ -Ketten zerfallen in Klassen homologer Ketten. Diese Klassen sind die Elemente einer Gruppe, der  *$k$ -ten singulären Homologiegruppe*, wenn man als Summe zweier Homologieklassen die Homologiekasse erklärt, in der die Summenkette zweier aus den beiden Summanden herausgegriffener singulärer Ketten liegt. Im Unterschied hierzu bezeichnen wir die im dritten Kapitel betrachteten Homologiegruppen einer simplizialen Zerlegung vorübergehend als *simpliziale Homologiegruppen*, bis wir die Übereinstimmung mit den singulären nachgewiesen haben.

Da uns der Nachweis dieser Übereinstimmung zur Sicherstellung der topologischen Invarianz der simplizialen Homologiegruppen dienen soll, so überzeugen wir uns zuvor von der topologischen Invarianz der singu-

lären Homologiegruppen, vielmehr untersuchen wir die allgemeinere Frage, wie sich die singulären Homologiegruppen bei einer stetigen, aber nicht notwendig eindeutigen Abbildung  $\varphi$  des Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen Komplex  $K^m$  (der auch mit  $\mathbb{R}^n$  zusammenfallen kann) verhalten. Ein singuläres Simplex  $X^k$  von  $\mathbb{R}^n$  geht bei  $\varphi$  in ein singuläres Simplex  $\Xi^k$  von  $K^m$  über. Denn das Urbild  $x^k$  von  $X^k$  erfährt erst eine stetige Abbildung  $f$  auf  $X^k$  und darauf die stetige Abbildung  $\varphi$  in  $K^m$ . Das Produkt  $\varphi \cdot f$  ist aber wieder eine stetige Abbildung. Das umgekehrt orientierte Simplex  $-X^k$  bildet sich in  $-\Xi^k$  ab. Sind also  $X^k$  und  $-X^k$  einander gleich, so auch  $\Xi^k$  und  $-\Xi^k$ , d. h. ein ausgeartetes Simplex geht in ein ausgeartetes über. (Dagegen kann natürlich das Bild eines nichtausgearteten Simplexes ausgeartet sein.) Somit kommt einer singulären Kette

$$V^k = \sum v_x X^k$$

ein ganz bestimmtes Bild  $\sum v_x \Xi^k$  zu. Das Bild der Summe  $V^k + V^k = \sum v_x X^k + \sum v_x' X^k$  ist gleich der Summe der Bilder, nämlich  $\sum v_x \Xi^k + \sum v_x' \Xi^k$ . Ferner geht der Rand einer Kette in den Rand des Bildes über. Wir können kurz sagen:

**Satz I:** Bei einer stetigen Abbildung  $\varphi$  eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen Komplex  $K^m$  gehen singuläre Ketten wieder in singuläre Ketten über, und jede zwischen den Ketten von  $\mathbb{R}^n$  und deren Rändern bestehende Gleichung bleibt beim Übergang zu  $K^m$  richtig.

Insbesondere bilden sich geschlossene Ketten in geschlossene, nullhomologe Ketten in nullhomologe ab. Es entspricht also jeder (singulären) Homologieklasse in  $\mathbb{R}^n$  eine ganz bestimmte Bildhomologieklasse in  $K^m$ , und da der Summe zweier Homologieklassen die Summe ihrer Bilder entspricht, so ist hiermit der wichtige Satz bewiesen:

**Satz II:** Bei einer stetigen Abbildung  $\varphi$  eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen Komplex  $K^m$  erfährt die  $k$ -te singuläre Homologiegruppe von  $\mathbb{R}^n$  eine homomorphe Abbildung  $\Phi$  (§ 83) in die  $k$ -te singuläre Homologiegruppe von  $K^m$ . — Sind  $\mathbb{R}^n$  und  $K^m$  homöomorph und ist  $\varphi$  eine topologische Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  auf  $K^m$ , so ist  $\Phi$  ein 1-Isomorphismus; homöomorphe Komplexe haben also dieselben singulären Homologiegruppen.

Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, daß bei einer topologischen Abbildung die Zuordnung der singulären Ketten von  $\mathbb{R}^n$  zu denen von  $K^m$  eineindeutig ist.

**Aufgaben:** 1. Unter Vorwegnahme des Approximationssatzes, nach dem die singulären mit den simplizialen Homologiegruppen übereinstimmen, zu beweisen: Jede homomorphe [automorphe] Selbstabbildung der ersten Homologiegruppe der Ringfläche (§ 19) kann durch eine stetige [topologische] Selbstabbildung der Ringfläche bewirkt werden.

2. Unter der gleichen Vorwegnahme zu zeigen: Ein Kreisring läßt sich nicht topologisch so auf sich abbilden, daß der eine Randkreis mit Erhaltung, der andere mit Umkehrung der Orientierung auf sich abgebildet wird.

### § 28. Approximationssatz, Invarianz der simplizialen Homologiegruppen.

Die simplizialen Homologiegruppen sind für einen mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung versehenen Komplex berechenbar; es steht aber nicht ihre topologische Invarianz fest, sondern es könnte sein, daß sie von der gewählten simplizialen Zerlegung des Komplexes abhängen. Die singulären Homologiegruppen sind ihrer Definition nach topologisch invariant; man hat aber kein Hilfsmittel, sie zu berechnen, d. h. ihre Bettischen Zahlen und Torsionskoeffizienten zu ermitteln. Es gilt jetzt, die Übereinstimmung der simplizialen und singulären Homologiegruppen eines Komplexes und damit die topologische Invarianz der simplizialen Homologiegruppen zu beweisen.

Der Beweis beruht auf dem

**Approximationssatz:** Ist  $\mathbb{R}^n$  ein endlicher oder unendlicher Komplex mit einer festen simplizialen Zerlegung und  $A^k$  eine singuläre  $k$ -Kette auf  $\mathbb{R}^n$ , ist ferner der Rand<sup>\*)</sup>  $A^{k-1}$  von  $A^k$  eine simpliziale Kette der Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$ , speziell die  $(k-1)$ -Kette 0, so gibt es zu  $A^k$  eine homologe simpliziale Kette  $\tilde{A}^k$  (die nach S. 97 ebenfalls den Rand  $A^{k-1}$  hat). Die Dimension  $k$  der Kette  $A^k$  kann kleiner, gleich oder auch größer als die Dimension der simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  sein.

Nimmt man insbesondere  $A^k$  geschlossen an, ist also  $A^{k-1} = 0$ , so folgt

(I) Jede geschlossene singuläre  $k$ -Kette ist homolog einer simplizialen  $k$ -Kette.

Ersetzt man dagegen im Approximationssatz  $k$  durch  $k+1$ , so folgt

(II) Ist eine simpliziale  $k$ -Kette Rand einer singulären  $(k+1)$ -Kette, so ist sie auch Rand einer simplizialen  $(k+1)$ -Kette.

Aus (I) und (II) folgt die Übereinstimmung der simplizialen und singulären Homologiegruppen. Denn es gehören die geschlossenen  $k$ -Ketten einer simplizialen Homologieklasse, als singuläre Ketten aufgefaßt, ein und derselben singulären Homologieklasse an, weil simplizial homologe Ketten erst recht singulär homolog sind. Jeder simplizialen Homologieklasse ist also eine singuläre eindeutig zugeordnet. Verschiedenen simplizialen Homologieklassen entsprechen verschiedene singuläre, denn zwei simpliziale Ketten, die simplizial nicht homolog sind, können wegen (II) auch nicht singulär homolog sein. Schließlich ist in jeder singulären Homologieklasse eine simpliziale Homologieklasse enthalten, wegen (I). Die Zuordnung der simplizialen und singulären Homologieklassen ist also umkehrbar eindeutig. — Sie ist auch isomorph; d. h. es entspricht der Summe  $\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2$  zweier simplizialer Homologieklassen die Summe  $H_1 + H_2$  der beiden zugeordneten singulären.  $H_1 + H_2$  wird nämlich gebildet, indem man zwei Repräsentanten aus den Klassen  $H_1$

<sup>\*)</sup> Für  $k=0$  fällt die Bedingung, daß der Rand  $A^{k-1}$  simplizial sein soll, natürlich fort.

und  $H_2$  herausgreift und diese addiert; als Repräsentanten kann man aber geschlossene simpliziale Ketten von  $\bar{H}_1$  bzw.  $\bar{H}_2$  wählen.

Die Übereinstimmung der singulären und simplizialen Homologiegruppen ist damit auf den Approximationssatz zurückgeführt. Seinem Beweise (§ 30) schicken wir einige Bemerkungen über Prismen des Zahlenraumes voraus.

## § 29. Prismen des Zahlenraumes.

In § 9, S. 40, sahen wir, daß eine lineare Selbstabbildung eines geradlinigen Simplexes  $x^n$  dann und nur dann die Orientierung erhält, wenn die Transformationsdeterminante positiv ist. Sind jetzt allgemeiner  $x^n$  und  $x^m$  irgend zwei orientierte geradlinige  $n$ -Simplexe im  $n$ -dimensionalen Zahlenraume  $\mathfrak{R}^n$ , so heißen sie *gleich orientiert*, wenn die linearen Abbildungen des  $\mathfrak{R}^n$ , die  $x^n$  in  $x^m$  mit Erhaltung der Orientierung überführen, positive Transformationsdeterminanten haben. Ist  $x^n$  ein weiteres  $n$ -Simplex, das mit  $x^m$  gleich orientiert ist, so ist offenbar auch  $x^m$  mit  $x^n$  gleich orientiert. Wir sagen, daß durch ein orientiertes  $n$ -Simplex  $x^n$  eine *Orientierung des ganzen  $\mathfrak{R}^n$*  gegeben ist, und alle mit  $x^n$  gleich orientierten Simplexe bestimmen dieselbe Orientierung des  $\mathfrak{R}^n$ .

$x_g^k$  sei die  $g$ -fache Normalunterteilung des im  $\mathfrak{R}^n$  gelegenen geradlinigen Simplexes  $x^k$ . Durch die Orientierung von  $x^k$  ist eine Orientierung des linearen Teilraumes  $\mathfrak{L}^k$  von  $\mathfrak{R}^n$ , in dem  $x^k$  liegt, gegeben. Man kann daher die Teilsimplexe von  $x_g^k$  alle gleich mit  $x^k$  orientieren. Wenn man von der Normalunterteilung eines orientierten Simplexes  $x^k$  redet, so meint man immer, daß die Teilsimplexe in dieser Weise orientiert sind. — Für  $k = 0$  fällt die orientierte Normalunterteilung mit dem orientierten 0-Simplexe selbst zusammen.

Ein Prisma  $\mathfrak{z}^{k+1}$  ist die Punktmenge, die ein geradliniges Simplex  $y^k$  im mindestens  $(k+1)$ -dimensionalen Zahlenraum bei einer Translation überstreicht, die es in ein anderes Simplex  $y^k$  überführt; wir nehmen an, daß der Vektor der Translation nicht in dem  $k$ -dimensionalen linearen Raum liegt, den  $y^k$  aufspannt.  $y^k$  und seine Seiten  $y^i$  ( $0 \leq i < k$ ) heißen die *Grundseiten*,  $y^k$  und seine Seiten die *Dachseiten* des Prismas  $\mathfrak{z}^{k+1}$ . Jede  $i$ -dimensionale Seite von  $y^k$  beschreibt bei der Translation offenbar ein Prisma  $\mathfrak{z}^{i+1}$ , eine  $(i+1)$ -dimensionale *Wandseite*. Der Mittelpunkt von  $y^k$  beschreibt die *Achse* des Prismas, ein beliebiger Punkt von  $y^k$  eine *achsenparallele Strecke*. Der Mittelpunkt der Prismaachse heißt der *Mittelpunkt des Prismas*; ebenso hat jede Wandseite einen Mittelpunkt, da sie selbst ein Prisma ist. — Für  $k = 0$  erhält man als eindimensionales Prisma eine Strecke, für  $k = 1$  ein Parallelogramm, für  $k = 2$  ein dreikantiges Prisma. Wir setzen im folgenden immer  $k > 0$  voraus.

Ist  $\mathfrak{z}^{k+1}$  ein anderes  $(k+1)$ -dimensionales Prisma, so gibt es eine lineare Abbildung von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  auf  $\mathfrak{z}^{k+1}$ , bei der das Grundsimplex  $y^k$  in das Grundsimplex  $\bar{y}^k$  übergeht. Diese lineare Abbildung ist durch die lineare Abbildung von  $y^k$  auf  $\bar{y}^k$ , die man noch willkürlich vorschreiben

kann, eindeutig bestimmt; es geht dabei der Mittelpunkt von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  in den Mittelpunkt von  $\bar{y}^{k+1}$  über.

Das Prisma  $\mathfrak{z}^{k+1}$  ist wegen der Konvexität des Grundsimplexes konkav, d. h. es ist eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge des Zahlenraumes, die mit irgend zwei Punkten ihre ganze Verbindungsstrecke enthält. Ein Halbstrahl, der in  $\mathfrak{z}^{k+1}$  vom Mittelpunkt aus gezogen wird, schneidet daher den Rand von  $\mathfrak{z}^{k+1}$ , der aus  $y^k$ ,  $y^k$  und den Wandseiten  $\mathfrak{z}^i_\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots, k$ ) besteht, in genau einem Punkte.

Alle die angeführten Eigenschaften von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  kann man analytisch bestätigen. Man mache eine Ecke von  $y^k$  zum Koordinatenanfang und wähle als Basisvektoren die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , die nach den übrigen Ecken von  $y^k$  führen, sowie den Vektor  $t$ , den der Anfangspunkt bei der das Prisma erzeugenden Translation überstreckt. Das Prisma wird dann von den Endpunkten der folgenden Ortsvektoren gebildet:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k + \tau t \\ (0 \leq \lambda_i \leq 1; \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \leq 1; 0 \leq \tau \leq 1).$$

Wir gehen hierauf nicht näher ein.

Das Prisma  $\mathfrak{z}^{k+1}$  wollen wir jetzt in Simplexe einteilen. Das ist auf unendlichviele Weisen möglich. Uns interessieren hier nur spezielle simpliziale Zerlegungen, die wir später brauchen werden. Wir bilden die  $g$ -fache Normalunterteilung der Dachseite  $y^k$ . Für  $g$  lassen wir auch den Wert 0 zu; in diesem Falle bleibt  $y^k$  unzerteilt. Danach zerteilen wir alle Wandseiten von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  nach folgendem Verfahren: jede eindimensionale Wandseite wird durch ihren Mittelpunkt in zwei 1-Simplexe unterteilt. Sind die  $i$ -dimensionalen Wandseiten  $\mathfrak{z}^i_\nu$  schon unterteilt, so projiziere man den Rand einer jeden  $(i+1)$ -dimensionalen Wandseite  $\mathfrak{z}^{i+1}_\nu$  — oder für  $i = k$  den des ganzen Prismas — von ihrem Mittelpunkt aus, vgl. S. 53. Der Rand von  $\mathfrak{z}^{i+1}_\nu$  besteht aus der nicht unterteilten Grundseite  $y^i$ , der  $g$ -fach normalunterteilten Dachseite  $y^i$  und gewissen schon unterteilten Wandseiten  $\mathfrak{z}^i$ .

Zerteilt man so mit der Dimension 1 beginnend alle Wandseiten bis zum Prisma  $\mathfrak{z}^{k+1}$  selbst, so erhält man die zu benutzende simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{z}^{k+1}$ . — Die Fig. 49 und 50 erläutern zwei einfache Fälle.

Wir orientieren jetzt das Prisma  $\mathfrak{z}^{k+1}$ , d. h. wir orientieren seine einzelnen  $(k+1)$ -dimensionalen Teilsimplexe gleich innerhalb des  $(k+1)$ -dimensionalen linearen Raumes, in dem  $\mathfrak{z}^{k+1}$  liegt. Die Gesamtheit der

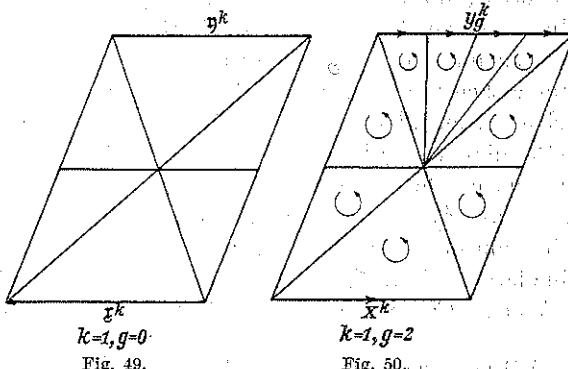


Fig. 49.

Fig. 50.

so orientierten Simplexe, jedes mit der Vielfachheit 1 genommen, ist eine Kette, die wir  $z^{k+1}$  nennen. Das Grundsimplex  $g^k$  von  $z^{k+1}$  erhält die Orientierung, die von dem inzidenten  $(k+1)$ -Simplex von  $z^{k+1}$  in ihm induziert wird und heißt danach  $x^k$ . Auf die unterteilte Dachseite  $y^k$  dagegen wird die Orientierung der Grundseite  $x^k$  durch Translation übertragen, wodurch auf  $y^k$  die Kette  $y^k$  entsteht, die alle orientierten Simplexe der  $g$ -fachen Normalunterteilung von  $y^k$  enthält (vgl. Fig. 50). Entsprechend sind die Ketten  $s_r^k$ ,  $x_r^{k-1}$ ,  $y_r^{k-1}$  auf den  $k$ -dimensionalen Wand- und den  $(k-1)$ -dimensionalen Grund- und Dachseiten von  $z^{k+1}$  erklärt. Die Orientierung der Seitensimplexe  $x_r^{k-1}$  des Grundsimplexes  $x^k$  kann man so einrichten, daß

$$\partial x^k = \sum_r x_r^{k-1} \quad (1)$$

ist und auf der rechten Seite nicht etwa noch Faktoren  $\epsilon_r = +1$  auftreten. Das wollen wir der Einfachheit halber tun.

Zwischen den so erhaltenen simplizialen Ketten bestehen außer (1) die folgenden Verbindungsformeln:

$$\partial y^k = \sum_r y_r^{k-1}, \quad (2)$$

$$\partial \sum_r s_r^k = \sum_r x_r^{k-1} - \sum_r y_r^{k-1}, \quad (3)$$

$$\partial z^{k+1} = x^k - y^k - \sum_r z_r^k. \quad (4)$$

Gleichung (2) drückt in Formeln aus, daß der Rand der Normalunterteilung der Dachseite gleich der Normalunterteilung des Randes ist. Gleichung (4) sagt aus, daß der Rand des Prismas aus Grundseite, Dachseite und den  $k$ -dimensionalen Wandseiten — alle unterteilt, mit Orientierung versehen und als Ketten aufgefaßt — besteht. (3) ist eine Folge von (1), (2) und (4); denn die rechte Seite von (4) ist als Randkette geschlossen, ihr Rand also die  $(k-1)$ -Kette 0, eine Beziehung, die mit Rücksicht auf (1) und (2) gerade (3) liefert.

Was nun die Formeln (2) und (4) anlangt, so könnten höchstens die Vorzeichen falsch sein. Ein Simplex  $E^k$  des Randes von  $z^{k+1}$  z. B. muß jedenfalls auf  $x^k$  oder  $y^k$  oder einer der Ketten  $z_r^k$  liegen, denn jedes andere  $k$ -Simplex von  $z^{k+1}$  ist mit genau zwei  $(k+1)$ -Simplexen inzident, die wegen der gleichen Orientierung in ihm entgegengesetzte Orientierungen induzieren.\*.) Ist nun  $E^k$  z. B. ein orientiertes Simplex der Kette  $z_r^k$ , so wird von dem einzigen mit  $E^k$  inzidenten  $(k+1)$ -Simplex  $E^{k+1}$  von  $z^{k+1}$  eine bestimmte Orientierung in  $E^k$  induziert, die das Vorzeichen bestimmt, mit dem  $E^k$  in der Kette  $\partial z^{k+1}$  auftritt. Ein anderes orientiertes

\*) Denn wenn eine lineare Selbstabbildung des linearen  $(k+1)$ -dimensionalen Raumes, in dem  $z^{k+1}$  liegt, das eine mit  $E^k$  inzidente  $(k+1)$ -Simplex in das andere überführt und  $E^k$  punktweise festläßt, so hat sie negative Transformationsdeterminante.

Simplex von  $z_r^k$  bezieht von der Orientierung des mit ihm inzidenten Simplexes von  $z^{k+1}$  denselben Koeffizienten — wegen der übereinstimmenden Orientierungen der Simplexe von  $z_r^k$  und derjenigen von  $z^{k+1}$ . Nun ist in (4) das Vorzeichen von  $x^k$  sicher richtig, denn die Orientierung von  $z^{k+1}$  war ja gerade durch die Forderung bestimmt worden, in  $x^k$  die vorgegebene Orientierung zu induzieren. Ebenso ist das Vorzeichen von  $y^k$  in Ordnung; denn auf  $y^k$  wurde die Orientierung von  $x^k$  durch Translation übertragen. Es gelten also sicher Formeln der folgenden Art:

$$\partial y^k = \sum_r \eta_r y_r^{k-1} \quad (2')$$

$$\partial z^{k+1} = x^k - y^k - \sum_r \xi_r z_r^k. \quad (4')$$

Auf dieselbe Weise findet man, daß der Rand einer Wandseite lauten muß

$$\partial z_r^k = x_r^{k-1} - y_r^{k-1} + \dots, \quad (3')$$

worin die Punkte gewisse  $(k-1)$ -dimensionale Wandseiten  $z_i^{k-1}$  bedeuten.

Wir bilden den Rand der rechten Seite von (4'), also den Rand des Randes von  $z^{k+1}$ ; er muß verschwinden. Man erhält für ihn mit Hilfe von (1), (2'), (3')

$$\sum_r x_r^{k-1} - \sum_r \eta_r y_r^{k-1} - \sum_r \xi_r (x_r^{k-1} - y_r^{k-1} + \dots) = 0.$$

Koeffizientenvergleichung ergibt

$$\eta_r = \xi_r = 1,$$

womit die Formeln (2) bis (4) bewiesen sind.

Bildet man ein Prisma  $z^{k+1}$  stetig in einen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  ab und bezeichnet man mit  $X^k$ ,  $Y^k$ ,  $Z^{k+1}$ ,  $X_r^{k-1}$ ,  $Y_r^{k-1}$ ,  $Z_r^k$  die singulären Bilder der Ketten  $x^k$ ,  $y^k$ ,  $z^{k+1}$ ,  $x_r^{k-1}$ ,  $y_r^{k-1}$ ,  $z_r^k$ , so gelten nach § 27 Satz I auch für die singulären Ketten die Verbindungsformeln (1) bis (4), in denen man nur die kleinen Buchstaben durch die großen ersetzen muß. Seien jetzt endlich viele Prismen  $z^{k+1}$ ,  $z^{k+1}$ , ... stetig in  $\mathfrak{K}^n$  abgebildet. Aus den singulären Bildern  $X^k$ ,  $Y^k$ , ... der orientierten Grundsimplexe  $x^k$ ,  $y^k$ , ... von  $z^{k+1}$ ,  $z^{k+1}$ , ... bilden wir mit beliebigen ganzen Zahlen eine singuläre Kette

$$A^k = a X^k + a' X^k + \dots$$

und entsprechend die weiteren Ketten

$$B^k = a Y^k + a' Y^k + \dots,$$

$$C^{k+1} = a Z^{k+1} + a' Z^{k+1} + \dots,$$

$$A^{k-1} = a \sum_r X_r^{k-1} + a' \sum_r X_r^{k-1} + \dots,$$

$$B^{k-1} = a \sum_r Y_r^{k-1} + a' \sum_r Y_r^{k-1} + \dots,$$

$$C^k = a \sum_r Z_r^k + a' \sum_r Z_r^k + \dots.$$

Auf Grund der auf die großen Buchstaben umgeschriebenen Formeln (1) bis (4) gelten dann für diese singulären Ketten die

$$\text{Verbindungsformeln} \left\{ \begin{array}{l} \partial A^k = A^{k-1}, \\ \partial B^k = B^{k-1}, \\ \partial C^k = A^{k-1} - B^{k-1}, \\ \partial C^{k+1} = A^k - B^k - C^k. \end{array} \right. \begin{array}{l} (\text{I}) \\ (\text{II}) \\ (\text{III}) \\ (\text{IV}) \end{array}$$

### § 30. Beweis des Approximationssatzes.

Die Konstruktion einer die singuläre Kette  $A^k$  approximierenden Kette  $\bar{A}^k$  erfolgt mit dem Verfahren der simplizialen Approximation. Die Ecken der singulären  $k$ -Simplexe von  $A^k$  werden durch benachbarte Ecken der simplizialen Zerlegung  $\mathbb{R}^n$  ersetzt, und zwar so, daß die Ecken eines jeden Simplexes von  $A^k$  wieder in Ecken eines nicht notwendig  $k$ -dimensionalen Simplexes von  $\mathbb{R}^n$  übergehen. Das ist nur möglich, wenn die Simplexe von  $A^k$  genügend fein sind. Andernfalls könnten zwei Ecken eines und desselben singulären Simplexes von  $A^k$  in weit voneinander entfernten Simplexen der simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  liegen, und die zu ihnen benachbarten Ecken würden nicht demselben Simplex von  $\mathbb{R}^n$  angehören. Es muß daher dem Verfahren der simplizialen Approximation unter Umständen eine Unterteilung der gegebenen singulären Kette vorangehen, und die Konstruktion verläuft dementsprechend in zwei Schritten:

1. Schritt: Übergang zu einer Unterteilung von  $A^k$  (S. 105—106).

2. Schritt: Simpliziale Approximation dieser Unterteilung (S. 107—110).

Den Fall, daß die zu approximierende singuläre Kette  $A^k$  0-dimensional ist, erledigen wir vorweg, da er sich nicht den späteren Betrachtungen unterordnet. Ist

$$A^0 = a X^0 + 'a' X^0 + \dots,$$

so verbinde man den Punkt  $X^0$  geradlinig — vgl. S. 41 — mit einer Ecke  $Y^0$  eines Simplexes von  $\mathbb{R}^n$ , dem  $X^0$  angehört.  $Y^0$  wird mit demselben Vorzeichen orientiert wie  $X^0$ . Die Verbindungsstrecke kann als orientiertes singuläres 1-Simplex  $Z^1$  mit dem Rand  $X^0 - Y^0$  aufgefaßt werden. Die Kette

$$\bar{A}^0 = a Y^0 + 'a' Y^0 + \dots$$

ist dann eine zu  $A^0$  homologe simpliziale 0-Kette. — Wir setzen nunmehr im folgenden immer  $k > 0$  voraus.

Außerdem darf man annehmen, daß  $\mathbb{R}^n$  endlich ist. Denn eine singuläre Kette  $A^k$  auf einem unendlichen simplizialen Komplexe  $\mathbb{R}^n$  gehört immer einem endlichen Teilkomplex der simplizialen Zerlegung an. Dies ist zunächst für ein einzelnes singuläres Simplex  $X^k$  richtig. Hätte nämlich  $X^k$  mit unendlich vielen Simplexen von  $\mathbb{R}^n$  Punkte gemeinsam, so gäbe es eine Folge von zu  $X^k$  gehörigen Punkten ohne Häufungspunkt. Diese Folge kann man als Bilder einer unendlichen Punktfolge im Urbild  $x^k$

auffassen, die einen Häufungspunkt  $H$  hat. Dann könnte aber die Abbildung  $x^k$  auf  $X^k$  im Punkte  $H$  nicht stetig sein, entgegen der Definition des singulären Simplexes. Da  $A^k$  aus endlich vielen singulären Simplexen besteht, so liegt auch  $A^k$  auf einem endlichen Teilkomplex von  $\mathbb{R}^n$ . Wenn also der Approximationssatz für endliche Komplexe bewiesen ist, so gilt er auch für unendliche.

#### 1. Schritt: Unterteilung der singulären Kette $A^k$ .

##### a) Verbindungsprismen.

Wir betrachten zunächst ein einzelnes orientiertes singuläres Simplex  $X^k$  in  $\mathbb{R}^n$ , das auch ausgeartet sein kann. Als Urbild von  $X^k$  wählen wir das orientierte Grundsimplex  $x^k$  eines Prismas  $\mathfrak{z}^{k+1}$ , das wie im vorigen Paragraphen simplizial zerteilt ist mit  $g$ -fach normalunterteilt Dachsimplex. Man bilde nun das Prisma  $\mathfrak{z}^{k+1}$  so in den Komplex  $\mathbb{R}^n$  stetig ab, daß  $x^k$  auf die vorgeschriebene Art in  $X^k$  übergeht und jede achsenparallele Strecke in einen Punkt, wofür man auch sagen kann, daß man erst das Prisma achsenparallel in sein Grundsimplex  $x^k$  projiziert und dann auf  $X^k$  abbildet. Das Dachsimplex  $y^k$ , vielmehr die im vorigen Paragraphen eingeführte Kette  $y^k$ , die aus den orientierten Teilsimplexen der  $g$ -fachen Normalunterteilung besteht, geht dabei in eine singuläre Kette  $Y^k$  über, die die  $g$ -fache Normalunterteilung von  $X^k$  heißt, und die Kette  $\mathfrak{z}^{k+1}$  in eine singuläre Kette  $Z^{k+1}$ , die wir als die Verbindungslette von  $X^k$  und  $Y^k$  bezeichnen.

$g$ -fache Normalunterteilung und Verbindungslette sind eindeutig durch  $X^k$  bestimmt und hängen nicht ab von der Wahl des Prismas  $\mathfrak{z}^{k+1}$ . Ist nämlich  $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$  ein anderes Prisma, das ebenso unterteilt und orientiert ist wie  $\mathfrak{z}^{k+1}$ , so gibt es eine lineare Abbildung  $T$  von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  auf  $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ , bei der das orientierte Grundsimplex  $x^k$  in das orientierte Grundsimplex  $\bar{x}^k$  übergeht. Da nun entsprechende Punkte von  $x^k$  und  $\bar{x}^k$  denselben Bildpunkt in  $X^k$  haben und jede achsenparallele Strecke von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  bzw.  $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$  in einen Punkt übergeht, so haben je zwei vermöge  $T$  entsprechende Punkte von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  und  $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$  denselben Bildpunkt in  $\mathbb{R}^n$ . Da endlich bei  $T$  die Teilsimplexe von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  in diejenigen von  $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$  mit ihren Orientierungen übergehen, so sind die singulären Ketten  $Z^{k+1}$  und  $\bar{Z}^{k+1}$ , ebenso  $Y^k$  und  $\bar{Y}^k$  einander gleich nach der Gleichheitsdefinition singulärer Simplexe.

Für eine beliebige singuläre Kette  $A^k$  erklären wir die  $g$ -fache Normalunterteilung  $B^k$  (die Verbindungslette  $C^{k+1}$ ) als die Summe der  $g$ -fachen Normalunterteilungen (Verbindungsketten) der einzelnen Simplexe. Ist also

$$A^k = a X^k + 'a' X^k + \dots, \quad (1')$$

und bezeichnet  ${}^{(z)}Y^k$  und  ${}^{(z)}Z^{k+1}$  die  $g$ -fache Normalunterteilung bzw. Verbindungslette von  ${}^{(z)}X^k$ , so ist

$$B^k = a Y^k + 'a' Y^k + \dots, \quad (2')$$

$$C^{k+1} = a Z^{k+1} + 'a' Z^{k+1} \dots, \quad (3')$$

Ist auf der rechten Seite von (1') eines der Simplexe, etwa  $X^k$  ausgeartet, ist also  $X^k = -X^k$ , so ist offenbar auch  $Y^k = -Y^k$  und  $Z^{k+1} = -Z^{k+1}$ , also  $Y^k = 0$  und  $Z^{k+1} = 0$ . Die Normalunterteilung  $B^k$  und die Verbindungsstrecke  $C^{k+1}$  ist also eindeutig durch  $A^k$  bestimmt und hängt nicht davon ab, ob man in (1') ausgeartete Simplexe mitschreibt oder nicht.

### b) Verbindungsformeln.

Bei der Abbildung des Prismas  $\mathfrak{z}^{k+1}$  auf das singuläre Simplex  $X^k$  geht auch jede achsenparallele Strecke einer Wandseite  $\mathfrak{z}_v^k$  in einen Punkt über. Daher bilden sich die auf  $\mathfrak{z}_v^k$  liegenden Ketten  $x_v^{k-1}, y_v^{k-1}, z_v^k$  der Reihe nach ab in die Seite  $X_v^{k-1}$  von  $X^k$ , die  $g$ -fache Normalunterteilung  $Y_v^{k-1}$  von  $X_v^{k-1}$  und die Verbindungsstrecke  $Z_v^k$  von  $X_v^{k-1}$  mit  $Y_v^{k-1}$ . Entsprechendes gilt für die zu den übrigen singulären Simplexen  $'X^k, \dots$  gehörigen Prismen  $'\mathfrak{z}^{k+1}, \dots$ . Nun ist der Rand von  $A^k$  nach Formel (1') von S. 105 und nach Formel (1) von S. 102 die Kette

$$A^{k-1} = a \sum X_v^{k-1} + 'a \sum 'X_v^{k-1} + \dots \quad (4')$$

Die Normalunterteilung von  $A^{k-1}$  ist also die Kette

$$B^{k-1} = a \sum Y_v^{k-1} + 'a \sum 'Y_v^{k-1} + \dots \quad (5')$$

und die Verbindungsstrecke von  $A^{k-1}$  mit  $B^{k-1}$  die Kette

$$C^k = a \sum Z_v^k + 'a \sum 'Z_v^k + \dots, \quad (6')$$

und es gelten die Verbindungsformeln (I) bis (IV) von § 29:

$$\mathcal{R} \mathcal{D} A^k = A^{k-1} \quad (\text{I}')$$

$$\mathcal{R} \mathcal{D} B^k = B^{k-1} \quad (\text{II}')$$

$$\mathcal{R} \mathcal{D} C^k = A^{k-1} - B^{k-1} \quad (\text{III}')$$

$$\mathcal{R} \mathcal{D} C^{k+1} = A^k - B^k - C^k. \quad (\text{IV}')$$

Formel (II') sagt aus: *Der Rand der  $g$ -fachen Normalunterteilung der singulären Kette  $A^k$  ist gleich der  $g$ -fachen Normalunterteilung des Randes.*

Dadurch, daß man  $g$  genügend groß macht, erreicht man, daß die Teilsimplexe von  $y^k, y^k, \dots$  beliebig klein werden, und nach dem Satze von der gleichmäßigen Stetigkeit § 7 werden dann die singulären  $k$ -Simplexe der  $g$ -fachen Normalunterteilung  $B^k$  von  $A^k$  ebenfalls beliebig klein. Genauer: Denkt man sich  $\mathfrak{R}^n$  als geradlinigen Komplex eines genügend hochdimensionalen Zahlenaumes, was man nach § 11 immer tun kann, und nimmt als Entfernung zweier Punkte von  $\mathfrak{R}^n$  die euklidische Entfernung dieses Zahlenaumes, so kann man durch genügend feine Unterteilung von  $A^k$  erreichen, daß die Durchmesser der singulären Simplexe von  $B^k$  beliebig klein werden.

Die Unterteilung der singulären Kette  $A^k$  ist damit erledigt, und wir gehen über zum

### 2. Schritt: Simpliziale Approximation der unterteilten Kette $A^k$ .

#### a) Verbindungsprismen.

Ist  $B^k$  eine singuläre Kette und  $P$  eine Ecke eines singulären Simplexes von  $B^k$ , so verstehen wir unter dem *singulären Simplexstern* mit dem Mittelpunkte  $P$  die Gesamtheit der singulären Simplexe von  $B^k$ , die  $P$  zur Ecke haben. Wir nehmen nun an, daß die Unterteilung  $B^k$  von  $A^k$  so fein ist, daß jeder singuläre Stern von  $B^k$  im Innern von wenigstens einem Sterne der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{R}^n$  liegt. Das ist möglich nach § 7 Satz V; als Umgebung  $U^*(Q | \mathfrak{R}^n)$  eines Punktes  $Q$  wähle man nämlich das Innere eines Simplexsterne von  $\mathfrak{R}^n$ . Es gibt dann ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß die  $\varepsilon$ -Umgebung eines beliebigen Punktes von  $\mathfrak{R}^n$  im Innern eines Sternes von  $\mathfrak{R}^n$  liegt. Man braucht nun die Unterteilung von  $A^k$  nur so weit zu treiben, daß der Durchmesser eines Simplexes von  $B^k < \frac{\varepsilon}{2}$  wird.

Die singulären Ketten  $B^{k-1}$  und  $B^k$ , also die  $g$ -fach unterteilten Ketten  $A^{k-1}$  und  $A^k$  bezeichnen wir, um die Analogie mit dem 1. Schritte hervortreten zu lassen, mit  $A^{k-1}$  und

$$A^k = \alpha \Xi^k + 'a' \Xi^k + \dots,$$

wobei wir wieder dahingestellt sein lassen, ob auf der rechten Seite gleiche oder entgegengesetzte gleiche oder sogar ausgeartete Simplexe vorkommen.  $P_1, P_2, \dots$  seien die sämtlichen Ecken der singulären Simplexe  $\Xi^k, \Xi^k, \dots$ , wobei etwa zusammenfallende Ecken nur einmal aufgeschrieben sind. Jede Ecke  $P_\lambda$  ist Mittelpunkt eines aus  $k$ -Simplexen von  $A^k$  bestehenden singulären Sternes. Die Approximation von  $A^k$  geschieht nun so, daß jeder Ecke  $P_\lambda$  eine „approximierende“ Ecke  $Q_\lambda$  der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{R}^n$  zugeordnet wird, und zwar sei  $Q_\lambda$  so gewählt, daß der Simplexstern von  $\mathfrak{R}^n$  mit dem Mittelpunkte  $Q_\lambda$  den singulären Stern von  $A^k$  mit dem Mittelpunkte  $P_\lambda$  im Innern enthält. Die  $P_\lambda$  approximierende Ecke  $Q_\lambda$  ist im allgemeinen durch  $P_\lambda$  nicht eindeutig bestimmt, da es mehrere Simplexsterne von  $\mathfrak{R}^n$  geben kann, die den singulären Simplexstern mit dem Mittelpunkte  $P_\lambda$  im Innern enthalten. Hat man aber die Ecken  $Q_\lambda$  einmal gewählt, so verläuft die weitere Konstruktion vollkommen eindeutig. Im Übergang von den singulären Ecken  $P_\lambda$  zu den approximierenden simplizialen Ecken  $Q_\lambda$  besteht der wesentliche Schritt der simplizialen Approximation. In Fig. 51 ist als Beispiel eine singuläre 1-Kette (stark ausgezogen) in einen aus geradlinigen gleichseitigen Dreiecken bestehenden Komplex  $\mathfrak{R}^2$  hineingelegt.

Wir betrachten nun zunächst ein einzelnes singuläres Simplex, etwa  $\Xi^k$ . Sind  $P_1, P_2, \dots, P_g$  seine Ecken, so sind die zugeordneten Ecken  $Q_1, Q_2, \dots, Q_g$ , die natürlich nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen (im Gegensatz zu den Ecken  $P_\lambda$ ), die Ecken eines Simplexes der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{R}^n$ . Die Sterne mit den Mittelpunkten  $Q_1, Q_2, \dots, Q_g$  enthalten nämlich alle das singuläre Simplex  $\Xi^k$  im Innern und haben daher einen beliebigen Punkt  $P$  von  $\Xi^k$  als gemein-

samen inneren Punkt.\*))  $P$  gehört einem gewissen Simplexe  $\mathfrak{E}^i$  von  $\mathfrak{K}^n$  an. Ein Stern  $\mathfrak{St}$  von  $\mathfrak{K}^n$ , der  $P$  im Innern enthält, muß  $\mathfrak{E}^i$  enthalten, und  $\mathfrak{E}^i$  kann nicht auf dem Außenrande von  $\mathfrak{St}$  liegen; daher ist der Mittelpunkt

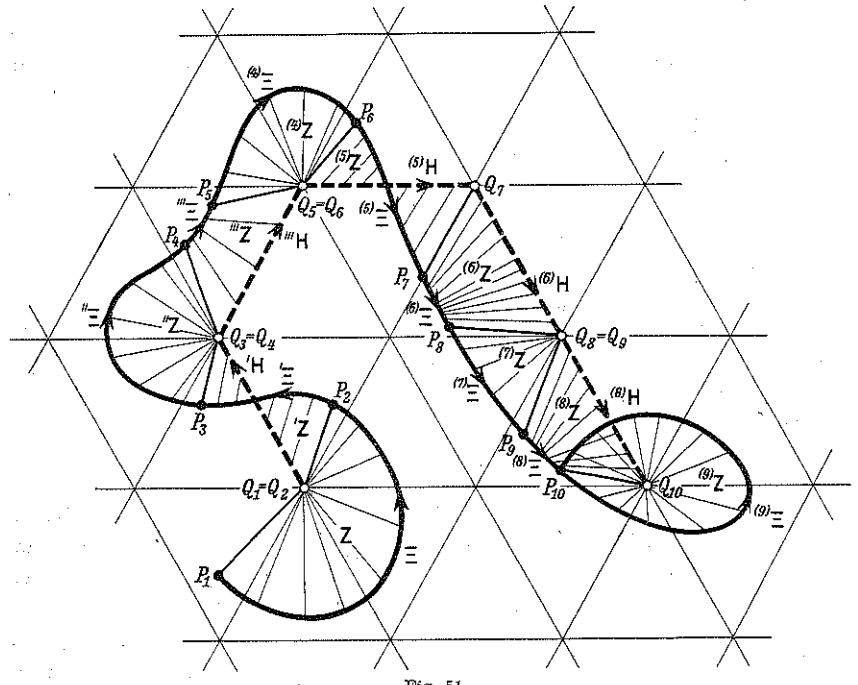


Fig. 51.

von  $\mathfrak{St}$  eine Ecke von  $\mathfrak{E}^i$ .  $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$  sind daher die Ecken einer  $i$ -dimensionalen Seite  $\mathfrak{E}^i$  von  $\mathfrak{E}^i$  oder die von  $\mathfrak{E}^i$  selbst; und da  $\mathfrak{E}^i$  und  $P$  beide dem Simplex  $\mathfrak{E}^i$  angehören, so kann man überdies jeden Punkt von  $\mathfrak{E}^i$  mit  $P$ , also mit jedem Punkte von  $\Xi^k$  durch eine geradlinige Strecke\*\*\*) verbinden.

Als Urbild von  $\Xi^k$  nehmen wir nun wieder das orientierte Grundsimplex  $x^k$  eines  $(k+1)$ -dimensionalen Prismas  $z^{k+1}$  und definieren eine stetige Abbildung von  $z^{k+1}$  in  $\mathfrak{K}^n$  durch die folgenden Festsetzungen:

1.  $x^k$  geht auf die vorgeschriebene Weise in  $\Xi^k$  über;
2.  $y^k$ , das jetzt nicht unterteilt worden ist, wird linear auf  $\mathfrak{E}^i$  abgebildet, und zwar so: Geht eine Ecke  $p_\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, k$ ) des Grundsimplices  $x^k$  in eine singuläre Ecke  $P_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, q$ ) von  $\Xi^k$  über, so soll die entsprechende Ecke  $q_\lambda$  des Dachsimplices  $y^k$  in die die Ecke  $P_\mu$  approximierende Ecke  $Q_\mu$  von  $\mathfrak{E}^i$  übergehen.
3. Eine achsenparallele Strecke  $(pq)$  von  $z^{k+1}$  wird linear abgebildet auf die geradlinige Verbindungsstrecke der Bildpunkte  $P$  und  $Q$  in  $\Xi^k$ .

\*) Es sei daran erinnert, daß ein innerer Punkt eines Simplexsterne einer ist, der nicht auf dem Außenrand liegt.

\*\*) Die Geradlinigkeit wird in bezug auf  $\mathfrak{E}^i$  verstanden — vgl. S. 41.

und  $\mathfrak{E}^i$ ; eine solche Verbindungsstrecke existiert, weil, wie wir sahen, man jeden Punkt von  $\Xi^k$  geradlinig mit jedem von  $\mathfrak{E}^i$  verbinden kann. In Fig. 51 sind die Verbindungsstrecken in  $\mathfrak{K}^n$  geradlinig angedeutet.

Hiermit ist die Abbildung von  $z^{k+1}$  in  $\mathfrak{K}^n$  eindeutig bestimmt; ihre Stetigkeit folgt aus dem Hilfssatze von § 14, S. 56. Das Simplex  $\mathfrak{E}^i$  wird durch die Abbildung zu einem orientierten singulären Simplexe mit dem Urbilde  $y^k$ . Als solches werde es mit  $H^k$  bezeichnet, und es heißt danach die (simpliziale) Approximation von  $\Xi^k$ .

Die auf dem Prisma  $z^{k+1}$  liegende Kette  $z^{k+1}$  geht durch die stetige Abbildung in  $\mathfrak{K}^n$  in eine singuläre Kette  $Z^{k+1}$  über, die die Verbindungsstrecke von  $\Xi^k$  mit seiner Approximation  $H^k$  heißt.

Nun erklären wir für die singuläre Kette

$$A^k = \alpha \Xi^k + \alpha' \Xi^k + \dots \quad (1')$$

die Approximation  $B^k$  (Verbindungsstrecke  $\Gamma^{k+1}$ ) als die Summe der Approximationen (Verbindungsketten) der einzelnen singulären Simplexe, also

$$B^k = \alpha H^k + \alpha' H^k + \dots \quad (2'')$$

$$\Gamma^{k+1} = \alpha Z^{k+1} + \alpha' Z^{k+1} + \dots \quad (3'')$$

Daß Approximation und Verbindungsstrecke nach Auswahl der approximierenden Ecken eindeutig durch  $A^k$  bestimmt sind und nicht davon abhängen, ob man auf der rechten Seite von  $A^k$  ausgeartete Simplexe mitschreibt oder nicht, folgt wie auf S. 106. In Fig. 51 ist die Approximation  $B^1$  stark gestrichelt.

$B^k$  ist eine simpliziale Kette, da ein singuläres Simplex  $(\lambda)H^k$  entweder ein  $k$ -dimensionales Simplex der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^n$  oder ein ausgeartetes singuläres Simplex ist (S. 93, 1. Beispiel). Im letzten Falle ist es gleichbedeutend mit dem Symbol 0.

### b) Verbindungsformeln.

Wenn das Prisma  $z^{k+1}$  gemäß den Bedingungen 1. bis 3. in  $\mathfrak{K}^n$  abgebildet wird, so erfährt dabei jede Wandseite  $z_v^k$  eine Abbildung, die den entsprechenden Bedingungen genügt:

1. Das Grundsimplex  $x_v^{k-1}$  von  $z_v^k$  geht in die Seite  $\Xi_v^{k-1}$  von  $\Xi^k$  über.
2. Bei der linearen Abbildung von  $y^k$  auf das Simplex  $\mathfrak{E}^i$  der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^n$  erfährt auch die Seite  $y_v^{k-1}$  von  $y^k$  eine lineare Abbildung auf ein Simplex  $\mathfrak{E}^i$ , das entweder  $\mathfrak{E}^i$  selbst oder eine Seite von  $\mathfrak{E}^i$  ist. Wenn nun eine Ecke  $p_\lambda$  von  $x_v^{k-1}$  in die Ecke  $P_\mu$  von  $\Xi_v^{k-1}$  übergeht, so geht die entsprechende Ecke  $q_\lambda$  von  $y_v^{k-1}$  in die approximierende Ecke  $Q_\mu$  von  $P_\mu$  über, nach Konstruktion der Abbildung des Prismas  $z^{k+1}$ .

3. Da bei der Abbildung von  $z^{k+1}$  jede achsenparallele Strecke  $(pq)$  linear abgebildet wird auf die Verbindungsstrecke  $(PQ)$  der Bildpunkte, so gilt dies insbesondere für die achsenparallelen Strecken der Wandseite  $z_v^k$ .

Damit ist gezeigt, daß sich die auf  $\mathfrak{z}_v^k$  liegenden Ketten  $x_v^{k-1}, y_v^{k-1}, z_v^k$  der Reihe nach abbilden in die Seite  $\Xi_v^{k-1}$  von  $\Xi_v^k$ , in die Approximation  $H_v^{k-1}$  von  $\Xi_v^{k-1}$  und in die Verbindungskette  $Z_v^k$  von  $\Xi_v^{k-1}$  mit  $H_v^{k-1}$ .

Entsprechendes gilt für die zu den übrigen singulären Simplexen ' $\Xi_v^k, \dots$ ' gehörigen Prismen ' $\mathfrak{z}_v^{k+1}$ '. Nun ist der Rand von  $A^k$  nach Gleichung (1'') von S. 109 und (1) von S. 102

$$A^{k-1} = \alpha \sum \Xi_v^{k-1} + ' \alpha \sum ' \Xi_v^{k-1} + \dots \quad (4'')$$

Die Approximation von  $A^{k-1}$  ist also

$$B^{k-1} = \alpha \sum H_v^{k-1} + ' \alpha \sum ' H_v^{k-1} + \dots, \quad (5'')$$

die Verbindungskette von  $A^{k-1}$  mit  $B^{k-1}$  ist die Kette

$$\Gamma^k = \alpha \sum Z_v^k + ' \alpha \sum ' Z_v^k + \dots, \quad (6'')$$

und es gelten die Verbindungsformeln (I) bis (IV) von § 29:

$$\partial A^k = A^{k-1} \quad (I'')$$

$$\partial B^k = B^{k-1} \quad (II'')$$

$$\partial \Gamma^k = A^{k-1} - B^{k-1} \quad (III'')$$

$$\partial \Gamma^{k+1} = A^k - B^k - \Gamma^k. \quad (IV'')$$

Formel (II'') sagt aus: *Der Rand der Approximation der singulären Kette ist gleich der Approximation des Randes.*

### Zusammenfassung.

Es bleibt noch übrig, die Ergebnisse des ersten und zweiten Schrittes zusammenzufassen. Wir addieren zu den Verbindungsketten  $C^k$  und  $C^{k+1}$  des ersten Schrittes die Verbindungsketten  $\Gamma^k$  und  $\Gamma^{k+1}$  des zweiten Schrittes und erhalten die neuen Verbindungsketten

$$V^k = C^k + \Gamma^k$$

$$V^{k+1} = C^{k+1} + \Gamma^{k+1}.$$

Aus den Verbindungsrelationen (I) bis (IV') und (I'') bis (IV'') folgt nun, wenn man noch bedenkt, daß  $B^k$  in  $A^k$  und  $B^{k-1}$  in  $A^{k-1}$  vorübergehend umbenannt worden ist:

$$\partial A^k = A^{k-1} \quad (I)$$

$$\partial B^k = B^{k-1} \quad (II)$$

$$\partial V^k = A^{k-1} - B^{k-1} \quad (III)$$

$$\partial V^{k+1} = A^k - B^k - V^k. \quad (IV)$$

Die bisherigen Untersuchungen galten für eine beliebige singuläre Kette  $A^k$ . Wir wollen jetzt annehmen, daß  $A^k$  geschlossen, also  $A^{k-1} = 0$  ist. Dann verschwindet auch die Normalunterteilung  $B^{k-1}$  und ihre Approximation  $B^{k-1}$  sowie die Verbindungsketten  $C^k, \Gamma^k$  und damit  $V^k$ . Formel (IV) vereinfacht sich damit zu

$$\partial V^{k+1} = A^k - B^k,$$

in Worten: *Zu jeder geschlossenen singulären Kette gibt es eine homologe simpliziale.*

Wir nehmen weiter an, daß der Rand  $A^{k-1}$  von  $A^k$  simplizial ist. Durch  $g$ -fache Normalunterteilung erhält man aus  $A^{k-1}$  die Kette  $B^{k-1}$  und daraus die simpliziale Approximation  $B^{k-1}$ . Wir behaupten, daß  $B^{k-1} = A^{k-1}$  ist, weil man allgemein durch die *simpliziale Approximation* der  $g$ -fachen Normalunterteilung  $B^i$  einer beliebigen simplizialen Kette  $A^i$  die Kette  $A^i$  zurück erhält.

Die Behauptung ist richtig für  $i = 0$ . Alsdann fällt nämlich die nulldimensionale Kette  $A^0$  mit ihrer  $g$ -fachen Normalunterteilung zusammen, und bei der simplizialen Approximation bleibt jedes der 0-Simplexe von  $A^0$  fest. — Die Behauptung sei bewiesen für  $(i-1)$ -dimensionale Ketten  $A^{i-1}$ , insbesondere also für den Rand eines  $i$ -Simplexes  $E^i$  von  $A^i$ . Bezeichnet  $E_g^i$  die  $g$ -fache Normalunterteilung von  $E^i$ , so erhält man bei simplizialer Approximation von  $E_g^i$  eine Kette  $U^i$ , während  $\partial E_g^i$  nach Voraussetzung des Induktionsschlusses in  $\partial E^i$  übergeht. Weil der Rand der Approximation gleich der Approximation des Randes ist, gilt also

$$\partial U^i = \partial E^i. \quad (1)$$

Ist nun  $e^i$  ein Teilsimplex von  $E_g^i$ , so gehen bei der Approximation die Ecken von  $e^i$  in gewisse Ecken von  $E^i$  über, also  $e^i$  selbst entweder in  $\varepsilon E^i$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) oder in eine Seite von  $E^i$ . Im letzten Falle ist die Approximation von  $e^i$  ausgeartet und liefert keinen Beitrag zur Approximation von  $E^i$ . Die Approximation  $U^i$  kann daher nur ein Vielfaches von  $E^i$  sein, und wegen (1) ist dann sogar  $U^i = E^i$ .

Ist dann

$$A^i = \gamma E^i + ' \gamma' E^i + \dots$$

eine beliebige simpliziale  $i$ -Kette von  $\mathfrak{K}^n$ ,

$$B^i = \gamma E_g^i + ' \gamma' E_g^i + \dots$$

ihre  $g$ -fache Normalunterteilung, so ist deren simpliziale Approximation

$$B^i = \gamma U^i + ' \gamma' U^i + \dots$$

$$= \gamma E^i + ' \gamma' E^i + \dots$$

$$= A^i.$$

Damit ist die Behauptung für  $i$  Dimensionen bewiesen und damit allgemein.

Wir können also in den Formeln (I) bis (IV)  $A^{k-1} = B^{k-1}$  setzen. Dann geht (III) über in

$$\partial V^k = 0,$$

d. h.  $V^k$  ist geschlossen. Überdies liegt  $V^k$  nach Konstruktion\*) auf dem Teilkomplexe  $\mathfrak{A}^{k-1}$ , der von den sämtlichen  $(k-1)$ -Simplexen von  $A^{k-1}$  gebildet wird. Durch simpliziale Approximation von  $V^k$  innerhalb des Komplexes  $\mathfrak{A}^{k-1}$  erhält man nach S. 111 eine homologe simpliziale  $k$ -Kette auf  $\mathfrak{A}^{k-1}$ . Das ist aber die  $k$ -Kette 0, da  $A^{k-1}$  keine  $k$ -Simplexe enthält. Somit ist  $V^k \sim 0$ . Zusammen mit Formel (IV), für die man auch  $A^k - B^k - V^k \sim 0$  schreiben kann, ergibt das gerade  $A^k \sim B^k$ .

Der Beweis des Approximationssatzes ist damit beendet. *Die topologische Invarianz der simplizialen Homologiegruppen ist sichergestellt, und zugleich sind alle Begriffe und Sätze, die auf Homologieeigenschaften beruhen, als topologische Eigenschaften des Komplexes erwiesen.*\*\*) Z. B. sind die Bettischen Zahlen und Torsionskoeffizienten invariant, da sie mit der Homologiegruppe zugleich gegeben sind. Die Zusammenhangszahlen sind invariant, weil sie sich durch die Bettischen Zahlen und die Anzahlen der geraden Torsionskoeffizienten ausdrücken lassen, die Eulersche Charakteristik ist invariant und für alle Zerlegungen eines Komplexes die gleiche, denn sie ist die Wechselsumme der Bettischen Zahlen. Daß die aufgeführten Eigenschaften der simplizialen Zerlegung eines Komplexes sich nicht ändern, wenn man durch gewisse Unter- und Oberteilungen, wie wir sie in § 37 betrachten werden, zu neuen Zerlegungen übergeht, ist leicht zu zeigen. Wir haben derartige Unterteilungen der simplizialen Zerlegung gar nicht einführen müssen, denn wir haben gezeigt, daß je zwei Zerlegungen eines und desselben Komplexes, ob sie sich nun durch eine gemeinsame Unterteilung miteinander in Zusammenhang bringen lassen oder nicht, in den aufgeführten Eigenschaften übereinstimmen.

Aber das gewonnene Ergebnis geht weit über diese Invarianzbeweise hinaus. Die Brücke von einer simplizialen Zerlegung zur andern hätten wir auch mit einfacheren Hilfsmitteln schlagen können.<sup>17</sup> Wir haben aber — und darauf ist besonderer Nachdruck zu legen — die Homologiegruppen topologisch invariant definiert und uns damit ein für allemal von der simplizialen Zerlegung, durch die der Komplex uns konstruktiv gegeben ist, befreit. Wir brauchen hinfällig nicht auf Schritt und Tritt zu approximieren, ein Vorteil, der besonders bei den Abbildungssätzen von Mannigfaltigkeiten die Mühe lohnt, die wir auf die invariante Definition verwendet haben.

\*) Daß in der Summe  $V^k = C^k + \Gamma^k$  die Kette  $C^k$  auf  $\mathfrak{A}^{k-1}$  liegt, ist offenbar; für  $\Gamma^k$  folgt es aus der Überlegung von S. 111.

\*\*) Es sei daran erinnert, daß die  $k$ -te singuläre Homologiegruppe ebenso wie die  $k$ -te simpliziale (S. 65) auch für  $k > n$  (Dimension der simplizialen Zerlegung) definiert und die Übereinstimmung beider bewiesen ist.

### § 31. Deformation und simpliziale Approximation von Abbildungen.

Auch der Satz, dem wir uns jetzt zuwenden, ist ein Approximationssatz; doch handelt es sich dabei nicht um die Approximation singulärer Ketten, sondern stetiger Abbildungen eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen Komplex  $K^m$ . Um den Satz formulieren zu können, müssen wir zwei Begriffe einführen, die in der Topologie eine wichtige Rolle spielen, nämlich den der Deformation einer Abbildung und den der simplizialen Abbildung.

Der Komplex  $\mathbb{R}^n$ , den wir der Einfachheit halber als endlich voraussetzen, sei auf zweifache Weise in  $K^m$  abgebildet vermöge zweier stetiger Abbildungen  $g_0$  und  $g_1$ . Wir sagen, daß  $g_0$  in  $g_1$  homotop deformierbar ist, wenn es eine „stetige“ Schar von Abbildungen zwischen  $g_0$  und  $g_1$  gibt. Darunter verstehen wir folgendes: Es gibt eine Schar von Abbildungen, so daß jedem Wert eines im Intervalle  $0 \leq t \leq 1$  variierenden Parameters  $t$  eine Abbildung  $g_t$  entspricht, insbesondere den Werten  $t = 0$  und  $t = 1$  die vorgegebenen Abbildungen  $g_0$  und  $g_1$ , und es hängt der Bildpunkt  $g_t(P)$  stetig von dem Parameterwerte  $t$  und dem Originalpunkte  $P$  auf  $\mathbb{R}^n$  ab.

Eine gleichwertige Definition der homotopen Deformation ist die folgende: Sei  $\mathbb{R}^n \times t$  das topologische Produkt aus  $\mathbb{R}^n$  und der Einheitsstrecke  $0 \leq t \leq 1$ . Es sei möglich,  $\mathbb{R}^n \times t$  vermöge einer stetigen Abbildung  $f$  in  $K^m$  so abzubilden, daß  $f(P \times 0) = g_0(P)$  und  $f(P \times 1) = g_1(P)$  ist. Dann und nur dann, wenn es eine solche Abbildung  $f$  gibt, ist  $g_0$  in  $g_1$  homotop deformierbar. — Durch die Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times t$  ist nämlich eine Schar von Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$  definiert. Man braucht nur

$$g_t(P) = f(P \times t) \quad (1)$$

zu setzen; umgekehrt ist durch eine stetige Schar  $g_t$  von Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  vermöge der Gleichung (1) eine stetige Abbildung  $f$  von  $\mathbb{R}^n \times t$  definiert.

Die zweite Definition hat den Vorzug, daß die ganze Schar von Abbildungen  $g_t$  durch eine einzige Abbildung  $f$  des topologischen Produktes gegeben wird.  $\mathbb{R}^n \times t$  heißt der Deformationskomplex von  $\mathbb{R}^n$  und  $t$  der Parameter der Deformation.

Es ist zweckmäßig, den Deformationskomplex folgendermaßen in den Zahlenraum hineinzulegen: man legt den endlichen simplizialen Komplex  $\mathbb{R}^n$  mit seiner simplizialen Zerlegung geradlinig in den linearen Raum  $t = 0$  des Zahlenraumes  $\mathbb{R}^{r+1}$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_r, t$ , was nach § 11 für  $r \geq 2n + 1$  immer möglich ist, und unterwirft  $\mathbb{R}^n$  einer Translation, die den linearen Raum  $t = 0$  in den linearen Raum  $t = 1$  überführt. Dabei überstreicht  $\mathbb{R}^n$  gerade den Deformationskomplex  $\mathbb{R}^n \times t$ .

Ist  $g_0$  in  $g_1$  deformierbar, so offenbar auch  $g_1$  in  $g_0$ , und ist  $g_1$  in eine weitere Abbildung  $g_2$  deformierbar, so auch  $g_0$  in  $g_2$ . Hierauf beruht es,

dass man die stetigen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$  in Klassen homotop ineinander deformierbarer, sog. *Abbildungsklassen* zusammenfassen kann.

Wir haben von den Abbildungen  $g_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) nur Eindeutigkeit und Stetigkeit verlangt. Sind die Abbildungen alle sogar topologisch, so redet man von einer *isotopen Deformation* der Abbildung  $g_0$  in  $g_1$ . Es wird dabei nicht verlangt, dass die Abbildung  $f$  des Deformationskomplexes in  $K^m$  topologisch ist. Beispielsweise ist eine kongruente Verschiebung einer Kreisscheibe  $\mathbb{R}^2$  in der Zahlenebene  $K^2$  eine isotope Deformation.

Es kann sein, dass  $K^m$  mit  $\mathbb{R}^n$  zusammenfällt, dass also  $g_t$  eine Selbstabbildung von  $\mathbb{R}^n$  ist. Ist insbesondere  $g_0$  die identische Abbildung, so heißt die stetige Schar der Selbstabbildungen  $g_t$  eine *homotope* (bezw. *isotope*) *Deformation des Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in sich*. Wir haben es im folgenden nur mit homotopen Deformationen zu tun und unterdrücken daher für gewöhnlich das Beiwort *homotop*.

Unter einer *simplizialen Abbildung* eines simplizialen Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen simplizialen Komplex  $K^m$  versteht man eine stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$ , bei der jedes Simplex  $\mathbb{E}^i$  der simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) linear auf ein Simplex  $\Sigma^j$  ( $j \leq i$ ) von  $K^m$  abgebildet wird (S. 41). Weiß man von jeder Ecke von  $\mathbb{R}^n$ , welches ihre Bildecke in  $K^m$  ist, so ist durch diese kombinatorischen Angaben die ganze simpliziale Abbildung schon festgelegt. Die Zuordnung der Ecken hat nur der einen Bedingung zu genügen, dass die Ecken eines Simplexes von  $\mathbb{R}^n$  wieder in die Ecken eines Simplexes von  $K^m$  übergehen. Ein triviales Beispiel einer simplizialen Abbildung erhält man, wenn man alle Ecken von  $\mathbb{R}^n$  in eine einzige Ecke von  $K^m$  abbildet.

Der Satz, den wir nunmehr beweisen wollen, sagt im wesentlichen aus, dass jede stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$  in eine simpliziale Abbildung deformierbar ist, vorausgesetzt, dass die simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  hinreichend fein ist.

Sei  $g_0$  eine stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$ . Durch genügend feine Unterteilung von  $\mathbb{R}^n$  lässt sich erreichen, dass das Bild eines jeden Simplexsternes von  $\mathbb{R}^n$  ganz im Innern eines Simplexsternes von  $K^m$  liegt. Nun wird jeder Ecke  $P_i$  von  $\mathbb{R}^n$  eine Ecke  $\Pi_i$  von  $K^m$  so zugeordnet, dass der Stern mit dem Mittelpunkt  $\Pi_i$  das Bild des Sternes mit dem Mittelpunkt  $P_i$  ganz im Innern enthält. Sind dann etwa  $P_0, P_1, \dots, P_i$  die Ecken eines  $i$ -Simplexes  $\mathbb{E}^i$  von  $\mathbb{R}^n$ , so enthalten die Sterne von  $K^m$  mit den Ecken  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_i$  alle das Bild  $g_0(\mathbb{E}^i)$  im Innern; nicht alle  $\Pi_i$  brauchen hierbei voneinander verschieden zu sein. Daraus folgt, dass  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_i$  ebenfalls die Ecken eines Simplexes von  $K^m$  sind. Ist nämlich  $g_0(P)$  das Bild irgendeines Punktes  $P$  von  $\mathbb{E}^i$  und  $\Sigma$  ein Simplex von  $K^m$ , auf dem der Punkt  $g_0(P)$  liegt, so enthalten die Sterne mit den Mittelpunkten  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_i$  alle  $g_0(P)$  im Innern. Daher sind  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_i$  Ecken von  $\Sigma$  und damit die Ecken eines Simplexes  $\Sigma^j$  von  $K^m$ . Durch die Zuordnung der Ecken  $P_i$  von  $\mathbb{R}^n$  zu den Ecken  $\Pi_i$  von  $K^m$  ist damit eine simpliziale Abbildung  $g_1$  von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$  bestimmt.

Der Bildpunkt  $g_1(P)$  des soeben betrachteten Punktes  $P$  von  $\mathbb{E}^i$  gehört zu  $\Sigma^j$  und damit ebenso wie  $g_0(P)$  zu  $\Sigma$ , lässt sich also mit  $g_0(P)$  durch eine geradlinige Strecke verbinden. Damit ist auch die Deformierbarkeit von  $g_0$  in  $g_1$  gezeigt: man lässt den Punkt  $g_0(P)$  auf der Verbindungsstrecke nach  $g_1(P)$  wandern, unter Umständen „am Ort“. Genauer: man definiert eine stetige Abbildung  $f$  des Deformationskomplexes  $\mathbb{R}^n \times t$  in  $K^m$  durch die Festsetzungen:  $f(P \times 0) = g_0(P)$ ,  $f(P \times 1) = g_1(P)$ , und die Strecke, die  $P$  auf  $\mathbb{R}^n \times t$  durchläuft, wenn  $t$  von 0 bis 1 wächst, soll linear abgebildet werden auf die (unter Umständen aus einem Punkte bestehende) Verbindungsstrecke der Punkte  $g_0(P)$  und  $g_1(P)$ . Die Stetigkeit der Abbildung  $f$  folgt aus dem Hilfssatz von S. 56.

Unser Ergebnis ist der

**Satz I (Deformationsatz):** Jede stetige Abbildung eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen Komplex  $K^m$  lässt sich in eine simpliziale Abbildung (homotop) deformieren, vorausgesetzt, dass  $\mathbb{R}^n$  genügend fein simplizial zerlegt ist. Der Bildpunkt eines Punktes  $P$  von  $\mathbb{R}^n$  verlässt während der Deformation keines der Simplexe von  $K^m$ , denen er zu Anfang der Deformation angehörte, er bewegt sich also nur auf dem Simplex niedriger Dimension von  $K^m$ , auf dem er zu Anfang lag.

Durch eine stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$  erfährt nach Satz II § 27 die  $k$ -te Homologiegruppe von  $\mathbb{R}^n$  eine homomorphe Abbildung in die  $k$ -te Homologiegruppe von  $K^m$ . Wir untersuchen jetzt, welchen Einfluss eine Deformation der stetigen Abbildung auf die homomorphe Abbildung der Homologiegruppen hat.

**Satz II:** Es seien  $g_0$  und  $g_1$  zwei Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^m$ ,  $A^k$  mit dem Rande  $A^{k-1}$  eine singuläre Kette auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $A^k$  mit dem Rande  $A^{k-1}$  und  $B^k$  mit dem Rande  $B^{k-1}$  die Bildketten auf  $K^m$ , in die  $A^k$  und  $A^{k-1}$  durch  $g_0$  und  $g_1$  übergehen. Ist dann  $g_0$  in  $g_1$  deformierbar, so gibt es auf  $K^m$  singuläre Verbindungsketten  $\Gamma^k$  und  $\Gamma^{k+1}$ , die  $A^{k-1}$  die Verbindungsformeln befriedigen:

$$\partial \Gamma^k = A^{k-1} - B^{k-1},$$

$$\partial \Gamma^{k+1} = A^k - B^k - \Gamma^k.$$

$\Gamma^k$  (bezw.  $\Gamma^{k+1}$ ) liegt auf der Punktmenge, die die Bildmenge von  $A^{k-1}$  (bezw.  $A^k$ ) bei der Deformation überstreicht. Ist insbesondere  $A^{k-1} = 0$  (also auch  $A^{k-1}$  und  $B^{k-1} = 0$ ), so ist  $\Gamma^k = 0$  und  $A^k \sim B^k$  (vgl. Fig. 52).

**Beweis:** Wir legen den Deformationskomplex  $\mathbb{R}^n \times t$  wie auf S. 113 in den Zahlenraum  $\mathbb{R}^{r+1}$ . Die Kette  $A^k$  sei durch die Summe

$$A^k = a X^k + 'a' X^k + \dots$$

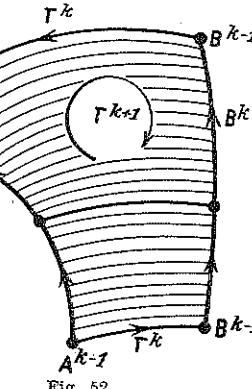


Fig. 52.

gegeben. Ist  $x^k$  ein Urbildsimplex von  $X^k$  und  $\mathfrak{z}^{k+1}$  ein darüber errichtetes Prisma mit der Dachseite  $\mathfrak{y}^k$ , so bilde man  $\mathfrak{z}^{k+1}$  folgendermaßen stetig auf die Punktmenge von  $\mathfrak{R}^n \times t$  ab, die während der Translation (S. 113) die Punkte des singulären Simplexes  $X^k$  überstreichen:  $x^k$  geht auf die vorgeschriebene Weise in das singuläre Simplex  $X^k$  von  $\mathfrak{R}^n \times 0$  über, jede achsenparallele Strecke von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  linear in die bei der Translation vom Bildpunkt ihres Grundpunktes in  $\mathfrak{R}^n \times t$  überstrichene Strecke. Zerlegt man  $\mathfrak{z}^{k+1}$  simplizial und orientiert die Teilsimplexe wie in § 29, so gehen durch die Abbildung von  $\mathfrak{z}^{k+1}$  in  $\mathfrak{R}^n \times t$  die orientierten Simplexe oder Ketten

$$x^k, y^k, z^{k+1}, x_r^{k-1}, y_r^{k-1}, z_r^k$$

in singuläre Ketten

$$X^k, Y^k, Z^{k+1}, X_r^{k-1}, Y_r^{k-1}, Z_r^k$$

auf  $\mathfrak{R}^n \times t$  über. Entsprechendes Verfahren für die übrigen singulären Simplexe von  $A^k$  und Addition liefert die singulären Ketten

$$B^k = aY^k + 'a'Y^k + \dots$$

$$C^{k+1} = aZ^{k+1} + 'a'Z^{k+1} + \dots$$

$$A^{k-1} = a \sum_r X_r^{k-1} + 'a' \sum_r X_r^{k-1} + \dots$$

$$B^{k-1} = a \sum_r Y_r^{k-1} + 'a' \sum_r Y_r^{k-1} + \dots$$

$$C^k = a \sum_r Z_r^k + 'a' \sum_r Z_r^k + \dots,$$

und es gelten die Verbindungsformeln von S. 104.

Die singulären Ketten  $C^{k+1}$  und  $C^k$  liegen ganz auf den Punktmengen, die von den Ketten  $A^k$  bzw.  $A^{k-1}$  bei der Translation auf  $\mathfrak{R}^n \times t$  überstrichen werden. Das ist klar für  $C^{k+1}$ . Bei  $C^k$  ist zu bedenken, daß die von  $A^{k-1}$  überstrichene Punktmenge im allgemeinen nicht die Vereinigungsmenge der Punktmengen ist, die von den einzelnen singulären Simplexen  $X_r^{k-1}, X_r^{k-1}, \dots$  überstrichen werden. Denn es kann sein, daß ein solches Simplex, das formal in der rechten Seite von  $A^{k-1}$  vorkommt, gar nicht zu  $A^{k-1}$  gehört, sei es, weil es ausgeartet ist oder sich gegen andere Simplexe forthebt. Ist nun etwa

$${}^{(z)}X_{\mu}^{k-1} = \pm {}^{(i)}X_r^{k-1}, \quad (2)$$

so braucht man nur zu beweisen, daß dann auch

$${}^{(z)}Y_{\mu}^{k-1} = \pm {}^{(i)}Y_r^{k-1}$$

und

$${}^{(z)}Z_{\mu}^k = \pm {}^{(i)}Z_r^k$$

ist. Dies folgt aber unmittelbar aus der Konstruktion und der Gleichheitsdefinition singulärer Simplexe.

Bei der Abbildung von  $\mathfrak{R}^n \times t$  in  $K^m$  gehen nun die singulären Ketten  $A^k, A^{k-1}, B^k, B^{k-1}, C^k, C^{k+1}$  in die Ketten  $A^k, A^{k-1}, B^k, B^{k-1}, \Gamma^k, \Gamma^{k+1}$  des Satzes über. Die Verbindungsformeln bleiben dabei nach S. 98, Satz I erhalten:

$$\mathcal{R}\partial A^k = A^{k-1} \quad (I)$$

$$\mathcal{R}\partial B^k = B^{k-1} \quad (II)$$

$$\mathcal{R}\partial \Gamma^k = A^{k-1} - B^{k-1} \quad (III)$$

$$\mathcal{R}\partial \Gamma^{k+1} = A^k - B^k - \Gamma^k. \quad (IV)$$

Mit den Formeln (III) und (IV) sind die Verbindungsformeln des Satzes bewiesen. Die Kette  $\Gamma^k$  (bezw.  $\Gamma^{k+1}$ ) liegt überdies auf dem Bilde der Punktmenge, die  $A^{k-1}$  (bezw.  $A^k$ ) bei der Translation auf  $\mathfrak{R}^n \times t$  überstricht. Der Satz II ist damit bewiesen.

Da nach Satz II die Bilder einer geschlossenen singulären Kette  $A^k$  bei den ineinander deformierbaren Abbildungen  $g_0$  und  $g_1$  einander homolog auf  $K^m$  sind, so folgt

**Satz III:** *Die homomorphe Abbildung der  $k$ -ten Homologiegruppe von  $\mathfrak{R}^n$  in die  $k$ -te Homologiegruppe von  $K^m$ , die durch eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{R}^n$  in  $K^m$  nach Satz II von § 27 gegeben ist, bleibt bei homotoper Deformation der Abbildung ungeändert; sie ist somit eine Invariante der Abbildungsklasse.*

Dies gilt insbesondere, wenn es sich um eine Deformation eines Komplexes  $\mathfrak{R}^n$  in sich handelt. Dann fällt  $\mathfrak{R}^n$  mit  $K^m$  zusammen, und die Abbildung  $g_0$  ist die identische. Da die durch  $g_0$  bewirkte Selbstabbildung der Homologiegruppen von  $\mathfrak{R}^n$  die Identität ist, so folgt

**Satz IV:** *Die homomorphe Selbstabbildung der Homologiegruppen eines Komplexes  $\mathfrak{R}^n$ , die durch eine Deformation von  $\mathfrak{R}^n$  in sich bewirkt wird, ist die Identität.*

In dem Satz III haben wir eine notwendige, wenn auch keineswegs hinreichende Bedingung dafür gefunden, daß zwei Abbildungen von  $\mathfrak{R}^n$  in  $K^m$  zur selben Abbildungsklasse gehören. Sei z. B.  $\mathfrak{R}^n = K^m$  die  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$ , also etwa der Rand eines  $(n+1)$ -Simplexes  $\mathfrak{E}^{n+1} = (P_0 P_1 \dots P_n P_{n+1})$ , und die Selbstabbildung  $g_1$  von  $\mathbb{S}^n$  werde bewirkt durch die lineare Abbildung von  $\mathfrak{E}^{n+1}$ , bei der die Ecken  $P_2, P_3, \dots, P_{n+1}$  einzeln fest bleiben, während sich  $P_0$  und  $P_1$  vertauschen. Wir fragen: Gehört  $g_1$  zur Abbildungsklasse der Identität, d. h. kann man  $g_1$  homotop in die identische Abbildung deformieren? Die Kette  $\mathcal{R}\partial E^{n+1}$ ) auf  $\mathbb{S}^n$  bildet eine Homologiebasis für die  $n$ -te Homologiegruppe von  $\mathbb{S}^n$ , die die freie zyklische Gruppe ist. Nun geht bei der Abbildung das orientierte Simplex  $E^{n+1} = +(P_0 P_1 \dots P_{n+1})$  in  $-E^{n+1} = -(P_1 P_0 P_2 \dots P_{n+1})$ , also  $\mathcal{R}\partial E^{n+1}$

\*) Wie immer bezeichnet  $E^{n+1}$  das mit einer bestimmten Orientierung versehene Simplex  $\mathfrak{E}^{n+1}$ .

in  $-\mathcal{R} \partial E^{n+1}$  über. Der durch  $g_1$  bewirkte Homomorphismus der  $n$ -ten Homologiegruppe ist also nicht der identische. Somit kann  $g_1$  nach Satz IV nicht zur Abbildungsklasse der Identität gehören.

**Aufgabe:** Für welche Dimensionen gehört die Diametralpunktvertauschung der Einheits- $n$ -Sphäre des  $(n+1)$ -dimensionalen Zahlenraumes zur Abbildungsklasse der Identität? [Man setze die Diametralpunktvertauschung aus Spiegelungen zusammen.]

Als eine weitere Anwendung des Satzes II bestimmen wir die Homologiegruppen des projektiven Raumes  $\mathbb{P}^n$ .

Wir stellen zunächst fest, für welche Dimensionen  $\mathbb{P}^n$  orientierbar ist, und erinnern uns zu dem Zweck daran, daß  $\mathbb{P}^n$  durch Diametralpunktidentifizierung aus der  $n$ -Sphäre  $S^n$  entsteht. Wir orientieren eine zentrisch symmetrische simpliziale Zerlegung der  $n$ -Sphäre, z. B. die oktaedrale (§ 14), kohärent. Da die Diametralpunktvertauschung das Produkt von  $n+1$  Spiegelungen ist, bei denen sich jedesmal die Orientierung von  $S^n$  umkehrt, so bleibt die Orientierung von  $S^n$  bei Diametralpunktvertauschung erhalten, oder sie kehrt sich um, je nachdem  $n$  ungerade oder gerade ist. Für ungerades  $n$  bilden sich zwei orientierte  $n$ -Simplexe von  $S^n$  in dasselbe orientierte  $n$ -Simplex von  $\mathbb{P}^n$  ab, und man erhält durch diese Orientierungen eine kohärente Orientierung von  $\mathbb{P}^n$ ; für gerades  $n$  dagegen kann  $\mathbb{P}^n$  unmöglich orientierbar sein, denn eine kohärente Orientierung würde sich in eine kohärente Orientierung von  $S^n$  „durchdrücken“, während doch beim Übergang von  $S^n$  zu  $\mathbb{P}^n$  je zwei orientierte  $n$ -Simplexe von  $S^n$  sich in entgegengesetzte  $n$ -Simplexe von  $\mathbb{P}^n$  abbilden. (Man mache sich die Verhältnisse für die Dimensionen  $n=2$  und  $n=3$  klar.) Daraus ist  $\mathbb{P}^n$  orientierbar für ungerades und nichtorientierbar für gerades  $n$ .

Wir führen jetzt, wie in § 14, im  $\mathbb{P}^n$  projektive Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  ein und bezeichnen mit  $\mathbb{P}^k$  den projektiven Teilraum mit den Gleichungen

$$x_{k+2} = 0, \dots, x_{n+1} = 0. \quad (\mathbb{P}^k)$$

In der Folge der projektiven Räume  $\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1}, \dots, \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^0$  ist also jeder im vorangehenden enthalten.

Um eine Homologiebasis der Dimension  $k$  ( $0 < k < n$ ) zu ermitteln, gehen wir von einer geschlossenen singulären  $k$ -Kette  $U^k$  aus. Sollte  $U^k$  durch den Punkt  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  hindurchgehen, so drängen wir sie durch eine simpliziale Approximation in einer simplizialen Teilung des  $\mathbb{P}^n$ , die diesen Punkt zum mittleren Punkt eines  $n$ -Simplexes hat, von diesem Punkt ab. Wir entfernen aus dem  $\mathbb{P}^n$  sodann die inneren Punkte einer kleinen,  $U^k$  nicht treffenden Kugel um den Punkt  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ , wodurch  $\mathbb{P}^n$  zu einer berandeten Pseudomannigfaltigkeit wird, und deformieren diese in den projektiven Raum  $\mathbb{P}^{n-1}$  durch eine Schar von Transformationen

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n, x'_{n+1} = tx_{n+1},$$

bei der  $t$  von 1 bis 0 läuft.  $U^k$  geht dabei in eine homologe Kette  $'U^k$  über (Satz II). Ist  $k < n-1$ , so wiederholt man das gleiche Verfahren in

$\mathbb{P}^{n-1}$  und drängt  $'U^k$  in  $\mathbb{P}^{n-2}$  hinein. Auf diese Weise gelangt man schließlich zu einer Kette  $V^k \sim U^k$ , die in  $\mathbb{P}^k$  liegt. Ist nun  $k$  gerade, also  $\mathbb{P}^k$  nichtorientierbar, so sind alle geschlossenen  $k$ -Ketten von  $\mathbb{P}^k$  homolog 0 auf  $\mathbb{P}^k$ , d. h. für gerades  $k$  besteht die  $k$ -te Homologiegruppe von  $\mathbb{P}^n$  aus dem Nullelement allein. Ist  $k$  ungerade, so gibt es auf  $\mathbb{P}^k$  eine geschlossene  $k$ -Kette  $P^k$ , die durch kohärente Orientierung von  $\mathbb{P}^k$  entsteht, so daß jede andere geschlossene  $k$ -Kette  $V^k$  auf  $\mathbb{P}^k$  homolog einem Vielfachen von  $P^k$  ist. Für ungerades  $k$  ist also die  $k$ -te Homologiegruppe von  $\mathbb{P}^n$  zyklisch und  $P^k$  bildet eine Homologiebasis. Genauer hat sie die Ordnung 2. Denn  $\mathbb{P}^{k+1}$  ist eine nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit und hat somit genau einen Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  vom Werte 2 (§ 24). Daher ist  $2P^k \sim 0$  in  $\mathbb{P}^{k+1}$ .  $P^k$  selbst ist sicher nicht schon nullhomolog in  $\mathbb{P}^{k+1}$ , aber auch nicht in  $\mathbb{P}^n$ . Wäre nämlich  $P^k$  Rand einer Kette  $U^{k+1}$  von  $\mathbb{P}^n$ , so könnte man  $U^{k+1}$  durch das gleiche Verdrängungsverfahren, das eben auf  $U^k$  angewendet wurde, in den Teilraum  $\mathbb{P}^{k+1}$  drängen, wobei  $P^k$  punktweise fest bleibt.  $P^k$  wäre also auch Rand einer Kette  $V^{k+1}$  von  $\mathbb{P}^{k+1}$ , was nicht der Fall ist. Das Ergebnis ist:

*Die Homologiegruppen ungerader Dimension des projektiven Raumes  $\mathbb{P}^n$  haben die Ordnung 2, diejenigen gerader Dimension bestehen aus dem Nullelement allein; ausgenommen ist nur die 0-te Homologiegruppe für jeden Wert von  $n$  und die  $n$ -te für ungerades  $n$ , diese sind freie zyklische Gruppen.*

Als Homologiebasen in den ungeraden Dimensionen kann man die kohärent orientierten projektiven Teilräume  $P^1, P^3, P^5, \dots$  benutzen.<sup>18</sup>

## Fünftes Kapitel.

### Eigenschaften im Punkte.

In den Homologiegruppen haben wir zufolge des Invarianzbeweises des vorigen Kapitels die ersten topologischen Invarianten eines Komplexes gewonnen. Die Homologiegruppen geben uns aber nur eine grobe Einteilung der Komplexe. Daß Komplexe mit gleichen Homologiegruppen nicht homöomorph zu sein brauchen, zeigt das Beispiel einer Strecke (1-Simplex) und einer Kreisscheibe (2-Simplex). Die Homologiegruppen beider Komplexe stimmen überein; es ist nämlich die nullte Homologiegruppe die freie Gruppe von einer Erzeugenden, während alle übrigen aus dem Nullelementen allein bestehen (S. 65 und 68). Trotzdem lassen sich die beiden Komplexe nicht topologisch aufeinander abbilden, wie im § 1 gezeigt wurde.

Die Homologiegruppen sind Invarianten „im Großen“, die erst berechnet werden können, wenn der ganze Komplex bekannt ist. Der Unterschied zwischen Strecke und Kreisscheibe dagegen tritt schon in jeder noch so kleinen Umgebung eines Punktes dieser Komplexe hervor. Schon diese Umgebungen lassen sich nicht topologisch aufeinander abbilden. Wir stellen in diesem Kapitel Invarianten „im Kleinen“ auf, die wir auch als Eigenschaften des Komplexes in einem Punkte bezeichnen und die schon feststehen, wenn man nur eine beliebig kleine Umgebung des betrifftenden Punktes kennt. Die wichtigsten Invarianten im Kleinen sind die „Homologiegruppen in einem Punkte“. Mit ihrer Hilfe wird die Invarianz der bisher nur für simpliziale Zerlegungen erklärten Dimension, ferner die des Randes, der Pseudomannigfaltigkeit, der Orientierbarkeit usw. bewiesen.<sup>19</sup>

Die Betrachtungen gelten für unendliche Komplexe ebenso wie für endliche.

### § 32. Homologiegruppen eines Komplexes in einem Punkte.

$\mathfrak{K}^n$  sei ein zusammenhängender simplizialer Komplex der Dimension  $n > 0$  und  $P$  ein Punkt auf  $\mathfrak{K}^n$ . Zieht man von  $P$  aus einen geradlinigen Strahl in einem  $i$ -Simplex der simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^n$ , dem der Punkt  $P$  angehört, so verläßt dieser Strahl das Simplex in einem Punkte  $Q$ . Die Gesamtheit aller Strecken  $(PQ)$ , die man von  $P$  aus ziehen kann, erfüllt gerade den Teilkomplex  $\Omega$  aller Simplexe von  $\mathfrak{K}^n$ , denen  $P$  angehört.  $\Omega$  heißt die *simpliziale Umgebung* von  $P$  in  $\mathfrak{K}^n$ ;  $\Omega$  ist eine Umgebung von  $P$  in  $\mathfrak{K}^n$  auf Grund von Bedingung ( $k_4$ ) in § 10. Die Menge der Endpunkte  $Q$  aller Strecken  $(PQ)$  dagegen macht den sogenannten *Umgebungskomplex*  $\mathfrak{A}$  von  $P$  in  $\mathfrak{K}^n$  aus;  $\mathfrak{A}$  ist also keine Umgebung von  $P$ , sondern besteht aus der Gesamtheit der Simplexe von  $\Omega$ , die  $P$  nicht enthalten. Ist  $P$  insbesondere Ecke der simplizialen Zerlegung, so ist  $\Omega$  der Simplexstern mit dem Mittelpunkte  $P$  und  $\mathfrak{A}$  sein Außenrand. Ist  $P$  nicht Ecke, so kann man immer eine andere simpliziale Zerlegung angeben, in der  $P$  Ecke ist; man braucht nur den Umgebungskomplex  $\mathfrak{A}$  von  $P$  aus zu projizieren.

Wir verstehen nun unter der  $k$ -ten Homologiegruppe von  $\mathfrak{K}^n$  im Punkte  $P$  die  $k$ -te Homologiegruppe des Umgebungskomplexes  $\mathfrak{A}$  von  $P$ . Die Homologiegruppen von  $\mathfrak{K}^n$  in  $P$  sind also mit Hilfe einer bestimmten simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^n$  definiert. Wir werden aber zeigen, daß sie in Wirklichkeit von der simplizialen Zerlegung unabhängig, also topologische Invarianten von  $\mathfrak{K}^n$  sind.<sup>20</sup>

1. Beispiel:  $P$  sei ein mittlerer Punkt eines  $n$ -Simplexes  $\mathfrak{E}^n$  von  $\mathfrak{K}^n$  ( $n > 1$ ). Der Umgebungskomplex  $\mathfrak{A}$  wird von dem Rand von  $\mathfrak{E}^n$  gebildet, ist also eine  $(n-1)$ -Sphäre. Die Homologiegruppen der Dimension 1 bis  $n-2$  von  $\mathfrak{K}^n$  in  $P$  bestehen also aus dem Nullelement, die der Dimension 0 und  $n-1$  sind freiezyklische Gruppen, nach 68.

2. Beispiel:  $P$  sei mittlerer Punkt eines  $(n-1)$ -Simplexes  $\mathfrak{E}^{n-1}$  von  $\mathfrak{K}^n$ , das mit  $k$   $n$ -Simplexen  $\mathfrak{E}_1^n, \mathfrak{E}_2^n, \dots, \mathfrak{E}_k^n$  inzident ist (Fig. 53). Ist  $n > 1$  und sind  $B_1, B_2, \dots, B_k$  die Ecken von  $\mathfrak{E}_1^n, \mathfrak{E}_2^n, \dots, \mathfrak{E}_k^n$ , die der gemeinsamen Seite  $\mathfrak{E}^{n-1}$  gegenüber liegen, so besteht der Umgebungskomplex  $\mathfrak{A}^{n-1}$  von  $P$  aus  $k$  Simplexsternen  $\mathfrak{St}_1^{n-1}, \mathfrak{St}_2^{n-1}, \dots, \mathfrak{St}_k^{n-1}$  mit den Mittelpunkten  $B_1, B_2, \dots, B_k$ , deren gemeinsamer Außenrand der Rand  $\mathfrak{S}^{n-2}$  von  $\mathfrak{E}^{n-1}$  ist.— Wir wollen die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe in  $P$  berechnen. Zu dem Zweck orientieren wir die  $(n-1)$ -Simplexe von  $\mathfrak{St}_\mu^{n-1}$  kohärent, und zwar so, daß die entstehende  $(n-1)$ -Kette  $\mathfrak{St}_\mu^{n-1}$  zusammen mit dem fest orientierten Simplexe  $\mathfrak{E}^{n-1}$  eine geschlossene Kette bildet.\*). Das ist möglich, da  $\mathfrak{St}_\mu^{n-1}$  zusammen mit  $\mathfrak{E}^{n-1}$  den Rand des Simplexes  $\mathfrak{E}_\mu^n$  bildet. Es ist dann

$$\mathcal{R} \mathfrak{D} \mathfrak{St}_\mu^{n-1} = - \mathcal{R} \mathfrak{D} \mathfrak{E}^{n-1}. \quad (1)$$

Die  $k-1$  geschlossenen  $(n-1)$ -Ketten

$$\mathfrak{St}_1^{n-1} - \mathfrak{St}_k^{n-1}, \mathfrak{St}_2^{n-1} - \mathfrak{St}_k^{n-1}, \dots, \mathfrak{St}_{k-1}^{n-1} - \mathfrak{St}_k^{n-1} \quad (2)$$

sind homolog unabhängig auf  $\mathfrak{A}^{n-1}$ . Denn aus

$$\sum_{v=1}^{k-1} a_v (\mathfrak{St}_v^{n-1} - \mathfrak{St}_k^{n-1}) \sim 0$$

folgt

$$\sum_{v=1}^{k-1} a_v \mathfrak{St}_v^{n-1} - \left( \sum_{v=1}^{k-1} a_v \right) \mathfrak{St}_k^{n-1} \sim 0.$$

Das Homologiezeichen können wir durch das Gleichheitszeichen ersetzen, da in dem Komplex  $\mathfrak{A}^{n-1}$ , auf dem diese Homologie gilt, keine  $n$ -Simplexe vorkommen (S. 66). Daher ist  $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$ , denn

\*.) Wir erinnern daran, daß wir den Übergang von nichtorientierten zu orientierten Gebilden durch den von deutschen zu lateinischen Buchstaben bezeichnen.

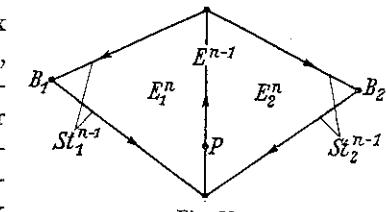


Fig. 53.

keine zwei der Ketten  $St_\mu$  und  $St_\nu$  haben für  $\mu \neq \nu$  ein gemeinsames  $(k-1)$ -Simplex.

Anderseits ist jede geschlossene  $(n-1)$ -Kette  $U^{n-1}$  auf  $\mathfrak{A}^{n-1}$  eine lineare Kombination der Ketten  $St_\mu^{n-1}$ . Denn wenn ein  $(n-1)$ -Simplex von  $St_\mu^{n-1}$  in  $U^{n-1}$  mit der Vielfachheit  $b_\mu$  vorkommt, so müssen wegen der Geschlossenheit von  $U^{n-1}$  alle  $(n-1)$ -Simplexe von  $St_\mu^{n-1}$  mit der Vielfachheit  $b_\mu$  darin auftreten; somit ist

$$U^{n-1} = b_1 St_1^{n-1} + b_2 St_2^{n-1} + \cdots + b_k St_k^{n-1}.$$

Wegen (1) ist  $\mathcal{R} \partial U^{n-1}$  nur dann  $= 0$ , wenn  $\sum_{\mu=1}^k b_\mu$  verschwindet. Dann kann man aber  $U^{n-1}$  auf die Form bringen

$$U^{n-1} = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu (St_\nu^{n-1} - St_k^{n-1}).$$

Daher stellen die  $(n-1)$ -Ketten (2) eine Homologiebasis der Dimension  $n-1$  dar. Die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe von  $\mathfrak{A}^{n-1}$  ist also für  $n > 1$  die freie abelsche Gruppe von  $k-1$  Erzeugenden.

Ist aber  $n = 1$ , also  $P$  die gemeinsame Ecke von  $k$  1-Simplexen, so besteht  $\mathfrak{A}^0$  aus  $k$  Punkten und die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe von  $\mathfrak{A}^0$  ist die freie abelsche Gruppe von  $k$  Erzeugenden.

Um die Unabhängigkeit der Homologiegruppen in  $P$  von der benutzten simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  zu beweisen, betrachten wir zwei Simplexsterne  $\Omega$  und  $\Omega'$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit demselben Mittelpunkt  $P$ . Wir verlangen von diesen Simplexsternen nur, daß sie Umgebungen von  $P$  in  $\mathbb{R}^n$  sind, aber nicht, daß es eine simpliziale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  gibt, in der  $\Omega$  bzw.  $\Omega'$  simpliziale Umgebung von  $P$  ist. Daß der Außenrand  $\mathfrak{A}$  von  $\Omega$  dem Außenrande  $\mathfrak{A}'$  von  $\Omega'$  homöomorph ist, können wir nicht beweisen. Die Homöomorphie von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  würde offenbar bedeuten, daß es eine stetige Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}'$  und eine stetige Abbildung  $\psi$  von  $\mathfrak{A}'$  in  $\mathfrak{A}$  so gibt, daß die Selbstabbildung  $\psi\varphi$  (erst  $\varphi$ , dann  $\psi$  ausüben!) von  $\mathfrak{A}$  und ebenso die Selbstabbildung  $\varphi\psi$  von  $\mathfrak{A}'$  die Identität ist. Dagegen werden wir beweisen:

**Satz I:** Es gibt eine stetige Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}'$  und eine stetige Abbildung  $\psi$  von  $\mathfrak{A}'$  in  $\mathfrak{A}$  derart, daß die Selbstabbildungen  $\psi\varphi$  von  $\mathfrak{A}$  und  $\varphi\psi$  von  $\mathfrak{A}'$  beide in die Identität deformierbar sind. Beweis S. 123.

Hieraus folgt

**Satz II:**  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  haben dieselben Homologiegruppen.

**Beweis:** Die  $k$ -te Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$  von  $\mathfrak{A}$  erfährt nach S. 98 bei der Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}'$  eine homomorphe Abbildung  $\Phi$  in die  $k$ -te Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$  von  $\mathfrak{A}'$ , und ebenso wird durch die Abbildung  $\psi$

eine homomorphe Abbildung  $\Psi$  von  $\mathfrak{H}^k$  in  $\mathfrak{H}^k$  bewirkt. Da nun die Selbstabbildung  $\psi\varphi$  von  $\mathfrak{A}$  in die Identität deformierbar ist, so ist die zugehörige homomorphe Selbstabbildung  $\Psi\Phi$  der Gruppe  $\mathfrak{H}^k$  die Identität (§ 31, Satz IV). Aus demselben Grunde ist die homomorphe Selbstabbildung  $\Phi\Psi$  die Identität. Das bedeutet aber, daß die homomorphen Abbildungen  $\Phi$  und  $\Psi$  eindeutig sind und daß  $\Phi$  die reziproke Abbildung von  $\Psi$  ist.  $\mathfrak{H}^k$  und  $\mathfrak{H}^k$  sind also isomorph.

Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  insbesondere die Umgebungskomplexe von  $P$  in zwei verschiedenen simplizialen Zerlegungen von  $\mathbb{R}^n$ , so folgt aus Satz II:

**Satz III:** Die Homologiegruppen in  $P$  sind unabhängig von der benutzten simplizialen Zerlegung.

Zugleich ergibt sich, daß man zur Bestimmung der Homologiegruppen in  $P$  nicht von einer simplizialen Zerlegung von ganz  $\mathbb{R}^n$  auszugehen braucht, sondern daß es genügt, einen Simplexstern  $\Omega$  zu kennen, der eine Umgebung von  $P$  ist und dessen Mittelpunkt mit  $P$  zusammenfällt. Die Homologiegruppen in  $P$  sind dann die Homologiegruppen des Außenrandes  $\mathfrak{A}$  von  $\Omega$  und daher schon durch eine beliebig kleine Umgebung von  $P$  bestimmt.

Wir tragen jetzt den Beweis des Satzes I nach. Zunächst einige Vorbemerkungen.  $\Omega$  besteht aus der Gesamtheit der geradlinigen Verbindungsstrecken  $(PQ)$  von  $P$  nach den Punkten  $Q$  von  $\mathfrak{A}$ . Trägt man auf jeder solchen Strecke  $(PQ)$  einen bestimmten Bruchteil, etwa  $\frac{1}{k}$ -tel, von  $P$  aus ab, so erhält man in der Gesamtheit der Strecken  $(PR) = \frac{1}{k}(PQ)$  einen neuen Simplexstern  $\Omega_1$  mit dem Außenrand  $\mathfrak{A}_1$ .  $\Omega_1$  entsteht also aus  $\Omega$  durch „ähnliche Verkleinerung“ und ist daher homöomorph zu  $\Omega$ . Jede beliebige Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathbb{R}^n)$  von  $P$  enthält ähnliche Verkleinerungen von  $\Omega$ . Denn der Durchschnitt von  $\mathfrak{U}(P|\mathbb{R}^n)$  mit  $\Omega$  ist nach S. 22 eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\Omega)$ , und in ihr liegt eine ähnliche Verkleinerung von  $\Omega$ . Anderseits ist jede ähnliche Verkleinerung  $\Omega_1$  von  $\Omega$  eine Umgebung von  $P$  in  $\Omega$  und daher nach Satz VII von § 7 auch eine Umgebung von  $P$  in  $\mathbb{R}^n$ . Die Gesamtheit der Strecken  $(RQ)$  bildet eine „Zone“, die wir mit  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$  bezeichnen (Fig. 54). Diese Zone auf  $\mathfrak{A}$  (bzw.  $\mathfrak{A}_1$ ) „projizieren“, soll heißen, jede Strecke  $(RQ)$  in den Endpunkt  $Q$  (bzw.  $R$ ) abbilden.

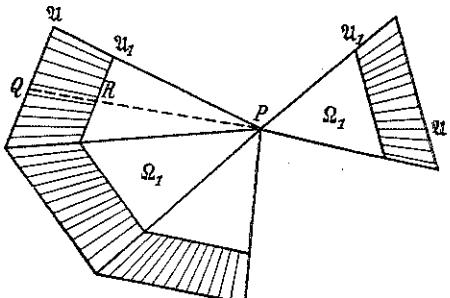


Fig. 54.

Ebenso kann man natürlich für  $\Omega'$  ähnliche Verkleinerung, Zone und Projektion der Zone definieren, wobei zu beachten ist, daß eine geradlinige Strecke in  $\Omega'$  im allgemeinen keine geradlinige Strecke in  $\Omega$  ist.

Wir betrachten nun eine Reihe von sechs ineinander geschachtelten Simplexsternen

$$\Omega_1, \Omega'_1, \Omega_2, \Omega'_2, \Omega_3, \Omega'_3. \quad (3)$$

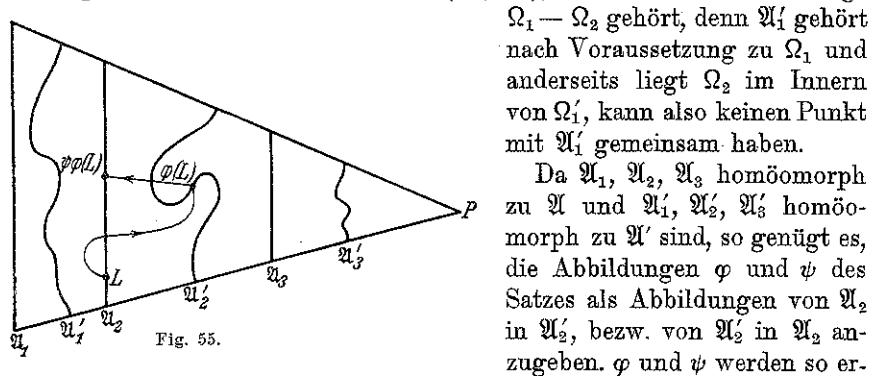
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  sind ähnliche Verkleinerungen von  $\Omega$  und  $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$  ähnliche Verkleinerungen von  $\Omega'$ , und jeder Stern der Reihe (3) liegt ganz im Innern des vorangehenden. Man kann diese Sterne der Reihe nach konstruieren, indem man  $\Omega_1 = \Omega$  setzt und als  $\Omega'_1$  eine ähnliche Verkleinerung von  $\Omega'$  nimmt, die ganz im Innern von  $\Omega_1$  liegt. Dann konstruiert man  $\Omega_2$  auf dieselbe Weise und so fort. Die Außenränder der Sterne (3) mögen heißen

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}'_2, \mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}'_3. \quad (4)$$

Sie geben Anlaß zu den vier Zonen

$$(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2), (\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2), (\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3), (\mathfrak{U}'_2, \mathfrak{U}_3),$$

in denen der Reihe nach die vier Außenränder  $\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}'_2, \mathfrak{U}_3$  liegen. Z. B. gehört  $\mathfrak{U}'_1$  deshalb zur Zone  $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ , weil  $\mathfrak{U}'_1$  zur Punktmenge  $\Omega_1 - \Omega_2$  gehört, denn  $\mathfrak{U}'_1$  gehört nach Voraussetzung zu  $\Omega_1$  und anderseits liegt  $\Omega_2$  im Innern von  $\Omega'_1$ , kann also keinen Punkt mit  $\mathfrak{U}'_1$  gemeinsam haben.



klärt: Man projiziert die Zone  $(\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2)$  auf  $\mathfrak{U}'_2$ . Dabei erfährt zugleich  $\mathfrak{U}_2$ , das ja dieser Zone angehört, eine stetige Abbildung  $\varphi$  in  $\mathfrak{U}'_2$ . Projiziert man dagegen die Zone  $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3)$  auf  $\mathfrak{U}_2$ , so erfährt dabei  $\mathfrak{U}_2$  eine stetige Abbildung  $\psi$  in  $\mathfrak{U}_2$  (Fig. 55).

Bezeichnet  $g_0$  die identische Selbstabbildung von  $\mathfrak{U}_2$ ,  $g_1$  die Selbstabbildung  $\psi \varphi$ , so ist die Behauptung, daß  $g_0$  in  $g_1$  deformierbar ist, gleichbedeutend mit der folgenden: Man kann das topologische Produkt  $\mathfrak{U}_2 \times t$  von  $\mathfrak{U}_2$  mit der Einheitsstrecke ( $0 \leq t \leq 1$ ) vermöge einer stetigen Abbildung  $f$  so in  $\mathfrak{U}_2$  abbilden, daß für jeden Punkt  $L$  von  $\mathfrak{U}_2$   $f(L \times 0) = g_0(L) = L$  und  $f(L \times 1) = g_1(L)$  ist. — Zur Konstruktion von  $f$  zerlegen wir  $\mathfrak{U}_2 \times t$  in zwei Teile  $\mathfrak{U}_2 \times r$  und  $\mathfrak{U}_2 \times s$ , wobei  $r$  die Halbstrecke  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  und  $s$  die Halbstrecke  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  bezeichnet. Diese beiden Teile bilden wir folgendermaßen ab: Für jeden Punkt  $L$  von  $\mathfrak{U}_2$  wird die Halbstrecke  $L \times r$  linear auf die geradlinige Verbindungsstrecke von  $L = g_0(L)$  mit  $\varphi(L)$  abgebildet, also auf den Projektionsstrahl, den  $L$  bei der Projektion der Zone  $(\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2)$  auf  $\mathfrak{U}'_2$  beschreibt. Dagegen soll die

Halbstrecke  $L \times s$  linear auf die geradlinige Verbindungsstrecke von  $\varphi(L)$  mit  $\psi \varphi(L) = g_1(L)$  abgebildet werden, also auf den Projektionsstrahl, den  $\varphi(L)$  bei der Projektion der Zone  $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3)$  auf  $\mathfrak{U}_3$  beschreibt. Mit der Abbildung der beiden Teile ist auch eine Abbildung  $\bar{f}$  von ganz  $\mathfrak{U}_2 \times t$  gegeben, die stetig ist nach dem Hilfssatz von S. 56. Nun gehört das Bild von  $\mathfrak{U}_2 \times r$  zur Zone  $(\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2)$ , das Bild von  $\mathfrak{U}_2 \times s$  zu  $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3)$ , das Bild  $\bar{f}(\mathfrak{U}_2 \times t)$  also sicher zu  $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_3)$ . Wenn man also die Zonen  $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$  und  $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3)$  beide gleichzeitig auf  $\mathfrak{U}_2$  projiziert, so wird dadurch die Punktmenge  $\bar{f}(\mathfrak{U}_2 \times t)$  ebenfalls auf  $\mathfrak{U}_2$  gedrängt. Da nun die Punkte  $f(L \times 0) = g_0(L) = L$  und  $\bar{f}(L \times 1) = \psi \varphi(L) = g_1(L)$  schon auf  $\mathfrak{U}_2$  liegen, so bleiben sie bei dieser Projektion ungeändert. Die Abbildung  $\bar{f}$ , gefolgt von dieser Projektion, ist also eine (nach Satz IV von § 6) stetige Abbildung  $f(\mathfrak{U}_2 \times t)$ , wie wir sie suchen. Damit ist die Deformierbarkeit von  $\psi \varphi$  in die Identität bewiesen, und entsprechend folgt die Deformierbarkeit von  $\varphi \psi$  in die Identität.

Ein anderer Ausdruck für die Invarianz der Homologiegruppen in einem Punkt ist der folgende

**Satz IV:** Sind zwei Komplexe  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  in der Umgebung der Punkte  $P$  von  $\mathfrak{K}$  und  $P'$  von  $\mathfrak{K}'$  homöomorph, d. h. gibt es Umgebungen  $\omega$  und  $\omega'$  von  $P$  und  $P'$ , die sich topologisch so aufeinander abbilden lassen, daß  $P$  und  $P'$  einander entsprechen, so stimmen die Homologiegruppen von  $\mathfrak{K}$  in  $P$  mit denen von  $\mathfrak{K}'$  in  $P'$  überein.

**Beweis:** Man wähle auf  $\omega$  einen Simplexstern  $\Omega$  mit dem Mittelpunkte  $P$ , so daß  $\Omega$  Umgebung von  $P$  ist. Bei der topologischen Abbildung von  $\omega$  auf  $\omega'$  geht  $\Omega$  in einen Simplexstern  $\Omega'$  mit dem Mittelpunkt  $P'$  über. Da bei topologischen Abbildungen Umgebungen in Umgebungen übergehen, so ist  $\Omega'$  Umgebung von  $P'$ . Die Homologiegruppen in  $P$  bzw. in  $P'$  sind die Homologiegruppen der homöomorphen Außenränder von  $\Omega$  und  $\Omega'$ , sie sind also isomorph.

**Aufgaben:** 1. Welches sind die Homologiegruppen in einem Punkte des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes?

2. Es ist unmöglich, ein Gebiet eines Zahlenraumes topologisch auf ein Gebiet eines höherdimensionalen Zahlenraumes abzubilden. Unter einem Gebiet wird eine beliebige offene Teilmenge verstanden.

3. Ist  $\mathbb{E}^k$  ( $k < n$ ) ein topologisches  $k$ -Simplex im  $\mathbb{R}^n$ , so gibt es in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes  $P$  von  $\mathbb{E}^k$  Punkte, die nicht zu  $\mathbb{E}^k$  gehören.

### § 33. Invarianz der Dimension.

Eine Anzahl der bisher eingeführten Begriffe, z. B. Dimension, Pseudomannigfaltigkeit, Orientierbarkeit, sind nur mit Hilfe einer bestimmten simplizialen Zerlegung eines Komplexes definiert. Es sind also zunächst nicht Eigenschaften des Komplexes, sondern der simplizialen Zerlegung. Es wäre denkbar, daß von zwei simplizialen Zerlegungen ein und des selben Komplexes die eine dreidimensional, die andere vierdimensional, die eine orien-

tierbar, die andere nichtorientierbar, die eine berandet, die andere unberandet ist. Wir haben jetzt die Mittel an der Hand, zu zeigen, daß etwas Derartiges nicht eintreten kann, sondern daß alle möglichen simplizialen Zerlegungen eines Komplexes zugleich  $n$ -dimensional oder orientierbar oder berandet sind. Mit der Unabhängigkeit dieser Begriffe von der simplizialen Zerlegung ist dann auch ihre topologische Invarianz sichergestellt, d. h. ihre Invarianz gegenüber topologischen Abbildungen. Wenn z. B. die Komplexe  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  homöomorph sind, und  $\mathfrak{K}_1$  ist  $n$ -dimensional, so auch  $\mathfrak{K}_2$ . Denn eine  $n$ -dimensionale simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{K}_1$  geht bei der topologischen Abbildung in eine ebenfalls  $n$ -dimensionale Zerlegung von  $\mathfrak{K}_2$  über.

Wir beweisen der Reihe nach die Invarianz der Begriffe: Dimension, reiner Komplex, Rand, geschlossene Pseudomanigfaltigkeit, Orientierbarkeit, berandete Pseudomanigfaltigkeit. Die Beweise werden durchweg so geführt, daß eine von jeder simplizialen Zerlegung unabhängige Charakterisierung des betreffenden Begriffes angegeben wird. Dabei spielen die Homologiegruppen in einem Punkt, die wir als topologisch invariant erkannt haben, eine entscheidende Rolle.

Wir beginnen mit der Invarianz der Dimension. — Die 0-dimensionalen Komplexe haben wir schon früher ohne Bezugnahme auf eine simpliziale Zerlegung invariant charakterisiert als solche, die aus lauter isolierten Punkten bestehen. — In einem  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  ( $n > 0$ ) gibt es wenigstens ein  $n$ -Simplex  $\mathfrak{E}^n$ , aber keines höherer Dimension. Im Mittelpunkt von  $\mathfrak{E}^n$  ist die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe nach dem 1. Beispiel von § 32 vom Nullelement verschieden (nämlich die freie abelsche Gruppe von einer, bzw. für  $n = 1$  von zwei Erzeugenden), während die Homologiegruppen von höherer als  $(n-1)$ -ter Dimension in jedem Punkt von  $\mathfrak{K}^n$  aus dem Nullelement allein bestehen, da der Umgebungskomplex höchstens  $(n-1)$ -dimensionale Simplexe enthält. Daraus ergibt sich die folgende invariante Charakterisierung der Dimension:

**Satz I:** *Die Dimension  $n$  eines nicht aus lauter isolierten Punkten bestehenden Komplexes  $\mathfrak{K}$  ist die kleinste Zahl von der Eigenschaft, daß die Homologiegruppen der Dimensionen  $n, n+1, \dots$  in jedem Punkte von  $\mathfrak{K}$  aus dem Nullelement allein bestehen.*

Insbesondere können zwei homogene Komplexe verschiedener Dimension nicht homöomorph sein. Dies folgt übrigens unmittelbar aus dem Satz IV von § 32; aus ihm ergibt sich

**Satz II:** *In einem homogenen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  stimmen die Homologiegruppen in jedem Punkte mit denen der  $(n-1)$ -Sphäre überein. Denn jeder Punkt  $P$  von  $\mathfrak{K}^n$  besitzt als Umgebung einen Simplexstern, dessen Außenrand der  $(n-1)$ -Sphäre homöomorph ist.*

Von der Versuchung, den Satz von der topologischen Invarianz der Dimension für eine triviale Tatsache der Anschauung zu halten, kommt man zurück, wenn man bemerkt, daß die Invarianz nur gegenüber topologischen Abbildungen statt hat, nicht aber gegenüber Abbildungen, die nur eineindeutig, aber nicht stetig, noch

gegenüber solchen, die nur stetig, aber nicht eineindeutig sind. Eine Strecke z. B. läßt sich eindeutig auf die Fläche eines Dreiecks abbilden, weil beide Punktmenge die gleiche Mächtigkeit haben; sie läßt sich ebenso stetig auf das Dreieck abbilden, wie die Peano-Kurve zeigt, die durch jeden Punkt des Dreiecks hindurchgeht, aber mehrfache Punkte hat.<sup>21</sup>

### § 34. Invarianz der Reinheit eines Komplexes.

Sei  $\mathfrak{K}^n$  ein beliebiger, nicht notwendig reiner Komplex mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung.  $\mathfrak{C}^i$  sei die Menge aller  $i$ -Simplexe von  $\mathfrak{K}^n$ , die nicht Seiten von  $(i+1)$ -Simplex sind;  $\mathfrak{C}^i$  kann auch leer sein.  $\mathfrak{C}^i$  läßt sich unabhängig von einer simplizialen Zerlegung folgendermaßen charakterisieren:  $\mathfrak{C}^0$  besteht aus allen isolierten Punkten von  $\mathfrak{K}^n$ ; für  $i > 0$  ist  $\mathfrak{C}^i$  die abgeschlossene Hülle  $'\mathfrak{C}^i'$  derjenigen Punkte  $P$  von  $\mathfrak{K}^n$ , die die folgenden beiden Eigenschaften haben:

1. Die  $(i-1)$ -te Homologiegruppe in  $P$  ist für  $i = 1$  die freie abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden und für  $i > 1$  die freie zyklische Gruppe.

2. Es gibt eine Umgebung von  $P$ , deren Punkte ebenfalls die Eigenschaft 1. haben.

Es ist klar, daß  $\mathfrak{C}^i$  in  $'\mathfrak{C}^i'$  enthalten ist. Denn alle mittleren Punkte der  $i$ -Simplexe von  $\mathfrak{C}^i$  haben die Eigenschaften 1. und 2. und gehören also zu  $'\mathfrak{C}^i'$ . Wegen der Abgeschlossenheit von  $'\mathfrak{C}^i'$  gehören auch die Randpunkte der  $i$ -Simplexe von  $\mathfrak{C}^i$  zu  $'\mathfrak{C}^i'$ . — Hat umgekehrt ein Punkt  $P$  die Eigenschaften 1. und 2., so sei  $\mathfrak{E}^j$  ein Simplex höchster Dimension, auf dem  $P$  liegt. Wegen 1. kann  $j$  nicht kleiner als  $i$  sein. Wäre nun  $j > i$ , so gäbe es in jeder Umgebung von  $P$  mittlere Punkte von  $\mathfrak{E}^j$ , in denen die  $(i-1)$ -te Homologiegruppe für  $i = 1$  die freie zyklische und für  $i > 1$  das Nullelement wäre, im Widerspruch zur Eigenschaft 2. Das Simplex  $\mathfrak{E}^j$  höchster Dimension, auf dem  $P$  liegt, ist also ein  $i$ -Simplex und gehört daher zu  $\mathfrak{C}^i$ . Wegen der Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{C}^i$  gehört dann die abgeschlossene Hülle aller Punkte  $P$ , d. h.  $'\mathfrak{C}^i'$  zu  $\mathfrak{C}^i$ , somit ist  $'\mathfrak{C}^i'$  auch in  $\mathfrak{C}^i$  enthalten, also  $'\mathfrak{C}^i' = \mathfrak{C}^i$ .

Sind daher  $\mathfrak{K}_1^n$  und  $\mathfrak{K}_2^n$  zwei verschiedene simpliziale Zerlegungen des selben Komplexes  $\mathfrak{K}^n$ , und  $\mathfrak{C}_1^i$  bzw.  $\mathfrak{C}_2^i$  die in  $\mathfrak{K}_1^n$  bzw.  $\mathfrak{K}_2^n$  gebildeten Teilkomplexe aller  $i$ -Simplexe, die nicht Seiten von  $(i+1)$ -Simplex sind, so sind  $\mathfrak{C}_1^i$  und  $\mathfrak{C}_2^i$  beide dieselbe Punktmenge  $'\mathfrak{C}^i'$ .

*Ein reiner  $n$ -dimensionaler Komplex ist ein solcher, für den die Teilmengen  $'\mathfrak{C}^0$  bis  $'\mathfrak{C}^{n-1}$  leer sind; er ist dadurch invariant charakterisiert.*

### § 35. Invarianz des Randes.

Sei  $\mathfrak{K}^n$  ( $n > 1$ ) ein reiner Komplex mit bestimmter simplizialer Zerlegung und  $\mathfrak{L}_v^{n-1}$  ( $v = 1, 3, 4, 5, \dots$ ) die Menge derjenigen  $(n-1)$ -Simplexe, die mit genau  $v$   $n$ -Simplexen inzident sind.

Wir wollen  $\mathfrak{L}_v^{n-1}$  topologisch invariant charakterisieren. In einem mittleren Punkte eines  $(n-1)$ -Simplexes von  $\mathfrak{L}_v^{n-1}$  ist (§ 32, 2. Beispiel) die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe die freie abelsche Gruppe von  $v-1$  Er-

zeugenden. Bezeichnet  $\mathfrak{L}'_r$  die abgeschlossene Hülle aller Punkte  $P$ , in denen die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe die freie abelsche Gruppe von  $(\nu-1)$  Erzeugenden ist, so gehört demnach  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  zu  $\mathfrak{L}'_r$ .  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  und  $\mathfrak{L}'_r$  stimmen nun zwar im allgemeinen nicht überein, aber wir können zeigen, daß  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  topologisch invariant durch  $\mathfrak{L}'_r$  bestimmt ist.\* —  $\mathfrak{L}'_r$  ist ein Teilkomplex der simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  (oder leer). Ist nämlich in  $P$  die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe die freie abelsche Gruppe von  $(\nu-1)$  Erzeugenden, so auch in allen mittleren Punkten des Simplexes  $\mathfrak{E}$  kleinster Dimension, auf dem  $P$  liegt. Denn alle diese Punkte haben denselben Umgebungskomplex, und daher sind die Homologiegruppen in ihnen die gleichen. Zu  $\mathfrak{L}'_r$  gehören daher alle mittleren Punkte von  $\mathfrak{E}$  und wegen der Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{L}'_r$  auch die Randpunkte. Mit  $P$  gehört also das Simplex kleinster Dimension, auf dem  $P$  liegt, zu  $\mathfrak{L}'_r$ .  $\mathfrak{L}'_r$  ist höchstens  $(n-1)$ -dimensional. Denn in den mittleren Punkten eines  $n$ -Simplexes von  $\mathbb{R}^n$  ist die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe, die freie abelsche Gruppe von einer und nicht von  $\nu-1$  Erzeugenden, denn der Wert  $\nu=2$  wurde ausgeschlossen.

Gibt es in  $\mathfrak{L}'_r$  ein  $(n-1)$ -Simplex  $\mathfrak{E}^{n-1}$ , so sind mit ihm genau  $\nu$   $n$ -Simplexe von  $\mathbb{R}^n$  inzident. Denn nur dann ist die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe in einem mittleren Punkt von  $\mathfrak{E}^{n-1}$  die freie abelsche Gruppe von  $\nu-1$  Erzeugenden (2. Beispiel von § 32). Daher gehört  $\mathfrak{E}^{n-1}$  zu  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$ .  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  besteht somit aus der Gesamtheit der  $(n-1)$ -Simplexe von  $\mathfrak{L}'_r$ . Nach § 34 ist dieser Teilkomplex von  $\mathfrak{L}'_r$  aber topologisch invariant durch  $\mathfrak{L}'_r$  bestimmt. Da  $\mathfrak{L}'_r$  topologisch invariant durch den gegebenen Komplex bestimmt ist, so ist damit auch  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  topologisch invariant mit  $\mathbb{R}^n$  verknüpft. — Für  $n=1$  besteht  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  aus der Gesamtheit der Punkte von  $\mathbb{R}^1$ , in denen die 0-te Homologiegruppe die freie abelsche Gruppe von  $\nu$  Erzeugenden ist.

Unter dem Rand eines reinen  $n$ -dimensionalen Komplexes haben wir nun die Gesamtheit der  $(n-1)$ -Simplexe verstanden, die mit einer ungeraden Anzahl von  $n$ -Simplexen inzident sind. Der Rand eines reinen Komplexes ist hiernach topologisch invariant als Vereinigungsmenge der Teilkomplexe  $\mathfrak{L}_1^{n-1}, \mathfrak{L}_3^{n-1}, \mathfrak{L}_5^{n-1}, \dots$  definiert. Damit ist insbesondere die topologische Invarianz des Randes eines Simplexes, eines  $n$ -dimensionalen Elementes und eines konvexen Bereiches sichergestellt.

**Aufgabe:** Man weise nach, daß Kreisring und Möbiusband nichthomöomorph sind.

### § 36. Invarianz der Pseudomannigfaltigkeit und der Orientierbarkeit

Die Eigenschaft ( $PM_1$ ) einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit, ein endlicher reiner Komplex zu sein, ist bereits als topologisch invariant erkannt (S. 47 und § 35). Die Eigenschaft ( $PM_2$ ) kann man folgendermaßen invariant fassen: Die invarianten Teilkomplexe  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$  derjenigen  $(n-1)$ -Simplexe, die mit genau  $\nu \neq 2$   $n$ -Simplexen inzident

\*) Daß  $\mathfrak{L}'_r$  im allgemeinen größer ist als  $\mathfrak{L}_r^{n-1}$ , zeigt folgendes Beispiel:  $\mathbb{R}^n$  bestehe aus den Oberflächen zweier Tetraeder, die eine gemeinsame Ecke haben;  $\mathfrak{L}_3$  wird dann von der gemeinsamen Ecke gebildet,  $\mathfrak{L}_3$  ist leer.

sind, sind alle leer. Die Verbindbarkeitsbedingung ( $PM_3$ ) haben wir S. 89 als gleichbedeutend damit erkannt, daß die  $n$ -te Zusammenhangszahl  $q^n = 1$  ist, und diese ist S. 112 als invariant nachgewiesen worden.

Die Orientierbarkeit einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit drückt sich darin aus, daß die  $n$ -te Bettische Zahl  $= 1$  ist (S. 88); deren Invarianz wurde S. 112 nachgewiesen.

Hat man eine orientierbare geschlossene Pseudomannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$  auf zwei verschiedene Weisen simplizial zerlegt und kohärent orientiert, so kann man die beiden orientierten Zerlegungen als zwei singuläre geschlossene  $n$ -Ketten  $B_1^n$  und  $B_2^n$  auffassen. Da die  $n$ -te Homologiegruppe die freie zyklische Gruppe ist und da die Homologieklassen von  $B_1^n$  und  $B_2^n$  beide die  $n$ -te Homologiegruppe erzeugen, so ist  $B_1^n \sim \pm B_2^n$ . Gilt das Zeichen  $+$ , so sagen wir, daß die beiden simplizialen Zerlegungen gleich orientiert sind.

Man kann die Orientierung von  $\mathbb{R}^n$  auch ohne Bezugnahme auf eine besondere simpliziale Zerlegung definieren, indem man unter  $B_1^n$  eine ganz beliebige singuläre geschlossene  $n$ -Kette versteht mit der Eigenschaft, daß jede geschlossene  $n$ -Kette einem Vielfachen von  $B_1^n$  homolog ist. Eine solche  $n$ -Kette heiße eine orientierende  $n$ -Kette auf  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $B_2^n$  eine andere orientierende  $n$ -Kette, so bestimmen  $B_1^n$  und  $B_2^n$  gleiche oder entgegengesetzte Orientierungen auf  $\mathbb{R}^n$ , je nachdem  $B_1^n \sim \pm B_2^n$  oder  $\sim -B_2^n$  ist.

Wird eine orientierbare und durch eine Kette  $B^n$  orientierte Pseudomannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$  topologisch auf eine andere durch die Kette  $B^n$  orientierte Pseudomannigfaltigkeit  $K^n$  (die auch mit  $\mathbb{R}^n$  zusammenfallen kann) abgebildet, so geht hierbei  $B^n$  in eine orientierende Kette ' $B^n$ ' von  $K^n$  über. Daher ist ' $B^n \sim \pm B^n$ '. Man spricht von einer Abbildung mit *Erhaltung oder Umkehrung der Orientierung*, je nachdem das positive oder negative Vorzeichen gilt. — Die S. 117 betrachtete „Spiegelung“ der  $n$ -Sphäre z.B. kehrt die Orientierung um.

Die berandeten Pseudomannigfaltigkeiten lassen sich mit Hilfe des Begriffes der *Verdoppelung* leicht auf die geschlossenen zurückführen. Die Verdoppelung ist für einen berandeten reinen Komplex  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 0$ ) folgendermaßen erklärt: Man nimmt ein zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorphes Exemplar ' $\mathbb{R}^n$ ' und identifiziert die Punkte des Randes von ' $\mathbb{R}^n$ ' mit den Punkten des Randes von ' $\mathbb{R}^n$ ', die ihnen vermöge einer topologischen Beziehung entsprechen. Z. B. erhält man die Verdoppelung einer Kreisscheibe, indem man eine zweite Kreisscheibe mit ihrem Rand an den Rand der ersten heftet; so entsteht eine Kugelfläche.

Danach kann man die berandeten Pseudomannigfaltigkeiten folgendermaßen topologisch invariant charakterisieren: Eine berandete Pseudomannigfaltigkeit ist ein berandeter reiner Komplex, dessen Verdoppelung eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit ist. Die berandete Pseudomannigfaltigkeit ist dann und nur dann orientierbar, wenn die Verdoppelung es ist. Der Beweis, der rein kombinatorisch vorgeht, kann dem Leser überlassen bleiben.

## Sechstes Kapitel.

### Flächentopologie.

In zwei Dimensionen läßt sich das Hauptproblem der Topologie, das Homöomorphieproblem, mit Methoden, die der Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen nicht fähig sind, lösen. Die Flächentopologie begründen wir daher zu einem erheblichen Teile unabhängig von den bisherigen, für beliebige Dimensionen gültigen Ergebnissen. Wir gehen nicht von einem simplizialen Komplexe, sondern von Polygonen aus, die wir durch Identifizieren der Seiten zu geschlossenen Polyederflächen zusammensetzen.

#### § 37. Geschlossene Flächen.

Ein topologisches *Polygon* ist eine Kreisscheibe der Zahlenebene, deren Umfang durch  $r (\geq 2)$  Punkte, die Ecken des Polygons, in  $r$  Segmente, seine Seiten, eingeteilt ist. Ebenso ist jedes topologische Bild dieser Kreisscheibe ein Polygon, auf das die Bezeichnungen Ecken und Seiten sich übertragen.

Für  $r \geq 3$  läßt jedes Polygon sich als geradlinig begrenztes konvexes Flächenstück der Zahlenebene darstellen.

Es seien nun in der Zahlenebene  $\alpha^2 (\geq 1)$  punktfremde Polygone gegeben. Gewisse Seiten der Polygone seien aufeinander topologisch abgebildet, wobei die Randpunkte der einen Seite notwendig in die der anderen Seite übergehen (vgl. 1. Beispiel von § 6). Die Menge  $\bar{M}$  der Polygone, in denen Seiten derartig aufeinander abgebildet sind, heißt ein *Polygonsystem*.

Wir befassen uns fürs erste nur mit solchen Polygonsystemen, in denen die Gesamtzahl der Seiten gerade ist und jede Seite mit genau einer anderen durch eine topologische Abbildung gepaart ist.

Punkte des Polygonsystems  $\bar{M}$ , die aufeinander abgebildet werden, sollen für äquivalent gelten in dem Sinne, in dem wir früher die Äquivalenz von Punkten in einem Umgebungsraume definiert haben (§ 8). Wir unterscheiden also in  $\bar{M}$  folgende Klassen äquivalenter Punkte: ein mittlerer Punkt eines Polygons ist nur zu sich selbst äquivalent; zu einem mittleren Punkt einer Polygonseite gibt es genau einen äquivalenten Punkt; zu einem Eckpunkte kann es einen oder mehrere oder auch keinen äquivalenten Punkt geben.

Die Paarung der Polygonseiten kann beliebig vorgenommen werden, nur hat sie der einen Bedingung zu genügen, daß die Polygone sich nicht in zwei Klassen so teilen lassen, daß die Seiten jeder Klasse nur unter sich gepaart werden (*Bedingung des Zusammenhangs*).

Die Punktmenge  $\bar{M}$ , die durch Identifizieren äquivalenter Punkte aus  $\bar{M}$  hervorgeht und also ebenso wie  $\bar{M}$  ein Umgebungsraum ist, heißt eine *geschlossene Fläche* oder eine geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Das Beiwort *geschlossen* soll besagen, daß die Fläche erstens sich aus endlich vielen Polygonen aufbauen läßt, also sozusagen keine unendlich fernen Punkte hat, und daß sie zweitens keine freien Kanten besitzt, also unberandet ist.

Welche von den Polygonecken sich zu einer Klasse äquivalenter zusammenschließen und einen einzigen Flächenpunkt ausmachen, ist durch die Zuordnung der Polygonseiten schon bestimmt. Es mögen  $\alpha^0$  verschiedene Klassen äquivalenter Polygonecken im Polygonsysteme vorhanden sein, die Polygonecken mögen sich also in  $\alpha^0$  verschiedene Punkte auf der Fläche abbilden. — Wir nennen diese  $\alpha^0$  Punkte *Polyederecken*; sie sind von den Polygonecken, aus denen sie durch Identifizieren entstanden sind, wohl zu unterscheiden. Die Bilder von Polygonseiten mögen ebenso (Polyeder-)Kanten, die Bilder von Polygonecken (Polyeder-)Flächenstücke heißen. Ihre Anzahl sei  $\alpha^1$  bzw.  $\alpha^2$ . Die Polyederkanten und die Flächenstücke sind stetige, aber im allgemeinen nicht topologische Bilder der Polygonseiten und Polygone. Es kann nämlich sein, daß die beiden Randpunkte einer Polygonseite durch die Seitenuordnung äquivalent werden, sich also in dieselbe Polyederecke abbilden. Die Polyederkante weist dann eine Selbstberührung auf und ist ein topologischer Kreis auf der Fläche. Ebenso können die Flächenstücke Selbstberührungen aufweisen; sie treten längs einer oder mehrerer Polyederkanten oder nur in Ecken auf und sind z. B. dann immer vorhanden, wenn zum Aufbau der Polyederfläche ein einziges Polygon verwendet wird. Ein Beispiel hierfür ist das aus einem einzigen Viereck bestehende Polygonsystem, das die Ringfläche überdeckt (§ 1).

Wenn wir es hinfert mit einer Fläche zu tun haben, deren Punkte in bestimmter Weise in Flächenstücke, Kanten und Ecken eingeteilt sind, so sprechen wir von einer *Polyederfläche* oder von einer polygonal zerlegten Fläche; wenn wir dagegen nicht an eine solche besondere Einteilung denken und die Fläche als Umgebungsraum betrachten, von einer Fläche schlechthin. Die Begriffe Polyederfläche und Fläche schlechthin verhalten sich also ebenso zueinander, wie die Begriffe simplizialer Komplex und Komplex schlechthin (§ 10). Beispielsweise sind Würfel und Dodekaeder verschiedene Polyederflächen, die beide derselben Fläche, der Kugelfläche, homöomorph sind.

Im ganzen haben wir also drei Begriffe auseinanderzuhalten: das Polygonsystem  $\bar{M}$ , das aus einzelnen getrennt liegenden Polygonen besteht und in dem gewisse Punkte als äquivalent erklärt sind; die Polyederfläche  $\bar{M}$ , die aus  $\bar{M}$  durch Identifizieren äquivalenter Punkte hervorgeht, für die aber die Aufteilung der Flächenpunkte auf die einzelnen Flächenstücke, Kanten und Ecken noch wesentlich ist; die durch das Polygonsystem ge-

gebene geschlossene Fläche, in der von einer solchen Aufteilung abgesehen wird.

Wir geben noch ein weniger naheliegendes Beispiel einer Polyederfläche, deren polygonale Zerlegung sich nicht wie Würfel oder Dodekaeder ebenflächig in den euklidischen Raum legen läßt. Das Polygonsystem besteht aus zwei Vierecken  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$ ; äquivalente Seiten sind in der Fig. 56

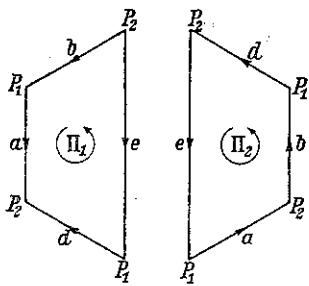


Fig. 56.

mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet; ebenso sind die Polygonecken, die durch Identifizieren äquivalenter Seiten in eine Polyederfläche zusammenfallen, gleich bezeichnet. Die Art der Zuordnung der Polygonseiten ist durch Pfeile angegeben: Pfeilspitze soll immer auf Pfeilspitze fallen. Es ist  $\alpha^0 = 2$ ,  $\alpha^1 = 4$ ,  $\alpha^2 = 2$ . Es wird sich herausstellen, daß die durch das Polygonsystem bestimmte Fläche die nichtorientierbare Ringfläche ist (S. 140 und S. 12).

Im folgenden interessiert uns nun nicht das einzelne Polygonsystem, sondern die Fläche, die es bestimmt. Es ergibt sich uns daraus die Aufgabe, zu untersuchen, wann zwei Polygonsysteme dieselbe Fläche bestimmen, wann also die Polyederflächen, die durch Identifizieren äquivalenter Punkte aus ihnen entstehen, verschiedene polygonale Zerlegungen ein und derselben Fläche sind.

Zwei Polygonsysteme führen sicher dann zur selben Fläche, wenn sie sich so aufeinander topologisch abbilden lassen, daß äquivalente Punkte des einen in äquivalente Punkte des anderen übergehen. Solche Polygonsysteme wollen wir als nicht verschieden ansehen.

Daraus folgt weiter, daß es für die entstehende Fläche nur darauf kommt, wie die Randpunkte  $A'$  und  $B'$  einer Polygonseite  $a'$  auf die Randpunkte  $A''$  und  $B''$  der zugeordneten Seite  $a''$  abgebildet sind, nicht aber auf die sonstige Beschaffenheit der topologischen Abbildung von  $a'$  auf  $a''$ . Es gibt also nur zwei wesentlich verschiedene Abbildungen zweier zugeordneter Polygonseiten aufeinander. Die eine paart  $A'$  mit  $A''$ , die andere  $A'$  mit  $B''$ .

**Beweis:** Führen die beiden topologischen Abbildungen  $T$  und  $T^*$  von  $a'$  auf  $a''$  beide den Randpunkt  $A'$  in  $A''$  und  $B'$  in  $B''$  über, so ist die topologische Selbstabbildung  $S$  von  $a'$ , die entsteht, wenn man erst  $T$  und dann  $T^{*-1}$  ausübt, topologisch und läßt die Randpunkte  $A'$  und  $B'$  von  $a'$  fest.

Ist  $a'$  Seite des Polygons  $\Pi$ , so gibt es eine topologische Selbstabbildung von  $\Pi$ , bei der  $a'$  die Selbstabbildung  $S$  erfährt, während alle übrigen Seiten von  $\Pi$  punktweise fest bleiben (Aufg. 2 von § 6). Man geht zu einem gleichen Polygonsystem über, wenn man  $\Pi$  durch sein Bild ersetzt. Das ist wiederum das Polygon  $\Pi$ . Indessen sind jetzt die Punkte von  $a'$  und  $a''$  vermöge der Abbildung  $T^*$  äquivalent. Man kann also in der Tat  $T$  durch

jede andere topologische Abbildung  $T^*$  ersetzen, die die Randpunkte ebenso abbildet wie  $T$ , und erhält durch Identifizieren äquivalenter Punkte immer die gleiche Fläche.

Sind z. B. alle Polygone durch geradlinige Polygone der Zahlenebene dargestellt, so kann man annehmen, daß zugeordnete Seiten vermöge einer linearen Abbildung aufeinander abgebildet werden.

Die Polygonseiten werden jetzt orientiert — d. h. einer der beiden Randpunkte wird zum Anfangspunkte, der andere zum Endpunkte der Seite ernannt —, und zwar zugeordnete Seiten übereinstimmend, so daß bei der Abbildung Anfangspunkt in Anfangspunkt und Endpunkt in Endpunkt übergeht. Außerdem werden die Polygone orientiert. Die Orientierung eines Polygons besteht darin, daß die sämtlichen Polygonseiten kohärent orientiert werden, also so, daß jede Ecke einmal als Anfangspunkt und einmal als Endpunkt der anstoßenden Seiten auftritt. Die Orientierung, mit der eine Seite in der kohärenten Orientierung des Randes vorkommt, heißt die von der Polygonorientierung in der Seite induzierte Orientierung. Ein Polygon läßt sich ebenso wie eine Seite auf zwei verschiedene Weisen orientieren. — In den Figuren deuten wir die Orientierung einer Seite durch einen der Seite aufgesetzten Pfeil, die eines Polygons durch einen dem Polygon eingezeichneten Kreispfeil an.

Durch die Orientierung des Polygons ist zugleich ein *Umlaufsinn*, also eine zyklische Reihenfolge der Seiten, festgelegt. Wir denken uns die Seiten und die Polygone fest orientiert und bezeichnen zugeordnete Seiten mit dem gleichen Buchstaben. Dann kann man sich das Polygonsystem durch ein rein kombinatorisches Schema geben. Wir schreiben die Seiten jedes Polygons in der Reihenfolge, wie sie im gegebenen Umlaufsinn auf dem Rande folgen, je in eine Zeile und versehen sie mit dem Exponenten +1 (den wir nach Belieben auch fortlassen) oder mit -1, je nachdem die gegebene Orientierung mit der von dem Polygon induzierten übereinstimmt oder nicht. Durch dieses Schema ist das Polygonsystem, also die Fläche, vollkommen bestimmt. Jede Zeile liefert die zyklische Seitenfolge eines Polygons, die Seitenbezeichnung gibt über die paarweise Zuordnung Auskunft, und die Exponenten bestimmen, auf welche der beiden wesentlich verschiedenen Arten die zugeordneten Seiten aufeinander topologisch abzubilden sind.

Ohne das Polygonsystem zu ändern, dürfen wir die Reihenfolge der Seiten in jeder Zeile zyklisch vertauschen, ferner jede Kante umorientieren, was sich in einem Wechsel ihrer Exponenten im Schema kundgibt, und ein Polygon umorientieren, was im Schema auf eine antizyklische Vertauschung der Buchstaben der entsprechenden Zeile mit gleichzeitiger Änderung aller Exponenten dieser Zeile hinauskommt.

Als Beispiel geben wir das Schema des zuvor angeführten Polygonsystems:

$$\text{Polygon } \Pi_1: b a d^{-1} e^{-1}$$

$$\text{Polygon } \Pi_2: a b d e$$

Wir können jetzt die Frage, wann zwei Polygonsysteme dieselbe Fläche ergeben, weiter fördern. Aus einem Polygonsystem entstehen andere davon verschiedene, die dieselbe Fläche bestimmen, durch folgende *elementaren Transformationen*:

Eine *Unterteilung der Dimension 1* besteht darin, daß zwei zugeordnete Polygonseiten durch zwei einander zugeordnete Punkte in je zwei Seiten geteilt werden, während die Zuordnung aller Punkte dieselbe bleibt. Der Übergang vom unterteilten Polygonsystem zum ursprünglichen heißt *Ober teilung der Dimension 1* (Fig. 57). — Eine *Ober teilung der Dimension 2* besteht darin, daß man zwei verschiedene Polygone längs zweier äquivalenter Seiten durch Identifizieren dieser Seiten zu einem einzigen Polygone vereinigt. Der umgekehrte Prozeß, Zerschneidung eines Polygons in zwei

Polygone, heißt *Unterteilung der Dimension 2* (Fig. 58).

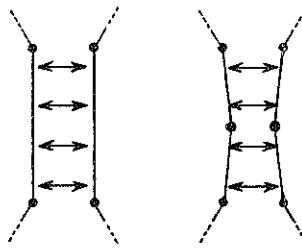


Fig. 57.

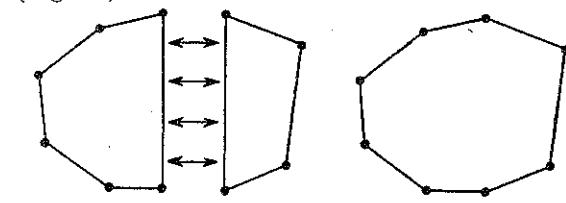


Fig. 58.

Zwei Polygonsysteme, die durch endlich viele solche Operationen ineinander übergehen, heißen ebenso wie die zugehörigen Polyederflächen *elementarverwandt*. Da sich weder bei einer elementaren Transformation der Dimension 1 noch bei einer der Dimension 2 die durch das Polygonsystem bestimmte Fläche ändert — denn nach § 8 darf man das Identifizieren schrittweise vornehmen —, so folgt: *Elementarverwandte Polygonsysteme bestimmen homöomorphe Flächen*.

Elementarverwandte Polyederflächen haben zwei wichtige Eigenschaften miteinander gemein, die (Eulersche) Charakteristik und den Orientierbarkeitscharakter. Diese beiden Begriffe haben wir bereits S. 87 und S. 88 für Komplexe bzw. Pseudomanigfaltigkeiten erklärt und aus einer simplizialen Zerlegung abgeleitet. Da wir die Flächen nicht als simpliziale Komplexe eingeführt haben, so erklären wir jetzt Charakteristik und Orientierbarkeit von neuem für eine Polyederfläche und leiten diese Eigenschaften aus dem Schema ihres Polygonsystems ab. Den Zusammenhang zwischen der neuen und der alten Erklärung stellen wir erst in § 39 her.

Unter der *Charakteristik* einer Polyederfläche verstehen wir die Zahl

$$N = -\alpha^0 + \alpha^1 - \alpha^2;$$

worin  $\alpha^0$ ,  $\alpha^1$ ,  $\alpha^2$  die Anzahlen der Polyederecken, -kanten und -flächenstücke bezeichnen. Für das Viereck, das die Ringfläche überdeckt (S. 3), ist z. B.

$$N = -1 + 2 - 1 = 0,$$

für die Würffelfläche ist

$$N = -8 + 12 - 6 = -2.$$

Elementarverwandte Polyederflächen haben gleiche Charakteristik. Durch eine elementare Transformation der Dimension 1 ändern sich nämlich  $\alpha^0$  und  $\alpha^1$  beide je um eine Einheit, während  $\alpha^2$  ungeändert bleibt. Bei einer Transformation der Dimension 2 ändern sich ebenso nur  $\alpha^1$  und  $\alpha^2$  je um eine Einheit.

*Orientierbar* nennen wir eine Polyederfläche, wenn sich die Polygone ihres Polygonsystems so orientieren lassen, daß in je zwei zugeordneten Seiten entgegengesetzte Orientierungen induziert werden. In dem Schema des Polygonsystems findet dies offenbar darin seinen Ausdruck, daß bei geeigneter Orientierung der Polygone jede Seite einmal mit dem Exponenten +1 und einmal mit -1 auftritt. Bei Unter- und Ober teilung bleibt, wie man sich leicht überzeugt, die Eigenschaft einer Polyederfläche, orientierbar zu sein, ungeändert. Die zuvor als Beispiel angegebene Polyederfläche S. 132 ist nichtorientierbar.

Wir haben damit das Ergebnis gewonnen: *Eine notwendige Bedingung dafür, daß zwei Polyederflächen elementarverwandt sind, besteht darin, daß sie dieselbe Charakteristik haben und beide orientierbar oder beide nichtorientierbar sind*.

Diese Bedingung ist auch hinreichend. Der Beweis dafür wird dadurch geführt, daß man alle Polyederflächen, die in Charakteristik und Orientierbarkeitscharakter übereinstimmen, durch Unter- und Ober teilungen auf eine gemeinsame Normalform bringt.

### § 38. Überführung in die Normalform.

Die Herstellung der Normalform geht in sechs Schritten vor sich.

1. Schritt: Besteht das vorgegebene Polygonsystem aus  $\alpha^2 (> 1)$  Polygone, so wird durch  $(\alpha^2 - 1)$ -malige Ober teilung der Dimension 2 ein einziges Polygon hergestellt; seine Seiten sind paarweise einander zugeordnet. Das Schema dieses aus einem einzigen Polygon bestehenden Polygonsystems hat nur eine einzige Zeile, in der jeder Buchstabe zweimal vorkommt. Tritt er mit entgegengesetzten Exponenten auf, so heißen die genannten Seiten nach der ersten Art, andernfalls nach der zweiten Art zugeordnet. Wir haben soeben gesehen, daß die Polyederfläche dann und nur dann orientierbar ist, wenn alle Seiten nach der ersten Art zugeordnet sind.

Wenn es sich um eine der Kugelfläche homöomorphe, eine sog. Eulersche Polyederfläche handelt, so erhält man das eine Polygon z. B. durch Abblättern der Polyederfläche in ihr ebenes Netz, wie man es konstruiert, wenn man Papiermodelle durch Zusammenbiegen eines Karton stückes herstellt. Man hat dann nur die inneren Kanten dieses Netzes fortzulöschen.

**2. Schritt:** Beziehen von Polygonseiten. Tritt in dem Polygon eine Seitenfolge  $aa^{-1}$  auf, außerdem aber noch weitere Seiten, also im ganzen mindestens 4, so werden die beiden benachbarten Seiten  $a$  und  $a^{-1}$  identifiziert, wofür man auch sagt: *beigezogen*. Es entsteht ein Polygon, dessen Schema man aus dem Schema des alten Polygons durch Streichen der Kantenfolge  $aa^{-1}$  erhält.

Das Beziehen kann folgendermaßen auf Unter- und Oberteilung zurückgeführt werden. Ist

~~~~~  $aa^{-1}$  ~~~~~

(Fig. 59)

das Schema des Polygons — Schlangenlinien deuten Seitenfolgen an, die nicht näher bezeichnet zu werden brauchen —, so kann man annehmen,

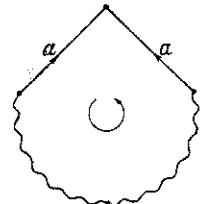


Fig. 59.

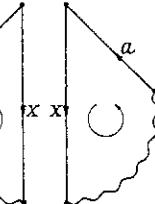


Fig. 60.

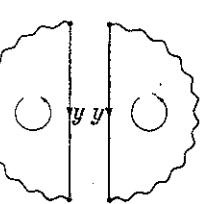


Fig. 61.

dass links und rechts von  $aa^{-1}$  noch mindestens eine Seite steht. Eine Unterteilung der Dimension 2 liefert die beiden Polygone

~~~~~  $ax$  und  $x^{-1}a^{-1}$  ~~~~~, (Fig. 60)

wenn mit  $x$  die neu eingezogene Kante bezeichnet wird. Durch eine Oberteilung werden die Seiten  $a$ ,  $x$  und ebenso  $x^{-1}$ ,  $a^{-1}$  zu einer Seite  $y$  bzw.  $y^{-1}$  verschmolzen. Es entstehen die beiden Polygone

~~~~~  $y$  und  $y^{-1}$  ~~~~~. (Fig. 61)

Schließlich werden diese beiden Polygone durch eine Oberteilung der Dimension 2 wieder zu einem einzigen Polygone vereinigt.

Das Beziehen wird so lange fortgesetzt, bis man entweder zu einem Zweieck gelangt oder zu einem Polygone von mindestens 4 Seiten, in dem keine Seitenfolge  $aa^{-1}$  mehr auftritt. Die beiden möglichen Schemata eines Zweieckes sind

$aa^{-1}$  (0)

und

$aa$ .

Beide gehören zu den gesuchten Normalformen. Wir dürfen also im folgenden ein Polygone von mindestens 4 Seiten voraussetzen, in dem keine Seitenfolge  $aa^{-1}$  mehr vorkommt.

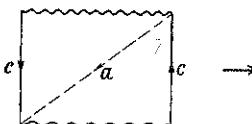
**3. Schritt:** Überführung in eine *Polyederfläche mit einer einzigen Ecke*. Sei das so erhaltene Polygone ein  $r$ -Eck ( $r \geq 4$ ). In ihm wollen wir äquivalente Polygonecken mit gleicher Bezeichnung versehen. Entweder sind alle Ecken äquivalent, oder es gibt außer einer Klasse  $P$  noch

eine weitere Klasse. Man kann dann das Polygone in eines überführen, in dem die Anzahl der Ecken  $P$  um 1 kleiner ist. Denn auf dem Rande des Polygons gibt es eine Ecke  $Q$ , die mit einer Ecke  $P$  eine Kante  $m$  begrenzt. Also tritt auf dem Rande eine Folge  $QmP$  (oder  $PmQ$ ) auf. Die zweite an die Polygonecke  $P$  angrenzende Seite mag  $a$  heißen. Ihr zweiter Randpunkt ist ein Punkt  $Q$  oder ein Punkt  $P$  oder ein Punkt einer anderen Äquivalenzklasse. Durch eine Diagonale  $d$  verbinden wir diesen zweiten Randpunkt mit der ersten Polygonecke  $Q$  und zerlegen das  $r$ -Eck damit (durch eine Unterteilung der Dimension 2) in ein Dreieck  $\Delta$  und ein  $(r-1)$ -Eck  $\Pi$  (Fig. 62). Die der Seite  $a$  zugeordnete Seite  $a'$  gehört zu  $\Pi$ . Andernfalls müsste  $a$  mit  $m$  oder  $m^{-1}$  übereinstimmen. Im ersten Falle würde eine Kantenfolge  $mm$  in  $\Delta$  auftreten, und es wäre infolgedessen gegen die Voraussetzung  $Q = P$ . Im zweiten Falle wären  $m$  und  $m^{-1}$  beziehbar entgegen der vorausgesetzten Beschaffenheit des  $r$ -Ecks.

Man identifiziert nun  $a$  und  $a'$  durch eine Oberteilung der Dimension 2 und erhält so ein neues  $r$ -Eck, auf dessen Rande die Ecke  $P$  einmal weniger auftritt und die Ecke  $Q$  einmal mehr.

Entweder kann man nun in dem neuen  $r$ -Eck Seiten beziehen, oder es hat dieselbe Beschaffenheit wie das alte. Im letzteren Falle kann man durch Wiederholung des eben angewandten Verfahrens die Anzahl der Ecken  $P$  abermals um 1 verringern. So fährt man fort, bis man einmal Seiten beziehen kann, was spätestens dann eintritt, wenn nur noch eine Ecke  $P$  auf dem Rande vorkommt. Durch Beziehen gelangt man entweder zu einem Zweieck, also zu einer schon erledigten Normalform, oder zu einem Polygone mit lauter äquivalenten Ecken, also zu dem gewünschten Polygone, oder zu einem Polygone von weniger als  $r$  Ecken, die nicht alle äquivalent sind, in welchem Falle man das Spiel von neuem beginnt.

**4. Schritt:** Kreuzhaubennormierung. Ist die so normierte Polyederfläche nichtorientierbar, so sind mindestens zwei Polygonecken nach der zweiten Art zugeordnet, etwa die beiden Seiten  $c$  der Fig. 63. Das Schema des Polygons ist also



Kreuzhaubennormierung

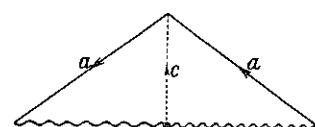


Fig. 64.

~~~~~  $c$  ~~~~~  $c$ . (1)

Man zerlege es in zwei Polygone durch eine Diagonale  $a$ , die den Anfangspunkt der einen Polygonecke mit dem Endpunkte der anderen verbindet.

Das Schema des transformierten Polygonsystems ist

$$\begin{array}{c} \sim\sim\sim ca, \\ a^{-1} \sim\sim\sim c. \end{array} \quad (2)$$

Nun füge man die beiden Polygone längs  $c$  wieder zusammen. Diese Oberteilung ergibt das Polygon

$$\sim\sim\sim aa \sim\sim\sim$$

mit der Seitenfolge  $aa$ , die wir eine *Kreuzhaube* nennen (vgl. § 2). Der schematische Umwandlungsprozeß ist in den Figuren 63 und 64 nachgezeichnet. Tritt in dem neuen Polygon noch ein Seitenpaar auf, das nach der zweiten Art zugeordnet ist, so kann man es ebenfalls zu einer Kreuzhaube vereinigen, ohne dabei die etwa schon vorhandenen Kreuzhauben zu zerstören. So fährt man fort, bis alle nach der zweiten Art zugeordneten Seitenpaare zu Kreuzhauben vereinigt sind. Sind dann überhaupt alle Seiten erschöpft, so liegt die Normalform (Kreuzhaubenform) der nichtorientierbaren Fläche vor:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \sim\sim\sim a_k a_k. \quad (k)$$

Für  $k = 1$  ergibt sich das bereits zuvor erledigte Zweieck.

5. Schritt: *Henkelnormierung*. Ist dagegen die Fläche orientierbar oder treten nach der Kreuzhaubennormierung noch Seitenpaare auf, die nach der ersten Art zugeordnet sind, so muß es zwei solche Paare geben, die auf dem Rande gekreuzt liegen, d. h. auf dem Polygonrande bei geeigneter Orientierung die Folge

$$\sim\sim\sim c \sim\sim\sim d^{-1} \sim\sim\sim c^{-1} \sim\sim\sim d \sim\sim\sim$$

bilden (Fig. 65). Würde nämlich das Seitenpaar  $c$  nicht von einem anderen Paare gekreuzt, so wären, da wir die Kreuzhaubennormierung bereits vollendet voraussetzen, alle Seiten der Folge  $c \sim\sim\sim c^{-1}$  unter sich zugeordnet; es wären daher die Ecken der zwischen  $c$  und  $c^{-1}$  ge-

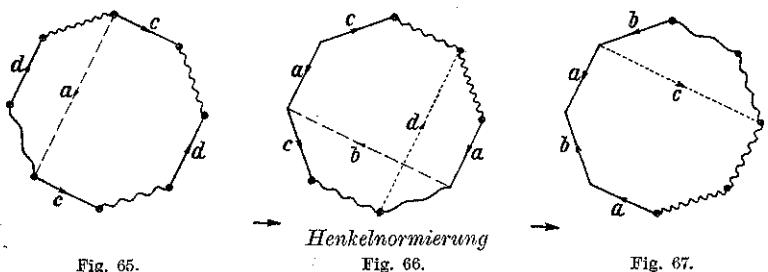


Fig. 65.

Henkelnormierung

Fig. 66.

Fig. 67.

legenen Seiten untereinander und mit den Endpunkten der beiden Seiten  $c$  äquivalent, niemals aber könnte auf Grund der Seitenzuordnung der Anfangspunkt der Seite  $c$  zu diesen Ecken äquivalent werden, was der bereits als 3. Schritt vorgenommenen Normierung des Polygons auf lauter äqui-

valente Ecken widerspricht. — Die beiden gekreuzten Seitenpaare lassen sich nun durch elementare Transformationen in eine Folge  $a b a^{-1} b^{-1}$  verwandeln, wie man aus den Figuren 65—67 erkennt. Eine solche Folge heißt aus den in § 2 dargelegten Gründen ein *Henkel*. Die weitere Vereinigung gekreuzter Seitenpaare zerstört weder schon vorhandene Kreuzhauben noch Henkel, denn sie verpflanzt die durch Schlangenlinien ange deuteten Seitenzüge im ganzen, ohne sie zu zerreißen. Man kann daher die gegebene Fläche, wenn sie orientierbar war, auf die Normalform (Henkelform)

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \quad (h)$$

bringen.

6. Schritt: *Verwandlung der Henkel in Kreuzhauben*. Es bleibt nur der Fall übrig, daß Kreuzhauben und Henkel nebeneinander auftreten. Dann kann man durch elementare Unterteilungen der Dimension 2 jeden Henkel durch zwei Kreuzhauben ersetzen. Der Umwandlungsprozeß besteht darin, daß man das gegebene Polygon (Fig. 68) so zerschneidet und wieder zusammensetzt, daß die sechs in Frage kommenden Seiten nach der zweiten Art zugeordnet sind (Fig. 69) und danach dreimal die Kreuzhaubennormierung des 4. Schrittes anwendet (Fig. 70—72).

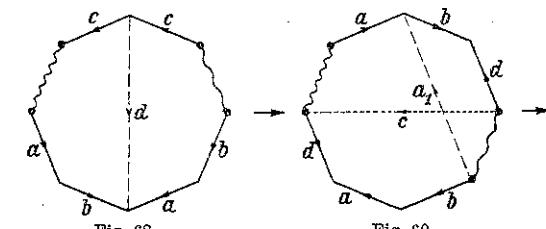


Fig. 68.

Fig. 69.

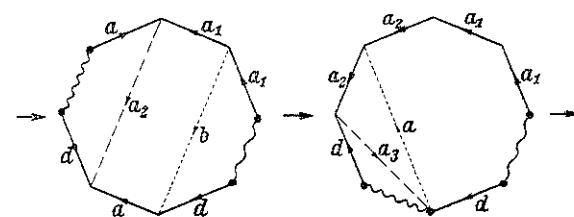


Fig. 70.

Fig. 71.

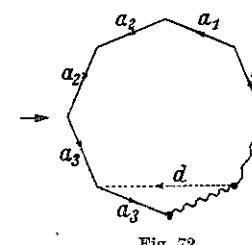


Fig. 72.

Wir haben damit jedes Polygonsystem auf eine der folgenden nur aus einem Polygone, dem *Fundamentalpolygon*\*, bestehenden Normalformen zurückgeführt:

$$a a^{-1} \quad (0)$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \quad (h)$$

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_k a_k. \quad (k)$$

\* ) Figuren der Fundamentalpolygone finden sich: zu (0) auf S. 7 Fig. 11; zu (h) auf S. 3 Fig. 5 ( $h = 1$ ) und auf S. 6 Fig. 10 ( $h = 2$ ); zu (k) auf S. 11 Fig. 18 ( $k = 1$ ) und S. 12 Fig. 19 ( $k = 2$ ).

Die Fundamentalpolygone  $(0)$  und  $(h)$  einerseits und  $(k)$  andererseits unterscheiden sich voneinander durch den Orientierbarkeitscharakter und unter sich durch den Wert der Charakteristik, die sich aus dem Fundamentalpolygone zu

$$N = -2 + 1 - 1 = -2 \quad (0')$$

$$N = -1 + 2h - 1 = 2(h - 1) \quad (h')$$

$$N = -1 + k - 1 = k - 2 \quad (k')$$

berechnet. Die Formeln geben zugleich den Zusammenhang zwischen der Henkelzahl  $h$  bzw. der Kreuzhaubenzahl  $k$  und der Charakteristik der Fläche an; orientierbare Flächen haben hiernach immer gerade Charakteristik. Da wir sahen, daß Charakteristik  $N$  und Orientierbarkeitscharakter sich bei elementaren Transformationen nicht ändern, so ist damit das Ergebnis gewonnen:

**Satz:** Zwei Polyederflächen sind dann und nur dann elementarverwandt, wenn sie in Charakteristik und Orientierbarkeitscharakter übereinstimmen.<sup>22</sup>

Damit sind wir unserem Ziele, alle geschlossenen Flächen zu klassifizieren, einen großen Schritt näher gekommen. Wir wissen nämlich, daß es nicht mehr Flächen gibt als in den Reihen  $(0)$ ,  $(h)$ ,  $(k)$  aufgeführt sind. Wenn nun auch je zwei Fundamentalpolygone sicher nicht elementarverwandt sind, so könnten sie trotzdem noch dieselbe Fläche bestimmen. Daß dem nicht so ist, zeigen wir im folgenden Paragraphen mit Hilfe der im vorigen Kapitel bereitgestellten Invarianzsätze.

**Aufgaben:** 1. Man zeige, daß eine geschlossene Fläche der Charakteristik  $N$  sich mit einem einzigen Polygone mit folgender Seitenzuordnung überdecken läßt (symmetrische Normalform):

$$c_1 c_2 \dots c_{N+2} c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_{N+2}^{\mp 1}.$$

Hierin gilt das obere Vorzeichen im letzten Exponenten nur, wenn die Fläche orientierbar, also  $N$  gerade ist. Welche Charakteristik hat die Fläche, die man bei ungeradem  $N$  erhält, wenn man das Minuszeichen im letzten Exponenten stehen läßt?

2. Man bringe das Polygonsystem des Beispiels von S. 132 auf die Normalform.

### § 39. Verschiedenheit der Normalformen, Hauptsatz.

Aus einem vorgegebenen Polygonsystem  $\mathfrak{M}$  kann man durch wiederholte Unterteilungen der Dimension 2 ein elementarverwandtes Polygonsystem herleiten, das ganz aus Dreiecken besteht und das durch Identifizieren äquivalenter Punkte in einen simplizialen Komplex übergeht, der offenbar die Eigenschaften  $(PM_1)$  bis  $(PM_3)$  einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit (§ 24) besitzt.

Durch die vorgenommenen Unterteilungen hat sich weder die Charakteristik noch der Orientierbarkeitscharakter der Polyederfläche geändert. Die S. 134 und S. 135 gegebene Definition der Charakteristik und Orientierbarkeit stimmt aber in dem besonderen Falle, daß die Polyederfläche ein simplizialer Komplex ist, mit der S. 87 und S. 88 gegebenen Definition über-

ein. Da nun, wie wir S. 129 und S. 112 gezeigt haben, die Orientierbarkeit einer Pseudomannigfaltigkeit und die Charakteristik eines simplizialen Komplexes topologisch invariante Eigenschaften sind, so ist damit bewiesen, daß zwei geschlossene Polyederflächen nur dann homöomorph sein können, wenn sie in Orientierbarkeitscharakter und Charakteristik übereinstimmen. Insbesondere sind also die Flächen, die durch die Fundamentalpolygone  $(0)$ ,  $(h)$  und  $(k)$  gegeben sind, alle voneinander verschieden. Stimmen aber zwei Polyederflächen in Orientierbarkeitscharakter und Charakteristik überein, so sind sie nach dem Satze von § 38 elementarverwandt und daher homöomorph.

Wir fassen das Ergebnis zusammen in den

**Hauptsatz der Flächentopologie:** Zwei geschlossene Flächen sind dann und nur dann homöomorph, wenn sie in Charakteristik und Orientierbarkeitscharakter übereinstimmen. Die allgemeinste orientierbare geschlossene Fläche ist die Kugel mit  $h (\geq 0)$  Henkeln, die allgemeinste nichtorientierbare geschlossene Fläche die Kugel mit  $k (\geq 1)$  Kreuzhauben.

Die Henkelzahl  $h$  und die Kreuzhaubenzahl  $k$  nennt man bisweilen das Geschlecht der orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Fläche. Mit der Charakteristik hängt das Geschlecht durch die Formeln  $(0')$ ,  $(h')$ ,  $(k')$  von § 38 zusammen.

Die geschlossenen Flächen haben wir bisher als Umgebungsräume definiert, die sich aus einem Polygonsystem herleiten lassen. Eine gleichwertige Definition, die den geschlossenen Flächen ihren Platz innerhalb des Systems aller Komplexe zuweist, ist die folgende: Eine geschlossene Fläche ist ein endlicher zusammenhängender zweidimensionaler homogener Komplex.

**Beweis:** Da eine geschlossene Fläche, wie wir sahen, eine Pseudomannigfaltigkeit ist, so ist sie ein endlicher zusammenhängender zweidimensionaler Komplex. Die Homogenitätsbedingung, d. h. die Existenz einer dem Kreisinnern homöomorphen Umgebung jeden Punktes, ist für die mittleren Punkte des Fundamentalpolygons offenbar erfüllt, für die mittleren Punkte einer Polygonseite deshalb, weil es genau eine dazu äquivalente Seite gibt; für die Polygonecke erhält man eine solche Umgebung, wenn man die sämtlichen Ecken des Fundamentalpolygons durch kleine Dreiecke abstumpft. Beim Identifizieren setzen sie sich zu einem einzigen der Kreisscheibe homöomorphen Zyklus zusammen (im trivialen Ausnahmefall der Kugel zu zwei Zyklen).

Ist umgekehrt  $\mathbb{R}^2$  ein beliebiger endlicher zusammenhängender homogener Komplex, so sind nach Satz II von § 33 die Homologiegruppen in jedem Punkte  $P$  von  $\mathbb{R}^2$  diejenigen der Kreislinie, woraus nach dem 2. Beispiele von § 32 folgt, daß mit jeder Kante einer simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^2$  genau zwei Dreiecke inzident sind und daß der Umgebungs-Komplex einer Ecke von  $\mathbb{R}^2$  eine Kreislinie ist. Dann kann man sich aber  $\mathbb{R}^2$  aus seinen Dreiecken durch schrittweises Identifizieren von Seiten ent-

standen denken. Die Zusammenhangsbedingung (S. 130) ist erfüllt, weil  $\mathfrak{F}^2$  als zusammenhängend (§ 12) vorausgesetzt war. Also ist  $\mathfrak{F}^2$  eine geschlossene Fläche im Sinne der Definition von § 37.

**Aufgaben:** 1. Jede geschlossene zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}^2$  mit der Charakteristik  $N = -2$  ist der Kugelfläche homöomorph.

2. Im  $\mathfrak{F}^3$  liege ein endlicher, aus geradlinigen Strecken bestehender, eindimensionaler zusammenhängender Komplex  $\mathfrak{K}^1$  der Charakteristik  $N$ . Schlägt man um jeden Punkt von  $\mathfrak{K}^1$  eine kleine Kugel mit festem Radius, so werden die Kugeln von einer geschlossenen Fläche der Charakteristik  $2N$  umhüllt.

## § 40. Berandete Flächen.

Eine berandete Fläche ist ein Umgebungsraum, der aus einem Polygonsystem durch Identifizieren äquivalenter Punkte, nämlich durch Aneinanderheften von Polygonseiten entsteht. Für äquivalent werden die Punkte zweier Polygonseiten erklärt, die durch eine festgesetzte topologische Abbildung der Seiten ineinander übergehen. Während aber bei den geschlossenen Flächen zu jeder Seite genau eine äquivalente gehört, bleiben bei den berandeten Flächen gewisse – und zwar mindestens eine der Polygonseiten frei; diese heißen *Randseiten*. Ferner soll für die berandeten Flächen wie für die unberandeten die Zusammenhangsbedingung (§ 37) gelten.

Die Seiten und Polygone der berandeten Flächen lassen sich ebenso wie die der geschlossenen orientieren, und die berandete Fläche läßt sich durch ein kombinatorisches Schema geben.

Sind  $a^0, a^1, a^2$  die Anzahlen der nichtäquivalenten Ecken, Seiten und Polygone des Polygonsystems, so definieren wir auch jetzt die Zahl

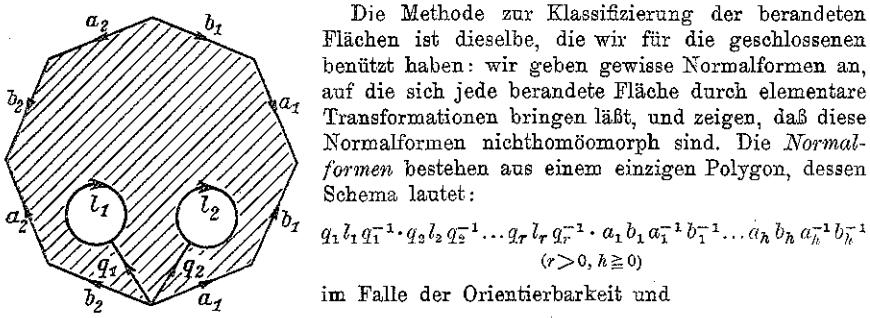
$$N = -a^0 + a^1 - a^2$$

als die *Charakteristik* der berandeten Fläche.

Orientierbar ist die Fläche, wenn sich ihre Polygone so orientieren lassen, daß in zwei zugeordneten Seiten entgegengesetzte Orientierungen induziert werden.

Charakteristik und Orientierbarkeit bleiben ungeändert bei elementaren Unterteilungen, die ebenso wie für die unberandeten Flächen erklärt werden. Da man durch fortgesetzte Unterteilung auch eine berandete Fläche in einen simplizialen Komplex, der eine berandete Pseudomannigfaltigkeit ist, überführen kann, so sind Charakteristik und Orientierbarkeit topologische Invarianten der berandeten Fläche.

Die Methode zur Klassifizierung der berandeten Flächen ist dieselbe, die wir für die geschlossenen benutzt haben: wir geben gewisse Normalformen an, auf die sich jede berandete Fläche durch elementare Transformationen bringen läßt, und zeigen, daß diese Normalformen nichthomöomorph sind. Die *Normalformen* bestehen aus einem einzigen Polygon, dessen Schema lautet:



im Falle der Orientierbarkeit und

$$q_1 l_1 q_1^{-1} \cdot q_2 l_2 q_2^{-1} \cdots q_r l_r q_r^{-1} \cdot a_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \quad (r > 0, h \geq 0)$$

h=2, r=2

Fig. 73.

im Falle der Nichtorientierbarkeit der berandeten Fläche. Das Schema entsteht aus der Normalform einer geschlossenen Fläche also dadurch, daß man eine Seitenfolge der Form  $q_1 l_1 q_1^{-1} \cdots q_r l_r q_r^{-1}$  einfügt;  $l_1, l_2, \dots, l_r$  sind hierin die Randseiten.

Identifiziert man in dem Normalpolygone je zwei Seiten  $q_i$  und  $q_i^{-1}$ , so ergibt sich das Fundamentalpolygon einer geschlossenen Fläche, in das  $r$  Löcher geschnitten sind (Fig. 73).

Um eine durch ein beliebiges Polygonsystem gegebene berandete Fläche auf die Normalform zu bringen, gehen wir von einer simplizialen Zerlegung der berandeten Fläche aus. Das ist, wie gesagt, eine berandete Pseudomannigfaltigkeit, deren Rand ein bestimmter eindimensionaler Teilkomplex  $\mathfrak{K}$  ist.

Wir setzen von der simplizialen Zerlegung voraus, daß jedes Dreieck entweder nur eine Ecke oder eine Seite auf dem Rande liegen hat, oder daß es den Rand überhaupt nicht berührt. Diese Voraussetzung dürfen wir machen; denn hatte eine ursprüngliche simpliziale Zerlegung diese Eigenschaft nicht, so braucht man nur zur Normalunterteilung überzugehen.

Ist  $\Delta$  ein vom Rande ausgehendes Dreieck, d. h. hat  $\Delta$  mit  $\mathfrak{K}$  entweder eine Ecke oder eine Seite gemein, so gibt es genau zwei vom Rande ausgehende Seiten, mit denen  $\Delta$  inzident ist. Unter einer von  $\mathfrak{K}$  ausgehenden Seite verstehen wir dabei eine solche, die eine Ecke auf  $\mathfrak{K}$  liegen hat, aber selbst nicht zu  $\mathfrak{K}$  gehört, die andere Ecke liegt dann sicher nicht auf  $\mathfrak{K}$ . Umgekehrt sind mit jeder von  $\mathfrak{K}$  ausgehenden Seite genau zwei von  $\mathfrak{K}$  ausgehende Dreiecke inzident. Die Menge aller von  $\mathfrak{K}$  ausgehenden Dreiecke und Seiten zerfällt also notwendig in endlich viele zyklische Folgen von abwechselnd Dreiecken und Seiten derart, daß jedes Glied einer solchen Folge mit den beiden benachbarten inzident ist.

Ist

$$\Delta_1 a_1 \Delta_2 a_2 \cdots \Delta_s a_s$$

eine solche zyklische Folge, so bilden wir aus den Dreiecken  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  ein einziges Polygon  $\Pi$ , indem wir erst  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  längs  $a_1$  aneinandersetzen, dann  $\Delta_3$  an  $\Delta_2$  längs  $a_2$  usw., schließlich  $\Delta_s$  an  $\Delta_{s-1}$  längs  $a_{s-1}$ . Die Kante  $a_s$  tritt also in  $\Pi$  zweimal auf, einmal als Seite von  $\Delta_1$ , als welche wir sie mit  $a'_s$  bezeichnen, und einmal als Seite von  $\Delta_s$ , als welche sie  $a_s$  heißen möge. Ebenso verfahren wir mit den übrigen Folgen. Nun ist klar, daß eine herausgegriffene Kante von  $\mathfrak{K}$  auf dem Rande eines dieser Polygone liegen muß, sagen wir auf  $\Pi$ . Dann bildet aber die Gesamtheit der Kanten von  $\mathfrak{K}$ , die auf  $\Pi$  vorkommen, einen einzigen zusammenhängenden Kantenzug. Ist nämlich  $P_i$  die auf  $\mathfrak{K}$  liegende Ecke von  $a_i$ , so besteht für  $i > 1$  die Gesamtheit der auf  $\mathfrak{K}$  liegenden Punkte von  $\Delta_i$  aus der Kante  $P_{i-1}P_i$ , wenn  $P_{i-1}$  von  $P_i$  verschieden ist, und aus dem Punkt  $P_{i-1} = P_i$ , wenn  $P_{i-1}$  mit  $P_i$  zusammenfällt. Für  $i = 1$  ist  $P_{i-1}$  durch die Ecke  $P'_s$ , das ist die auf  $\mathfrak{K}$  liegende Ecke von  $a'_s$ , zu ersetzen. Somit gehören im Polygone  $\Pi$  die Kanten des Kantenzuges  $P'_s P_1 P_2 \dots P_s$  zu  $\mathfrak{K}$ , und nur diese; gewisse von diesen Punkten

können in einen zusammenfallen, z. B. ist in der Fig. 74  $P_2 = P_3 = P_4 = P_5$ . Verknüpft man noch durch Oberteilung die Kanten des Kantenzuges zu einer einzigen Seite  $l$  von  $\Pi$  und läßt man den Akzent an der Seite  $a'_s$  wieder fort, um wie früher zugeordnete Kanten gleich zu bezeichnen, so ergibt sich auf dem Rande von  $\Pi$  eine Seitenfolge

$$\sim a_s l a_s^{-1} \sim$$

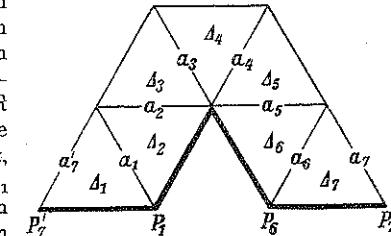


Fig. 74.

Die so erhaltenen Polygone werden mit den etwa noch vorhandenen, nicht von  $\mathfrak{K}$  ausgehenden Dreiecken durch Oberteilung zu einem einzigen Polygon zusammengesetzt. Dieses Polygon hat dann das Schema

$$\sim b_1 l_1 b_1^{-1} \sim b_2 l_2 b_2^{-1} \sim b_r l_r b_r^{-1} \sim$$

Darin bedeuten die  $l_i$  die einzigen vorhandenen Randseiten und die Schlangenlinien andere nicht näher zu bezeichnende Seiten, die unter sich paarweise zugeordnet sind (Fig. 75).

Die Seitenfolgen  $b_i l_i b_i^{-1}$  lassen sich durch Zerschneiden und Wiederzusammensetzen des Polygons in eine einzige lückenlose Folge bringen. Wie man etwa die beiden ersten Seitenfolgen zu vereinigen hat, zeigt die Fig. 76. Weder werden hierbei die übrigen Seitenfolgen der Form  $b_i l_i b_i^{-1}$  noch die durch Schlangenlinien im

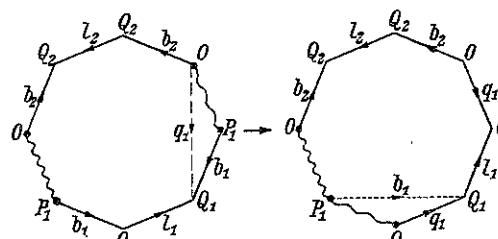
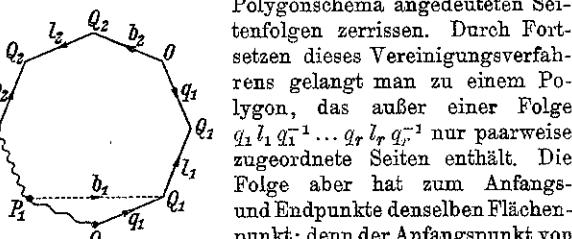


Fig. 75

Fig. 76.



$q_1$  ist auf Grund der Seitenordnung mit dem Endpunkt von  $q_1^{-1}$ ,

also mit dem Anfangspunkt von  $q_2$  äquivalent, schließlich also mit dem Endpunkt von  $q_1^{-1}$ . Man kann daher die Folge durch eine Diagonale  $\bar{l}$  mit zwei äquivalenten Randpunkten abschneiden, die beide mit  $O$  bezeichnet werden. Dadurch entsteht ein Polygon mit einer einzigen Randseite  $\bar{l}$ . Auf dieses kann man den Normalisierungsprozeß der geschlossenen Flächen übertragen, indem man die mit  $O$  nichtäquivalenten Ecken zugunsten von  $O$  verringert. Alle Ecken des Polygons werden schließlich mit  $O$  äquivalent. Setzt man nach Beendigung des Normalisierungsverfahrens das abgeschnittene Polygon längs  $\bar{l}$  wieder an, so ergibt sich die gewünschte Normalform der berandeten Flächen. Die Normalformen unterscheiden sich durch Ränderzahl, Charakteristik und Orientierbarkeit, drei Eigenschaften, die wir als invariant erkannt haben, und sie stellen daher nichthomöomorphe Flächen dar.

**Aufgabe:** Die Verdoppelung (S. 129) einer mit  $r$  Löchern versehenen orientierbaren [nichtorientierbaren] Fläche vom Geschlecht  $h$  [ $k$ ] ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht  $\bar{h} = 2h + r - 1$  [ $\bar{k} = 2k + 2r - 2$ ].

## § 41. Homologiegruppen der Flächen.

Da die Homologiegruppen eines Komplexes durch seine numerischen Invarianten (Bettische Zahlen und Torsionskoeffizienten) bestimmt sind, so lassen sie sich für die geschlossenen Flächen leicht ermitteln. Es ist nämlich nach der verallgemeinerten Eulerschen Polyederformel (§ 23) die Charakteristik

$$N = -p^0 + p^1 - p^2.$$

Da die Fläche ein zusammenhängender Komplex ist, so ist nach § 18  $p^0 = 1$ , und da sie eine orientierbare oder nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit ist, so ist nach § 24  $p^2 = 1$  im Falle der Orientierbarkeit und  $p^2 = 0$  im Falle der Nichtorientierbarkeit und daher

$N = p^1 = 2$  im orientierbaren Falle,

$N = p^1 - 1$  im nichtorientierbaren Falle.

Die erste Bettische Zahl ist daher durch die Charakteristik und folglich nach § 38 auch durch das Geschlecht  $h$  bzw.  $k$  der Fläche gegeben:

$p^1 = N + 2 = 2h$  im orientierbaren Falle,

$p^1 = N + 1 = k - 1$  im nichtorientierbaren Falle.

An Torsionskoeffizienten gibt es nur im Falle der Nichtorientierbarkeit einen der Dimension 1 vom Werte 2 (§ 24).

Die Homologiegruppe der Dimension 1 der orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlechte  $h$  ist daher die freie abelsche Gruppe von  $2h$  Erzeugenden, die der nichtorientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlechte  $k$  die direkte Summe einer freien abelschen Gruppe von  $k-1$  Erzeugenden und einer Gruppe der Ordnung 2.

Die Homologiegruppen der Dimension 0 und 2 sind ohne besonderes Interesse, da diejenige der Dimension 0 für jeden zusammenhängenden Komplex die freie zyklische Gruppe ist (§ 18) und die der Dimension 2 schon durch die allgemeine Eigenschaft einer geschlossenen Fläche, einer geschlossene, orientierbare oder nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit zu sein, bestimmt ist; sie ist nach § 24 die freie zyklische Gruppe im Falle der Orientierbarkeit und besteht aus dem Nullelemente allein im Falle der Nichtorientierbarkeit.

Eine Homologiebasis der Dimension 1 zu ermitteln, dazu dient uns der

**Hilfssatz:** *Die Ecken, Kanten und Flächenstücke einer Polyederfläche bilden ein Blocksystem.* — Ein Blocksystem (§ 22) ist immer bezüglich einer simplizialen Zerlegung eines Komplexes definiert. Wir benutzen irgendeine simpliziale Zerlegung  $\mathbb{R}^2$ , die aus der vorgelegten Polyederfläche durch Unterteilung hervorgeht. Statt Ecken, Kanten und Flächenstücken müßten wir genauer sagen: die Ketten, die von je einer orientierten Ecke bzw. einer unterteilten und kohärent orientierten Kante oder einem Flächenstück gebildet werden; denn Blöcke sind simpliziale Ketten.

**Beweis:** Daß die Bedingungen  $(Bl_1)$  und  $(Bl_2)$  für jede Dimension,  $(Bl_3)$  für die Dimensionen 0 und 2 und  $(Bl_4)$  für die Dimension 1 erfüllt sind, ist so einfach zu bestätigen, daß wir den Beweis unterdrücken; man vergleiche auch S. 80.  $(Bl_3)$  für die Dimension  $k = 1$  und  $(Bl_4)$  für  $k = 0$  beweisen wir gemeinsam, indem wir zeigen: ist  $U^1$  eine simpliziale 1-Kette auf  $\mathbb{R}^2$  und ist der Rand von  $U^1$  eine 0-Blockkette, wird also  $\partial U^1$  von Polyederecken gebildet, so gibt es eine zu  $U^1$  homologe 1-Blockkette  $V^1$ . In dieser Aussage ist  $(Bl_4)$  für  $k = 0$  enthalten, und ebenso  $(Bl_3)$  für  $k = 1$ , wenn man  $U^1$  insbesondere als geschlossene Kette annimmt. Die Konstruktion von  $V^1$  geschieht dadurch, daß man  $U^1$  aus den Flächenstücken hinaus auf die Polyederkanten drängt. Wir betrachten die Teilkette  $U_m^1$  von  $U^1$ , die über den mittleren 1-Simplexen eines bestimmten Flächenstückes  $\Pi$  der Polyederfläche liegt; mittlere 1-Simplexe von  $\mathbb{R}^2$  sind dabei solche, die nicht einer Polyederkante von  $\mathbb{R}^2$  angehören. Die Kette  $U_m^1$  bestimmt eine Kette  $'U_m^1$  auf dem Polygone ' $\Pi$  des Polygon-systems, aus dem die Polyederfläche entstanden ist.  $\partial 'U_m^1$  ist eine 0-Kette auf dem Rande von ' $\Pi$  vom algebraischen Werte 0. Da eine 0-Kette vom algebraischen Werte 0 auf einem zusammenhängenden Komplex immer  $\sim 0$  ist (§ 18), so gibt es auf dem Rande von ' $\Pi$  eine 1-Kette  $'U_r^1$ , die

denselben Rand wie  $'U_m^1$  hat.  $'U_m^1 - 'U_r^1$  ist dann geschlossen und daher nullhomolog in  $\Pi$  wie jede geschlossene 1-Kette auf der Kreisscheibe. Die den Ketten  $'U_m^1$  und  $'U_r^1$  entsprechenden Ketten  $U_m^1$  und  $U_r^1$  von  $\mathfrak{K}^2$  sind ebenfalls einander homolog. Ersetzt man nun  $U_m^1$  durch  $U_r^1$  und verdrängt man in der gleichen Weise die Kette  $U^1$  aus den übrigen Flächenstücken, so erhält man eine zu  $U^1$  homologe Kette  $V^1$ , deren sämtliche Simplexe den Polyederkanten angehören. Da  $\partial V^1 = \partial U^1$  nach Voraussetzung eine 0-Blockkette ist, so treten in  $V^1$  alle 1-Simplexe einer kohärent orientierten Polyederkante gleich oft auf, d. h.  $V^1$  ist eine 1-Blockkette, wie wir sie suchen.

Der Hilfssatz gestattet, die Homologiegruppen einer durch ein Polygonsystem gegebenen Polyederfläche von neuem zu berechnen und überdies eine Homologiebasis anzugeben. Man braucht nur die Blockinzidenzmatrizen (§ 22) aufzustellen und simultan auf die Normalform zu bringen. Wir führen die Rechnung nur für die Fundamentalpolygone (0), (h), (k) von S. 139 durch (man vergleiche dazu die Fig. 11, 10 und 19). Die Matrizen lauten:

| $E^0$ | $a$                     | $E^1$ | $\Pi$ | (0) |
|-------|-------------------------|-------|-------|-----|
| $P$   | 1                       | $a$   | 0     |     |
| $O$   | -1                      |       |       |     |
| $E^0$ | $a_1 a_2 \dots a_h b_h$ | $E^1$ | $\Pi$ |     |
| $O$   | 0 0 ... 0 0             | $a_1$ | 0     |     |
|       |                         | $b_1$ | 0     |     |
|       |                         | .     | .     |     |
|       |                         | $a_h$ | 0     |     |
|       |                         | $b_h$ | 0     |     |
| $E^0$ | $a_1 a_2 \dots a_k$     | $E^1$ | $\Pi$ |     |
| $O$   | 0 0 ... 0               | $a_1$ | 2     |     |
|       |                         | $a_2$ | 2     |     |
|       |                         | .     | .     |     |
|       |                         | $a_k$ | 2     |     |

Um die Inzidenzmatrix  $E^0$  von (0) auf die Normalform zu bringen, addieren wir die erste zur zweiten Zeile. Die Normalform  $H^0$  lautet danach

| $H^0$   | $a$ |
|---------|-----|
| $P - O$ | 1   |
| $O$     | 0   |

und eine Homologiebasis der Dimension 0 wird von dem Punkte  $O$  gebildet. Die Inzidenzmatrix  $E^1$  von (0) steht ebenso wie die beiden Inzidenzmatrizen von (h) bereits in der Normalform. Für die geschlossene Fläche vom Geschlechte  $h$  bilden somit die  $2h$  1-Ketten  $a_1, b_1, \dots, a_h, b_h$  eine Homologiebasis der Dimension 1, die zugleich eine Bettische Basis ist. — Um die Inzidenzmatrizen (k) in die Normalform zu bringen, subtrahieren wir in  $E^1$  die erste Zeile von den übrigen und erhalten

| $H^0$ | $\sum_{i=1}^k a_i a_2 \dots a_k$ | $H^1$              | $\Pi$ |
|-------|----------------------------------|--------------------|-------|
| $O$   | 0 0 ... 0                        | $\sum_{i=1}^k a_i$ | 2     |
|       |                                  | $a_2$              | 0     |
|       |                                  | .                  | .     |
|       |                                  | $a_k$              | 0     |

Die  $k$  1-Ketten  $\sum_{i=1}^k a_i, a_2, \dots, a_k$  bilden hier eine Homologiebasis, die 1-Ketten  $a_2, \dots, a_k$  eine Bettische Basis, im Einklang damit, daß die Bettische Zahl  $p^1 = k - 1$  ist.

Während die Bettische Zahl der Dimension 1 für orientierbare und nichtorientierbare geschlossene Flächen verschieden ist, ist die Z u s a m m e n h a n g s z a h l für alle Flächen  $q^1 = N + 2$ . Denn es ist  $N = -q_0 + q_1 - q_2$  (S. 87) und  $q_0 = q_2 = 1$  (S. 86).

Eine Z u s a m m e n h a n g s b a s i s erhält man, wenn man die Inzidenzmatrizen mod 2  $\check{E}^0$  und  $\check{E}^1$  aufstellt. Dies geschieht, indem man in den Inzidenzmatrizen  $E^0$  und  $E^1$  alle geraden Zahlen durch die Restklasse 0, alle ungeraden durch die Restklasse 1 ersetzt. Für die Flächen (h) und (k) stehen die Matrizen  $\check{E}^0$  und  $\check{E}^1$  schon in der Normalform, also bilden die Kanten der Fundamentalpolygone, als Ketten mod 2 betrachtet, eine Zusammenhangsbasis der Dimension 1. Die Kugelfläche ( $h = 0$ ) ist ein trivialer Ausnahmefall. Über die geometrische Bedeutung von  $q^1$  gilt der

Satz: *Die Zusammenhangszahl der Dimension 1,  $q^1 = N + 2$ , ist gleich der Maximalzahl der die Fläche nicht zerstückelnden Rückkehrschritte.*

Unter einem Rückkehrschritte verstehen wir einen doppelpunktfreien geschlossenen Kantenzug auf einer simplizialen Zerlegung der Fläche, also einen eindimensionalen Teilkomplex (§ 23), in dem mit jeder Ecke genau zwei Kanten inzident sind. Ein System von  $r$  Rückkehrschritten, von denen wir noch voraussetzen, daß niemals zwei eine Kante gemeinsam haben, „zerstückelt“ die Fläche, wenn es zwei Dreiecke der simplizialen Zerlegung gibt, die nicht durch eine Reihe von ab-

wechselnd inzidenten Dreiecken und (nicht zu den Rückkehrschnitten gehörigen) Kanten verbindbar sind. Daß es wenigstens  $N + 2$  nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte gibt (bei geeigneter simplizialer Zerlegung), zeigt der Kantenkomplex der Fundamentalpolygone (S. 139). Besteht aber das Rückkehrschnittsystem aus  $r > N + 2$  Rückkehrschnitten  $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_r$ , so sind sie, als Ketten mod 2 aufgefaßt, homolog abhängig, weil die Zusammenhangszahl  $N + 2$  die Maximalzahl homolog unabhängiger Ketten mod 2 ist (§ 23). Es gibt daher eine 2-Kette mod 2, also einen zweidimensionalen Teilkomplex  $\mathfrak{U}^2$ , dessen Rand von einer linearen Kombination dieser Rückkehrschnitte gebildet wird:

$$\partial \mathfrak{U}^2 = \xi_1 \mathfrak{f}_1 + \xi_2 \mathfrak{f}_2 + \dots + \xi_r \mathfrak{f}_r$$

mit nicht lauter verschwindenden  $\xi$ . Da wir voraussetzen, daß zwei Rückkehrschnitte  $\mathfrak{f}_i$  und  $\mathfrak{f}_j$  niemals eine Kante gemeinsam haben, so ist die rechte Seite  $\neq 0$  und daher  $\mathfrak{U}^2$  weder 0 noch die ganze Fläche. Wenn nun  $\mathfrak{B}^2$  der Restkomplex von  $\mathfrak{U}^2$  ist, so kann man ein 2-Simplex von  $\mathfrak{B}^2$  mit einem von  $\mathfrak{U}^2$  nicht durch eine Reihe von abwechselnd inzidenten Dreiecken und Kanten verbinden, ohne einen Rückkehrschnitt zu überschreiten. Die Fläche wird also durch je  $q^2 + 1$  Rückkehrschnitte zerlegt.<sup>23</sup>

**Bemerkung:** Ein schmaler Streifen, der einen Rückkehrschnitt einer nichtorientierbaren Fläche umgibt, ist entweder ein Kreisring oder ein Möbiusband; je nachdem nennt man den Rückkehrschnitt **zweiufig** oder **einufig**. (Man gewinnt einen solchen Streifen z. B. dadurch, daß man in der zweifachen Normalunterteilung der gegebenen simplizialen Zerlegung alle mit Kanten und Ecken des Rückkehrschnittes inzidenten Dreiecke nimmt.) Wenn eine nichtorientierbare Fläche nach Aufschneiden längs des Rückkehrschnittes orientierbar wird, so heißt der Rückkehrschnitt **orientierbarmachend**.

**Aufgabe:** Man zeige auf Grund der Aufgabe 1 von § 38, daß es auf jeder nichtorientierbaren Fläche einen orientierbarmachenden Rückkehrschnitt gibt. Jeder orientierbarmachende Rückkehrschnitt ist zweiufig oder einufig, je nachdem das Geschlecht  $k$  gerade oder ungerade ist. [Beim Aufschneiden bleibt die Charakteristik ungeändert. Man benutze die Tatsache, daß die Charakteristik einer orientierbaren geschlossenen Fläche immer gerade ist.]

## Siebentes Kapitel.

### Fundamentalgruppe.

Die Homologiegruppen reichen nur in zwei Dimensionen zur vollständigen Klassifikation aller Mannigfaltigkeiten aus. Die wichtigste Invariante, die in höheren Dimensionen die Unterscheidung von Komplexen und Mannigfaltigkeiten oft auch da noch ermöglicht, wo die Homologiegruppen übereinstimmen, ist die Fundamentalgruppe. Sie ist eine im allgemeinen nicht-abelsche Gruppe. Es gibt nur eine Fundamentalgruppe eines Komplexes; sie sagt über das Verhalten der eindimensionalen Wege etwas aus. Das Bestreben, in Analogie mit den Homologiegruppen Fundamentalgruppen für jede Dimension eines vorgelegten Komplexes zu definieren, hat bisher zu keinen wesentlichen Ergebnissen geführt. — Wie die Homologiegruppen ist die Fundamentalgruppe eines Komplexes eine Invariante im Großen, aber wie jenen läßt sich ihr eine Invariante im Kleinen, die Fundamentalgruppe in einem Punkte, an die Seite stellen.

### § 42. Fundamentalgruppe.

Ist eine orientierte Strecke  $\bar{w}$  stetig in einen endlichen oder unendlichen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  abgebildet, so sagen wir, daß dadurch ein **Weg**  $w$  in  $\mathfrak{K}^n$  bestimmt ist. Die Bildpunkte von  $\bar{w}$  heißen die Punkte des Weges. Sind  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  Anfangs- und Endpunkt von  $\bar{w}$ ,  $P$  und  $Q$  ihre Bildpunkte, so heißt  $P$  der **Anfangs-** und  $Q$  der **Endpunkt** von  $w$ , und  $w$  „führt“ von  $P$  nach  $Q$ . Durchläuft man  $\bar{w}$  stetig von  $\bar{P}$  nach  $\bar{Q}$ , so „durchläuft“ auch der Bildpunkt den Weg  $w$  stetig von  $P$  nach  $Q$ . Der Bildpunkt braucht sich dabei im Komplex  $\mathfrak{K}^n$  nicht von der Stelle zu rühren, denn die Definition schließt nicht aus, daß sich ganz  $\bar{w}$  in einen einzigen Punkt abbildet, aus dem dann ganz  $w$  besteht.

Bildet man das Urbild  $\bar{w}$  auf eine andere orientierte Strecke  $\bar{w}'$  topologisch so ab, daß Anfangspunkt in Anfangspunkt und Endpunkt in Endpunkt übergeht, so ist damit  $\bar{w}'$  auf dem Umwege über  $\bar{w}$  ebenfalls eindeutig und stetig in  $\mathfrak{K}^n$  abgebildet und bestimmt daher einen Weg  $w'$ . Wir betrachten dann  $w$  und  $w'$  als nicht verschiedene Wege.<sup>24</sup> Offenbar stimmen die Punkte von  $w$  mit denen von  $w'$  überein.

Nimmt man als Urbild  $\bar{w}$  die Einheitsstrecke  $0 \leq s \leq 1$  einer Zahlengeraden mit dem Anfangspunkte  $s = 0$  und dem Endpunkte  $s = 1$ , so gehört jedem  $s$ -Werte des Intervallses  $0 \leq s \leq 1$  eindeutig ein bestimmter Punkt von  $w$  zu. Man kann die Punkte des Weges  $w$  auf unendlich viele Weisen auf einen Parameter beziehen, der von 0 bis 1 läuft. Ist  $s'$  ein weiterer Parameter, so hängen  $s$  und  $s'$  durch eine topologische, also

monotone Koordinatentransformation zusammen. Man kann  $s$  als die Zeit deuten, in der ein Punkt den Weg durchläuft.

Ist  $u$  ein Weg von  $P$  nach  $Q$  und  $v$  einer von  $Q$  nach  $R$ , so kann man beide Wege zu einem einzigen Wege  $w$  vereinigen: man setzt die beiden Urbilder  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  zu einem einzigen,  $\bar{w}$ , aneinander und bildet sie ab wie zuvor. Das Bild von  $\bar{w}$  ist ein Weg  $w$ , der das *Produkt* von  $u$  und  $v$  heißt und mit

$$w = uv$$

bezeichnet wird.  $w$  entsteht also, indem man erst  $u$  und dann  $v$  durchläuft.

Der *reziproke* Weg  $w^{-1}$  von  $w$  entsteht aus  $w$  durch Umorientieren des Urbildes  $\bar{w}$ .

Ein Weg, dessen Anfangspunkt mit dem Endpunkt zusammenfällt, heißt *geschlossen*.

Eine Folge endlich vieler gerichteter Kanten einer simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$ , in der der Endpunkt jeder Kante mit dem Anfangspunkt der folgenden zusammenfällt, bildet einen *Kantenweg*, der von  $P$  nach  $Q$  führt, wenn  $P$  der Anfangspunkt der ersten und  $Q$  der Endpunkt der letzten Kante ist. Er ist aufzufassen als der Produktweg der einzelnen Kanten; als 1-Simplex ist jede orientierte Kante stetiges (sogar topologisches) Bild eines geradlinigen orientierten 1-Simplices, d. h. einer orientierten Strecke, also ein Weg im Sinne unserer Definition.

Ein Weg  $w_0$  wird (*homotop*) *deformiert*, indem die Abbildung seines Urbildes  $\bar{w}$  in  $\mathbb{R}^n$  homotop deformiert wird unter Festhaltung von Anfangspunkt  $P$  und Endpunkt  $Q$  des Weges. Ist also  $t$  ein von 0 bis 1 laufender Parameter und ist jedem  $t$ -Werte eine Abbildung  $g_t$  von  $\bar{w}$  in  $\mathbb{R}^n$  zugeordnet, insbesondere dem Werte  $t=0$  die Abbildung  $g_0$  von  $\bar{w}$  auf  $w_0$  und dem Werte  $t=1$  die Abbildung  $g_1$  von  $\bar{w}$  auf einen gewissen Weg  $w_1$ , hängt ferner der Bildpunkt  $g_t(\bar{R})$  eines Punktes  $\bar{R}$  von  $\bar{w}$  stetig von  $\bar{R}$  und  $t$  ab und sind die Bildpunkte des Anfangspunktes  $\bar{P}$  und des Endpunktes  $\bar{Q}$  von  $\bar{w}$  für alle Werte  $t$  die nämlichen Punkte  $P$  und  $Q$ , so heißt der Weg  $w_0$  in  $w_1$  homotop deformierbar und die Wege  $w_0$  und  $w_1$  heißen einander *homotop in dem Komplex  $\mathbb{R}^n$* . Offenbar ist dann auch umgekehrt  $w_1$  in  $w_0$  deformierbar. Homotope Wege haben hiernach stets Anfangs- und Endpunkt gemeinsam.

Wie bei der Deformation einer Abbildung können wir auch jetzt die sämtlichen Abbildungen  $g_t$  des Weges  $\bar{w}$  durch eine einzige Abbildung  $f$  des *Deformationskomplexes*  $\bar{w} \times t$  geben, wenn  $\bar{w} \times t$  das topologische Produkt aus  $\bar{w}$  und der Einheitsstrecke  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) bezeichnet. Als  $\bar{w} \times t$  kann man also insbesondere ein Rechteck der Zahlenebene wählen, das *Deformationsrechteck*. Dann können wir die Definition der Deformation auch so fassen:  $w_0$  ist in  $w_1$  deformierbar, wenn man das Deformationsrechteck  $\bar{w} \times t$  vermöge einer stetigen Abbildung  $f$  so in  $\mathbb{R}^n$  abbilden kann, daß die Seiten  $\bar{w} \times 0 = \bar{w}_0$  und  $\bar{w} \times 1 = \bar{w}_1$  bzw. übergehen in die Wege  $w_0$  und  $w_1$ , die beiden anderen Seiten  $\bar{P} \times t$  und  $\bar{Q} \times t$  da-

gegen in die Punkte  $P$  bzw.  $Q$ .  $\bar{w} \times 0$  bedeutet hierbei das topologische Produkt aus der Urbildstrecke  $\bar{w}$  und dem Punkt 0 der Strecke  $t$ . — Der Zusammenhang zwischen  $f$  und den Abbildungen  $g_t$  wird wie bei der Deformation von Abbildungen durch die Gleichungen

$$f(\bar{R} \times t) = g_t(\bar{R})$$

hergestellt. Der Unterschied gegen früher liegt nur darin, daß jetzt die Abbildung  $f$  noch der Bedingung genügen muß, die Seiten  $\bar{P} \times t$  und  $\bar{Q} \times t$  in die Punkte  $P$  und  $Q$  überzuführen (Fig. 77—79).

Die Deformation eines in festen Endpunkten angeknüpften Bindfadens oder Gummibandes im euklidischen Raum ist nur ein Sonderfall der hier betrachteten Deformationen. Denn der Bindfaden hat keine Doppelpunkte und kann sich während der Deformation auch nicht selbst überschneiden, während durch homotope Deformationen z. B. Knoten eines Weges durch Überschneiden beseitigt werden können. Auch die dem Bindfaden möglichen Deformationen sind einer mathematischen Behandlung zugänglich: sie werden durch *isotope* Deformationen des Raumes in sich bewirkt.

Ist  $w_0$  in  $w_1$  und  $w_1$  in  $w_2$  deformierbar, so auch  $w_0$  in  $w_2$ . Man braucht in den beiden Deformationsrechtecken, die zu den Deformationen von  $w_0$  in  $w_1$  und von  $w_1$  in  $w_2$  gehören, nur die beiden Seiten zu identifizieren, die sich in  $w_1$  abbilden, und zwar so, daß identifizierte Punkte denselben Bildpunkt in  $\mathbb{R}^n$  haben, was möglich ist, weil die beiden Seiten Urbilder desselben Weges  $w_1$  sind. Man erhält dann ein neues Rechteck, das stetig in  $\mathbb{R}^n$  so abgebildet ist, daß zwei parallele Seiten in  $w_0$  bzw.  $w_2$ , die beiden anderen Seiten in  $P$  bzw.  $Q$  übergehen; d. h.  $w_0$  ist in  $w_2$  deformierbar. Darauf, daß die Beziehung der Deformierbarkeit transitiv ist, beruht es, daß man die Verbindungswege zweier Punkte in Klassen ineinander deformierbar einteilen kann.

Ist

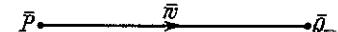
$$w_0 = a \dots b c_0 d \dots e$$

ein Weg in  $\mathbb{R}^n$ , der Produktweg der Wege  $a, \dots, b, c_0, d, \dots, e$ , und ist  $c_0$  in  $c_1$  deformierbar, so ist  $w_0$  in

$$w_1 = a \dots b c_1 d \dots e$$

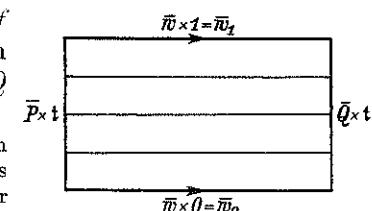
deformierbar.\*). Nach Voraussetzung gibt es nämlich eine stetige Abbildung des „mittleren“ Rechtecks der Fig. 80, bei der  $\bar{c}_0$  in  $c_0$ ,  $\bar{c}_1$  in  $c_1$  und

\*).  $c_1$  kann auch erster oder letzter Faktor in dem Produkte sein.



Urbildstrecke

Fig. 77.



Deformationsrechteck

Fig. 78.

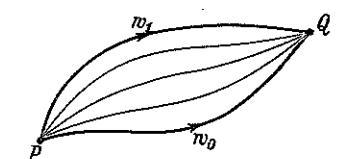


Abbildung in  $\mathbb{R}^n$

Fig. 79.

die beiden vertikalen Seiten in den gemeinsamen Anfangs- bzw. Endpunkt von  $c_0$  und  $c_1$  übergehen (Fig. 81). Man ergänze die Abbildung des mittleren Rechtecks zu einer Abbildung des gesamten Rechtecks in  $\mathbb{R}^n$ , bei der

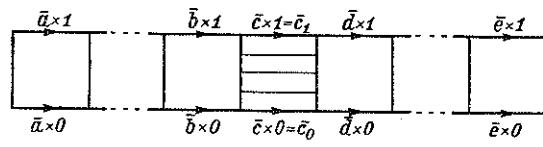


Fig. 80.

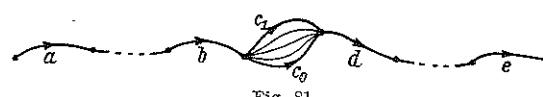


Fig. 81.

(zweite) Faktor aus einem Punktweg, so ist  $ab$  in  $b(a)$  deformierbar.

**Beweis:** In dem Rechteck der Fig. 82 ist die untere Seite in zwei Teile  $\bar{a}_0$  und  $\bar{b}_0$  geteilt, und es sind je zwei Punkte von  $\bar{b}_0$  und der gegenüberliegenden Seite  $\bar{b}_1$ , die einander vermöge einer linearen Abbildung entsprechen, durch eine geradlinige Strecke verbunden, ebenso alle Punkte von  $\bar{a}_0$  mit dem Anfangspunkte von  $\bar{b}_1$ . Man kann das Rechteck so stetig auf  $\bar{b}_1$  abbilden, daß jede Verbindungsstrecke in ihren auf  $\bar{b}_1$  gelegenen Endpunkt übergeht. Bildet man darauf  $\bar{b}_1$  auf den Weg  $b$  ab, so ist damit eine Abbildung des Rechtecks in  $\mathbb{R}^n$  gegeben, bei der  $\bar{a}_0\bar{b}_0$  in  $ab$  und die beiden vertikalen Seiten des Rechtecks in Anfangs- und Endpunkt von  $b$  übergehen, das heißt aber,  $ab$  ist in  $b$  deformierbar.

Wenn von zwei ineinander deformierbaren Wegen  $w_0$  und  $w$  der Weg  $w_0$  aus einem einzigen Punkte besteht, so heißt  $w$  in einen Punkt deformierbar oder *nullhomotop*. Ein geschlossener Weg  $w$  ist also nullhomotop in  $\mathbb{R}^n$ , wenn man ein Rechteck so stetig in  $\mathbb{R}^n$  abbilden kann, daß eine Seite  $\bar{w}$  in  $w$ , die übrigen drei Seiten in den Anfangspunkt von  $w$  übergehen.

**Beispiel:** Der Komplex  $\mathbb{R}^n$  sei der  $n$ -dimensionale Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$ . In ihm ist jeder geschlossene Weg  $w$  nullhomotop. Zum Beweise lasse man jeden Punkt von  $w$  mit konstanter Geschwindigkeit in einer Sekunde nach dem Anfangspunkte  $P$  von  $w$  laufen und gebe die entsprechende Abbildung des Deformationsrechteckes an. — Derselbe Schluß ist anwendbar, wenn  $\mathbb{R}^n$  ein (etwa geradlinig in  $\mathbb{R}^n$  gelegenes)  $n$ -Simplex  $\mathcal{E}^n$  ist; insbesondere ( $n=1$ ) ist also ein Weg, der aus einer hin und zurück durchlaufenden Strecke  $a$  besteht, auf  $a$  nullhomotop. — Hieraus folgt, daß irgend ein hin und zurück durchlaufener Weg  $w$ , also ein Weg der Form  $w=uu^{-1}$  in einem beliebigen Komplexe nullhomotop ist. Man braucht nur die orientierte Strecke  $a$  auf den Weg  $u$  stetig abzubilden und erhält dadurch eine stetige Abbildung des Deformationsrechtecks in den

Komplex, bei der eine Seite in den Weg  $w$ , die übrigen in den Anfangspunkt von  $w$  übergehen. —

Die nullhomotopen Wege lassen sich auch folgendermaßen charakterisieren: Ein geschlossener Weg  $w$  ist dann und nur dann nullhomotop, wenn man in ihm ein singuläres Elementarflächenstück einspannen kann. Ein singuläres Elementarflächenstück ist das stetige Bild einer Kreisscheibe in  $\mathbb{R}^n$ .

Anstatt nämlich das Rechteck unmittelbar durch eine stetige Abbildung  $\chi$  so in  $\mathbb{R}^n$  abzubilden, daß  $\bar{w}$  in  $w$  und die anderen Seiten in den Anfangspunkt übergehen, kann man die Abbildung in zwei Schritten vornehmen. Erst bildet man das Rechteck durch eine stetige Abbildung  $\varphi$  auf eine Kreisscheibe  $\mathbb{R}^2$  ab, indem man die eine Seite  $\bar{w}_1$  in den Kreisumfang, die übrigen drei Seiten in einen und denselben Punkt  $O$  übergehen läßt (Fig. 83), während die vertikalen Strecken des Rechtecks auf die entsprechenden Kreissehnen linear abgebildet werden, danach bildet man die Kreisscheibe in den Komplex  $\mathbb{R}^n$  durch eine Abbildung  $\psi$  so ab, daß  $\chi = \psi \varphi$  wird, was offenbar möglich ist.  $\psi$  ist dann nach § 8 Satz IV stetig. Wenn also  $w$  nullhomotop ist, so kann man ein singuläres Elementarflächenstück einspannen. Wenn andererseits die stetige Abbildung  $\psi$  der Kreisscheibe  $\mathbb{R}^2$  gegeben ist, so ist damit zugleich die Abbildung  $\psi \varphi = \chi$  des Rechteckes bestimmt.

Wir machen jetzt die weitere Annahme, daß der Komplex  $\mathbb{R}^n$  zusammenhängend ist. Alsdann sind je zwei Punkte durch einen Weg verbindbar. In  $\mathbb{R}^n$  betrachten wir alle möglichen geschlossenen Wege, die von einem irgendwie gewählten festen Anfangspunkte  $O$  ausgehen. Diese Wege zerfallen in Klassen ineinander deformierbarer Wege, sog. *Wegeklassen*. Die Wegeklasse, in der ein Weg  $w$  liegt, wollen wir vorübergehend mit

$$\{w\}$$

bezeichnen. Die Wegeklassen sind die Elemente einer Gruppe, der sog. *Fundamentalgruppe*<sup>25</sup> oder *Wegegruppe*  $\mathfrak{F}$  des zusammenhängenden Komplexes  $\mathbb{R}^n$  bei folgender Verknüpfung: Das Produkt zweier Wegeklassen  $\{w_1\}$  und  $\{w_2\}$  ist die Wegeklasse  $\{w_1 w_2\}$ , in der der Produktweg  $w_1 w_2$  liegt. Diese Festsetzung ist unabhängig von der Auswahl der Wege  $w_1$  und  $w_2$  aus ihren Wegeklassen. Ersetzt man nämlich  $w_1$  und  $w_2$  durch zwei andere, in sie deformierbare Wege  $w'_1$  und  $w'_2$ , so ist  $w'_1 w'_2$  in den Weg  $w_1 w_2$  deformierbar, nach S. 151.

Die Verknüpfungsvorschrift genügt den Gruppenaxiomen:

1. Das assoziative Gesetz ist offenbar erfüllt;
2. es gibt ein Einselement, nämlich die Klasse der nullhomotopen Wege;

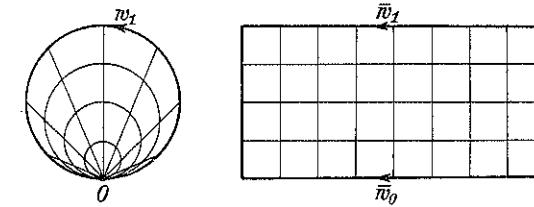


Fig. 83.

denn setzt man einen nullhomotopen Weg vorn oder hinten an einen beliebigen Weg an, so ändert sich seine Wegeklasse nicht, nach S. 152.

3. Es gibt zu jedem Element ein reziprokes, nämlich die Wegeklasse, in der der entgegengesetzte durchlaufene Weg darin liegt. Dies folgt daraus, daß ein hin und zurück durchlaufener Weg nullhomotop ist.

Dagegen gilt nicht immer das kommutative Gesetz. Es ist im allgemeinen nicht  $\{w_1\} \{w_2\} = \{w_2\} \{w_1\}$ . Die Fundamentalgruppe ist im Gegensatz zu den Homologiegruppen im allgemeinen nicht abelsch. Auf den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Homologiegruppe kommen wir später zurück (§ 48).

In der Wegeklasse  $\{w_1\} \{w_2\}$  liegt der Produktweg  $w_1 w_2$ , aber auch jeder Weg, der durch Deformation (mit Festhaltung des in  $O$  fallenden Anfangs- und Endpunktes) aus ihm entsteht, also insbesondere ein

Weg  $w$ , der durch Ablösen von  $w_1 w_2$  vom Punkte  $O$  in der Mitte entsteht (Fig. 84).  $w_1$  und  $w_2$  brauchen nicht verschiedenen Wegeklassen anzugehören, ja sie können zusammenfallen.

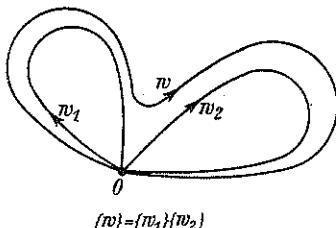


Fig. 84.

*Die Fundamentalgruppe ist als abstrakte Gruppe unabhängig von der Auswahl des Anfangspunktes  $O$ , und sie ist daher durch den zusammenhängenden Komplex  $\mathbb{R}^n$  selbst vollständig bestimmt. Wählt man nämlich*

an Stelle von  $O$  einen Punkt  $O'$  zum Anfangspunkte der geschlossenen Wege, so ziehe man von  $O$  nach  $O'$  einen Weg  $v$  und ordne der Wegeklasse  $\{w'\}$  der von  $O'$  ausgehenden Wege die Wegeklasse

$$\{w\} = \{v w' v^{-1}\}$$

zu, eine Zuordnung, die nicht von der Auswahl des Weges  $w'$  aus seiner Wegeklasse abhängt. Umgekehrt ordne man einer Wegeklasse  $\{w\}$  der von  $O$  ausgehenden Wege die Wegeklasse  $\{v^{-1} w v\}$  der von  $O'$  ausgehenden Wege zu. Diese Zuordnung ist gerade die Umkehrung der vorigen. Denn auf Grund der ersten Zuordnungsvorschrift kommt man von  $\{w'\}$  zu  $\{w\} = \{v w' v^{-1}\}$ , auf Grund der zweiten von  $\{w\}$  zu

$$\{v^{-1} w v\} = \{v^{-1} (v w' v^{-1}) v\} = \{w'\}.$$

Die Zuordnung der zu  $O$  und  $O'$  gehörigen Wegeklassen ist also umkehrbar eindeutig. Sie ist überdies isomorph: dem Produkte

$$\{w'_1\} \{w'_2\} = \{w'_1 w'_2\}$$

entspricht die Wegeklasse

$$\{v w'_1 w'_2 v^{-1}\} = \{v w'_1 v^{-1} \cdot v w'_2 v^{-1}\} = \{v w'_1 v^{-1}\} \{v w'_2 v^{-1}\},$$

d. i. das Produkt der zugeordneten Wegeklassen. — Bei den eben benutzten Umformungen haben wir immer davon Gebrauch gemacht, daß der Weg  $v^{-1} v$  nullhomotop ist und daß durch Zusatz nullhomotoper Wege sich die Wegeklasse nicht ändert.

Der Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen  $\mathfrak{F}(O)$  (mit dem Anfangspunkt  $O$ ) und  $\mathfrak{F}(O')$  (mit dem Anfangspunkt  $O'$ ) hängt noch von der Auswahl des Hilfsweges  $v$  ab. Nimmt man an Stelle von  $v$  einen Hilfsweg  $u$ , so tritt an Stelle der Zuordnung

$$\{w\} \rightarrow \{v^{-1} w v\} \quad (1)$$

die Zuordnung

$$\{w\} \rightarrow \{u^{-1} w u\} = \{u^{-1} v v^{-1} w v v^{-1} u\} = \{(u^{-1} v) v^{-1} w v (u^{-1} v)^{-1}\}. \quad (2)$$

Man muß also alle Elemente von  $\mathfrak{F}(O')$  noch mit dem festen Elemente  $\{u^{-1} v\}$  transformieren\*), um aus dem Isomorphismus (1) den Isomorphismus (2) zu erhalten. D. h. der Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{F}(O)$  und  $\mathfrak{F}(O')$  ist nur bis auf einen inneren Automorphismus von  $\mathfrak{F}(O')$  bestimmt.

Wir sahen in § 27 (Satz II), daß bei einer stetigen Abbildung  $\varphi$  eines Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in einen Komplex  $K^m$  die  $k$ -te Homologiegruppe von  $\mathbb{R}^n$  eine homomorphe Abbildung in die  $k$ -te Homologiegruppe von  $K^m$  erfährt. Einen entsprechenden Satz wollen wir jetzt für die Fundamentalgruppe ableiten.

*Ein beliebiger Weg  $w$  auf  $\mathbb{R}^n$  geht bei  $\varphi$  in einen Weg  $w'$  auf  $K^m$  über. Denn das Urbild  $\bar{w}$  von  $w$  erfährt erst eine stetige Abbildung  $f$  auf  $w$  und dann die stetige Abbildung  $\varphi$ . Die Produktabbildung  $\varphi f$  ist wieder stetig und bestimmt daher einen Weg  $w'$  in  $K^m$ . — Sind  $w_0$  und  $w_1$  zwei ineinander deformierbare Wege in  $\mathbb{R}^n$ , so sind auch die Bildwege  $w'_0$  und  $w'_1$  ineinander deformierbar. Das Deformationsrechteck  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  läßt sich stetig in  $\mathbb{R}^n$  so abbilden, daß die beiden parallelen Seiten  $t = 0$  und  $t = 1$  in  $w'_0$  und  $w'_1$ , die beiden anderen parallelen Seiten in den gemeinsamen Anfangspunkt  $A$  bzw. Endpunkt  $B$  von  $w_0$  und  $w_1$  übergehen. Durch nachträgliche Ausübung von  $\varphi$  erhält man eine stetige Abbildung des Deformationsrechtecks in  $K^m$ , bei der die Seiten  $t = 0$  und  $t = 1$  in  $w'_0$  und  $w'_1$ ,  $s = 0$  und  $s = 1$  in den gemeinsamen Anfangspunkt  $A'$ , bzw. Endpunkt  $B'$  von  $w'_0$  und  $w'_1$  übergehen, d. h.  $w'_0$  und  $w'_1$  sind homotop in  $K^m$ . — Endlich geht offenbar das Produkt zweier Wege in das Produkt der Bilder über.*

Ist  $O$  der Anfangspunkt der geschlossenen Wege der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathbb{R}^n$ , so machen wir den Bildpunkt  $O'$  zum Anfangspunkt der geschlossenen Wege der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $K^m$ . Da sich homotope Wege in homotope Wege abbilden, so kommt jeder Wegeklasse von  $\mathfrak{F}$  eine bestimmte Bildwegeklasse von  $\mathfrak{F}$  zu, und da das Bild des Produktes zweier Wege gleich dem Produkt der Bilder ist, so ist diese Abbildung von  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{F}$  ein Homomorphismus. Auch wenn man nicht  $O'$ , sondern einen anderen Punkt  $\Omega$  von  $K^m$  zum Anfangspunkt macht, so kann man noch von einer homomorphen Abbildung der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  reden. Denn zwischen den Gruppen  $\mathfrak{F}(O')$  und  $\mathfrak{F}(\Omega)$  besteht

\*). D. h. links mit  $\{u^{-1} v\}$ , rechts mit  $\{u^{-1} v\}^{-1}$  multiplizieren; eine solche Transformation bewirkt einen inneren Automorphismus der Fundamentalgruppe. Vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, S. 121 (Berlin 1927).

ein Isomorphismus, der durch einen von  $O'$  nach  $\Omega$  gezogenen Hilfsweg festgelegt ist. Die homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  in  $\mathcal{F}(O')$ , gefolgt von der isomorphen Abbildung auf  $\mathcal{F}(\Omega)$ , ist eine homomorphe Abbildung  $\Phi$  von  $\mathfrak{F}$  in  $\mathcal{F}(\Omega)$ . Bei Änderung des Hilfsweges ändert sie sich  $\Phi$  nach S. 155 um einen inneren Automorphismus von  $\mathcal{F}(\Omega)$ . Wir haben also den

**Satz:** Durch eine stetige Abbildung  $\varphi$  eines Komplexes  $\mathfrak{K}^n$  in einen Komplex  $K^m$  erfährt die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{K}^n$  eine homomorphe Abbildung  $\Phi$  in die Fundamentalgruppe  $\mathcal{F}$  von  $K^m$ .  $\Phi$  ist nur bis auf innere Automorphismen von  $\mathcal{F}$  bestimmt. Sind  $\mathfrak{K}^n$  und  $K^m$  homöomorph und ist  $\varphi$  eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{K}^n$  auf  $K^m$ , so ist  $\Phi$  ein 1-Isomorphismus, d. h. homöomorphe Komplexe haben isomorphe Fundamentalgruppen.

Der letzte Teil des Satzes folgt unmittelbar daraus, daß bei einer topologischen Abbildung die Zuordnung zwischen den Wegen von  $\mathfrak{K}^n$  und den Wegen von  $K^m$  eindeutig ist.

### § 43. Beispiele.

1. Die Fundamentalgruppe des topologischen Produktes zweier Komplexe  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  ist gleich dem direkten Produkt der Fundamentalgruppen der beiden Faktoren.

**Beweis:** Ein Punkt  $P$  des topologischen Produktes  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  ist nach S. 55 eindeutig in der Form darstellbar

$$P = P_1 \times P_2. \quad (P)$$

Ist  $\mathfrak{K}$  ein beliebiger Komplex und  $g$  eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ , die einen Punkt  $\bar{P}$  von  $\mathfrak{K}$  in einen Punkt  $P$  von  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  überführt:

$$\bar{P} \rightarrow P, \quad (g)$$

so ist damit auf Grund von Gleichung (P) eine stetige Abbildung  $g_1$

$$\bar{P} \rightarrow P_1 \quad (g_1)$$

von  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{K}_1$  und eine stetige Abbildung  $g_2$

$$\bar{P} \rightarrow P_2 \quad (g_2)$$

von  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{K}_2$  gegeben. Sind umgekehrt die stetigen Abbildungen  $g_1$  und  $g_2$  vorgegeben, so ist auf Grund der Gleichung (P) die stetige Abbildung  $g$  bestimmt. Ist insbesondere  $\mathfrak{K}$  eine orientierte Strecke, so ist durch die Abbildungen  $g$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  je ein Weg  $w$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ ,  $\mathfrak{K}_1$ ,  $\mathfrak{K}_2$  gegeben. Jedem Wege  $w$  in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  ist damit ein Wegepaar  $w_1$ ,  $w_2$  zugeordnet und umgekehrt. — Ist dagegen  $\mathfrak{K}$  ein Rechteck, das von  $g$  so in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  abgebildet wird, daß drei Seiten in einen Punkt  $O = O_1 \times O_2$ , die vierte in einen Weg  $w$  übergeht, so gehen bei der Abbildung  $g_i$  dieselben drei Seiten in den Punkt  $O_i$  über, die vierte in den Weg  $w_i$  ( $i = 1, 2$ ). Dabei ist  $w_1$ ,  $w_2$  das dem Wege  $w$  zugeordnete Wegepaar. Ist daher  $w$  nullhomotop in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ , so auch  $w_1$  in  $\mathfrak{K}_1$  und  $w_2$  in  $\mathfrak{K}_2$ . Auch die Umkehrung hiervon ist richtig: Sind  $w_1$  und  $w_2$  beide nullhomotop, so gibt es eine Abbildung  $g_i$  des Rechtecks  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{K}_i$ , bei der drei Seiten in  $O_i$ , die vierte in  $w_i$  übergeht. Die durch  $g_1$  und  $g_2$  bestimmte Abbildung  $g$  führt diese drei Seiten von  $\mathfrak{K}$  in  $O_1 \times O_2$ , die vierte in  $w$  über. — Wählt man also in  $\mathfrak{K}_i$  einen Punkt  $O_i$  zum Anfangspunkte der geschlossenen Wege, in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  ebenso den Punkt  $O_1 \times O_2$ , so entsprechen hiernach die Wegeklassen von  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  eindeutig den Paaren von Wegeklassen

von  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$ , und da das Produkt zweier Wegeklassen aus  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  offenbar gebildet wird, indem man die Produktbildung in den zugeordneten Wegeklassen von  $\mathfrak{K}_1$  bzw.  $\mathfrak{K}_2$  vornimmt, so ist die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  das direkte Produkt der Fundamentalgruppen von  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$ .

2. Die Fundamentalgruppe des  $n$ -Simplexes ebenso wie die des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes besteht aus dem Einselement allein. Denn jeder geschlossene Weg  $w$  ist nullhomotop.

3. Ebenso besteht die Fundamentalgruppe der  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$  für  $n > 1$  aus dem Einselement allein. Läßt nämlich ein geschlossener Weg  $w$  von  $\mathbb{S}^n$  den Diametralpunkt  $O'$  seines Anfangspunktes  $O$  frei, so lasse man alle seine Punkte auf Hauptkreisen, die durch  $O$  und  $O'$  gehen, in einer Sekunde nach  $O$  wandern, was einer Deformation in den Punkt  $O$  gleichkommt. Geht der Weg aber durch den Diametralpunkt hindurch, so approximiert man die Abbildung seines Urbildes  $\bar{w}$  zuvor nach § 31 in einer simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{S}^n$ , die den Diametralpunkt  $O'$  zum mittleren Punkte eines  $n$ -Simplexes und den Punkt  $O$  zu einer Ecke hat. Hierbei erleidet  $w$  eine Deformation, die den Punkt  $O'$  von ihm befreit, seinen Anfangspunkt  $O$  aber nicht ändert, womit der Fall auf den vorigen zurückgeführt ist. Da es vorkommen kann, daß ein Weg jeden Punkt der  $n$ -Sphäre trifft, so läßt sich die simpliziale Approximation beim Beweise nicht umgehen.

4. Besteht die Fundamentalgruppe eines Komplexes aus dem Einselement allein, so heißt der Komplex *einfach zusammenhängend*. Ein solcher Komplex ist also dadurch charakterisiert, daß man jeden geschlossenen Weg in ihm in einen Punkt deformieren, oder was dasselbe besagt, in jedem geschlossenen Weg ein Elementarflächenstück einspannen kann, das freilich nicht immer topologisch, sondern unter Umständen nur mit Singularitäten (Verzweigungspunkten, Faltungslinien, Selbstdurchdringungen und dergleichen) in den Komplex hineingelegt werden kann. Die Frage, wie weit ein Komplex durch die Bedingung, einfach zusammenhängend zu sein, eingeschränkt ist, hängt mit wichtigen ungelösten Problemen der Topologie zusammen, sobald man sich auf homogene Komplexe beschränkt. In einer Dimension ist die Frage deshalb leicht zu beantworten, weil es nur einen endlichen und einen unendlichen homogenen zusammenhängenden Komplex gibt, die Kreislinie (1-Sphäre) und die Zahlengerade. Die Zahlengerade ist einfach zusammenhängend. Für zwei Dimensionen werden wir in § 47 durch Bestimmung der Fundamentalgruppen aller homogenen endlichen Komplexe (aller geschlossenen Flächen) erkennen, daß die Kugelfläche (2-Sphäre) der einzige einfach zusammenhängende, endliche homogene Komplex ist. Ebenso ist die Zahlenebene der einzige einfach zusammenhängende unendliche homogene Komplex.<sup>26</sup> In drei Dimensionen ist wahrscheinlich die 3-Sphäre der einzige homogene endliche Komplex (Poincaré'sche Vermutung). In vier Dimensionen ist das topologische Produkt aus zwei Kugelflächen ein Beispiel für einen homogenen endlichen Komplex, der nach dem ersten, Beispiele einfach zusammenhängend ist, der aber nicht homöomorph der 4-Sphäre ist, weil die Bettische Zahl der Dimension 2  $p^2 = 2$  ist\*), während für die 4-Sphäre nach § 19  $p^2 = 0$  sein müßte.

\*) Daß die Bettische Zahl  $p^2$  des topologischen Produktes zweier Kugelflächen  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  sicher nicht  $= 0$  ist, folgt z. B. so: Bei der S. 156 erwähnten Abbildung  $g_1$  wird die Kugelfläche  $\mathfrak{K}_1 \times P_2$  ( $P_2$  ein Punkt von  $\mathfrak{K}_2$ ) topologisch auf die Kugelfläche  $\mathfrak{K}_1$  abgebildet. Zerlegt man  $\mathfrak{K}_1 \times P_2$  simplizial und orientiert kohärent, so ergibt sich eine 2-Kette  $U^2$ , die nicht nullhomolog in  $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$  ist. Wäre sie nämlich nullhomolog, so auch ihr Bild  $U^2$  bei der Abbildung  $g_1$ , nach § 27, Satz I.  $U^2$  ist aber die kohärent orientierte Kugelfläche  $\mathfrak{K}_1$ , also nicht nullhomolog auf  $\mathfrak{K}_1$ .

#### § 44. Kantenwegegruppe eines simplizialen Komplexes.

Die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  ist hiermit für einen zusammenhängenden Komplex auf topologisch invariante Weise definiert. Um topologische Invarianten eines Komplexes zu berechnen, gehen wir, wie bereits im Falle der Homologiegruppen, auf eine bestimmte simpliziale Zerlegung des Komplexes zurück und definieren mit deren Hilfe eine neue Gruppe, die *Kantenwegegruppe*, die zwar zunächst nicht topologisch invariant definiert, aber dafür berechenbar ist. Sodann wird mit dem Verfahren der simplizialen Approximation die Übereinstimmung der Kantenwegegruppe mit der Fundamentalgruppe und damit die topologische Invarianz der Kantenwegegruppe bewiesen.

Wir betrachten einen endlichen oder unendlichen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  mit einer festen simplizialen Zerlegung. Seine Kanten seien in bestimmter Weise orientiert und mit  $a_1, a_2, \dots$  bezeichnet. Wir haben es auf  $\mathfrak{K}^n$  zunächst nur mit Kantenwegen zu tun, also mit Produkten

$$w = a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \dots a_n^{\epsilon_n} \quad (\epsilon_1 = \pm 1, \epsilon_2 = \pm 1, \dots, \epsilon_n = \pm 1),$$

worin immer der Endpunkt von  $a_i^{\epsilon_i}$  mit dem Anfangspunkt von  $a_m^{\epsilon_m}$  usw. übereinstimmt. Zu den Kantenwegen rechnen wir auch den aus 0 Kanten, also aus einer Ecke der Zerlegung bestehenden Weg.

Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir im Gegensatz zu den Kantenwegen und den sogleich zu definierenden kombinatorischen Deformationen die in § 42 betrachteten Wege und Deformationen gelegentlich als *stetige Wege* und *stetige Deformationen*.

Durchläuft man den Rand eines 2-Simplexes  $\mathfrak{E}^2$  von  $\mathfrak{K}^n$  von einer Ecke aus in bestimmtem Sinne, so erhält man einen geschlossenen Kantenweg, etwa

$$a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} a_3^{\epsilon_3};$$

er heißt *Randweg* des Dreiecks  $\mathfrak{E}^2$ . Jedes Dreieck hat sechs verschiedene Randwege, da man die Umlaufung von jeder der drei Ecken aus in zwei entgegengesetzten Richtungen ausführen kann.

Aus einem Kantenwege kann man neue Kantenwege durch folgende elementaren kombinatorischen Deformationen ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) gewinnen:

( $\alpha$ ) Einschalten oder Fortlassen einer hin und zurück durchlaufenden Kante: der Kantenweg

$$a_1^{\epsilon_1} \dots a_p^{\epsilon_p} a_q^{\epsilon_q} \dots a_z^{\epsilon_z}$$

wird durch

$$a_1^{\epsilon_1} \dots a_p^{\epsilon_p} a_q^{\epsilon_q} a_q^{-\epsilon_q} a_q^{\epsilon_q} \dots a_z^{\epsilon_z}$$

ersetzt; dabei muß der Anfangspunkt von  $a_q^{\epsilon_q}$  mit dem Endpunkte von  $a_p^{\epsilon_p}$ , also auch mit dem Anfangspunkte von  $a_q^{\epsilon_q}$  übereinstimmen. Umgekehrt darf eine Verbindung  $a_q^{\epsilon_q} a_q^{-\epsilon_q}$  im Ausdruck für einen Kantenweg  $w$  fort-

gelassen werden.\* — Durch wiederholte Anwendung von ( $\alpha$ ) kann man in einen Kantenweg  $w = w_1 w_2$  einen beliebigen hin und zurück durchlaufenden Kantenweg  $u$ , dessen Anfangspunkt mit dem Endpunkte von  $w_1$  übereinstimmt, einschalten. Man erhält so aus  $w$  den Kantenweg  $w' = w_1 u u^{-1} w_2$ .

( $\beta$ ) Einschalten oder Fortlassen des Randweges eines 2-Simplexes: Man durchläuft einen gegebenen Weg  $w$  bis zu einer gewissen Ecke, dann einen in dieser Ecke beginnenden und dort endenden Randweg eines 2-Simplexes und danach den Restweg.

Ferner führen wir die hieraus abgeleitete dritte elementare kombinatorische Deformation ein:

( $\gamma$ ) In einem Kantenwege  $w$  wird eine Kante  $a_1^{\epsilon_1}$ , die dem Randwege  $a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} a_3^{\epsilon_3}$  eines 2-Simplexes angehört, durch  $(a_2^{\epsilon_2} a_3^{\epsilon_3})^{-1}$  ersetzt oder umgekehrt eine Folge  $a_3^{-\epsilon_3} a_2^{-\epsilon_2}$  durch  $a_1^{\epsilon_1}$ , d. h. man kann den Weg über ein Dreieck „hinwegspringen lassen“. Offenbar läßt sich die Operation ( $\gamma$ ) durch Deformationen ( $\beta$ ) und ( $\alpha$ ) bewirken (Fig. 85; darin ist  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = -1$ ).

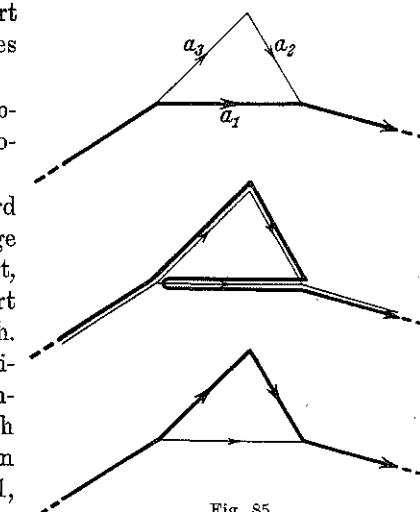


Fig. 85.

Zwei Kantenwege  $w$  und  $w'$ , die durch endlich viele elementare kombinatorische Deformationen ineinander überführbar sind, heißen kombinatorisch ineinander deformierbar oder *kombinatorisch homotop*; sie haben immer denselben Anfangs- und Endpunkt.

Sei jetzt der Komplex  $\mathfrak{K}^n$  zusammenhängend. Die von einer festen Ecke  $O$  ausgehenden geschlossenen Kantenwege zerfallen in Klassen kombinatorisch homotoper Wege, in sog. *Kantenwegeklassen*. Die Kantenwegeklasse des Weges  $w$  bezeichnen wir vorübergehend mit  $[w]$ . Die Kantenwegeklassen sind die Elemente einer Gruppe  $\mathfrak{F}_k$ , der *Kantenwegegruppe* der betrachteten simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^n$ , wenn man unter dem Produkte zweier Kantenwegeklassen  $[w_1]$  und  $[w_2]$  die Kantenwegeklasse  $[w_1 w_2]$  versteht. Diese Festsetzung ist offenbar unabhängig von der Auswahl der Kantenwege  $w_1$  und  $w_2$  aus den Klassen  $[w_1]$  und  $[w_2]$ , und man erkennt wie bei der Definition der Fundamentalgruppe, daß die Gruppenaxiome erfüllt sind und daß sich die Gruppe nicht ändert, wenn man statt  $O$  eine andere Ecke  $O'$  als Anfangspunkt der Kantenwege auszeichnet.

\* Ist aber  $w$  geschlossen und die erste Kante die Reziproke der letzten, also

$$w = a_1^{\epsilon_1} \dots a_t^{-\epsilon_t},$$

so darf nicht  $a_u^{\epsilon_u}$  gegen  $a_t^{-\epsilon_t}$  gekürzt werden, d. h. bei kombinatorischen Deformationen bleiben Anfangs- und Endpunkt eines Kantenweges fest.

Die Kantenwegegruppe  $\mathfrak{F}_k$  des Komplexes  $\mathbb{R}^n$  stimmt mit seiner Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  überein. Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß sich jede kombinatorische Deformation durch eine stetige Deformation bewirken läßt; denn der Rand eines Dreiecks und ein hin und zurück durchlaufener Weg sind stetig nullhomotop und dürfen nach Zusammenziehung in einen Punkt fortgelassen werden (S. 152) (es sei denn, daß danach überhaupt kein Weg mehr übrigbleibt). Wenn man also als Anfangspunkt für die stetigen Wege von  $\mathfrak{F}$  und die Kantenwege von  $\mathfrak{F}_k$  dieselbe Ecke  $O$  der simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  wählt, so liegt jede Kantenwegeklasse  $[w]$  ganz in der stetigen Wegeklasse  $\{w\}$  darin. Danach verläuft der Beweis der Übereinstimmung von  $\mathfrak{F}_k$  mit  $\mathfrak{F}$  ähnlich dem Invarianzbeweise der Homologiegruppen. Man hat zwei Punkte zu erledigen:

(I) Jeder geschlossene stetige Weg mit  $O$  als Anfangspunkt ist stetig deformierbar in einen Kantenweg; in jeder  $\{w\}$ -Klasse liegt also mindestens eine  $[w]$ -Klasse.

(II) Ist ein Kantenweg mit dem Anfangspunkte  $O$  stetig nullhomotop in  $\mathbb{R}^n$ , so läßt er sich auch durch kombinatorische Deformationen in  $O$  überführen<sup>27</sup>; in jeder  $\{w\}$ -Klasse liegt also höchstens eine  $[w]$ -Klasse. Die Zuordnung der Elemente von  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}_k$  ist also umkehrbar eindeutig und, da man zur Verknüpfung der Elemente von  $\mathfrak{F}$  insbesondere Kantenwege benutzen kann, isomorph.

Die beiden Behauptungen (I) und (II) werden mit Hilfe des Deformationssatzes § 31 bewiesen.

(I) Ist  $w$  ein beliebiger von  $O$  ausgehender geschlossener Weg mit dem Urbild  $\bar{w}$ , so kann man die Abbildung  $g_0$  von  $\bar{w}$  auf  $w$  nach dem Deformationssatz in eine simpliziale Abbildung  $g_1$  einer genügend feinen Unterteilung von  $\bar{w}$  deformieren. Anfangs- und Endpunkt von  $\bar{w}$  bilden sich auch während der Deformation in denselben Punkt  $O$  ab, denn bei der Deformation verläßt kein Bildpunkt das Simplex von  $\mathbb{R}^n$ , dem er zu Anfang angehörte. Der Weg  $g_1(\bar{w})$ , der durch Deformation aus  $w = g_0(\bar{w})$  entsteht, ist also entweder der Punkt  $O$ , oder er besteht aus lauter Kanten von  $\mathbb{R}^n$ , zwischen die noch gewisse Punktwege eingeschaltet sein können. Letztere

darf man nach S. 152 fortlassen, so daß damit  $w$  in einen Kantenweg deformiert ist.

(II) Ist  $w$  ein geschlossener Kantenweg, der sich durch stetige Deformation in den Anfangspunkt  $O$  zusammenziehen läßt, so läßt sich ein Deformationsrechteck  $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$  stetig so in  $\mathbb{R}^n$  abbilden, daß die Seite  $\bar{P}\bar{Q} = \bar{w}$  in  $w$  und die übrigen Seiten in  $O$  übergehen (Fig. 86). Wir markieren auf  $\bar{w}$  die Punkte, die den Ecken der Teilstrecken von  $w$  entsprechen, ziehen durch diese Teilpunkte vertikale Geraden und ergänzen die dadurch bewirkte Zerlegung des Rechtecks durch weitere vertikale und horizontale Geraden zu einem so feinen Raster, daß immer die in einer Ecke der Teilung zusammenstoßenden Rechtecke sich in das Innere eines Simplex-

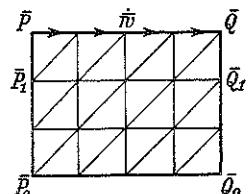


Fig. 86.

$\bar{w}$  die Punkte, die den Ecken der Teilstrecken von  $w$  entsprechen, ziehen durch diese Teilpunkte vertikale Geraden und ergänzen die dadurch bewirkte Zerlegung des Rechtecks durch weitere vertikale und horizontale Geraden zu einem so feinen Raster, daß immer die in einer Ecke der Teilung zusammenstoßenden Rechtecke sich in das Innere eines Simplex-

sternes von  $\mathbb{R}^n$  abbilden, was nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit (S. 29) möglich ist. Das Raster unterteilen wir durch Diagonalen zu einem simplizialen Komplex  $\bar{\mathbb{R}}^2$ . Die Abbildung  $g_0$  von  $\bar{w}$  in  $\mathbb{R}^n$  läßt sich dann nach dem Deformationssatz in eine simpliziale Abbildung  $g_1$  deformieren. Bezeichnet  $\bar{w}$  die unterteilte Rechtecksseite  $\bar{w}$ , so ist das Bild  $g_0(\bar{w})$  der unterteilte Kantenweg  $w$ . Bei der Deformation von  $g_0$  in  $g_1$  wird nun das Bild einer Teilstrecke des Weges  $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$  immer der Punkt  $O$  sein, denn bei der Deformation der Abbildung verläßt kein Bildpunkt das Simplex von  $\mathbb{R}^n$ , auf dem er sich zu Anfang befindet. Die Seiten  $\bar{P}\bar{P}_0$ ,  $\bar{P}_0\bar{Q}_0$ ,  $\bar{Q}_0\bar{Q}$  bilden sich aber bei  $g_0$  alle in das 0-Simplex  $O$  ab. Aus demselben Grunde wird bei dieser Deformation ein Teilpunkt von  $g_0(\bar{w})$ , falls er eine Ecke von  $\mathbb{R}^n$  ist, dauernd fest bleiben; ist der Teilpunkt aber ein mittlerer Punkt einer Kante  $a$  von  $w$ , so geht er in eine Ecke von  $a$  über. Der Weg  $g_1(\bar{w})$ , der durch die Deformation aus  $g_0(\bar{w})$  entsteht, besteht daher (abgesehen von gewissen dazwischengeschalteten Punktwegen, die wir fortlassen) aus denselben Kanten wie  $w$ , wird aber im allgemeinen gewisse Kanten noch mehrmals hin und zurück durchlaufen. Jedenfalls kann man von  $w$  zu  $g_1(\bar{w})$  durch eine Reihe von kombinatorischen Deformationen der Art ( $\alpha$ ) gelangen.

Nun führe man  $\bar{w}$  auf  $\bar{\mathbb{R}}^2$  durch eine Reihe von kombinatorischen Deformationen in den Weg  $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$  über, was z. B. so geschehen kann, daß man zuerst alle Teilstrecken von  $\bar{w}$  jeweils durch die beiden anderen Seiten des daran grenzenden Teildreiecks ersetzt. Man erhält dann einen von  $\bar{P}$  nach  $\bar{Q}$  führenden Streckenzug, der abwechselnd aus vertikalen und diagonalen Strecken besteht. Man ersetze darauf die diagonalen Strecken jeweils durch die beiden anderen Seiten des darunter liegenden Dreiecks und lasse die hin und zurück durchlaufenden vertikalen Strecken fort. Der neue Streckenzug ist  $\bar{P}\bar{P}_1\bar{Q}_1\bar{Q}$ . Auf  $\bar{P}_1\bar{Q}_1$  wendet man dasselbe Verfahren an wie zuvor auf  $\bar{P}\bar{Q}$ , und man gelangt schließlich zu  $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$ . Jede auf  $\bar{w}$  angewandte kombinatorische Deformation bestimmt vermöge der simplizialen Abbildung  $g_1$  eine kombinatorische Deformation von  $g_1(\bar{w})$ , die allerdings auch die Identität sein kann. Einer Operation ( $\beta$ ), angewendet auf ein Dreieck  $\mathbb{E}^2$  von  $\bar{\mathbb{R}}^2$ , entspricht nämlich in  $\mathbb{R}^n$  eine Operation ( $\beta$ ) oder ( $\alpha$ ) oder die Identität, je nachdem sich  $\mathbb{E}^2$  in ein Dreieck, eine Kante oder eine Ecke von  $\mathbb{R}^n$  abbildet, und eine Operation ( $\alpha$ ), angewendet auf eine Strecke  $\mathbb{E}^1$  von  $\bar{\mathbb{R}}^2$  wird in  $\mathbb{R}^n$  zu einer Operation ( $\alpha$ ) oder zur Identität, je nachdem  $\mathbb{E}^1$  in eine Kante oder eine Ecke von  $\mathbb{R}^n$  übergeht.

Man kann also  $w$  durch kombinatorische Deformationen in  $g_1(\bar{w})$  und darauf in das Bild des Weges  $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$  überführen. Dieses Bild ist aber der Punkt  $O$ .  $w$  ist also kombinatorisch nullhomotop.

Damit ist die Übereinstimmung der invariant definierten Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  mit der kombinatorisch definierten Kantenwegegruppe  $\mathfrak{F}_k$  bewiesen. Beide Gruppen bezeichnen wir hinfällig mit dem gleichen Buchstaben.

Aus dieser Übereinstimmung folgt noch: *Die Fundamentalgruppe eines Komplexes  $\mathbb{K}^n$  ändert sich nicht, wenn man die mittleren Punkte aller Simplexe von höherer als der Dimension 2 fortläßt.* Denn die Kantenwegegruppe hängt nur ab von dem aus den 0-, 1- und 2-Simplexen bestehenden Teilkomplexe, dem zweidimensionalen „Gerüstkomplexe“ der simplizialen Zerlegung von  $\mathbb{K}^n$ .

#### § 45. Kantenwegegruppe eines Flächenkomplexes.

Die Aufgabe, die Fundamentalgruppe eines vorgelegten Komplexes  $\mathbb{K}^n$  durch Erzeugende und Relationen darzustellen, ist durch das Ergebnis von § 44 auf die einfache Aufgabe zurückgeführt, die Kantenwegegruppe eines zweidimensionalen simplizialen Komplexes zu ermitteln. Dies ist mit dem Verfahren, das wir in § 46 kennenlernen werden, prinzipiell möglich. Doch sind die Relationen, die man bei Verwendung eines simplizialen Komplexes erhält, im allgemeinen sehr zahlreich und unübersichtlich, und wollte man sie benutzen, so würden sie der nachträglichen Vereinfachung durch Elimination überzähliger Erzeugender bedürfen. Man kann aber zu wesentlich einfacheren Relationen gelangen, wenn man das Rechenverfahren nicht auf einen simplizialen Komplex, sondern auf einen aus Polygonen aufgebauten Flächenkomplex anwendet. Auf dessen Definition gehen wir daher zunächst ein. — Während die bisherigen Untersuchungen für beliebige Komplexe geführt wurden, beschränken wir uns von nun an der Einfachheit halber auf endliche Komplexe.

Ein Kantenkomplex entsteht aus endlich vielen Strecken durch Identifizieren gewisser Randpunkte. Dabei darf es vorkommen, daß die beiden Randpunkte einer und derselben Strecke identifiziert werden. Das Bild einer Strecke im Kantenkomplex nennen wir eine Kante. Beispiele sind die Kantenkomplexe der Normalformen geschlossener Flächen oder der Kantenkomplex des Würfels.

Ein Kantenkomplex kann durch Unterteilung der Kanten in einen eindimensionalen simplizialen Komplex übergeführt werden, ist also ein Komplex im Sinne von § 10.

Eine Kante wird orientiert, indem ihr Urbild orientiert wird. Die willkürlich orientierten Kanten, die man auch als besondere Wege auf dem Kantenkomplex auffassen kann, bezeichnen wir mit  $a_\nu$ , und die umgekehrt orientierten mit  $a_\nu^{-1}$ .

Aus den Wegen  $a_\nu$  und ihren Reziproken bilden wir „Kantenwege“, das sind Wege der Form

$$a_i^{e_i} a_m^{e_m} \dots a_z^{e_z} \quad (\varepsilon_\nu = \pm 1),$$

worin immer der Endpunkt einer Kante mit dem Anfangspunkte der nächsten übereinstimmt.

Aus dem Kantenkomplex entsteht ein Flächenkomplex dadurch, daß man in gewisse geschlossene Kantenwege Flächenstücke „einspannt“. Sei

$$w = a_i^{e_i} a_m^{e_m} \dots a_z^{e_z}$$

ein geschlossener Weg, der mindestens aus einer Kante besteht. Man nehme eine Kreisscheibe vom Radius 1 her und beziehe ihren Randkreis auf einen Parameter, etwa die Bogenlänge  $s: 0 \leq s < 2\pi$ . Ebenso beziehe man den geschlossenen Weg  $w$  auf einen Parameter  $s$  des gleichen Intervalls. Die Punkte des Randkreises werden danach mit den zum gleichen Parameterwerte  $s$  gehörigen Wegepunkten identifiziert. Von dem so entstehenden Umgebungsraum sagen wir, daß er aus dem Kantenkomplex durch *Einspannen eines Flächenstückes*, nämlich des Bildes der Kreisscheibe, in den geschlossenen Weg  $w$  entstanden ist.  $w, w^{-1}$  und die daraus durch zyklische Vertauschung der Kanten entstehenden Wege sind dann die *Randwege* des Flächenstückes. Es ist zu beachten, daß  $w$  nicht etwa doppelpunktfrei sein muß, z. B. darf  $w = aa^{-1}$  sein. — Wiederholt man das Einspannen von Flächenstücken endlich oft, so entsteht aus dem Kantenkomplex ein Flächenkomplex; auch einen Kantenkomplex selber wollen wir als Flächenkomplex (mit null eingespannten Flächenstücken) ansprechen.

Man kann in einem Flächenkomplex  $\mathbb{K}$  wie in einem simplizialen Komplex eine Kantenwegegruppe definieren. Zu dem Zwecke wird eine feste Ecke  $O$  als Anfangspunkt der Kantenwege gewählt, und die von  $O$  ausgehenden geschlossenen Kantenwege werden in Kantenwegeklassen eingeteilt. Zwei solche geschlossene Kantenwege werden in dieselbe Klasse getan, wenn sie sich kombinatorisch ineinander deformieren lassen. Die kombinatorische Deformation ist wie im simplizialen Komplex (§ 44) definiert, nur hat man die Operation  $(\beta)$ , dem Übergang von Dreiecken zu Polygonen entsprechend, abzuändern:

( $\alpha$ ) Einschalten und Fortlassen einer hin und zurück durchlaufenden Kante;

( $\beta$ ) Einschalten und Fortlassen des Randweges eines Flächenstückes. Eine Kante  $a$ , die für sich allein Randweg eines Flächenstückes ist, kann hiernach aus einem Wege, in dem sie auftritt, fortgelassen werden (Fig. 87).

Die Kantenwegeklassen sind die Elemente der Kantenwegegruppe  $\mathfrak{F}_k$  des Flächenkomplexes  $\mathbb{K}$ , wenn die Verknüpfung wie früher definiert wird.

Wir zeigen nun, daß die Kantenwegegruppe  $\mathfrak{F}_k$  mit der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathbb{K}$  übereinstimmt. Für den besonderen Fall, daß  $\mathbb{K}$  simplizial zerlegt ist, ist das bereits in § 44 bewiesen worden, denn alsdann ist der Flächenkomplex  $\mathbb{K}$  ein simplizialer Komplex  $\mathbb{K}^2$  oder  $\mathbb{K}^1$ . Wir führen die allgemeine Behauptung für einen beliebigen Flächenkomplex  $\mathbb{K}$  auf diesen bekannten Fall zurück, indem wir von  $\mathbb{K}$  durch fortgesetzte Unterteilung zu einem simplizialen Komplex übergehen und bei jeder Unterteilung zeigen, daß sich die Kantenwegegruppe nicht ändert.

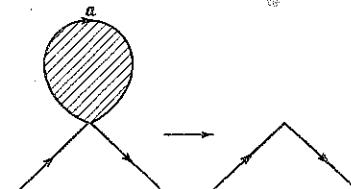


Fig. 87.

Wir unterscheiden zwei Arten von Unterteilungen:

(U<sup>1</sup>) Unterteilung einer Kante: Auf einer Kante des Flächenkomplexes  $\mathfrak{K}$  wird ein mittlerer Punkt zum neuen Eckpunkt erklärt, wodurch die Kante in zwei Teilkanten zerfällt;

(U<sup>2</sup>) Unterteilung eines Flächenstückes: Das Urbild des Flächenstückes, das eine euklidische Kreisscheibe ist, wird durch eine Sehne in zwei Segmente zerlegt, so daß die Endpunkte der Sehne bei der Abbildung des Randkreises in Ecken des Kantenkomplexes übergehen. Bei dieser Abbildung geht die Sehne in eine neue Kante, die beiden Segmente in zwei neue Flächenstücke über.

Durch Unterteilung geht aus einem Flächenkomplexe offenbar wieder ein Flächenkomplex hervor. Durch fortgesetzte Unterteilung kann man von jedem Flächenkomplexe  $\mathfrak{K}$  zu einem simplizialen Komplexe gelangen. Man zerlegt erst alle Flächenstücke in Dreiecke und bildet von dem Dreieckscomplex die zweifache Normalunterteilung.

Bezeichnet  $\hat{\mathfrak{K}}$  den durch einmalige Anwendung einer Unterteilung (U<sup>1</sup>) oder (U<sup>2</sup>) aus  $\mathfrak{K}$  hervorgegangenen Flächenkomplex, so ist die Behauptung daß  $\mathfrak{K}$  und  $\hat{\mathfrak{K}}$  dieselbe Fundamentalgruppe haben, gleichbedeutend mit den beiden folgenden Behauptungen:

1. Ein geschlossener, von  $O$  ausgehender Kantenweg  $w$  von  $\mathfrak{K}$  ist in  $\hat{\mathfrak{K}}$  kombinatorisch in einen Kantenweg von  $\hat{\mathfrak{K}}$  deformierbar.

2. Ein geschlossener, von  $O$  ausgehender Kantenweg  $w$  von  $\mathfrak{K}$ , der in  $\mathfrak{K}$  kombinatorisch nullhomotop ist, ist auch in  $\hat{\mathfrak{K}}$  kombinatorisch nullhomotop.

Beweis von 1:  $\hat{\mathfrak{K}}$  entstehe aus  $\mathfrak{K}$  durch Unterteilung einer Kante  $a$  durch einen Punkt  $T$ .  $a$  zerfällt in zwei Teilkanten  $b$  und  $c$ , die so als Wege aufgefaßt werden, daß  $bc = a$  wird (Fig. 88). Der Endpunkt  $Q$  von  $a$  braucht nicht notwendig vom Anfangspunkte  $P$  verschieden zu sein. Tritt in einem Kantenwege  $w$  von  $\mathfrak{K}$  eine der Verbindungen  $bb^{-1}, cc^{-1}, b^{-1}b, c^{-1}c$  auf, so läßt man sie auf Grund einer kombinatorischen Deformation ( $\alpha$ ) weg und wiederholt dies so lange, bis  $b^{\pm 1}$  und  $c^{\pm 1}$  überhaupt nicht mehr in  $w$  vorkommen oder nur in Verbindungen  $bc (= a)$  oder  $c^{-1}b^{-1} (= a^{-1})$ .

Damit ist  $w$  kombinatorisch in einen Weg von  $\hat{\mathfrak{K}}$  übergeführt. — Entsteht ferner  $\hat{\mathfrak{K}}$  aus  $\mathfrak{K}$  durch Unterteilung eines Flächenstückes  $\Pi$ , so zerfällt  $\Pi$

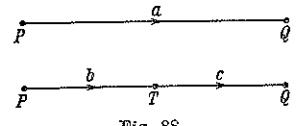


Fig. 88.

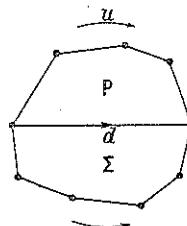


Fig. 89.

in zwei Flächenstücke  $P$  und  $\Sigma$ , die durch die neue Kante  $d$  voneinander getrennt werden (Fig. 89). Die Randwege von  $P$  und  $\Sigma$  seien  $du^{-1}$  und  $dv^{-1}$ . Man ersetze in einem Kantenwege  $w$  von  $\mathfrak{K}$  die etwa auftretende Kante  $d^{\pm 1}$  durch  $v^{\pm 1}$  auf Grund einer kombinatorischen Deformation ( $\beta$ ) und ( $\alpha$ ), womit  $w$  kombinatorisch in einen Weg  $w'$  von  $\hat{\mathfrak{K}}$  deformed ist.

Beweis von 2: Geht der Kantenweg  $w$  von  $\mathfrak{K}$  durch je eine einzige kombinatorische Deformation innerhalb  $\mathfrak{K}$  der Reihe nach in die Kantenwege

$$w_1, w_2, \dots, w_r = O$$

über, so sind diese Kantenwege von  $\mathfrak{K}$  und im allgemeinen nicht zugleich solche von  $\hat{\mathfrak{K}}$ . Wir ordnen nun jedem Wege  $w_i$  nach einem sogleich anzugebenden Gesetze einen Kantenweg  $w'_i$  von  $\hat{\mathfrak{K}}$  zu, so daß in der Reihe

$$w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$$

jeder Weg aus dem vorangehenden durch eine oder mehrere kombinatorische Deformationen innerhalb  $\mathfrak{K}$  entsteht und daß  $w_r = O$  ist. Damit ist dann bewiesen, daß  $w$  auch innerhalb  $\mathfrak{K}$  kombinatorisch in  $O$  deformierbar ist.

Das Zuordnungsgesetz lautet für den Fall, daß  $\hat{\mathfrak{K}}$  aus  $\mathfrak{K}$  durch Unterteilung der Kante  $a$  hervorgeht: Jeder von  $b$  und  $c$  verschiedenen Kante von  $\hat{\mathfrak{K}}$  wird die gleiche Kante von  $\mathfrak{K}$  zugeordnet. Der Kante  $b^{\pm 1}$  dagegen die Kante  $a^{\pm 1}$ , der Kante  $c$  überhaupt keine Kante. Der dem Kantenwege  $w_i$  zugeordnete Kantenweg  $w'_i$  ist dann offenbar ein von  $O$  ausgehender geschlossener Kantenweg in  $\hat{\mathfrak{K}}$ . — Vollzieht sich nun der Übergang von  $w_i$  zu  $w_{i+1}$  durch eine kombinatorische Deformation ( $\alpha$ ), angewendet auf eine von  $b$  und  $c$  verschiedene Kante oder durch eine Deformation ( $\beta$ ), so der Übergang von  $w_i$  zu  $w_{i+1}$  durch dieselbe Deformation. Entsteht aber  $w_{i+1}$  aus  $w_i$  durch eine Deformation ( $\alpha$ ), angewendet auf  $b$  oder  $c$ , so entsteht  $w_{i+1}$  aus  $w_i$  durch eine Deformation ( $\alpha$ ), angewendet auf  $a$  (oder aber es ist  $w_i = w_{i+1}$ ). — Geht dagegen  $\hat{\mathfrak{K}}$  aus  $\mathfrak{K}$  durch eine Unterteilung eines Flächenstücks hervor, so nehmen wir folgende Zuordnung vor: Einer von der zerlegenden Kante  $d$  verschiedenen Kante von  $\hat{\mathfrak{K}}$  wird die gleiche Kante von  $\mathfrak{K}$  zugeordnet, der Kante  $d$  aber der Weg  $v$ . Dem Hinzufügen oder Fortlassen von  $dd^{-1}$  in  $\hat{\mathfrak{K}}$  entspricht dann in  $\mathfrak{K}$  das Hinzufügen oder Fortlassen von  $vv^{-1}$ , das mit Hilfe von Deformationen ( $\alpha$ ) bewirkt wird, und den auf die Polygone  $P$  und  $\Sigma$  angewandten Deformationen ( $\beta$ ) entsprechen in  $\hat{\mathfrak{K}}$  kombinatorische Deformationen, die sich auf Deformationen ( $\beta$ ) und ( $\alpha$ ) zurückführen lassen. Damit ist die Invarianz der Kantenwegegruppe  $\mathfrak{F}_k$  gegenüber Unterteilung und also ihre Übereinstimmung mit der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  bewiesen.

## § 46. Erzeugende und Relationen.

Wir bezeichnen in dem Flächenkomplex  $\mathfrak{K}$  die orientierten Kanten wieder mit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und den Anfangspunkt der geschlossenen Kantenwege mit  $O$ . Um ein System von Erzeugenden zu gewinnen, ziehen wir von  $O$  aus nach jeder Ecke von  $\mathfrak{K}$  einen festen Kantenweg, den sog. Hilfsweg, mit dem wir die Ecke an  $O$  anschließen. Der zu  $O$  gehörige Hilfsweg bestehet aus dem Punkte  $O$  allein. Danach entspricht jeder orientierten

Kante  $a_i$  eindeutig ein von  $O$  ausgehender geschlossener Weg  $A_i$ , der erhalten wird, indem man von  $O$  auf dem Hilfswege nach dem Anfangspunkte von  $a_i$  läuft, dann über  $a_i$  nach dem Endpunkt von  $a_i$  und von da auf dem reziproken Hilfswege des Endpunktes nach  $O$  zurückkehrt.  $A_i$  ist ein bestimmter Kantenweg

$$A_i = \varphi_i(a_r) \quad (A)$$

und gehört als solcher einer bestimmten Kantenwegeklasse an, die wir hinfür mit Unterdrückung der eckigen Klammer ebenfalls mit  $A_i$  bezeichnen. Nicht alle Kantenwegeklassen  $A_1, A_2, \dots, A_{a_1}$  brauchen voneinander verschieden zu sein.

Diese Kantenwegeklassen können als Erzeugende der Kantenwegegruppe dienen. Man kann nämlich jeden geschlossenen von  $O$  ausgehenden Kantenweg  $w$  in ein Produkt von Kantenwegen  $A_i$  kombinatorisch deformieren. Ist

$$w = F(A_i), \text{ etwa } = a_i^{e_1} a_m^{e_m} \dots a_z^{e_z}$$

ein solcher Weg, so ist er in der Tat in den Kantenweg

$$W = F(A_i) = A_i^{e_1} A_m^{e_m} \dots A_z^{e_z}$$

kombinatorisch deformierbar unter alleiniger Anwendung der Operation  $(\alpha)$ . Denn  $W$  entsteht aus  $w$ , indem man zwischen je zwei aufeinander folgende Kanten einen hin und zurück durchlaufenen Hilfsweg einfügt.

Nun zu den Relationen! Das Bestehen einer Relation

$$R(A_i) = 1$$

bedeutet, daß die Kantenwegeklasse  $R(A_i)$  die Einheitswegeklasse 1 ist, daß also der Kantenweg  $R(A_i)$  in die Ecke  $O$  kombinatorisch deformierbar ist.

Man kann nun immer eine endliche Anzahl von Relationen angeben, aus denen alle anderen folgen. Sie zerfallen in zwei Arten:

(I) Ersetzt man in Gleichung (A) die Kanten  $a_r$  durch ihre geschlossenen Kantenwege  $A_r$ , so erhält man

$$A_i = \varphi_i(A_r). \quad (I)$$

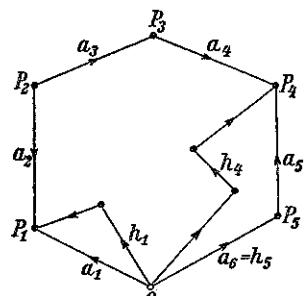


Fig. 90.

Dies ist eine richtige Relation, denn die linke Seite geht aus der rechten durch Fortlassen hin und zurück durchlaufener Hilfswege hervor. — Es gibt so viele Relationen der Art (I), wie Kanten in der simplizialen Zerlegung unseres (endlichen) Komplexes vorhanden sind.

Fig. 90 zeigt ein Beispiel. Es sind darin gewisse Kanten dargestellt, die man sich auf irgendeinem Komplex legen denken mag. Als Hilfsweg nach  $P_2$  sei der Weg  $h_2 = a_1 a_2^{-1}$ , als Hilfsweg nach  $P_3$  der Weg  $h_3 = a_5 a_5 a_4^{-1}$  gewählt; der nur aus dem Punkt  $O$  bestehende Hilfsweg von  $O$  sei  $h_6$  genannt; die Hilfswege nach  $P_1, P_4, P_5$  sind in der Figur bezeichnet. Es ist dann z. B. der Weg

$$A_3 = h_2 a_3 h_3^{-1} = a_1 a_2^{-1} \cdot a_3 \cdot a_4 a_5^{-1} a_6^{-1} = \varphi_3(a_r)$$

und der Weg

$$\varphi_3(A_r) = (h_2 a_1 h_3^{-1}) (h_1 a_2^{-1} h_3^{-1}) \cdot h_2 a_3 h_3^{-1} \cdot (h_3 a_4 h_4^{-1}) (h_4 a_5^{-1} h_5^{-1}) (h_5 a_6^{-1} h_6),$$

worin man sich noch die Wege  $h_j$  aus ihren einzelnen Kanten zusammengesetzt zu denken hat. Beide Wege sind ineinander mit Benutzung nur der Operation  $(\alpha)$  kombinatorisch deformierbar; die Wegeklassen  $A_3$  und  $\varphi_3(A_r)$  stimmen daher in der Tat überein.

(II) Ist  $a_i^{e_1} a_m^{e_m} \dots a_z^{e_z}$  Randweg eines Flächenstückes  $\Pi$ , so ist der Weg  $A_i^{e_1} A_m^{e_m} \dots A_z^{e_z}$  kombinatorisch in  $O$  deformierbar und daher

$$A_i^{e_1} A_m^{e_m} \dots A_z^{e_z} = 1 \quad (II)$$

eine richtige Relation. Der Weg ist nämlich zunächst deformierbar in denjenigen, der von  $O$  auf dem Hilfswege  $h$  des Anfangspunktes von  $a_i^{e_1}$  an das Flächenstück  $\Pi$  heranführt, dann  $\Pi$  umläuft und auf denselben Hilfswege (vielmehr dem reziproken) nach  $O$  zurückkehrt. Diese Deformation wird durch Weglassen der hin und zurück durchlaufenden Hilfswege nach den übrigen Ecken von  $\Pi$  bewirkt, also durch mehrmalige Anwendung der Operation  $(\alpha)$ . Durch die Operation  $(\beta)$ , angewendet auf das Flächenstück  $\Pi$ , erhält man daraus den Weg  $h h^{-1}$ , der durch mehrmalige Anwendung von  $(\alpha)$  in  $O$  kombinatorisch deformiert wird.

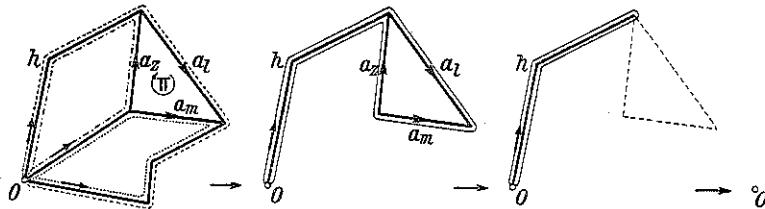


Fig. 91.

In Fig. 91 ist dieser Deformationsprozeß an einem Dreieck  $\Pi$  illustriert. Es ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_m = -1$  angenommen und dementsprechend der Weg  $A_1 A_m^{-1} A_2$  in den Punkt  $O$  deformiert worden.

Es gibt ebenso viele Relationen der Art II, wie es Polygone in  $\mathbb{R}$  gibt.

Die Relationen (I) und (II) bilden ein System definierender Relationen, d.h. die linke Seite einer beliebigen Relation  $R(A_i) = 1$  kann durch Anwendung der Relationen (I) und (II) und der trivialen Relationen  $A_i A_i^{-1} = A_i^{-1} A_i = 1$  zu 1 gemacht werden.

Beweis: Die Relation  $R(A_i) = 1$  bedeutet, daß der Kantenweg  $R(\varphi_i(a_r))$ , der mit  $w_0(a_r)$  bezeichnet werde, kombinatorisch nullhomotop ist. Es gibt also eine Folge

$$w_0(a_r), w_1(a_r), \dots, w_m(a_r)$$

von Wegen der Art, daß  $w_j(a_r)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) aus  $w_{j-1}(a_r)$  durch Anwendung einer Operation  $(\alpha)$  oder  $(\beta)$  hervorgeht und daß  $w_m(a_r)$  überhaupt keinen Faktor mehr enthält. Nun geht die linke Seite  $R(A_i)$

der gegebenen Relation unter Anwendung der Relationen (I) über in  $R(\varphi_i(A_r)) = w_0(A_r)$ . Wir bilden dann aus den  $A_r$  die Folge der Produkte

$$w_0(A_r), w_1(A_r), \dots, w_m(A_r) \equiv 1.$$

Geht  $w_j(a_r)$  aus  $w_{j-1}(a_r)$  durch Anwendung der Operation ( $\alpha$ ) hervor, so  $w_j(A_r)$  aus  $w_{j-1}(A_r)$  durch Anwendung einer trivialen Relation  $A_r A_r^{-1} = 1$  oder  $A_r^{-1} A_r = 1$ . Entsteht aber  $w_j(a_r)$  aus  $w_{j-1}(a_r)$  durch Anwendung der Operation ( $\beta$ ) auf ein Polygon  $\Pi$  von  $\mathfrak{K}$ , so erhält man  $w_j(A_r)$  aus  $w_{j-1}(A_r)$  durch Anwendung der zum Polygon  $\Pi$  gehörigen Relation (II). Man kann also  $R(A_r)$  durch Anwendung der Relationen (I) und (II) und trivialer Relationen der Reihe nach in  $w_0(A_r), w_1(A_r), \dots, w_m(A_r)$ , das ist das leere Produkt, überführen.

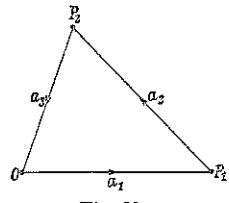


Fig. 92.

Als Beispiel wählen wir den eindimensionalen simplizialen Komplex, der aus den Seiten eines Dreiecks (Fig. 92) besteht, also eine simpliziale Zerlegung der 1-Sphäre oder der Kreislinie. Anfangspunkt  $O$  ist eine Ecke des Dreiecks. Hilfswege nach den Ecken  $P_1$  und  $P_2$  sind  $h_1 = a_1, h_2 = a_3^{-1}; h_0$  besteht nur aus dem Punkt  $O$ .

Kantenwege:

$$\begin{aligned} A_1 &= h_0 a_1 h_1^{-1} = a_1 a_1^{-1} = \varphi_1(a_r), \\ A_2 &= h_1 a_2 h_2^{-1} = a_1 a_2 a_3 = \varphi_2(a_r), \\ A_3 &= h_2 a_3 h_0^{-1} = a_3^{-1} a_3 = \varphi_3(a_r). \end{aligned}$$

Relationen:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_1 A_1^{-1} = 1 \\ A_2 &= A_1 A_2 A_3 \\ A_3 &= A_3^{-1} A_3 = 1 \end{aligned} \right\} \text{(I); keine Relationen (II).}$$

Es bleibt also eine Erzeugende  $A_2$  übrig, während alle Relationen trivial werden. Die Fundamentalgruppe der Kreislinie ist daher die freie zyklische Gruppe. Die Wegeklassen werden offenbar von geschlossenen Wegen repräsentiert, die  $0, 1, 2, \dots$  mal im einen oder andern Sinne die Kreislinie durchlaufen.

Ebenso ist die Fundamentalgruppe des Kreisringes, des Vollringes, allgemeiner des topologischen Produktes aus Kreislinie und  $n$ -dimensionalem Element die freie zyklische Gruppe. Sie ist nämlich das direkte Produkt aus der Fundamentalgruppe der Kreislinie und des  $n$ -dimensionalen Elementes (§ 43, 1.), die letzte aber besteht aus dem Einselement (§ 43, 2.).

Spannt man in das Dreieck (Fig. 92) ein Flächenstück ein, so tritt eine Relation der Art II hinzu:

$$A_1 A_2 A_3 = 1, \quad (\text{II})$$

also wird  $A_2 = 1$ , im Einklang damit, daß die Fundamentalgruppe des  $n$ -dimensionalen Elements aus dem Einselement besteht.

**Aufgabe:** Ist  $r$  eine im  $\mathfrak{K}^3$  liegende Rotationsringfläche, so ist es unmöglich,  $\mathfrak{K}^3$  topologisch so auf sich abzubilden, daß  $r$  in sich übergeht und Meridiankreis mit Breitenkreis vertauscht wird. [Man betrachte Breitenkreis und Meridiankreis als Elemente der Fundamentalgruppe des von  $r$  berandeten Vollringes.]

### § 47. Kantenkomplexe und geschlossene Flächen.

Als weitere Anwendung der im vorigen Paragraphen gewonnenen Methode ermitteln wir die Fundamentalgruppen von Kantenkomplexen und geschlossenen Flächen.

$a_1, a_2, \dots, a_{\alpha^1}$  seien die Kanten eines Kantenkomplexes  $\mathfrak{K}^1$ . Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, daß  $\mathfrak{K}^1$  nur eine einzige Ecke  $O$  hat. Dann sind alle  $a_i$  geschlossene Wege, die Hilfswege fallen fort, und die geschlossenen Wege  $A_i$ , die die erzeugenden Wegeklassen der Fundamentalgruppe repräsentieren, werden gleich den  $a_i$ . Die Relationen der Art I lauten  $A_i = A_i$ , sind also trivial, und Relationen der Art II gibt es nicht. Also ist die Fundamentalgruppe die freie Gruppe von

$$\alpha^1 = N + 1 = -\alpha^0 + \alpha^1 + 1$$

Erzeugenden; hierin sind  $\alpha^0 = 1$  und  $\alpha^1$  die Anzahlen der Ecken und Kanten des Kantenkomplexes und  $N = -\alpha^0 + \alpha^1$  bezeichnet die Eulersche Charakteristik. Das Ergebnis ist auch unmittelbar einleuchtend. Denn jeder Kantenweg ist ein Produkt aus den geschlossenen Kantenwegen  $a_i = A_i$ , also sind die Wegeklassen  $A_i$  die Erzeugenden der Fundamentalgruppe, und ein Produkt  $\prod_i A_i^{e_i}$  ist nur dann das Einselement der Fundamentalgruppe, wenn der Weg  $\prod_i A_i^{e_i}$  durch Anwendung der Operation ( $\alpha$ ) in  $O$  deformiert werden kann, d. h. gruppentheoretisch, wenn  $\prod_i A_i^{e_i}$  durch Anwendung der trivialen Relationen  $A_i A_i^{-1} = 1$  und  $A_i^{-1} A_i = 1$  zu 1 gemacht werden kann.

Die Berechnung der Fundamentalgruppe eines Kantenkomplexes  $\mathfrak{K}^1$  mit mehr als einer Ecke kann man auf diesen einfachen Fall zurückführen. Es gibt dann eine Kante, etwa  $a_1$ , in der Anfangspunkt  $P$  und Endpunkt  $Q$  verschieden sind. Ist  $h$  der Hilfsweg nach  $P$ , so wählen wir als Hilfsweg nach  $Q$  den Weg  $ha_1$ . Der zu  $a_1$  gehörige geschlossene Weg  $A_1$  ist dann der Weg  $h \cdot a_1 \cdot (ha_1)^{-1}$ , also die zu  $a_1$  gehörige Relation  $A_1 = 1$ . Ist nun

$$A_i = \varphi_i(a_r) \quad (i = 2, 3, \dots, \alpha^1; r = 1, 2, \dots, \alpha^1),$$

so lautet die zugehörige Relation

$$A_i = \varphi_i(A_r).$$

Auf Grund der Relation  $A_1 = 1$  erhält man daraus das System definierender Relationen

$$A_i = \psi_i(A_\mu) \quad (i, \mu = 2, 3, \dots, \alpha^1). \quad (\text{I})$$

Dabei ist  $\psi_i(A_\mu)$  dasjenige Wegeprodukt, das aus  $\varphi_i(a_r)$  durch Fortlassen aller Faktoren  $a_1$  entsteht. Das sind aber gerade die Relationen für den Komplex  $\mathfrak{K}_1^1$ , den man aus  $\mathfrak{K}^1$  erhält, wenn man die Kante  $a_1$  fortläßt und die Ecken  $P$  und  $Q$  identifiziert, also gleichsam die Kante  $a_1$  auf einen

Punkt zusammenzieht. Das System der Hilfswege von  $\mathfrak{K}^1$  geht nämlich durch Streichung von  $a_1$  in ein System von Hilfswegen in  $\mathfrak{K}_1^1$  über, und die zu den Kanten von  $\mathfrak{K}_1^1$  gehörigen geschlossenen Wege  $A'_i$  sind gerade die Wege  $A'_i = \psi_i(a_\mu)$ , so daß man als Relationen der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}_1^1$  erhält

$$A'_i = \psi_i(A'_\mu),$$

also die Relationen (I).  $\mathfrak{K}^1$  und  $\mathfrak{K}_1^1$  haben also dieselbe Fundamentalgruppe.

Gibt es in  $\mathfrak{K}_1^1$  mehr als eine Ecke, so wende man das Verfahren nochmals an und so fort, bis man zu einem Komplexe  $\mathfrak{K}_s^1$  mit einer einzigen Ecke gelangt. Nun ist die Charakteristik  $N = -\alpha^0 + \alpha^1$  offenbar für alle Komplexe  $\mathfrak{K}^1, \mathfrak{K}_1^1, \dots, \mathfrak{K}_s^1$  die gleiche. Die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}_s^1$  ist aber, wie wir sahen, die freie Gruppe von  $N+1$  Erzeugenden. Damit ist das Ergebnis gewonnen: *Die Fundamentalgruppe eines Kantenkomplexes  $\mathfrak{K}^1$  ist die freie Gruppe von  $N+1$  Erzeugenden, wobei  $N$  die Eulersche Charakteristik  $-\alpha^0 + \alpha^1$  des Kantenkomplexes bezeichnet.*

Zu den Flächenkomplexen gehören nach Identifizieren äquivalenter Seiten die Fundamentalpolygone geschlossener Flächen (§ 38). Beispielsweise besteht das Fundamentalpolygon der orientierbaren Ringfläche aus einer Ecke  $O$ , zwei Kanten  $a$  und  $b$  (Meridian- und Breitenkreis) und einem Flächenstück, das in den Kantenweg  $a b a^{-1} b^{-1}$  eingespannt ist. Die Erzeugenden der Fundamentalgruppe entsprechen den Kanten  $a$  und  $b$  und seien mit  $A$  und  $B$  bezeichnet. Hilfswege treten nicht auf, da nur eine Ecke vorhanden ist, die Relationen der Art I werden also zu Identitäten, und von denen der Art II gibt es nur die dem einzigen Flächenstück entsprechende, welche ausdrückt, daß der Randweg des Flächenstückes nullhomotop im Flächenkomplex ist. Sie lautet

$$ABA^{-1}B^{-1} = 1.$$

Diese Relation besagt, daß die beiden Erzeugenden  $A$  und  $B$  vertauschbar sind. *Die Fundamentalgruppe der orientierbaren Ringfläche ist also die freie Abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden.*

Genau die gleiche Überlegung läßt sich auf die übrigen Fundamentalpolygone anwenden und führt zu dem Ergebnis:

**Satz:** *Die Fundamentalgruppe der orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlechte  $h$  (Kugel mit  $h$  Henkeln,  $h = 0, 1, 2, \dots$ ) läßt sich von  $N+2=2h$  Elementen erzeugen, die durch die eine Relation*

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_h B_h A_h^{-1} B_h^{-1} = 1$$

verknüpft sind. *Die Fundamentalgruppe der nichtorientierbaren Fläche vom Geschlechte  $k$  (Kugel mit  $k$  Kreuzhauben,  $k = 1, 2, \dots$ ) hat  $N+2=k$  Erzeugende und die eine Relation*

$$A_1^2 A_2^2 \dots A_k^2 = 1.$$

Bis auf die Fundamentalgruppe der Kugelfläche ( $h = 0$ ), die aus dem Einselemente allein besteht, und die der projektiven Ebene ( $k = 1$ ), die die Ordnung 2 hat, sind alle Fundamentalgruppen geschlossener Flächen unendlich, denn sie haben eine Bettische Zahl (S. 309) vom Werte  $N+2=2h>0$  im orientierbaren und  $N+1=k-1>0$  im nichtorientierbaren Falle.

**Aufgaben:** 1. Man bestimme die Fundamentalgruppen der berandeten Flächen.

2. Man zeige auf Grund der 1. Aufgabe von § 38, daß die Gruppe mit der einen Relation

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_h B_h A_h^{-1} B_h^{-1} = 1$$

isomorph ist zur Gruppe mit der einen Relation

$$C_1 C_2 \dots C_{2h} C_{2h}^{-1} C_{2-1}^{-1} \dots C_{2-k}^{-1} = 1.$$

#### § 48. Fundamentalgruppe und Homologiegruppe.

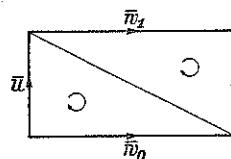
Das Urbild  $\bar{w}$  eines Weges  $w$  in einem Komplexe  $\mathfrak{K}^n$  ist ein geradliniges 1-Simplex, das stetig auf  $w$  abgebildet wird.  $w$  stellt daher zugleich ein orientiertes singuläres Simplex und damit eine singuläre 1-Kette dar. Benutzt man an Stelle von  $\bar{w}$  ein anderes Urbild  $\bar{w}'$  von  $w$ , so erhält man auf dieselbe Weise ein singuläres Simplex  $w'$ , das im allgemeinen verschieden von  $w$  ist, während  $w$  und  $w'$  als Wege übereinstimmen. Das liegt daran, daß wir für die Gleichheitsdefinition der Wege topologische Abbildungen der Urbilder zugelassen haben, für die Gleichheitsdefinition der singulären Simplexe dagegen nur lineare. Man kann aber zeigen, daß die unter Umständen verschiedenen singulären Simplexe  $w$  und  $w'$  homologe Ketten darstellen. Es gibt nämlich eine topologische Abbildung von  $\bar{w}$  auf  $\bar{w}'$  mit Erhaltung der Orientierung, so daß zugeordnete Punkte denselben Bildpunkt im Komplexe  $\mathfrak{K}^n$  haben. Dabei geht  $\bar{w}$  in ein orientiertes singuläres Simplex  $\bar{w}_1$  auf  $\bar{w}'$  über, das denselben Rand wie  $\bar{w}'$  hat. Also ist  $\bar{w}' - \bar{w}_1 \sim 0$ , wie jede geschlossene 1-Kette auf einer Strecke. Diese Homologie bleibt aber bei Abbildung der Strecke  $\bar{w}'$  auf  $w$  bestehen (S. 98), und da hierbei  $\bar{w}_1$  in  $w$  und  $\bar{w}'$  in  $w'$  übergeht, so ist  $w \sim w'$ . Jedem Weg  $w$  entspricht hiernach eine ebenso bezeichnete singuläre 1-Kette, die zwar selbst von der Auswahl des Urbildes  $\bar{w}$  von  $w$  abhängt, deren Homologieklassse aber eindeutig bestimmt ist. Man kann daher von einander homologen Wegen reden. Ist ein Weg geschlossen, so ist es auch die zugehörige singuläre Kette.

**Satz I:** *Dem Produkt  $w = w_1 w_2$  zweier Wege entspricht die Summe der zugeordneten Ketten, also die Kette  $w \sim w_1 + w_2$ .*

**Beweis:** Urbild von  $w_1 w_2$  ist eine aus zwei Teilstrecken  $\bar{w}_1$  und  $\bar{w}_2$  zusammengesetzte Strecke  $\bar{w}$ . Es ist  $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \sim \bar{w}$  auf der Strecke, eine Homologie, die sich auf die Bilder in  $\mathfrak{K}^n$  überträgt.

**Satz II:** *Sind zwei Wege  $w_0$  und  $w_1$  homotop, so sind sie auch homolog (aber nicht notwendig umgekehrt).*

Beweis: Sind  $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{u}, \bar{v}$  die Seiten des zur Deformation von  $w_0$  in  $w_1$  gehörigen Deformationsrechteckes (Fig. 93), so besteht auf diesem Rechteck die Homologie



$$\bar{w}_1 - \bar{w}_0 + \bar{u} - \bar{v} \sim 0.$$

Daher gilt auch für die Bilder

$$w_1 - w_0 + u - v \sim 0.$$

Da sich aber  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  in Punkte abbilden, so sind  $u$  und  $v$  ausgeartete singuläre Simplexe (S. 93), so daß  $w_1 - w_0 \sim 0$  übrig bleibt. — Daß homologe Wege nicht homotop sein müssen, dafür ist der Taillenschnitt  $l$  der Doppelringfläche ein Beispiel, da er nullhomolog, aber nicht nullhomotop ist (S. 174).

Auf einem zusammenhängenden Komplexe  $\mathfrak{K}^n$  ist hiernach jeder Wegeklasse eine Homologieklasse eindeutig zugeordnet, und da dem Produkt zweier Wegeklassen die Summe der zugeordneten Homologieklassen entspricht, so liegt eine homomorphe Abbildung  $\chi$  der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  in die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^1$  vor. Um diesen Homomorphismus näher zu untersuchen, genügt es, Kantenwege bzw. simpliziale Ketten auf einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^n$  zu betrachten. Als Anfangspunkt der geschlossenen Wege wird eine Ecke  $O$  gewählt. Da man eine beliebige geschlossene simpliziale 1-Kette durch Hinzufügen von hin und zurück durchlaufenden Kantenwegen zu einem geschlossenen von  $O$  ausgehenden Kantenwege machen kann, so ist jede Homologieklasse Bild von mindestens einer Wegeklasse, d. h.  $\chi$  ist ein Homomorphismus von  $\mathfrak{F}$  auf  $\mathfrak{H}^1$ . Er ist daher durch den Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{F}$  charakterisiert, der den Nullelementen von  $\mathfrak{H}^1$  entspricht. Wir behaupten, daß  $\mathfrak{N}$  die Kommutatorgruppe von  $\mathfrak{F}$  ist.

Beweis: Sicher geht jeder Kommutator  $F_1 F_2 F_1^{-1} F_2^{-1}$  von  $\mathfrak{F}$  in das Nullelement von  $\mathfrak{H}^1$  über, denn  $\mathfrak{H}^1$  ist abelsch. Es ist nur noch zu zeigen, daß auch umgekehrt jedes Element aus  $\mathfrak{N}$ , d. h. die Wegeklasse eines beliebigen nullhomologen Weges  $w$ , zur Kommutatorgruppe gehört. Ist also

$$U^2 = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i E_i^2$$

eine 2-Kette mit dem Rande  $w$ , so wähle man zu jedem Dreiecke  $E_i^2$  einen Kantenweg  $r_i$ , der von  $O$  aus auf einem Wege  $u_i$  bis an eine Ecke von  $E_i^2$  heranführt, dann  $E_i^2$  umläuft und längs  $u_i^{-1}$  nach  $O$  zurückgeht. Dabei soll die Umlaufung von  $E_i^2$  in dem Sinne erfolgen, daß  $r_i$  als Kette betrachtet gerade der Rand von  $E_i^2$  wird. Da jeder Weg  $r_i$  nullhomotop ist, so ist der Kantenweg  $w$  in den Kantenweg

$$w' = w(r_1^{k_1} \dots r_\alpha^{k_\alpha})^{-1}$$

deformierbar. Da ferner

$$r_1^{k_1} \dots r_\alpha^{k_\alpha}$$

ebenso wie  $w$  Rand von  $U^2$  ist, so sind beide Wege als Ketten betrachtet einander gleich. Also ist  $w'$  die Kette 0 und durchläuft daher jedes 1-Simplex in beiden Richtungen gleich oft. Man kann nun

$$w' = f(a_i)$$

weiter durch kombinatorische Deformationen in den Kantenweg

$$W' = f(A_j)$$

überführen, wenn  $A_j$  den zu  $a_j$  gehörigen geschlossenen Kantenweg bedeutet (§ 46). In  $W'$  kommt jedes  $A_j$  gleich oft mit dem Exponenten +1 und -1 vor, so daß  $W'$  beim Abelschmachen der Fundamentalgruppe in das Nullelement übergeht. D. h. die Wegeklasse von  $W'$ , das ist aber auch die von  $w'$  und  $w$ , gehört der Kommutatorgruppe von  $\mathfrak{F}$  an.

Damit ist bewiesen:

Satz III: Die Homologiegruppe der Dimension 1,  $\mathfrak{H}^1$ , eines zusammenhängenden Komplexes  $\mathfrak{K}^n$  ist die abelsch gemachte Fundamentalgruppe (Faktorgruppe der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  nach ihrer Kommutatorgruppe).

Man bestätigt diesen Satz leicht an den geschlossenen Flächen durch Vergleich der Ergebnisse von § 41 und § 47.

Wir hatten einen nullhomotopen Weg als einen solchen charakterisiert, in den sich ein singuläres Elementarflächenstück einspannen läßt. Eine ähnliche Charakterisierung können wir jetzt für die nullhomologen geschlossenen Wege geben.

Satz IV: Ein geschlossener Weg  $w$  ist dann und nur dann nullhomolog, wenn man in ihn eine orientierbare berandete Fläche (mit dem Rand  $w$ ) einspannen kann, die unter Umständen mit Singularitäten im Komplex liegt.

Beweis: Nach dem eben bewiesenen Satze gehört  $w$ , als Element der Fundamentalgruppe betrachtet, der Kommutatorgruppe an und ist daher deformierbar in ein Produkt von Kommutatoren

$$u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \dots u_h v_h u_h^{-1} v_h^{-1}.$$

Daher ist der geschlossene Weg

$$w^{-1} u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \dots u_h v_h u_h^{-1} v_h^{-1}$$

nullhomotop, und man kann ein Elementarflächenstück in ihn einspannen, dessen Urbild ein  $(4h+1)$ -Eck mit dem Rande

$$\bar{w}^{-1} \bar{u}_1 \bar{v}_1 \bar{u}_1^{-1} \bar{v}_1^{-1} \dots \bar{u}_h \bar{v}_h \bar{u}_h^{-1} \bar{v}_h^{-1}$$

ist. Es schließt sich bei der Abbildung in  $\mathfrak{K}^n$  zu einer berandeten Fläche vom Geschlechte  $h$ , die — unter Umständen mit Singularitäten — in dem Komplexe darin liegt und deren Rand der Weg  $w$  ist (für den Fall  $h=1$  vgl. Fig. 6 bis 8 von S. 5). Wenn man umgekehrt in einen Weg  $w$

eine solche Fläche einspannen kann, d. h. eine berandete Fläche stetig in den Komplex  $\mathbb{R}^n$  so abbilden kann, daß der Rand des einzigen Loches in  $w$  übergeht, so ist  $w$  nullhomolog. Denn wegen der Orientierbarkeit der eingespannten Fläche gibt es eine singuläre 2-Kette auf ihr, deren Rand gerade der als 1-Kette aufgefaßte Weg  $w$  ist.

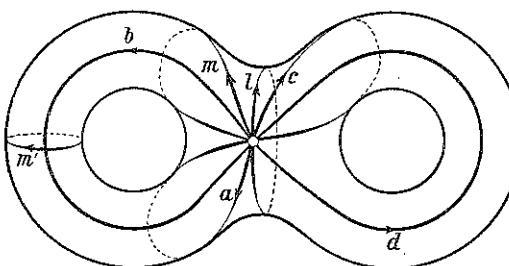


Fig. 94.

$l$  repräsentiert wird, nämlich  $L = (ABA^{-1}B^{-1})^{-1}$ , ein Kommutator ist. Andererseits läßt sich kein Elementarflächenstück in  $l$  einspannen, da dieses Element in der Fundamentalgruppe nicht gleich dem Einselemente ist.

Dies sieht man so ein: Die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  hat die einzige definierende Relation

$$ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1} = 1. \quad (1)$$

Fügt man die Zusatzrelationen

$$A = D, \quad B = C \quad | \quad (2)$$

hinzu, so erhält man eine Faktorgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  (§ 83). Elimination von  $C$  und  $D$  zeigt, daß  $\tilde{\mathfrak{F}}$  die freie Gruppe von zwei Erzeugenden  $A$  und  $B$  ist. In  $\tilde{\mathfrak{F}}$  besteht daher nicht die Relation  $ABA^{-1}B^{-1} = 1$ ; um so weniger kann diese Relation in  $\tilde{\mathfrak{F}}$  richtig sein.

Der Taillenschnitt ist also nullhomolog, aber nicht nullhomotop auf der Doppelringfläche.

#### § 49. Freie Deformation geschlossener Wege.

Bisher haben wir die geschlossenen Wege immer mit Festhaltung des Anfangspunktes deformiert. Gelegentlich müssen wir aber auch Deformationen betrachten, bei denen der Anfangspunkt mitbewegt wird. Solche Deformationen mögen *freie Deformationen* heißen, im Gegensatz zu den bisher betrachteten *gebundenen Deformationen*. Wenn von Deformation eines geschlossenen Weges schlechthin die Rede ist, so ist stets eine gebundene Deformation gemeint.

Die genaue Definition der freien Deformation lautet so:

Zwei geschlossene Wege  $w_0$  und  $w_1$  auf einem Komplex  $\mathbb{R}^n$  heißen frei ineinander deformierbar oder *frei homotop*, wenn man ein Deformationsrechteck  $\bar{w} \times t$  stetig so in  $\mathbb{R}^n$  abbilden kann, daß die Seite  $\bar{w} \times 0 = \bar{w}_0$  in  $w_0$  und die Seite  $\bar{w} \times 1 = \bar{w}_1$  in  $w_1$  übergeht, während sich je zwei entsprechende Punkte  $\bar{P} \times t$  und  $\bar{Q} \times t$  der beiden anderen Seiten in denselben Punkt von  $\mathbb{R}^n$  abbilden.

Die beiden orientierten Seiten  $\bar{P} \times t$  und  $\bar{Q} \times t$  gehen also in denselben Weg  $v$  über, der den Anfangspunkt  $P_0$  von  $w_0$  mit dem Anfangspunkten  $P_1$  von  $w_1$  verbindet. Verschiebt man die Seite  $\bar{w} \times 0$  parallel zu sich über das Rechteck in die Gegenseite, so erleidet der Bildweg gerade die freie Deformation, und der Anfangspunkt  $P_0$  von  $w_0$  durchläuft den Weg  $v$ .

Die Beziehung zwischen den freien und gebundenen Deformationen wird hergestellt durch den folgenden

**Hilfssatz:** Wenn bei einer freien Deformation eines geschlossenen Weges  $w_0$  in einen Weg  $w_1$  der Anfangspunkt  $P_0$  von  $w_0$  einen Weg  $v$  beschreibt, so ist  $w_0$  in  $v w_1 v^{-1}$  gebunden deformierbar. — Ist umgekehrt ein Weg  $w_0$  in einen Weg  $v w_1 v^{-1}$  gebunden deformierbar, so sind  $w_0$  und  $w_1$  frei homotop.

**Beweis:** Wir betrachten zwei Rechtecke  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{T}$ , deren Ränder wie in der Fig. 95 eingeteilt und bezeichnet sind. Man kann sich  $\mathfrak{T}$  dadurch

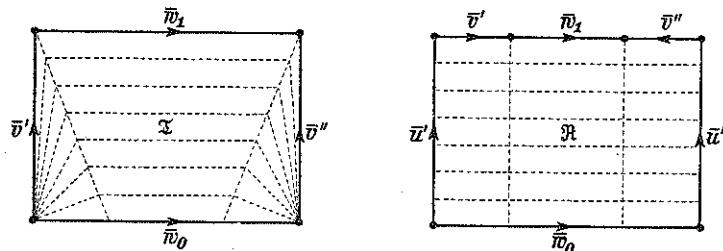


Fig. 95.

aus  $\mathfrak{R}$  entstanden denken, daß man die beiden Seiten  $\bar{w}'$  und  $\bar{w}''$  in Punkte zusammenschrumpfen läßt, d. h. alle ihre Punkte identifiziert. Dies geschieht durch eine (in der Figur angedeutete) stetige Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{R}$  auf  $\mathfrak{T}$ , bei der die Wege  $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{v}', \bar{v}''$  in die gleich bezeichneten Wege von  $\mathfrak{T}$  übergehen. Ist  $w_0$  in  $w_1$  frei deformierbar und beschreibt der Anfangspunkt von  $w_0$  den Weg  $v$ , so gibt es eine stetige Abbildung  $\psi$  von  $\mathfrak{T}$  in  $\mathbb{R}^n$ , bei der  $\bar{w}_0$  in  $w_0$ ,  $\bar{w}_1$  in  $w_1$  und die beiden anderen Seiten  $\bar{v}'$  und  $\bar{v}''$  in  $v$  übergehen. Die Abbildung  $\psi \varphi = \chi$  führt dann die Seiten  $\bar{w}'$  und  $\bar{w}''$  von  $\mathfrak{R}$  in Punkte und die beiden anderen Seiten in die Wege  $w_0$  und  $v w_1 v^{-1}$  über, was gleichbedeutend mit gebundener Deformierbarkeit dieser beiden Wege ist. — Ist umgekehrt  $w_0$  in  $v w_1 v^{-1}$  gebunden deformierbar, so ist die Abbildung  $\chi$  von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathbb{R}^n$  vorgegeben, und durch die Gleichung  $\chi = \psi \varphi$  ist eine nach § 8 Satz IV stetige Abbildung  $\psi$  von  $\mathfrak{T}$  definiert, die  $\bar{w}_0$  und  $\bar{w}_1$  in  $w_0$  und  $w_1$ , die beiden anderen Seiten aber in  $v$  überführt, q. e. d.

Wenn zwei Wege mit gemeinsamem Anfangspunkt gebunden homotop sind, so sind sie erst recht frei homotop. Daß die Umkehrung hier von nicht richtig ist, sieht man an den beiden Wegen  $m$  und  $a$  der Figur 94. Es ist  $m$  frei über die Lage  $m'$  in  $a$  deformierbar. Dagegen sind  $m$  und  $a$  nicht homotop; denn  $m$  ist homotop  $b a b^{-1}$ , und die

Wegeklassen von  $m$  und  $a$ , nämlich  $BAB^{-1}$  und  $A$ , sind verschieden, weil

$$A(BAB^{-1})^{-1} = ABA^{-1}B^{-1} \neq 1$$

ist, was am Ende von § 48 bewiesen wurde.

Allgemein gilt der

**Satz:** Zwei von  $O$  ausgehende geschlossene Wege  $w_0$  und  $w_1$  sind dann und nur dann frei homotop, wenn sie konjugierte Elemente  $W_0$  und  $W_1$  der Fundamentalgruppe repräsentieren, wenn es also ein Element  $V$  gibt derart, daß  $W_0 = VW_1V^{-1}$  ist. Alle Wege, die in eine Klasse konjugierter Elemente der Fundamentalgruppe gehören, bilden also eine Klasse frei ineinander deformierbarer Wege.<sup>28</sup>

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes.

Wir überblicken noch einmal die drei möglichen Klasseneinteilungen der von einem festen Punkt  $O$  ausgehenden geschlossenen Wege:

1. Die engste Klasseneinteilung ist die in Wegeklassen. Zwei Wege gehören derselben Wegeklasse an, wenn sie unter Festhaltung von  $O$  ineinander deformierbar sind. Die Wegeklassen bilden die Elemente der Fundamentalgruppe.

2. Alle Wege einer Klasse konjugierter Elemente der Fundamentalgruppe machen eine Klasse frei ineinander deformierbarer Wege aus. Diese Klassen bilden im allgemeinen keine Gruppe.

3. Alle Wege einer Restklasse der Fundamentalgruppe nach ihrer Kommutatorgruppe machen eine Klasse homologer Wege aus. Diese Homologieklassen bilden die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^1$ .<sup>29</sup>

## § 50. Fundamentalgruppe und Deformation von Abbildungen.

Bei einer stetigen Abbildung  $\varphi$  eines zusammenhängenden Komplexes  $\mathfrak{K}^n$  in einen zusammenhängenden Komplex  $K^m$  erleidet die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{K}^n$  eine homomorphe Abbildung  $\Phi$  in die Fundamentalgruppe  $F$  von  $K^m$ .  $\Phi$  ist nur bis auf innere Automorphismen von  $F$  bestimmt (§ 42). Wir beweisen jetzt, daß sich dieser Homomorphismus bei Deformation der Abbildung  $\varphi$  nicht ändert. Geht nämlich der Anfangspunkt  $O$  von  $\mathfrak{F}$  durch  $\varphi$  in den Anfangspunkt  $\Omega$  von  $F$  über und beschreibt  $\Omega$  bei der Deformation von  $\varphi$  in die Abbildung  $\varphi_1$  einen Weg  $v$  mit dem Endpunkt  $\Omega_1$ , sind ferner  $w'$  und  $w'_1$  die Bilder eines geschlossenen, von  $O$  ausgehenden Weges  $w$  bei den Abbildungen  $\varphi$  und  $\varphi_1$ , so erfährt  $w'$  bei der Deformation von  $\varphi$  in  $\varphi_1$  eine freie Deformation in  $w'_1$ . Nach dem Hilfssatz § 49 sind dann die Wege  $w'$  und  $vw'_1v^{-1}$  homotop.  $w$  bildet sich also bei  $\varphi$  und  $\varphi_1$  in dieselbe bis auf innere Automorphismen bestimmte Wegeklasse von  $F$  ab.

Insbesondere erfährt die Fundamentalgruppe eines Komplexes  $\mathfrak{K}^n$  bei Deformation von  $\mathfrak{K}^n$  in sich einen inneren Automorphismus.

## § 51. Fundamentalgruppe in einem Punkte.

Wir haben früher (§ 32 Satz III) gesehen, daß die Homologiegruppen des Umgebungskomplexes eines Punktes  $P$  für alle simplizialen Zerlegungen von  $\mathfrak{K}^n$  die gleichen sind. Dieser Satz gilt auch für die Fundamentalgruppe.

**Satz:** Sind  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  die Außenränder zweier Simplexsterne mit dem Mittelpunkte  $P$  auf einem Komplex  $\mathfrak{K}^n$ , so haben  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  dieselben Fundamentalgruppen, vorausgesetzt, daß die Simplexsterne Umgebungen von  $P$  in  $\mathfrak{K}^n$  sind und daß  $\mathfrak{U}_1$  (und folglich auch  $\mathfrak{U}_2$ ) ein zusammenhängender Komplex ist. Diese Fundamentalgruppe heißt die Fundamentalgruppe im Punkte  $P$ .

**Beweis:** Nach § 32 Satz I gibt es eine stetige Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{U}_1$  in  $\mathfrak{U}_2$  und eine stetige Abbildung  $\psi$  von  $\mathfrak{U}_2$  in  $\mathfrak{U}_1$ , so daß die Selbstabbildungen  $\psi\varphi$  und  $\varphi\psi$  von  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  in die Identität deformierbar sind. Die zu  $\varphi$  und  $\psi$  gehörigen homomorphen Abbildungen  $\Phi$  und  $\Psi$  der Fundamentalgruppen  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  von  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  sind daher nach § 50 so beschaffen, daß die homomorphen Selbstabbildungen  $\Psi\Phi$  und  $\Phi\Psi$  von  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  innere Automorphismen sind. Dann ist aber  $\Phi$  eine eindeutige Abbildung von  $\mathfrak{F}_1$  auf  $\mathfrak{F}_2$ , also ein Isomorphismus. Wäre nämlich  $\Phi(F'_1) = \Phi(F''_1)$  für zwei verschiedene Elemente  $F'_1$  und  $F''_1$  aus  $\mathfrak{F}_1$ , so wäre auch  $\Psi\Phi(F'_1) = \Psi\Phi(F''_1)$ , was bei einem inneren Automorphismus von  $\mathfrak{F}_1$  nicht sein kann. Ist ferner  $F_2$  dasjenige Element von  $\mathfrak{F}_2$ , das bei dem Automorphismus  $\Phi\Psi$  von  $\mathfrak{F}_2$  in ein vorgegebenes Element  $F'_2$  übergeht, so geht das Element  $\Psi(F'_2)$  von  $\mathfrak{F}_1$  bei dem Homomorphismus  $\Phi$  in  $F'_2$  über, d. h. jedes Element von  $\mathfrak{F}_2$  ist Bild eines Elementes von  $\mathfrak{F}_1$ . Damit ist die Eindeutigkeit von  $\Phi$  bewiesen.

## § 52. Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Komplexes.

Häufig läßt sich die Bestimmung der Fundamentalgruppe eines Komplexes  $\mathfrak{K}$  dadurch vereinfachen, daß man  $\mathfrak{K}$  in zwei Teilkomplexe mit bekannten Fundamentalgruppen zerlegt.  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$  seien zwei zusammenhängende Teilkomplexe eines zusammenhängenden  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\mathfrak{K}$ ; jedes Simplex von  $\mathfrak{K}$  soll mindestens einem der beiden Teilkomplexe angehören. Der Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$ , der wegen des vorausgesetzten Zusammenhangs von  $\mathfrak{K}$  nicht leer ist, sei ebenfalls zusammenhängend.

$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'', \mathfrak{F}_D$  seien die Fundamentalgruppen von  $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$  und  $\mathfrak{D}$ . Wir wählen als Anfangspunkt für die geschlossenen Wege einen Punkt  $O$  von  $\mathfrak{D}$ . Dann ist jeder geschlossene Weg von  $\mathfrak{D}$  zugleich ein Weg von  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$ . Somit entspricht jedem Element von  $\mathfrak{F}_D$  ein Element von  $\mathfrak{F}'$  und eines von  $\mathfrak{F}''$ . Dann gilt der

**Satz I:**  $\mathfrak{F}$  ist eine Faktorgruppe des freien Produktes  $\mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}''$ ; man erhält  $\mathfrak{F}$  aus dem freien Produkt, wenn man je zwei Elemente von  $\mathfrak{F}'$

und  $\mathfrak{F}''$ , die demselben Elemente von  $\mathfrak{K}$  entsprechen, zusammenfallen läßt, also durch ihre Gleichsetzung eine neue Relation zwischen den Erzeugenden von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$  hinzufügt.

Beweis: Gemäß der allgemeinen Vorschrift zur Berechnung der Fundamentalgruppe ist jede Ecke von  $\mathfrak{K}$  durch einen Hilfsweg mit  $O$  zu verbinden. Gehört die Ecke zu  $\mathfrak{D}$ , so kann man wegen des vorausgesetzten Zusammenhanges von  $\mathfrak{D}$  annehmen, daß der Hilfsweg ganz in  $\mathfrak{D}$  verläuft. Ferner soll der Hilfsweg ganz in  $\mathfrak{K}'$  bzw.  $\mathfrak{K}''$  verlaufen, wenn die Ecke in  $\mathfrak{K}'$  bzw.  $\mathfrak{K}''$  liegt.

Ein Simplex beliebiger Dimension von  $\mathfrak{K}$  gehört entweder zu  $\mathfrak{K}'$  (aber nicht zu  $\mathfrak{K}''$ ) oder zu  $\mathfrak{K}''$  (aber nicht zu  $\mathfrak{K}'$ ), oder zu  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{K}''$ , d. h. zu  $\mathfrak{D}$ . Dementsprechend zerfallen die sämtlichen Simplexe von  $\mathfrak{K}$  in drei elementfremde Teilmengen  $\bar{\mathfrak{K}}$ ,  $\bar{\mathfrak{K}}''$ ,  $\mathfrak{D}$ .

Die Erzeugenden  $A_i$  von  $\mathfrak{F}$  lassen sich den Kanten  $a_i$  von  $\mathfrak{K}$  umkehrbar eindeutig zuordnen (S. 166). Je nachdem  $a_i$  zu  $\bar{\mathfrak{K}}$ ,  $\bar{\mathfrak{K}}''$  oder  $\mathfrak{D}$  gehört, taufen wir die zugehörige Erzeugende  $A_i$  von  $\mathfrak{F}$  in

$$\bar{K}_i', \bar{K}_i'' \text{ oder } D_i$$

um.

Die Relationen der Art I und II von  $\mathfrak{F}$  entsprechen umkehrbar eindeutig den Kanten bzw. den Dreiecken von  $\mathfrak{K}$ . Auch die Relationen sollen in drei Klassen geteilt werden, je nachdem die zu der Relation gehörige Kante (das zugehörige Dreieck) in  $\bar{\mathfrak{K}}$ ,  $\bar{\mathfrak{K}}''$  oder  $\mathfrak{D}$  liegt. Die Relationen dieser drei Klassen lauten dann

$$R'_i(D_j, \bar{K}_j') = 1 \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (\bar{\mathfrak{K}}')$$

$$R''_i(D_j, \bar{K}_j'') = 1 \quad (i=1, 2, \dots, s'') \quad (\bar{\mathfrak{K}}'')$$

$$R^{(\mathfrak{D})}_i(D_j) = 1 \quad (i=1, 2, \dots, \delta). \quad (\mathfrak{D})$$

Wegen der besonderen Wahl der Hilfswege fehlen in  $R'_i$  die  $\bar{K}_j''$ , in  $R''_i$  die  $\bar{K}_j'$  und in  $R^{(\mathfrak{D})}_i$  beide.

Die Relationen ( $\mathfrak{D}$ ) sind offenbar die definierenden Relationen der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{D}$ . Die Relationen ( $\mathfrak{D}$ ) + ( $\bar{\mathfrak{K}}'$ ) bzw. ( $\mathfrak{D}$ ) + ( $\bar{\mathfrak{K}}''$ ) definieren entsprechend die Fundamentalgruppen  $\mathfrak{F}'$  bzw.  $\mathfrak{F}''$  von  $\bar{\mathfrak{K}}'$  bzw.  $\bar{\mathfrak{K}}''$ . Endlich sind ( $\mathfrak{D}$ ) + ( $\bar{\mathfrak{K}}'$ ) + ( $\bar{\mathfrak{K}}''$ ) die definierenden Relationen von  $\mathfrak{K}$ ; sie können offenbar durch das folgende System von Relationen ersetzt werden:

$$R'_i(D_j, \bar{K}_j') = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ R^{(\mathfrak{D})}_i(D_j) = 1 \end{array} \right\} \quad (\mathfrak{F}')$$

$$R''_i(D_j, \bar{K}_j'') = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ R^{(\mathfrak{D})}_i(D_j) = 1 \end{array} \right\} \quad (\mathfrak{F}'')$$

$$D'_j = D''_j \text{ für alle } j. \quad (\mathfrak{d})$$

Die Relationen ( $\mathfrak{F}'$ ) zusammen mit ( $\mathfrak{F}''$ ) sind die Relationen des freien Produktes von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$  (§ 85). Die Relationen ( $\mathfrak{d}$ ) bedeuten, daß zwei

Elemente  $D'_j$  und  $D''_j$  von  $\mathfrak{F}'$  bzw.  $\mathfrak{F}''$ , die demselben Elemente  $D_j$  von  $\mathfrak{D}$  entsprechen, zu identifizieren sind.

Besonders einfach lautet der Satz, wenn sich die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{D}$  auf das Einselement reduziert. Dann ist die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}$  das freie Produkt der Fundamentalgruppen von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$ .

Macht man in dem Satze I alle Fundamentalgruppen abelsch, so ergibt sich mit Rücksicht auf den Satz III von § 48:

Satz II: Die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^1$  von  $\mathfrak{K}$  ist eine Faktorgruppe des direkten Produktes der Homologiegruppen ' $\mathfrak{H}^1$ ' und '' $\mathfrak{H}^1$  von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$ . Man erhält sie, wenn man je die Elemente von ' $\mathfrak{H}^1$ ' und '' $\mathfrak{H}^1$  gleichsetzt, die demselben Elemente der Homologiegruppe  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}^1$  von  $\mathfrak{D}$  entsprechen.

Den entsprechenden Satz für die Homologiegruppen höherer Dimension leiten wir nicht ab; er lautet weniger einschließlich.

Als eine Anwendung von Satz I bestimmen wir die Gruppe eines Torusknotens. Um den Torusknoten zu erklären, ziehen wir auf einer Zylinderfläche von endlicher Höhe im Zahlenraume  $\mathbb{N}^3$   $m$  Mantellinien in gleichen Winkelabständen  $\frac{2\pi}{m}$ . Den Zylinder biegen wir zur Ringfläche zusammen. Zuvor aber verdrehen wir die Grund- und Dachfläche um  $\frac{2\pi n}{m}$ , wie die Fig. 96 für  $m = 3$  und  $n = 5$  es zeigt, und nehmen die Verbiegung zur Ringfläche so vor, daß Punkte, die nach der Verdrehung übereinander liegen, zur Deckung kommen. Wenn dann  $m$  und  $n$  teilerfremde ganze Zahlen sind, so schließen sich die  $m$  Mantellinien auf der Ringfläche zu einer einzigen geschlossenen Kurve, die wir den zu den Zahlen  $m, n$  gehörigen Torusknoten nennen.\*)

Nunmehr bohren wir den Knoten aus dem  $\mathbb{N}^3$  aus, d. h. wir lassen eine kleine Kugel mit ihrem Mittelpunkt auf dem Knoten gleiten und entfernen die Punkte aus dem  $\mathbb{N}^3$ , die die inneren Punkte dieser Kugel überstreichen. Den  $\mathbb{N}^3$  schließen wir durch einen einzigen uneigentlichen Punkt zu der 3-Sphäre  $\mathbb{S}^3$  (§ 14). Der von  $\mathbb{S}^3$  nach Ausbohrung des Knotens übrigbleibende Teil ist ein berandeter dreidimensionaler Komplex  $\mathfrak{K}$ , der einen um den Knoten gelegten dünnen Schlauch (eine Ringfläche) zum Rande hat, was sich ebenso wie die hier anschaulich beschriebenen Prozesse leicht begrifflich formulieren läßt. Der Komplex  $\mathfrak{K}$  heißt der Außenraum des Knotens und seine Fundamentalgruppe die Knotengruppe. Zur Bestimmung der Knotengruppe zerlegen wir  $\mathbb{N}^3$  durch die Ringfläche, auf der der Torusknoten liegt, in zwei Teile. Der Schlauch zerfällt dadurch seiner Länge nach in zwei Halbschläuche,  $\mathfrak{K}$  dagegen nach Aufgabe 4 von § 14 in zwei Vollringe, aus denen je eine sie umwindende Rille von halbkreisförmigem Profil ausgefräst ist. Den „im Endlichen“ gelegenen Vollring ernennen wir zum Teilkomplexe  $\mathfrak{K}'$ , den andern, der den uneigentlichen Punkt des  $\mathbb{N}^3$  enthält, zum Teilkomplexe  $\mathfrak{K}''$ . Der Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von beiden ist ein verwundener Kreisring, der die nicht ausgerillten Teile der Ringfläche überdeckt (Fig. 97). Die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}'$  von  $\mathfrak{K}'$  ist nach § 46 die freie Gruppe von einer Erzeugenden  $A$  (im Beweise von Satz I mit  $\mathfrak{F}_1'$  bezeichnet), die von  $\mathfrak{F}''$  die freie Gruppe von einer Erzeugenden  $B$ .

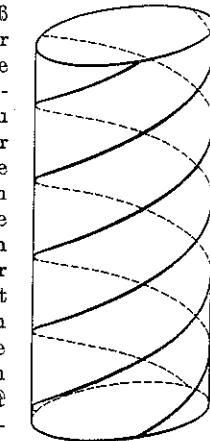


Fig. 96.

\*) Der Torusknoten 2, 3 ist nach der Kreislinie der einfachste Knoten überhaupt, die Kleeblattschlinge, die in Fig. 2 S. 2 dargestellt ist.

$A$  wird von der Seele des Vollringes  $\mathfrak{K}'$  repräsentiert, die noch so verbogen wird, daß sie an einen Punkt  $O$  der Mittellinie des Kreisringes  $\mathfrak{D}$ , den Anfangspunkt, sich anlegt.  $B$  ist die Seele des anderen Vollringes  $\mathfrak{K}''$ , also etwa die Rotationsachse der Ringfläche, die ebenfalls so ausgebogen wird, daß sie durch den Punkt  $O$  geht.

Als Erzeugende der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{D}$ , die gleichfalls die freie Gruppe von einer Erzeugenden ist (S. 168), nehmen wir die Mittellinie  $D$  des Kreisringes. Die Gruppe  $\mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}''$  ist die freie Gruppe der beiden Erzeugenden  $A$  und  $B$ .  $D$  ist als Element von  $\mathfrak{F}'$  gleich  $A^m$ , als Element von  $\mathfrak{F}''$  aber gleich  $B^n$  bei geeigneter Orientierung der Wege  $A$  und  $B$ : Man erhält daher die Knotengruppe des Torusknotens  $m, n$ , wenn man zwei Erzeugenden die Relation

$$A^m = B^n$$

aufstellt. — Hieraus folgt nebenbei, daß ein Torusknoten, für den  $m > 1$  und  $n > 1$  ist, wie z. B. die Kleeblattschlinge, in eine Kreislinie nicht durch eine isotope Deformation des Raumes übergeführt werden kann, da seine Knotengruppe nicht die freie Gruppe von einer Erzeugenden ist.<sup>21</sup>

**Aufgaben:** 1. Bohrt man aus dem  $\mathbb{R}^4$ , der durch einen unendlich fernen Punkt zur 4-Sphäre  $S^4$  geschlossen sei, einen aus geradlinigen Strecken bestehenden doppelpunktfreien geschlossenen Kantenzug aus, so besteht die Fundamentalgruppe des Außenraumes aus dem Einselement. [Man wende Satz I auf  $S^4$  an, die in die beiden Teilkomplexe: Außenraum  $\mathfrak{U}$  und Ausbohrung  $\mathfrak{B}$ , zerlegt ist.  $\mathfrak{B}$  ist das topologische Produkt aus Kreislinie und dreidimensionaler Vollkugel, der Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche. Die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{U}$  ändert sich nicht durch Schließung mit  $\mathfrak{B}$ . Warum versagt der Schluß in drei Dimensionen?]

2. Einen vierdimensionalen homogenen Komplex herzustellen, dessen Fundamentalgruppe die freie Gruppe von  $r$  Erzeugenden ist. [Aus  $r$  topologischen Produkten von Kreislinie und 3-Sphäre wird je eine vierdimensionale kleine Vollkugel ausgebohrt und mit Hilfe der  $r$ -fach gelochten 4-Sphäre ein Komplex von der verlangten Beschaffenheit zusammengesetzt.]

3. Einen vierdimensionalen homogenen Komplex mit beliebig vorgegebener Fundamentalgruppe von endlich vielen Erzeugenden herzustellen. [Bohrt man aus einem homogenen Komplex  $\mathbb{R}^4$  einen doppelpunktfreien Weg  $w$  aus und schließt den entstehenden berandeten Komplex  $\widetilde{\mathbb{R}}^4$  mit einem topologischen Produkte aus Kugelfläche und Elementarflächenstück, so entsteht ein homogener Komplex  $\mathbb{R}^4$ , dessen Fundamentalgruppe aus derjenigen von  $\mathbb{R}^4$  durch die Zusatzrelation  $w=1$  hervorgeht.]

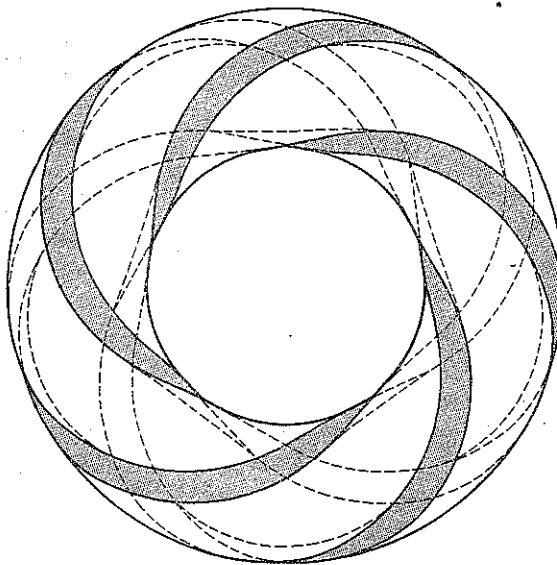


Fig. 97.

Kleeblattschlinge, in eine Kreislinie nicht durch eine isotope Deformation des Raumes übergeführt werden kann, da seine Knotengruppe nicht die freie Gruppe von einer Erzeugenden ist.<sup>21</sup>

## Achtes Kapitel.

### Überlagerungskomplexe.

Die Fundamentalgruppe steht in enger Beziehung zu den Überlagerungen eines Komplexes. Läßt man z. B. einen Ring vom Radius 1 auf einer Ebene rollen, so läuft er dabei über einen unendlichen Streifen der Ebene hinweg (Fig. 98). Diesen Streifen kann man wie ein Band unendlich oft über den Ring wickeln, so daß er ihn unendlich vielfach überlagert. Der Anfangspunkt  $O$  der geschlossenen Wege des Ringes kehrt auf dem Streifen periodisch in Abständen von  $2\pi$  wieder. Ein Weg, der von einem dieser Punkte im Streifen nach einem anderen führt, drückt sich nach dem Ringe durch in einen Weg, der den Ring mehrfach umschlingt. Jedes Element der Fundamentalgruppe des Ringes ist nun durch einen solchen den Ring umschlingenden Weg repräsentiert. Andererseits ist der Verbindungs weg zweier Punkte im Streifen durch Anfangspunkt und Endpunkt, also auch durch die Verschiebung, die Anfangs- in Endpunkt überführt, bis auf homotope eindeutig bestimmt. Man kann daher die Fundamentalgruppe isomorph auf die „Deckbewegungsgruppe“ des Streifens beziehen, die den Streifen um Vielfache von  $2\pi$  in sich verschiebt. So läßt sich die Fundamentalgruppe jeden Komplexes als Deckbewegungsgruppe eines bestimmten, des universellen Überlagerungskomplexes auf-fassen. Die übrigen unverzweigten Überlagerungen des Komplexes — und nur mit unverzweigten Überlagerungen haben wir es zu tun — entsprechen den Untergruppen der Fundamentalgruppe, so daß man aus der Kenntnis der Fundamentalgruppe einen vollkommenen Überblick über die möglichen Überlagerungskomplexe erhält.

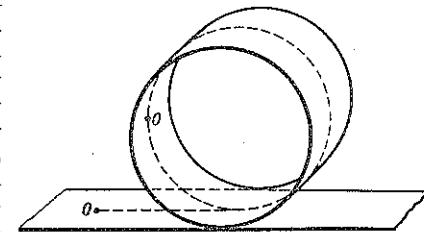


Fig. 98.

### § 53. Unverzweigter Überlagerungskomplex.

$\mathfrak{K}$  und  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  seien endliche oder unendliche zusammenhängende Komplexe. Wir sagen,  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  überlagert  $\mathfrak{K}$  oder  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  ist eine Überlagerung von  $\mathfrak{K}$ , wenn eine stetige Abbildung  $G$  von  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  auf  $\mathfrak{K}$  gegeben ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

(Ül 1) In jeden Punkt  $P$  von  $\mathfrak{K}$  bildet sich mindestens ein Punkt  $\widetilde{P}$  von  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  ab. Wir sagen  $\widetilde{P}$  liegt über  $P$ , und  $P$  ist der Grundpunkt von  $\widetilde{P}$ .

(Ül 2) Sind  $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \dots$  die sämtlichen über  $P$  liegenden Punkte, so gibt es „ausgezeichnete Umgebungen“  $U(P)$ ,  $U(\widetilde{P}_1)$ ,  $U(\widetilde{P}_2)$ , ... von der Art, daß sich  $U(\widetilde{P}_1)$ ,  $U(\widetilde{P}_2)$ , ... durch  $G$  topologisch auf  $U(P)$  abbilden (Unverzweigtheitsbedingung) und daß

(Ü1 3) ein Punkt von  $\tilde{\mathfrak{R}}$ , der über einem Punkte von  $\mathfrak{U}(P)$  liegt, mindestens zu einer der ausgezeichneten Umgebungen  $\mathfrak{U}(\tilde{P}_1), \mathfrak{U}(\tilde{P}_2), \dots$  gehört (Unbegrenztheitsbedingung).

Die Bedingung (Ü1 2) kennzeichnet die Abbildung  $G$  als im Kleinen topologisch und schließt damit so etwas wie Faltungslinien oder Verzweigungspunkte Riemannscher Flächen, die sich über die Kugelfläche ausbreiten, aus. Wir haben es nur mit solchen unverzweigten Überlagerungskomplexen zu tun. — Die Bedingung (Ü1 3) stellt die Möglichkeit sicher, jeden Weg des Grundkomplexes in den Überlagerungskomplex unbegrenzt zu übertragen, wie wir in § 54 beweisen werden.

Daß dies nicht schon auf Grund von (Ü1 1) und (Ü1 2) möglich ist, sieht man an folgendem Beispiel: Der Grundkomplex sei ein Kreisring, der Überlagerungskomplex ein rechteckiger Streifen, zu dem die beiden Längsseiten, nicht aber die Schnalseiten  $a$  und  $b$  der Fig. 99 gehören und der so auf den Kreisring abgebildet ist, daß seine offenen Enden einander überdecken. Dann sind die Bedingungen (Ü1 1) und (Ü1 2), nicht für eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P)$  eines unter einer Linie  $a$  oder  $b$  gelegenen Punktes  $P$ . Ein Weg, der sich zweimal um den inneren Kreis herumwindet, läßt sich nicht in den Überlagerungskomplex so übertragen, daß der Überlagerungsweg sich durch die Abbildung  $G$  in den Grundweg durchdrückt.

Man bemerke, daß der Grundkomplex aus dem Überlagerungskomplex durch Identifizieren derjenigen Punkte erhalten wird, die über demselben Grundpunkte liegen; denn Satz II von § 8 ist anwendbar, da bei der Abbildung  $G$  eine beliebige Umgebung eines Punktes  $\tilde{P}$  in eine Umgebung des Grundpunktes  $P$  übergeht.

Ein einfaches Beispiel eines Überlagerungskomplexes bietet die Ringfläche. Bildet man eine Ringfläche  $\tilde{\mathfrak{R}}$ , die in Fig. 101 zum Rechteck aufgeschnitten gezeichnet ist, so auf eine Ringfläche  $\mathfrak{R}$  ab, daß jedes der vier Teilquadrate von  $\tilde{\mathfrak{R}}$  kongruent in das Quadrat von  $\mathfrak{R}$  übergeht, so hat man damit eine vierfache Überlagerung der Ringfläche  $\mathfrak{R}$  durch  $\tilde{\mathfrak{R}}$  hergestellt. Die Überlagerungsringfläche kann man sich etwa dadurch aus der Grundringfläche entstanden denken, daß man vier über  $\mathfrak{R}$  liegende, zu  $\mathfrak{R}$  kongruente Exemplare (Blätter) längs eines Meridiankreises (vertikale Seiten der Fig. 100) aufschneidet und sie zyklisch aneinander heftet (Fig. 101). Denkt man sich die Ringfläche als Rotationsringfläche im gewöhnlichen Raum gelegen, so wird der Meridiankreis zu einer geschlossenen Durchdringungskurve von  $\mathfrak{R}$ . Faßt man  $\mathfrak{R}$  aber unabhängig von jeder Einbettung in den Raum als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit auf, so sind die Punkte dieser Durchdringungskurve in keiner Weise vor anderen Punkten ausgezeichnet.

Zwei Überlagerungskomplexe werden als gleich angesehen, wenn sie sich so aufeinander topologisch abbilden lassen, daß je zwei zugeordnete Punkte

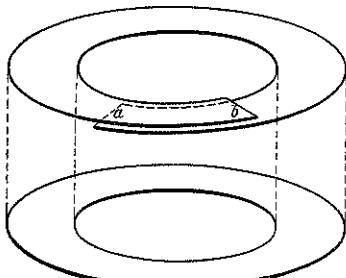


Fig. 99.

aber (Ü1 3) erfüllt, nämlich nicht für eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P)$  eines unter einer Linie  $a$  oder  $b$  gelegenen Punktes  $P$ . Ein Weg, der sich zweimal um den inneren Kreis herumwindet, läßt sich nicht in den Überlagerungskomplex so übertragen, daß der Überlagerungsweg sich durch die Abbildung  $G$  in den Grundweg durchdrückt.

Man bemerke, daß der Grundkomplex aus dem Überlagerungskomplex durch Identifizieren derjenigen Punkte erhalten wird, die über demselben Grundpunkte liegen; denn Satz II von § 8 ist anwendbar, da bei der Abbildung  $G$  eine beliebige Umgebung eines Punktes  $\tilde{P}$  in eine Umgebung des Grundpunktes  $P$  übergeht.

Ein einfaches Beispiel eines Überlagerungskomplexes bietet die Ringfläche. Bildet man eine Ringfläche  $\tilde{\mathfrak{R}}$ , die in Fig. 101 zum Rechteck aufgeschnitten gezeichnet ist, so auf eine Ringfläche  $\mathfrak{R}$  ab, daß jedes der vier Teilquadrate von  $\tilde{\mathfrak{R}}$  kongruent in das Quadrat von  $\mathfrak{R}$  übergeht, so hat man damit eine vierfache Überlagerung der Ringfläche  $\mathfrak{R}$  durch  $\tilde{\mathfrak{R}}$  hergestellt. Die Überlagerungsringfläche kann man sich etwa dadurch aus der Grundringfläche entstanden denken, daß man vier über  $\mathfrak{R}$  liegende, zu  $\mathfrak{R}$  kongruente Exemplare (Blätter) längs eines Meridiankreises (vertikale Seiten der Fig. 100) aufschneidet und sie zyklisch aneinander heftet (Fig. 101). Denkt man sich die Ringfläche als Rotationsringfläche im gewöhnlichen Raum gelegen, so wird der Meridiankreis zu einer geschlossenen Durchdringungskurve von  $\mathfrak{R}$ . Faßt man  $\mathfrak{R}$  aber unabhängig von jeder Einbettung in den Raum als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit auf, so sind die Punkte dieser Durchdringungskurve in keiner Weise vor anderen Punkten ausgezeichnet.

Zwei Überlagerungskomplexe werden als gleich angesehen, wenn sie sich so aufeinander topologisch abbilden lassen, daß je zwei zugeordnete Punkte

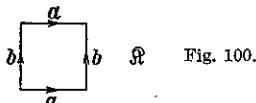


Fig. 100.

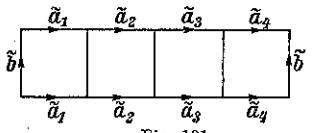


Fig. 101.

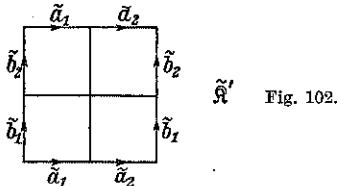


Fig. 102.

über demselben Grundpunkte liegen. Zwei homöomorphe Komplexe können als Überlagerungskomplexe eines und desselben Grundkomplexes verschieden sein.

Beispiele: Man kann eine Ringfläche  $\mathfrak{R}$  außer durch die soeben angegebene Ringfläche  $\tilde{\mathfrak{R}}$  noch auf eine zweite Weise durch eine Ringfläche  $\tilde{\mathfrak{R}}$  vierfach so überlagern, daß  $\mathfrak{R}$  und  $\tilde{\mathfrak{R}}$  als Überlagerungskomplexe verschieden sind. Man hat nur die vier Blätter längs Meridian- und Breitenkreis aufzuschneiden und über Kreuz aneinanderzuheften. Die Fig. 102 zeigt  $\tilde{\mathfrak{R}}$  zum Quadrate aufgeschnitten und so in die vier Blätter zerteilt, daß immer kongruente gelegene Punkte eines jeden Teilstücks denselben Grundpunkt in  $\mathfrak{R}$  haben.

Wir geben noch zwei später zu benutzende Beispiele von Überlagerungskomplexen. Grundkomplex  $\mathfrak{R}$  sei die Doppelringfläche, die wir in den gewöhnlichen Raum als Kugel mit zwei Henkeln hineinlegen. Über sie denken wir uns drei kongruente Exemplare gelegt, deren Henkel wir aufschneiden. Um das erste Beispiel zu erhalten, heften wir längs der linken Henkelschnitte der Fig. 103 das 1. und 2. Exemplar über Kreuz aneinander, während dort das 3. Exemplar wieder mit sich selbst verheftet wird, also glatt verläuft, und längs der rechten Henkelschnitte verknüpfen wir über Kreuz das 2. und 3. Exemplar, während dort das erste glatt verläuft. Das zweite Beispiel wird erhalten, wenn man längs der linken Henkelschnitte alle drei Exemplare mit sich selbst verheftet, als ob sie gar nicht aufgeschnitten worden wären, rechts dagegen die drei Exemplare zyklisch aneinander heftet. Die Schnittmeridiankreise der Henkel werden, soweit die Flächen nicht glatt über ihnen verlaufen, geschlossene Durchdringungskurven, in denen sich

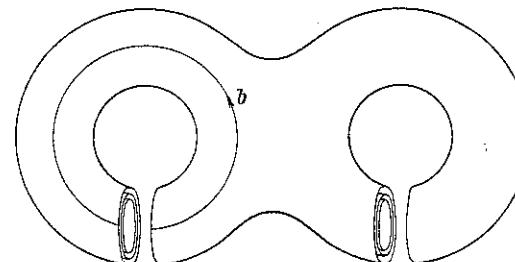


Fig. 103.

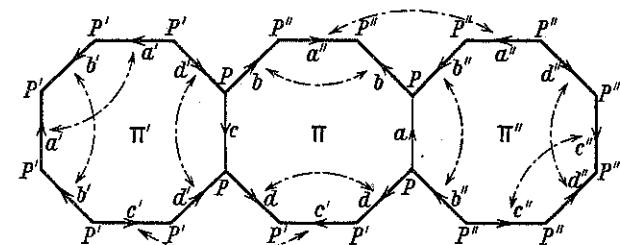


Fig. 104.

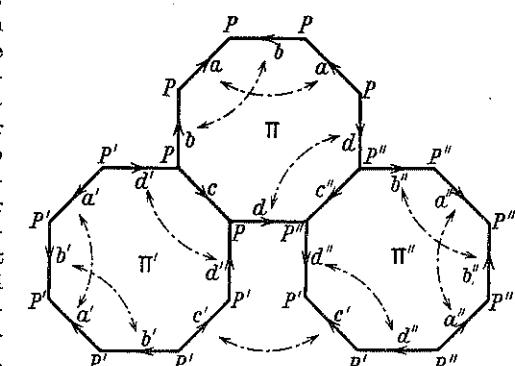


Fig. 105.

zwei oder alle drei Exemplare durchsetzen. Die Durchdringungen sind in der Figur schematisch im Schnitt angedeutet.

Ein anderes Modell der Überlagerungsfläche ergibt sich, wenn man die Grundfläche zum Fundamentalpolygone, einem Achteck, aufschneidet und zwei weitere ebensolche Polygone in der richtigen Weise ansetzt. Die Überlagerungsfläche erscheint dann als ein einziges Polygon mit paarweise äquivalenten Seiten. In den Figuren 104 und 105 sind äquivalente Ecken und Kanten gleich bezeichnet, während solche Ecken, Kanten und Flächenstücke, die über demselben Grundelemente liegen, durch Akzente unterschieden sind. — In beiden Fällen ist die Überlagerungsfläche orientierbar, und ihre Charakteristik ist das Dreifache der Charakteristik der Grundfläche:  $\widetilde{N} = 3N = 6$ . Denn über jeder Ecke, jeder Kante und jedem Flächenstücke liegen genau drei überlagernde Elemente. Die Überlagerungsfläche hat daher das Geschlecht  $h = 4$  (S. 140).

#### § 54. Grundweg und Überlagerungsweg.

Ist  $w$  Urbild eines Weges  $\widetilde{W}$  in  $\widetilde{\mathfrak{R}}$  und  $\widetilde{T}$  die Abbildung von  $w$  auf  $\widetilde{W}$ , so ist durch  $G \widetilde{T}$  eine stetige Abbildung  $T$  von  $w$  in  $\mathfrak{R}$  gegeben und damit ein Weg  $W$  in  $\mathfrak{R}$  bestimmt. Man sagt,  $W$  ist der zu  $\widetilde{W}$  gehörige *Grundweg*, und  $\widetilde{W}$  *überlagert* den Weg  $W$ . Wir werden nun beweisen, daß sich nicht nur jeder Weg  $\widetilde{W}$  von  $\widetilde{\mathfrak{R}}$  in einen bestimmten Grundweg  $W$  von  $\mathfrak{R}$  durchdrückt, sondern daß sich auch umgekehrt jeder Weg des Grundkomplexes in den Überlagerungskomplex durchdrücken läßt, und zwar noch auf so viele verschiedene Weisen, wie es Punkte über dem Anfangspunkt  $A$  von  $W$  gibt.

**Satz I:** Ist  $W$  ein von  $A$  nach  $B$  führender Weg in  $\mathfrak{R}$  und  $\widetilde{A}$  ein über  $A$  liegender Punkt von  $\widetilde{\mathfrak{R}}$ , so gibt es genau einen Weg  $\widetilde{W}$  mit dem Anfangspunkt  $\widetilde{A}$ , der  $W$  überlagert.

**Beweis:** Als Urbild von  $W$  wählen wir die orientierte Einheitsstrecke  $w$  ( $0 \leq s \leq 1$ ).  $T$  sei die Abbildung von  $w$  auf  $W$ . Ist dann  $\widetilde{T}$  eine beliebige stetige Abbildung von  $w$  in  $\widetilde{\mathfrak{R}}$ , so ist der entstehende Weg  $\widetilde{W}$  dann und nur dann ein Überlagerungsweg von  $W$ , wenn  $w$  bei  $G \widetilde{T}$  in  $W$  übergeht, wenn es also eine topologische Selbstabbildung  $S$  von  $w$  gibt, so daß zugeordnete Punkte  $s$  und  $S(s)$  bei  $T$  und  $G \widetilde{T}$  denselben Bildpunkt in  $\mathfrak{R}$  haben:  $T(s) = G \widetilde{T} S(s)$ . Nun wird gemäß der Gleichheitsdefinition von Wegen durch die Abbildung  $\widetilde{T}$  derselbe Weg definiert wie durch  $\widetilde{T} S = \widetilde{T}$ . Man erhält also den allgemeinsten Überlagerungsweg  $\widetilde{W}$ , wenn man  $w$  vermöge einer stetigen Abbildung  $\widetilde{T}$  so in  $\widetilde{\mathfrak{R}}$  abbildet, daß  $G \widetilde{T} = T$  wird; anders ausgedrückt: der Punkt  $\widetilde{T}(s)$  liegt für jedes  $s$  über  $T(s)$ . Damit ist Satz I zurückgeführt auf folgenden

**Hilfssatz:** Die Einheitsstrecke  $0 \leq s \leq 1$  sei vermöge einer Abbildung  $T$  stetig in  $\mathfrak{R}$  abgebildet. Ist dann  $\widetilde{A}$  ein über  $A = T(0)$  liegender Punkt von  $\widetilde{\mathfrak{R}}$ , so gibt es genau eine stetige Abbildung  $\widetilde{T}$  der Einheitsstrecke in  $\widetilde{\mathfrak{R}}$ , so daß  $\widetilde{T}(0) = \widetilde{A}$  ist und  $\widetilde{T}(s)$  über  $T(s)$  liegt für jedes  $s$ .

**Beweis:** a) Existenz von  $\widetilde{T}$ . Es sei jedem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{R}$  eine beliebige ausgezeichnete Umgebung  $\mathcal{U}(P)$  zugeordnet. Dann kann man die

Einheitsstrecke  $w$  in  $n$  gleiche Teile  $r_1, r_2, \dots, r_n$  teilen und  $n$  so groß machen, daß das Bild  $T(r_i)$  einer jeden Teilstrecke ganz einer ausgezeichneten Umgebung  $\mathcal{U}_i$  (eines Punktes, der uns nicht weiter interessiert) angehört. Daß das möglich ist, folgt aus dem Satze von der gleichmäßigen Stetigkeit (§ 7 Satz IV), wenn man für die dort angegebene Umgebung  $\mathcal{U}^*(P | \mathfrak{B})$  eine ausgezeichnete Umgebung  $\mathcal{U}(P)$  für jeden Punkt  $P$  wählt. Man wähle nun eine über  $\mathcal{U}_1$  liegende ausgezeichnete Umgebung  $\widetilde{\mathcal{U}}_1$ , die den Punkt  $\widetilde{A}$  enthält. Eine solche gibt es nach (Ü13). Da  $\widetilde{\mathcal{U}}_1$  bei der Abbildung  $G$  topologisch auf  $\mathcal{U}_1$  abgebildet wird, so kann man das Bild  $T(r_1)$ , das ja in  $\mathcal{U}_1$  liegt, topologisch nach  $\widetilde{\mathcal{U}}_1$  übertragen und erhält damit eine Abbildung  $\widetilde{T}_1$  der ersten Teilstrecke  $r_1$  in  $\widetilde{\mathcal{U}}_1$ , bei der der Anfangspunkt  $s = 0$  von  $r_1$  in  $\widetilde{A}$  übergeht. Nun wird auf die gleiche Weise die zweite Teilstrecke  $r_2$  übertragen. Man wählt also zu der ausgezeichneten Umgebung  $\mathcal{U}_2$ , in der  $T(r_2)$  liegt, eine darüber liegende Umgebung  $\widetilde{\mathcal{U}}_2$ , die das Bild des Endpunktes von  $r_1$ , also den Punkt  $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right)$  enthält, und überträgt  $T(r_2)$  topologisch nach  $\widetilde{\mathcal{U}}_2$ . Damit hat man eine stetige Abbildung  $\widetilde{T}_2$  von  $r_2$  in  $\widetilde{\mathcal{U}}_2$ , und es ist  $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right) = \widetilde{T}_2\left(\frac{1}{n}\right)$ . So fährt man fort und erhält der Reihe nach die Abbildungen  $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \dots, \widetilde{T}_n$  der Teilstrecken  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Immer ist  $\widetilde{T}_i\left(\frac{i}{n}\right) = \widetilde{T}_{i+1}\left(\frac{i}{n}\right)$ . Diese Teilabbildungen liefern zusammen eine Abbildung  $\widetilde{T}$  der Einheitsstrecke in  $\widetilde{\mathfrak{R}}$  von der gewünschten Beschaffenheit.

b) Einzigkeit von  $\widetilde{T}$ .  $\widetilde{T}$  sei eine weitere stetige Abbildung der Einheitsstrecke, die die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Dann werden  $\widetilde{T}$  und  $\widetilde{T}'$  bis zu einem gewissen Parameterwerte  $s^*(\geq 0)$  miteinander übereinstimmen. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen stimmen sie auch noch in  $s^*$  selbst überein. Es gibt dann eine ausgezeichnete Umgebung  $\widetilde{\mathcal{U}}^*$  des Punktes  $\widetilde{T}(s^*) = \widetilde{T}'(s^*)$ , die sich bei  $G$  topologisch auf eine ausgezeichnete Umgebung  $\mathcal{U}^*$  des darunter liegenden Punktes  $T(s^*)$  abbildet. Weiter gibt es wegen der Stetigkeit von  $\widetilde{T}$  und  $\widetilde{T}'$  ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß alle Punkte  $\widetilde{T}(s)$  und  $\widetilde{T}'(s)$  in  $\widetilde{\mathcal{U}}^*$  liegen, sobald  $s$  von  $s^*$  um nicht mehr als  $\varepsilon$  abweicht. Da nun  $\widetilde{T}(s)$  und  $\widetilde{T}'(s)$  beide über demselben Grundpunkt  $T(s)$  von  $\mathcal{U}^*$  liegen, so ist  $\widetilde{T}(s) = \widetilde{T}'(s)$  wegen der umkehrbar eindeutigen Beziehung zwischen  $\mathcal{U}^*$  und  $\widetilde{\mathcal{U}}^*$ . Daher stimmen  $\widetilde{T}$  und  $\widetilde{T}'$  auch noch bis zur Stelle  $s^* + \varepsilon$ , also überhaupt überein. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

**Satz I** wenden wir an, um die Blätterzahl des Überlagerungskomplexes zu definieren.

$P$  und  $Q$  seien zwei Punkte in  $\mathfrak{R}$ . Wir können dann eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den über  $P$  und über  $Q$  liegenden Punkten herstellen. Zu dem Zwecke ziehen wir einen Weg  $W$  von  $P$  nach  $Q$  und ordnen jedem über  $P$  liegenden Punkte  $\widetilde{P}_i$  den Endpunkt des von  $\widetilde{P}_i$  aus-

gehenden, über  $W$  liegenden Wege zu. Umgekehrt wird jedem über  $Q$  liegenden Punkte  $\tilde{Q}_k$  der Endpunkt des über  $W^{-1}$  liegenden Weges mit dem Anfangspunkte  $\tilde{Q}_k$  zugeordnet; nach Satz I existieren diese Wege und sind eindeutig. Die letzte Zuordnung ist offenbar die Umkehrung der ersten, so daß eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den über  $P$  und  $Q$  liegenden Punkten besteht. Über jedem Punkte von  $\mathfrak{R}$  liegen somit gleich viele Punkte von  $\tilde{\mathfrak{R}}$ , etwa  $g$ . Diese Zahl heißt die Vielfachheit der Überlagerung oder die Blätterzahl.  $g$  kann endlich oder unendlich sein.

Satz I dient dazu, die Wege im Grund- und Überlagerungskomplexe zu vergleichen, der folgende Satz II leistet gleiches für die Wege klassen. Er sagt aus, daß man eine Deformation eines Weges im Überlagerungskomplex in den Grundkomplex durchdrücken kann und umgekehrt.

Satz II. Sind  $\tilde{W}_0$  und  $\tilde{W}_1$  zwei von  $\tilde{A}$  nach  $\tilde{B}$  führende Wege in  $\tilde{\mathfrak{R}}$ ,  $W_0$  und  $W_1$  die von  $A$  nach  $B$  führenden Grundwege, und ist  $\tilde{W}_0$  in  $\tilde{W}_1$  deformierbar, so auch  $W_0$  in  $W_1$ . — Umgekehrt: Sind  $W_0$  und  $W_1$  zwei von  $A$  nach  $B$  führende, ineinander deformierbare Wege in  $\mathfrak{R}$  und  $\tilde{W}_0$  und  $\tilde{W}_1$  die beiden von einem über  $A$  liegenden Punkte  $\tilde{A}$  auslaufenden Überlagerungswege, so führen sie nach demselben Endpunkt  $\tilde{B}$  über  $B$  und sind ebenfalls ineinander deformierbar.

Der Beweis des ersten Teiles folgt aus der Stetigkeit der Abbildung  $G$  nach S. 155.

Obschon ebenso naheliegend, so ist die Umkehrung doch weniger einfach zu beweisen, weil man das Deformationsrechteck dabei von dem Grundkomplex in den Überlagerungskomplex zu übertragen hat, hierfür aber keine im Großen eindeutige und stetige Abbildung zur Verfügung steht, die Abbildung vielmehr immer nur in einer (ausgezeichneten) Umgebung topologisch ist. — Die Deformierbarkeit von  $W_0$  in  $W_1$  bedeutet, daß man das Deformationsrechteck  $\mathfrak{R}$  mit den Koordinaten  $0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$  (Fig. 106) vermöge einer Abbildung  $T$  stetig so in  $\mathfrak{R}$  abbilden kann, daß die orientierten Seiten  $t = 0$  und  $t = 1$  in die Wege  $W_0$ ,  $W_1$ , die Seiten  $s = 0$  und  $s = 1$  in die Punkte  $A$  und  $B$  übergehen. Wir werden dann



Fig. 106.

eine stetige Abbildung  $\tilde{T}$  von  $\mathfrak{R}$  in  $\tilde{\mathfrak{R}}$  so konstruieren, daß für jeden Punkt  $(s, t)$  von  $\mathfrak{R}$   $\tilde{T}(s, t)$  über  $T(s, t)$  liegt und insbesondere  $\tilde{T}(0, 0) = \tilde{A}$  ist. Die Einheitsstrecke  $t = 0$  erfährt dabei eine stetige Abbildung, bei der für jedes  $s$  der Punkt  $\tilde{T}(s, 0)$  über  $T(s, 0)$  liegt und  $\tilde{T}(0, 0) = \tilde{A}$  ist. Sie geht also nach dem eben bewiesenen Hilfssatz gerade in den über  $W_0$  liegenden und in  $\tilde{A}$  beginnenden Weg  $\tilde{W}_0$  über. Ebenso sieht man, daß

die Einheitsstrecken  $s = 0$  und  $s = 1$  bei  $\tilde{T}$  in  $\tilde{A}$  bzw. den Endpunkt  $\tilde{B}$  von  $\tilde{W}_0$  übergehen und schließlich die Seite  $t = 1$  in den Überlagerungsweg  $\tilde{W}_1$ , der somit in  $\tilde{B}$  endigen muß. Damit ist die Deformierbarkeit von  $\tilde{W}_0$  in  $\tilde{W}_1$  bewiesen.

Zur Konstruktion von  $\tilde{T}$  zerlegen wir das Deformationsrechteck  $\mathfrak{R}$  durch  $n$  äquidistante horizontale und vertikale Geraden in  $n^2$  Teilrechtecke  $r_{ik}$ :

$$\frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}, \quad \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}$$

und machen  $n$  so groß, daß das Bild  $T(r_{ik})$  eines jeden Teilrechtecks ganz einer ausgezeichneten Umgebung  $\mathfrak{U}_{ik}$  (eines geeigneten Punktes) angehört, was nach dem Satze von der gleichmäßigen Stetigkeit möglich ist.  $\tilde{T}$  wird nun schrittweise konstruiert, indem man die einzelnen Teilrechtecke nach  $\tilde{\mathfrak{R}}$  überträgt. Wir beginnen mit  $r_{11}$  und wählen eine über  $\mathfrak{U}_{11}$  liegende ausgezeichnete Umgebung  $\tilde{\mathfrak{U}}_{11}$ , die den Punkt  $\tilde{A}$  enthält; nach (Ü1 3) gibt es eine solche. Das Bild  $T(r_{11})$ , das ganz in  $\mathfrak{U}_{11}$  liegt, wird topologisch nach  $\tilde{\mathfrak{U}}_{11}$  übertragen, und damit hat man eine stetige Abbildung  $\tilde{T}_{11}$  von  $r_{11}$  in  $\tilde{\mathfrak{U}}_{11}$  gewonnen, bei der  $\tilde{T}_{11}(0, 0) = \tilde{A}$  ist und  $\tilde{T}_{11}(s, t)$  über  $T(s, t)$  liegt. Danach wählen wir eine über  $\mathfrak{U}_{21}$  liegende ausgezeichnete Umgebung, die den Punkt  $\tilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n}, 0\right)$  enthält, also das Bild des rechten unteren Eckpunktes von  $r_{11}$ , übertragen  $T(r_{21})$  nach  $\tilde{\mathfrak{U}}_{21}$  topologisch und erhalten eine stetige Abbildung  $\tilde{T}_{21}$  von  $r_{21}$  in  $\tilde{\mathfrak{U}}_{21}$ . Auf der gemeinsamen Seite von  $r_{11}$  und  $r_{21}$  stimmen die beiden Abbildungen  $\tilde{T}_{11}$  und  $\tilde{T}_{21}$  überein. Der Anfangspunkt  $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$  dieser Strecke wird nämlich in der gleichen Weise abgebildet, und da  $\tilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n}, t\right)$  ebenso wie  $\tilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n}, t\right)$  über demselben Punkt  $T\left(\frac{1}{n}, t\right)$  liegt, so ist  $\tilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n}, t\right) = \tilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n}, t\right)$  nach dem Hilfssatz. Nun bildet man nach demselben Verfahren das nächste Rechteck  $r_{31}$  vermöge  $\tilde{T}_{31}$  stetig in  $\tilde{\mathfrak{R}}$  ab, so daß  $\tilde{T}_{21}\left(\frac{2}{n}, 0\right) = \tilde{T}_{31}\left(\frac{2}{n}, 0\right)$  wird, und man beweist wieder, daß die gemeinsame Seite von  $r_{21}$  und  $r_{31}$  bei  $\tilde{T}_{21}$  und  $\tilde{T}_{31}$  in der gleichen Weise abgebildet wird. Nach  $n$  Schritten gewinnt man eine stetige Abbildung  $\tilde{T}_1$  des ganzen Streifens  $r_{11}, r_{21}, \dots, r_{n1}$ , bei der  $\tilde{T}_1(s, t)$  über  $T(s, t)$  liegt und die Seite  $s = 0$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$  in  $\tilde{A}$  übergeht. Ebenso gewinnt man für die übrigen Streifen  $r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{ni}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) Abbildungen  $\tilde{T}_i$ , wobei immer  $\tilde{T}_i(s, t)$  über  $T(s, t)$  liegt und  $\tilde{T}_i(0, t) = \tilde{A}$  ist. Da nun die gemeinsame Einheitsstrecke des  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten Streifens bei  $\tilde{T}_i$  und  $\tilde{T}_{i+1}$  in der gleichen Weise abgebildet wird (wieder nach dem Hilfssatz), so hat man damit eine stetige Abbildung  $\tilde{T}$  des ganzen Deformationsrechtecks  $\mathfrak{R}$  gewonnen, für die  $\tilde{T}(s, t)$  über  $T(s, t)$  liegt und  $\tilde{T}(0, 0) = \tilde{A}$  ist.

### § 55. Überlagerung und Untergruppe der Fundamentalgruppe.

Im Grundkomplex  $\mathfrak{K}$  wählen wir einen bestimmten Punkt  $O$ , im Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$  einen über  $O$  liegenden Punkt  $\tilde{O}_1$  zum Anfangspunkte der geschlossenen Wege. Nach S. 156 wird dann durch die stetige Abbildung  $G$  jede Wegeklasse der Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  in eine bestimmte Wegeklasse der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{K}$  durchgedrückt. Diese Zuordnung ist eine homomorphe Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  auf eine bestimmte Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  von  $\mathfrak{F}$ .

Nun besagt der zweite Teil des Satzes II von § 54, daß zwei nichthomotope Wege von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  in zwei ebenfalls nichthomotope Wege von  $\mathfrak{F}$  durchgedrückt werden, d. h. die homomorphe Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  auf  $\mathfrak{H}_1$  ist sogar ein 1-Isomorphismus.

*Die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  des Überlagerungskomplexes ist somit einer bestimmten Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  der Fundamentalgruppe des Grundkomplexes isomorph.  $\mathfrak{H}_1$  wird erhalten, wenn man  $\tilde{\mathfrak{F}}$  in den Grundkomplex durchdrückt.*

Es ist aber zu beachten, daß die Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  nicht schon durch die Überlagerung  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bestimmt ist, sondern, wie wir sehen werden, noch von der Auswahl des Anfangspunktes  $\tilde{O}_1$  abhängt. Es sei nun

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_1\{F_{12}\} + \mathfrak{H}_1\{F_{13}\} + \dots$$

die Zerlegung von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  nach  $\mathfrak{H}_1$ . Hierin bezeichnet  $\{F_{1i}\}$  wie S. 153 die Wegeklasse des Weges  $F_{1i}$ . Ist  $H_1$  ein beliebiger Weg aus  $\mathfrak{H}_1$ ,  $\tilde{H}_1$  der in  $\tilde{O}_1$  beginnende Überlagerungsweg, so ist  $\tilde{H}_1$  geschlossen. Daraus folgt, daß die Wege einer bestimmten Restklasse  $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ , wenn man sie von  $\mathfrak{K}$  nach  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durchdrückt, alle von  $\tilde{O}_1$  nach demselben Endpunkt  $\tilde{O}_i$  führen, nämlich nach dem Endpunkt des über  $F_{1i}$  liegenden, in  $\tilde{O}_1$  beginnenden Weges  $\tilde{F}_{1i}$ . Durch jede Restklasse  $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$  ist somit ein Punkt  $\tilde{O}_i$  über  $O$  bestimmt. Verschiedene Restklassen  $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$  und  $\mathfrak{H}_1\{F_{1j}\}$  bestimmen verschiedene Punkte  $\tilde{O}_i \neq \tilde{O}_j$ . Denn sonst wäre  $\tilde{F}_{1i}\tilde{F}_{1j}^{-1}$  geschlossen, also  $\{F_{1i}F_{1j}^{-1}\}$  ein Element aus  $\mathfrak{H}_1$ , während doch  $\{F_{1i}\}$  und  $\{F_{1j}\}$  verschiedenen Restklassen angehören. Da offenbar durch die Endpunkte der Wege  $\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \dots$  alle über  $O$  liegenden Punkte von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  erschöpft werden, so ist damit eine eindeutige Beziehung zwischen den rechten Restklassen von  $\mathfrak{H}_1$  in  $\tilde{\mathfrak{F}}$  und den über  $O$  liegenden Punkten hergestellt. Insbesondere folgt, daß die Blätterzahl der Überlagerung gleich dem Index von  $\mathfrak{H}_1$  in  $\tilde{\mathfrak{F}}$  ist.

Jeder von  $\tilde{O}_i$  ausgehende geschlossene Weg  $\tilde{H}_i$  kann in einen Weg der Form  $\tilde{F}_{1i}^{-1}\tilde{H}_1\tilde{F}_{1i}$  deformiert werden, nämlich etwa in den Weg  $\tilde{F}_{1i}^{-1} \cdot (\tilde{F}_{1i}\tilde{H}_1\tilde{F}_{1i}^{-1}) \cdot \tilde{F}_{1i}$ . Dabei ist  $\tilde{H}_1$  ein von  $O_1$  ausgehender geschlossener Weg.  $\tilde{F}_{1i}^{-1}\tilde{H}_1\tilde{F}_{1i}$  drückt sich in den Weg  $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$  durch. Das ist ein Weg der zu  $\mathfrak{H}_1$  konjugierten Untergruppe  $\mathfrak{H}_i = \{F_{1i}\}^{-1}\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ . Um-

gekehrt ist jeder Weg von  $\mathfrak{H}_i$ , wenn man ihn nach  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durchdrückt und in  $\tilde{O}_i$  beginnen läßt, geschlossen. Denn jeder Weg der besonderen Form  $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$  drückt sich in einen von  $\tilde{O}_i$  ausgehenden Weg  $\tilde{F}_{1i}^{-1}\tilde{H}_1\tilde{F}_{1i}$  nach  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durch; dieser ist geschlossen, weil  $\tilde{F}_{1i}^{-1}$  von  $\tilde{O}_i$  nach  $\tilde{O}_1$ ,  $\tilde{H}_1$  von  $\tilde{O}_1$  nach  $\tilde{O}_1$  zurück und  $\tilde{F}_{1i}$  von  $\tilde{O}_1$  wieder nach  $\tilde{O}_i$  führt. Für einen beliebigen Weg aus  $\mathfrak{H}_i$  gilt das gleiche, da man ihn in einen Weg der besonderen Form  $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$  deformieren und die Deformation nach  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durchdrücken kann, wobei sich der Endpunkt des Weges nicht ändert, das heißt aber: Macht man an Stelle von  $\tilde{O}_i$  den Punkt  $\tilde{O}_i$  zum Anfangspunkt der geschlossenen Wege von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , so drückt sich die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  in die zu  $\mathfrak{H}_1$  konjugierte Untergruppe  $\{F_{1i}\}^{-1}\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$  durch, und durch geeignete Wahl von  $\tilde{O}_i$  erhält man so jede zu  $\mathfrak{H}_1$  konjugierte Untergruppe. Durch die Überlagerung von  $\mathfrak{K}$  durch  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ist also eine ganze Klasse konjugierter Untergruppen von  $\mathfrak{F}$  bestimmt.

Jetzt beweisen wir, daß auch umgekehrt jede Klasse konjugierter Untergruppen eine Überlagerung bestimmt. Die Aufgabe, alle Überlagerungen einer vorgegebenen Blätterzahl  $g$  zu konstruieren, ist danach auf die gruppentheoretische Frage zurückgeführt, alle Klassen konjugierter Untergruppen des Indexes  $g$  der Fundamentalgruppe des Grundkomplexes anzugeben. Wir werden diese Konstruktion für endliche Komplexe und endliche Blätterzahl in § 58 durchführen.

#### Existenzbeweis.

I. Konstruktion von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ .  $\mathfrak{H}$  sei eine beliebige Untergruppe von  $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ ) Gesucht ist ein Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , dessen Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes  $\tilde{O}_1$  über  $O$  sich in  $\mathfrak{H}$  durchdrückt. Wir nehmen an, daß  $O$  Eckpunkt einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  ist, was nötigenfalls durch eine Unterteilung von  $\mathfrak{K}$  erreicht werden kann. Wir werden den Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$  mit einer solchen simplizialen Zerlegung konstruieren, daß bei der Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  auf  $\mathfrak{K}$  jedes Simplex von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  linear auf ein Simplex von  $\mathfrak{K}$  abgebildet wird. Diese Zerlegung heiße die von  $\mathfrak{K}$  nach  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durchgedrückte simpliziale Zerlegung.

Die Konstruktion von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  geschieht durch Angabe seines Schemas (§ 11). Die Elemente des Schemas werden gewisse Wegeklassen sein, die wir jetzt definieren wollen.

$A$  sei eine Ecke von  $\mathfrak{K}$ . Die Gesamtheit der von  $O$  nach  $A$  führenden Wege wird in Klassen, sog.  $\mathfrak{H}$ -Klassen eingeteilt. Zwei Wege  $U$  und  $U'$  rechnen wir dann und nur dann zur selben  $\mathfrak{H}$ -Klasse, wenn der geschlossene Weg  $UU'^{-1}$  zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$  gehört. Zu jeder Ecke  $A$  von  $\mathfrak{K}$  gehören also gewisse mit

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$$

\*) Wir schreiben jetzt der Einfachheit wegen  $\mathfrak{H}$  statt  $\mathfrak{H}_1$ .

bezeichnete  $\mathfrak{H}$ -Klassen. Insbesondere bilden die Wege der Untergruppe  $\mathfrak{H}$  selbst eine solche  $\mathfrak{H}$ -Klasse, die „Einheits- $\mathfrak{H}$ -Klasse“. Sie gehört zum Punkte  $O$  und wird mit  $\bar{O}_1$  bezeichnet.

Zwei  $\mathfrak{H}$ -Klassen  $\bar{A}_i$  und  $\bar{B}_k$  heißen *benachbart*, wenn ihre Endpunkte  $A$  und  $B$  die Ecken eines 1-Simplexes  $c$  von  $\mathfrak{K}$  sind und wenn überdies der geschlossene Weg  $UcV^{-1}$ , den man mit einem Wege  $U$  aus  $\bar{A}_i$  und einem Wege  $V$  aus  $\bar{B}_k$  bilden kann, zu  $\mathfrak{H}$  gehört. Dabei ist es offenbar gleichgültig, wie man die Wege  $U$  und  $V$  aus  $\bar{A}_i$  und  $\bar{B}_k$  auswählt.

Ist die  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{A}_i$  vorgegeben, so gibt es genau eine benachbarte, zur Ecke  $B$  gehörige  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{B}_k$ .  $\bar{B}_k$  besteht aus der Gesamtheit der Wege  $V$ , für die  $UcV^{-1}$  bei festem  $U$  ein Weg aus  $\mathfrak{H}$  ist; ihre Existenz ist durch Angabe eines repräsentierenden Weges, z. B. des Weges  $V = Uc$  gesichert.

Nun gilt der

**Hilfssatz:** Ist  $\mathfrak{E}^i$  ein Simplex des Grundkomplexes  $\mathfrak{K}$  mit den Ecken  $A, B, \dots, C$  und hat man zu  $A$  eine  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{A}_i$  von Verbindungswege ausgewählt, so gibt es zu den übrigen Ecken  $B, \dots, C$  genau je eine  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{B}_k, \dots, \bar{C}_i$ , so daß alle diese  $\mathfrak{H}$ -Klassen paarweise benachbart sind.

Denn  $\bar{B}_k, \dots, \bar{C}_i$  sind durch die Forderung, zu  $\bar{A}_i$  benachbart zu sein, eindeutig bestimmt. Daß dann die  $\mathfrak{H}$ -Klassen paarweise benachbart

sind, zeigen wir z. B. für  $\bar{B}_k$  und  $\bar{C}_i$ . Ist  $U$  ein Weg aus  $\bar{A}_i$  (Fig. 107), und sind  $a, b, c$  die orientierten Simplexe  $CB, AC$  und  $AB$ , so sind  $Ub$  und  $Uc$  repräsentierende Wege aus  $\bar{C}_i$  und  $\bar{B}_k$ . Die Bedingung für die Nachbarschaft von  $\bar{B}_k$  und  $\bar{C}_i$  lautet: Es muß  $Ub \cdot a \cdot (Uc)^{-1}$  zu  $\mathfrak{H}$  gehören. Das ist aber der Fall, da dieser Weg sogar nullhomotop ist, also der Einheitswegeklasse der Fundamentalgruppe angehört.

Fig. 107.

Nun folgt: Die  $\mathfrak{H}$ -Klassen von  $\mathfrak{K}$  bilden das Schema eines simplizialen Komplexes  $\widetilde{\mathfrak{K}}$ , wenn man als ausgezeichnete Teilmengen (S. 45) des Schemas jedes System von paarweise benachbarten  $\mathfrak{H}$ -Klassen erklärt, deren Wege nach den Ecken eines Simplexes von  $\mathfrak{K}$  führen. In der Tat bestätigt man leicht, daß die für ein Schema gültigen Bedingungen ( $Sch_1$ ), ( $Sch_2$ ) und ( $Sch_3$ ) von § 11 erfüllt sind.

Mit etwas anderen Worten läßt sich der simpliziale Komplex  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  auch so beschreiben: Jeder Ecke  $\bar{A}_i$  von  $\mathfrak{K}$  entspricht umkehrbar eindeutig eine  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{A}_i$  von  $\mathfrak{K}$  und dieser wieder eine bestimmte Ecke von  $\mathfrak{K}$ , nämlich der Endpunkt  $A$  der Wege aus der  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{A}_i$ . Eine Anzahl von Ecken  $\bar{A}_i, \bar{B}_k, \dots, \bar{C}_i$  bildet dann und nur dann die Ecken eines Simplexes, wenn die zugeordneten Ecken  $A, B, \dots, C$  von  $\mathfrak{K}$  die Ecken eines Simplexes sind und überdies die  $\mathfrak{H}$ -Klassen  $\bar{A}_i, \bar{B}_k, \dots, \bar{C}_i$  paarweise benachbart sind.

$\widetilde{\mathfrak{K}}$  ist ein zusammenhängender Komplex. Es genügt zu zeigen, daß sich jede  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{A}_i$  mit der Einheits- $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{O}_1$  durch eine Reihe von  $\mathfrak{H}$ -Klassen verbinden läßt, in der je zwei aufeinanderfolgende benachbart sind. Man wähle in  $\bar{A}_i$  einen Kantenweg  $U$  von  $O$  nach  $A$  — einen solchen gibt es, da man jeden Weg von  $O$  nach  $A$  in einen Kantenweg deformieren kann (S. 115). Die Teilwege von  $U$ , die von  $O$  nach den von  $U$  durchlaufenen Ecken führen, vielmehr die ihnen entsprechenden  $\mathfrak{H}$ -Klassen, bilden eine Reihe der gewünschten Beschaffenheit.

II. Nunmehr beweisen wir zweitens, daß  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  ein Überlagerungskomplex von  $\mathfrak{K}$  ist, wenn wir jeder Ecke  $\bar{A}_i$  von  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  (die der  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{A}_i$  entspricht) die Ecke  $A_i$  als Grundpunkt zuordnen und jedes Simplex von  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  linear auf das Simplex von  $\mathfrak{K}$  abbilden, das von den Grundpunkten seiner Ecken aufgespannt wird. Die drei Bedingungen für eine Überlagerung sind dann erfüllt. Denn zu jedem Simplex von  $\mathfrak{K}$  gibt es ein System benachbarter  $\mathfrak{H}$ -Klassen und also mindestens ein darüberliegendes Simplex, somit gilt (Ü1 1). — Sei  $P$  ein beliebiger Punkt von  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{E}^i$  das eindeutig bestimmte Simplex, von dem  $P$  mittlerer Punkt ist. Die sämtlichen Simplexe, die  $\mathfrak{E}^i$  zur Seite haben, bilden eine Umgebung  $U(P)$  von  $P$  in  $\mathfrak{K}$ . Wir behaupten,  $U(P)$  ist eine ausgezeichnete Umgebung. Ein über  $P$  liegender Punkt  $\bar{P}$  ist mittlerer Punkt eines über  $\mathfrak{E}^i$  liegenden Simplexes  $\widetilde{\mathfrak{E}}_i^j$ , das durch ein System von  $i+1$  benachbarten  $\mathfrak{H}$ -Klassen bestimmt ist, die nach den Ecken von  $\mathfrak{E}^i$  führen. Ist dann  $\mathfrak{E}^{i+k}$  ein mit  $\mathfrak{E}^i$  inzidentes Simplex, so gibt es nach dem Hilfssatz genau ein System benachbarter  $\mathfrak{H}$ -Klassen nach den Ecken von  $\mathfrak{E}^{i+k}$ , die das vorgegebene System benachbarter  $\mathfrak{H}$ -Klassen als Teilsystem enthalten. Die Simplexe mit der Seite  $\mathfrak{E}^i$  entsprechen somit umkehrbar eindeutig den Simplexe mit der Seite  $\widetilde{\mathfrak{E}}_i^j$ ; d. h. die Umgebung  $U(\bar{P})$  von  $\bar{P}$  in  $\widetilde{\mathfrak{K}}$ , die aus der Gesamtheit der mit  $\widetilde{\mathfrak{E}}_i^j$  inzidenten Simplexe besteht, bildet sich topologisch auf die Umgebung  $U(P)$  ab. Daher ist (Ü1 2) erfüllt. —  $\widetilde{Q}_\mu$  sei ein Punkt von  $\widetilde{\mathfrak{K}}$ , der über einem Punkte  $Q$  von  $U(P)$  liegt.  $Q$  gehört einem mit  $\mathfrak{E}^i$  inzidenten Simplexe  $\mathfrak{E}^{i+k}$  von  $U(P)$  an und daher  $\widetilde{Q}_\mu$  einem darüberliegenden Simplexe  $\widetilde{\mathfrak{E}}_i^{i+k}$ , das einen über  $P$  liegenden Punkt  $\widetilde{P}_\mu$  enthält; daher gehört  $\widetilde{Q}_\mu$  zu der Umgebung  $U(\widetilde{P}_\mu)$ , und es ist somit (Ü1 3) erfüllt.

III. Die Überlagerung  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  gehört zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$  der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{K}$ . Als Anfangspunkt der geschlossenen Wege in  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  wählen wir die über  $O$  liegende Ecke  $\bar{O}_1$ , die zur Einheits- $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\bar{O}_1$  gehört. Es sei nun  $U$  ein von  $O$  nach einer Ecke  $A$  laufender Kantenweg in  $\mathfrak{K}$  und  $U_\tau$  der aus den ersten  $\tau$  Kanten von  $U$  bestehende Teilweg. Dann bilden die  $\mathfrak{H}$ -Klassen der Wege  $U_0, U_1, \dots, U_\tau = U$  eine Reihe von aufeinanderfolgenden benachbarten  $\mathfrak{H}$ -Klassen. Die Ecken von  $\widetilde{\mathfrak{K}}$ , die durch zwei aufeinanderfolgende  $\mathfrak{H}$ -Klassen bestimmt sind, sind dann ebenfalls benachbart, und infolgedessen ist die Reihe der den  $\mathfrak{H}$ -Klassen

entsprechenden Ecken durch einen über  $U$  liegenden Kantenweg  $\tilde{U}$  verbunden. Der Anfangspunkt dieses Weges gehört zur  $\mathfrak{H}$ -Klasse von  $U_0$ , ist also die Ecke  $\tilde{O}_1$ .

Ist jetzt  $U$  insbesondere ein zu  $\mathfrak{H}$  gehöriger geschlossener Kantenweg, liegt also  $U$  in der Einheits- $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\tilde{O}_1$ , so muß der in  $\tilde{O}_1$  begonnene Überlagerungsweg  $\tilde{U}$  nach  $\tilde{O}_1$  zurückkehren. Gehört aber  $U$  nicht zu  $\mathfrak{H}$ , liegt also  $U$  in einer  $\mathfrak{H}$ -Klasse  $\tilde{O}_i + \tilde{O}_1$ , so führt der durchgedrückte Kantenweg  $\tilde{U}_i$  von  $\tilde{O}_1$  nach  $\tilde{O}_i \neq \tilde{O}_1$ , ist also nicht geschlossen. Da nun jeder geschlossene von  $O$  ausgehende Weg in einen Kantenweg deformiert werden kann, so ist gezeigt, daß ein geschlossener von  $O$  ausgehender Weg  $U$  dann und nur dann von einem geschlossenen Überlagerungsweg  $\tilde{U}$  mit dem Anfangspunkt  $\tilde{O}_1$  überlagert wird, wenn  $U$  zu  $\mathfrak{H}$  gehört. Das heißt aber, daß die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  sich gerade in die Untergruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  durchdrückt, wenn man  $\tilde{O}_1$  zum Anfangspunkte der geschlossenen Wege in  $\tilde{\mathfrak{K}}$  macht.  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ist also ein zu  $\mathfrak{H}$  gehöriger Überlagerungskomplex.

### Einzigkeit von $\tilde{\mathfrak{K}}$ .

Es sei  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  ein weiterer Überlagerungskomplex\*), der dieselbe Klasse konjugierter Untergruppen der Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bestimmt wie  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , nämlich die, zu der die Untergruppe  $\mathfrak{H}$  gehört. Es gibt also einen solchen über  $O$  liegenden Punkt  $\tilde{O}'_1$  von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$ , daß sich die Fundamentalgruppe von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  bei Wahl von  $\tilde{O}'_1$  als Anfangspunkt der geschlossenen Wege gerade in die Untergruppe  $\mathfrak{H}$  durchdrückt. (Es kann in  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  unter Umständen mehrere über  $O$  liegende Punkte mit dieser Eigenschaft geben.) Wir konstruieren dann eine Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  auf  $\tilde{\mathfrak{K}'}$ , bei der  $\tilde{O}_1$  in  $\tilde{O}'_1$  übergeht und zugeordnete Punkte über denselben Punkte von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  liegen.

Ist  $\tilde{P}$  ein beliebiger Punkt von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , so ziehen wir von  $\tilde{O}_1$  aus einen Weg  $\tilde{W}$  nach  $\tilde{P}$ . Der zugehörige Grundweg ist der von  $O$  ausgehende Weg  $W$ .  $\tilde{W}'$  sei der in  $\tilde{O}'_1$  beginnende, über  $W$  liegende Überlagerungsweg. Sein Endpunkt heiße  $\tilde{P}'$ . Er wird dem Punkte  $\tilde{P}$  als Bildpunkt zugeordnet. Man muß zeigen, daß diese Zuordnung unabhängig von der Auswahl des Verbindungsweges  $\tilde{W}$  ist. Sei  $\tilde{V}$  ein anderer Verbindungsweg von  $\tilde{O}_1$  mit  $\tilde{P}$ . Dann ist  $\tilde{W}\tilde{V}^{-1}$  geschlossen, also gehört  $WV^{-1}$  zu  $\mathfrak{H}$ . Dann ist aber auch der über  $WV^{-1}$  in  $\tilde{O}'_1$  begonnene Überlagerungsweg geschlossen, da die Fundamentalgruppe von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  sich in  $\mathfrak{H}$  durchdrücken soll, wenn man  $\tilde{O}'_1$  zum Anfangspunkt der geschlossenen Wege von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  macht. Also führen  $\tilde{W}'$  und  $\tilde{V}'$  zu demselben Endpunkte  $\tilde{P}'$ . — Die Zuordnung  $\tilde{P} \rightarrow \tilde{P}'$

\*) Von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  setzen wir nicht voraus, daß es eine simpliziale Zerlegung gibt, die sich in eine simpliziale Zerlegung von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durchdrückt; vielmehr sehen wir jetzt von jeder simplizialen Zerlegung ab.

ist umkehrbar eindeutig, da man durch die umgekehrte Konstruktion eindeutig von  $\tilde{P}'$  zu  $\tilde{P}$  zurückkommt.

Die Stetigkeit der Abbildung brauchen wir nur in einer Richtung, etwa in der Richtung  $\tilde{P} \rightarrow \tilde{P}'$  zu beweisen, weil  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  gleichberechtigt sind. Wir müssen also zu vorgegebener Umgebung  $\tilde{U}'(\tilde{P}')$  eine Umgebung  $\tilde{U}(\tilde{P})$  angeben, deren Bild ganz in  $\tilde{U}'(\tilde{P}')$  liegt.  $\tilde{U}_1$  sei eine in  $\tilde{U}$  liegende ausgezeichnete Umgebung von  $\tilde{P}$ . Als solche kann man z. B. den Durchschnitt einer beliebigen ausgezeichneten Umgebung von  $\tilde{P}'$  mit  $\tilde{U}'$  wählen.  $U_1$  sei die ausgezeichnete Umgebung von  $P$ , auf die sich  $\tilde{U}_1$  topologisch abbildet. Weiter sei  $U$  eine so kleine Umgebung von  $P$ , daß sie sich in eine Teilmenge  $U$  von  $U_1$  durchdrückt. Außerdem soll jeder Punkt von  $U$  mit  $\tilde{P}$  durch einen ganz zu  $U$  gehörigen Weg verbindbar sein. Da  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ein Komplex ist, kann man sicher ein solches  $U$  finden, z. B. genügt ein passender Simplexstern mit dem Mittelpunkte  $\tilde{P}$  allen Anforderungen. Wir behaupten, daß bei der Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  auf  $\tilde{\mathfrak{K}'}$   $U$  ganz in  $\tilde{U}'$  hineinfällt. In der Tat, ist  $\tilde{W}$  ein Weg von  $\tilde{O}_1$  nach  $\tilde{P}$ , so wähle man als Weg von  $\tilde{O}_1$  nach einem Punkte  $\tilde{Q}$  von  $U$  den Weg  $\tilde{W}$ , verlängert um einen in  $U$  verlaufenden Weg  $\Delta \tilde{W}$  von  $\tilde{P}$  nach  $\tilde{Q}$ . Der Grundweg  $W \cdot \Delta W$  verläuft von  $O$  nach  $P$  und dann ganz in  $U_1$ . Der nach  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  durchgedrückte Weg  $\tilde{W}' \cdot \Delta \tilde{W}'$  verläuft von  $\tilde{O}'_1$  nach  $\tilde{P}'$  und bleibt dann in  $\tilde{U}'_1$ , also erst recht in  $\tilde{U}'$ . Der Bildpunkt von  $Q$ , das ist der Endpunkt des Weges  $\tilde{W}'$ .  $\Delta \tilde{W}'$  liegt also in  $\tilde{U}'$ , was zu beweisen war.

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

**Satz:** *Die Überlagerungen eines Komplexes entsprechen umkehrbar eindeutig den Klassen konjugierter Untergruppen. Genauer: Ist  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ein Überlagerungskomplex eines Komplexes  $\mathfrak{K}$  und wählt man als Anfangspunkt der geschlossenen Wege von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  einen über dem Anfangspunkte  $O$  der geschlossenen Wege von  $\mathfrak{K}$  liegenden Punkt  $\tilde{O}_1$ , so drückt sich die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  in eine mit  $\tilde{\mathfrak{F}}$  1-isomorphe Untergruppe  $\mathfrak{H}$  der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{K}$  durch, bei anderer Wahl von  $\tilde{O}_1$  über  $O$  aber in eine zu  $\mathfrak{H}$  konjugierte Untergruppe.*

**Aufgaben:** 1. Welche Beziehung besteht zwischen den Charakteristiken eines endlichen Komplexes und einer  $g$ -blättrigen Überlagerung?

2. Ist  $\mathfrak{F}$  die freie Gruppe von  $a$  Erzeugenden und  $\mathfrak{H}$  eine Untergruppe vom Index  $i$ , so ist  $\mathfrak{H}$  die freie Gruppe von  $i(a-1)+1$  Erzeugenden. [Man bedenke, daß  $\mathfrak{F}$  die Fundamentalgruppe eines Kantenkomplexes der Charakteristik  $N = a-1$  ist (§ 47).]

3. Man zeige, daß ein einfach zusammenhängender Komplex einen einzigen Überlagerungskomplex hat, sich selbst.

### § 56. Universelle Überlagerung.

Unter den Überlagerungskomplexen eines Komplexes  $\mathfrak{K}$  ist der von besonderer Wichtigkeit, der zur Untergruppe  $\mathfrak{H} = 1$  gehört. Er heißt der *universelle Überlagerungskomplex* von  $\mathfrak{K}$ . Er ist dadurch charakterisiert, daß seine Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}$  aus dem Einselement allein besteht, daß er also einfach zusammenhängend ist. Als Folgerung des Satzes S. 193 ergibt sich also der

**Satz I:** Jeder zusammenhängende Komplex  $\mathfrak{K}$  besitzt einen eindeutig bestimmten einfach zusammenhängenden Überlagerungskomplex, den universellen  $\tilde{\mathfrak{K}}$ .

Den universellen Überlagerungskomplex kann man als den stärksten ansprechen, denn von ihm gilt der

**Satz II:** Der universelle Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ist dadurch charakterisiert, daß er jeden anderen Überlagerungskomplex  $\hat{\mathfrak{K}}$  von  $\mathfrak{K}$  überlagert.

Der Beweis beruht auf dem

**Hilfssatz:** Wird  $\mathfrak{K}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und  $\hat{\mathfrak{K}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  überlagert, so wird  $\mathfrak{K}$  auch von  $\hat{\mathfrak{K}}$  überlagert.

Die Forderung (Ü1 1), daß über jedem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{K}$  mindestens ein Punkt  $\tilde{P}$  liegt, ist offenbar erfüllt. Um (Ü1 2) und (Ü1 3) für  $\hat{\mathfrak{K}}$  zu erweisen, drücken wir eine simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  nach  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und von da nach  $\hat{\mathfrak{K}}$  durch und wählen als ausgezeichnete Umgebung eines Punktes  $P$  bzw. seiner überlagernden Punkte  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots$  die Gesamtheit der Simplexe, denen diese Punkte angehören, wie wir es beim Existenzbeweise der Überlagerung (S. 191) getan haben. Diese Simplexsterne bilden sich sämtlich topologisch aufeinander ab, woraus (Ü1 2) und (Ü1 3) und damit der Hilfssatz folgt.

Sei jetzt  $\hat{\mathfrak{K}}$  universeller Überlagerungskomplex von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}}$  Überlagerungskomplex von  $\mathfrak{K}$ . Dann überlagert  $\hat{\mathfrak{K}}$  nach dem Hilfssatz  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , und weil  $\hat{\mathfrak{K}}$  einfach zusammenhängend ist, ist er der universelle Überlagerungskomplex von  $\mathfrak{K}$ . Also überlagert der universelle Überlagerungskomplex von  $\mathfrak{K}$  auch  $\tilde{\mathfrak{K}}$ . — Überlagert umgekehrt ein Überlagerungskomplex von  $\mathfrak{K}$  jeden Überlagerungskomplex, so auch den universellen  $\tilde{\mathfrak{K}}$ . Der hat aber, weil einfach zusammenhängend, nur sich selbst zum Überlagerungskomplexe (§ 55 Aufg. 3).

Beispiele universeller Überlagerungskomplexe sind uns schon öfter begegnet. Die Zahlenebene überlagert bei der in § 8 durch Identifizieren hergestellten stetigen Abbildung die Ringfläche universell, ebenso die Zahlerade die Kreislinie. Allgemeiner ist der  $n$ -dimensionale Zahnenraum universeller Überlagerungskomplex des topologischen Produktes von  $n$  Kreisen und die  $n$ -Sphäre universeller Überlagerungskomplex des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes.

**Aufgaben:** 1.  $\mathfrak{K}^1$  sei der Kantenkomplex zweier Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt. Den universellen Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}^1$  von  $\mathfrak{K}^1$  zu finden.

2. Man identifizierte auf dem Rande der Einheitskreisscheibe je zwei Punkte, die auf dem Rande gemessen, den Abstand  $2\pi/p$  haben (so daß im ganzen je  $p$  Punkte zu identifizieren sind). Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des entstehenden Komplexes  $\mathfrak{K}^2$  zyklisch von der Ordnung  $p$  ist und daß der universelle Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}^2$  aus  $p$  Kreisscheiben mit gemeinsamem Rande besteht.

### § 57. Reguläre Überlagerung.

**1. Definition:** Die Untergruppe von  $\tilde{\mathfrak{F}}$ , in die sich die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  durchdrückt, hängt im allgemeinen noch davon ab, welchen über  $O$  liegenden Punkt man zum Anfangspunkt der in  $\tilde{\mathfrak{K}}$  verlaufenden geschlossenen Wege ernennt, ob  $\tilde{O}_1$  oder  $\tilde{O}_2$  oder .... Je nachdem erhält man die Untergruppen  $\mathfrak{H}_1$  oder  $\mathfrak{H}_2$  oder .... Alle diese Untergruppen sind konjugiert in  $\tilde{\mathfrak{F}}$  und bilden ein vollständiges System konjugierter Untergruppen. Aber sie brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein. Im extremen Falle, daß alle miteinander übereinstimmen, die Untergruppe, in die sich die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  durchdrückt, also Normalteiler von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  ist, bezeichnet man die Überlagerung als regulär.

Beispiele von regulären Überlagerungen sind alle Überlagerungen der Ringfläche, weil die Fundamentalgruppe der Ringfläche abelsch ist, jede universelle Überlagerung, weil sie zum Normalteiler  $\mathfrak{H} = 1$  gehört, jede zweiblättrige Überlagerung, weil eine Untergruppe vom Index 2 immer Normalteiler ist.

**2. Definition:** Eine reguläre Überlagerung läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß die über einem geschlossenen Grundwege liegenden Überlagerungswägen entweder alle zugleich geschlossen oder zugleich nicht geschlossen sind. Ist nämlich  $\tilde{W}_i$  der in  $\tilde{O}_i$  beginnende, über einem geschlossenen Wege  $W$  liegende Überlagerungsweg, so ist  $\tilde{W}_i$  geschlossen oder nicht, je nachdem  $W$  zu  $\mathfrak{H}_i$  gehört oder nicht. Sind nun alle konjugierten Untergruppen  $\mathfrak{H}_i$  einander gleich, etwa  $= \mathfrak{H}$ , so liegt der Weg  $W$  entweder in allen  $\mathfrak{H}_i$  — dann sind alle Wege  $\tilde{W}_i$  geschlossen —, oder  $W$  liegt in keiner Gruppe  $\mathfrak{H}_i$  — dann sind alle Wege  $\tilde{W}_i$  nichtgeschlossen. Sind andererseits die  $\mathfrak{H}_i$  nicht alle einander gleich, etwa  $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}_2$ , so gibt es einen Weg  $W$ , der zu  $\mathfrak{H}_1$ , aber nicht zu  $\mathfrak{H}_2$  gehört. Dann ist  $\tilde{W}_1$  geschlossen,  $\tilde{W}_2$  aber nicht. Daß wir zum Anfangspunkt von  $W$  den Punkt  $O$  genommen haben, ist keine wesentliche Einschränkung, da man einen beliebigen geschlossenen Weg in  $\mathfrak{K}$  immer durch einen von  $O$  ausgehenden hin und zurück durchlaufenden Hilfsweg zu einem von  $O$  ausgehenden Wege machen kann.

Die auf S. 183, Fig. 103, I angegebene erste dreifache Überlagerung der Doppelringfläche ist nichtregulär; denn der Breitenkreis  $b$  des linken Henkels ist, wenn man ihn in die Überlagerungsfläche durchdrückt, geschlossen oder nicht, je nachdem man den Überlagerungsweg im Blatt 3 oder Blatt 2 beginnen läßt.

3. Definition: Man kann die reguläre Überlagerung noch auf eine dritte Weise und zwar mit Hilfe des Begriffs der *Deckbewegung* charakterisieren. Eine Deckbewegung des Überlagerungskomplexes  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ist eine topologische Selbstabbildung von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , bei der jeder Punkt über seinem Grundpunkte liegen bleibt und nur die über ein und demselben Grundpunkte liegenden Punkte miteinander vertauscht werden. Es gibt höchstens eine Deckbewegung, die  $\tilde{O}_1$  in einen anderen über  $O$  liegenden Punkt, etwa in  $\tilde{O}_2$  überführt. Ist nämlich  $\tilde{P}$  ein beliebiger Punkt von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , so ziehe man einen Weg  $\tilde{W}_1$  von  $\tilde{O}_1$  nach  $\tilde{P}$ .  $W$  sei der entsprechende Grundweg. Bei der Deckbewegung geht  $\tilde{W}_1$  in den von  $\tilde{O}_2$  auslaufenden, über  $W$  liegenden Weg  $\tilde{W}_2$  über, also ist der eindeutig bestimmte Endpunkt von  $\tilde{W}_2$  der Bildpunkt von  $\tilde{P}$ . Die sämtlichen Deckbewegungen, die  $\tilde{\mathfrak{K}}$  zuläßt, bilden offenbar eine Gruppe, die Deckbewegungsgruppe  $\mathfrak{D}$  der Überlagerung. Möglicherweise besteht sie nur aus der identischen Abbildung, im Höchstfalle ist ihre Ordnung gleich der Blätterzahl der Überlagerung, nämlich dann, wenn man  $\tilde{O}_1$  durch Deckbewegungen in alle anderen Punkte  $\tilde{O}_2, \tilde{O}_3, \dots$  überführen kann, oder was dasselbe besagt, wenn sie die über  $O$  liegenden Punkte transitiv vertauscht.

Die dritte Charakterisierung der regulären Überlagerung lautet nun so:  $\tilde{\mathfrak{K}}$  wird von  $\mathfrak{K}$  dann und nur dann regulär überlagert, wenn die Deckbewegungsgruppe die über einem Punkte von  $\mathfrak{K}$  liegenden Punkte transitiv vertauscht. — Ist die Überlagerung nichtregulär, so gibt es, wie wir wissen, einen Weg  $W$  von  $\mathfrak{K}$ , der zugleich von geschlossenen und nicht geschlossenen Wegen überlagert wird. Alsdann kann es offenbar keine transitive Gruppe von Deckbewegungen geben, da ein geschlossener Weg von einer Deckbewegung wieder in einen geschlossenen Weg übergeführt wird. — Aus § 55 wissen wir, daß zwei Überlagerungskomplexe  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}'}$ , die dieselbe Klasse konjugierter Untergruppen (in unserem Falle also denselben Normalteiler  $\mathfrak{H}$ ) bestimmen, aufeinander topologisch abbildbar sind, so daß zugeordnete Punkte denselben Grundpunkt in  $\mathfrak{K}$  haben. Dabei kann man noch einen über  $O$  liegenden Punkt  $\tilde{O}_1$  in einen beliebigen Punkt  $\tilde{O}'_1$  von  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  überführen, wenn nur die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  bei Benutzung von  $\tilde{O}_1$  als Anfangspunkt der geschlossenen Wege sich in dieselbe Untergruppe von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  durchdrückt, wie die Fundamentalgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bei Benutzung von  $\tilde{O}_1$  als Anfangspunkt. Ist nun, wie in unserem Falle,  $\mathfrak{H}$  Normalteiler von  $\tilde{\mathfrak{F}}$ , so ist diese Bedingung immer erfüllt, wie man auch den Punkt  $\tilde{O}'_1$  über  $O$  wählt. Läßt man  $\tilde{\mathfrak{K}}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}'}$  zusammenfallen, so erhält man eine Deckbewegung von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , bei der  $\tilde{O}_1$  in einen beliebigen über  $O$  liegenden Punkt übergeht.

Zur Erläuterung können die beiden Überlagerungen der Doppelringfläche in § 53 dienen. Die erste Überlagerung ist, wie wir sahen, nichtregulär, besitzt also keine transitive Deckbewegungsgruppe, vielmehr ist die identische Deckbewegung die einzige mögliche, was schon deshalb

naheliegt, weil das mittlere Blatt 2 an beiden Henkeln, Blatt 1 und 3 aber nur an je einem Henkel durchschnitten ist. In der zweiten Überlagerung dagegen kann man die drei Blätter zyklisch vertauschen, so daß eine reguläre Überlagerung vorliegt.

Bei regulärer Überlagerung ist die Deckbewegungsgruppe  $\mathfrak{D}$  1-isomorph zur Faktorgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}/\mathfrak{H}$ . — Die Restklassen der Zerlegung nach der Untergruppe  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$ :

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}\{F_{11}\} + \mathfrak{H}\{F_{12}\} + \dots$$

entsprechen umkehrbar eindeutig den über  $O$  gelegenen Punkten  $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots$ . Andererseits entspricht jedem Punkte  $\tilde{O}_i$  eine Deckbewegung  $D_{1i}$ , die  $\tilde{O}_1$  in  $\tilde{O}_i$  überführt. Man hat daher eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Restklassen  $\mathfrak{H}\{F_{1i}\}$  und den Deckbewegungen:

$$\mathfrak{H}\{F_{1i}\} \leftrightarrow D_{1i}.$$

Um zu zeigen, daß diese Zuordnung einen Isomorphismus zwischen der Faktorgruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}/\mathfrak{H}$  und der Deckbewegungsgruppe  $\mathfrak{D}$  stiftet, bestimmen wir die Deckbewegung, die dem Produkte zweier Restklassen  $\mathfrak{H}\{F_{1i}\} \cdot \mathfrak{H}\{F_{1j}\} = \mathfrak{H}\{F_{1i}\} \{F_{1j}\} = \mathfrak{H}\{F_{1k}\}$  entspricht. Zum Punkte  $\tilde{O}_k$  gelangt man, wenn man von  $\tilde{O}_1$  längs des Weges  $\tilde{F}_{1i}$  nach  $\tilde{O}_i$  geht und dann auf dem über  $F_{1j}$  liegenden in  $\tilde{O}_i$  beginnenden Wege  $\tilde{F}_{ik}$  nach  $\tilde{O}_k$  weiter schreitet (Fig. 108). Da  $\tilde{F}_{ik}$  und  $\tilde{F}_{1j}$  über demselben Grundweg  $F_{1j}$  liegen, so entsteht  $\tilde{F}_{ik}$  aus  $\tilde{F}_{1j}$  durch die Deckbewegung  $D_{1i}$ . Es führt also  $D_{1i}$  den Punkt  $\tilde{O}_j$  in  $\tilde{O}_k$  über und daher die Deckbewegung  $D_{1i}D_{1j}$  (erst  $D_{1i}$ , dann  $D_{1j}$ !) den Punkt  $\tilde{O}_1$  in  $\tilde{O}_k$ . Es ist also  $D_{1i}D_{1j} = D_{1k}$ ; das besagt: dem Produkte  $\mathfrak{H}\{F_{1i}\} \cdot \mathfrak{H}\{F_{1j}\}$  entspricht das Produkt der zugeordneten Deckbewegungen  $D_{1i}D_{1j}$ . Es ist dabei an unsere Festsetzung zu erinnern, daß das Produkt der Wege erhalten wird, wenn man erst den linken Faktorweg und dann den rechten durchläuft (S. 150), das Produkt zweier Bewegungen aber, wenn man erst die rechte und dann die linke Faktorbewegung ausübt (S. 24).

Ist insbesondere  $\mathfrak{H} = 1$ , also  $\tilde{\mathfrak{K}}$  universeller Überlagerungskomplex, so ist  $\tilde{\mathfrak{F}}/\mathfrak{H} = \tilde{\mathfrak{F}}$ , und die Deckbewegungsgruppe ist 1-isomorph mit der Fundamentalgruppe des Grundkomplexes. Damit ist die Fundamentalgruppe eines Komplexes  $\tilde{\mathfrak{K}}$  als die Deckbewegungsgruppe seines universellen Überlagerungskomplexes erwiesen.

Z. B. hat die Fundamentalgruppe der projektiven Ebene die Ordnung 2, in Übereinstimmung damit, daß die Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerungsfläche, nämlich der Kugelfläche, zwei Deckbewegungen aufweist: die identische Bewegung und die Diametralpunktvertauschung. — Die Fundamentalgruppe der Ringfläche hat die Relation  $ABA^{-1}B^{-1} = 1$ , sie ist also die freie Abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden (S. 170). Die Deckbewegungsgruppe wird von Translationen der Zahlebene gebildet, die ein Rechtecksnetz in sich überführen (§ 8).

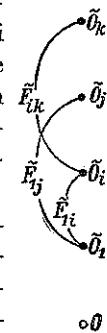


Fig. 108.

Auch im Falle einer nichtregulären Überlagerung läßt sich die Deckbewegungsgruppe  $\mathfrak{D}$  als eine Faktorgruppe auffassen. Bezeichnet nämlich wie früher  $\mathfrak{H}_i$  die Untergruppe von  $\mathfrak{F}$ , in die sich die Fundamentalgruppe von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bei Benutzung des Anfangspunktes  $\tilde{O}_i$  durchdrückt, und  $\mathfrak{Z}_i$  den Normalisator (oder die sog. Zwischengruppe) von  $\mathfrak{H}_i$  in  $\mathfrak{F}$ , d. i. die Gesamtheit der Elemente  $\{W\}$  von  $\mathfrak{F}$ , für die  $\{W\}^{-1}\mathfrak{H}_i\{W\} = \mathfrak{H}_i$  ist, so ist  $\mathfrak{D}$  1-isomorph mit  $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{H}_i$ .

**Aufgaben:** 1. Man führe den Beweis der letzten Behauptung durch.

2. Hat ein  $n$ -dimensionaler Komplex  $\mathfrak{K}^n$  die  $n$ -Sphäre  $S^n$  zum universellen Überlagerungskomplexe, so ist bei geradem  $n$  die Ordnung der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}^n$  gleich 1 oder 2. [Die Charakteristik von  $\mathfrak{K}^n$  ist ein Teiler der Charakteristik von  $S^n$ .]

3. Man beweise, daß die Fundamentalgruppe der orientierbaren Fläche vom Geschlechte  $h=4$  sowohl als Normalteiler, als auch als eine von drei konjugierten Untergruppen in der Fundamentalgruppe der orientierbaren Fläche vom Geschlechte  $h=2$  enthalten ist. [Vgl. die Beispiele von Überlagerungen der Doppelringfläche in § 53.]

4. Die nichtorientierten Linienelemente der projektiven Ebene bilden eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, den sog. Quaternionenraum. Seine Fundamentalgruppe ist die Quaternionengruppe. Man bestimme auf Grund der Kenntnis aller Untergruppen der Quaternionengruppe\*) alle seine 2-, 4-, 8-blättrigen Überlagerungen und ordne in sie den Raum der orientierten Linienelemente der projektiven Ebene sowie den der nichtorientierten und den der orientierten Linienelemente der Kugelfläche ein. [Vgl. Aufgabe 3 von S. 56 und Anm. 12.]

### § 58. Monodromiegruppe.

Wir lösen jetzt die Aufgabe, zu einem endlichen Komplexe  $\tilde{\mathfrak{K}}$  alle möglichen endlichblättrigen Überlagerungen zu bestimmen.  $g$  sei die Blätterzahl.

Ist  $W$  ein von  $O$  ausgehender geschlossener Weg in  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , so gibt es  $g$  Überlagerungswege  $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_g$ , deren Anfangspunkte der Reihe nach  $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_g$  sind. Ihre Endpunkte sind ebenfalls alle voneinander verschieden. Sie mögen  $\tilde{O}_{k_1}, \tilde{O}_{k_2}, \dots, \tilde{O}_{k_g}$  heißen. Wir ordnen dann dem Wege  $W$  die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & g \\ k_1 & k_2 & \dots & k_g \end{pmatrix}$$

zu. Homotope Wege erhalten offenbar dieselbe Permutation, und dem Produkt  $W_1 W_2$  zweier Wege gehört das Produkt der Permutationen der Wege  $W_1$  und  $W_2$  zu. Es liegt also eine homomorphe Abbildung der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  auf eine bestimmte Permutationengruppe  $\mathfrak{M}$  von  $g$  permutierten Ziffern vor.  $\mathfrak{M}$  heißt die *Monodromiegruppe* des Überlagerungskomplexes.

Es ist leicht, diejenigen Elemente von  $\mathfrak{F}$  zu ermitteln, die sich in das Einselement von  $\mathfrak{M}$  abbilden; es sind das gerade die Wegeklassen der-

\*) Vgl. etwa A. Speiser, Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1927) S. 76.

jenigen geschlossenen Wege  $W$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , die nach Durchdrückung in  $\tilde{\mathfrak{K}}$  stets geschlossen sind, welchen der Anfangspunkte  $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_g$  man auch wählt. Bezeichnen wie früher  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_g$  die konjugierten Untergruppen, in die sich die Fundamentalgruppe von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  je nach Benutzung der Anfangspunkte  $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_g$  durchdrückt, so gehört somit zu  $W$  dann und nur dann die identische Permutation, wenn  $W$  dem Durchschnitt  $\mathfrak{T}$  der Untergruppen  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_g$  angehört. Es gilt daher der

**Satz:** Die Monodromiegruppe  $\mathfrak{M}$  einer Überlagerung  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ist 1-isomorph zur Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{T}$  aus der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  des Grundkomplexes und dem Durchschnitt  $\mathfrak{T}$  der konjugierten Untergruppen  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_g$ , zu denen die Überlagerung  $\tilde{\mathfrak{K}}$  gehört. Die Ordnung von  $\mathfrak{M}$  ist also  $\geq g$  (Blätterzahl). Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_g$  zusammenfallen, d. h. wenn  $\tilde{\mathfrak{K}}$  reguläre Überlagerung ist. Dann ist die Monodromiegruppe 1-isomorph mit  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}_1$  und also nach § 57, 3 1-isomorph mit der Deckbewegungsgruppe.

Man redet allgemein von einer Darstellung einer Gruppe  $\mathfrak{F}$ , wenn jedem Gruppenelemente eine Permutation von  $g$  Ziffern zugeordnet ist und dem Produkte zweier Elemente das Produkt der zugeordneten Permutationen entspricht. Zwei Darstellungen derselben Gruppe werden als nicht verschieden angesehen, wenn sich die eine aus der anderen durch Umordnung der Ziffern  $1, 2, \dots, g$  gewinnen läßt. Der Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$  induziert also eine Darstellung der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  des Grundkomplexes. Die Tatsache, daß  $\tilde{\mathfrak{K}}$  ein zusammenhängender Komplex ist, drückt sich in der Transitivität der Darstellung aus: Sind  $i$  und  $j$  irgend zwei permutierte Ziffern, so gibt es ein Element  $\{W\}$  aus  $\mathfrak{F}$ , das  $i$  in  $j$  überführt. Man braucht als  $W$  nur den Grundweg eines Weges  $\tilde{W}$  von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  zu nehmen, der die Punkte  $\tilde{O}_i$  und  $\tilde{O}_j$  miteinander verbindet.

Wir zeigen nun, daß auch umgekehrt zu jeder transitiven Darstellung  $\mathfrak{P}$  der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  genau ein Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$  gehört.  $\mathfrak{H}_1$  sei die Untergruppe der Elemente von  $\mathfrak{F}$ , die die Ziffer 1 fest lassen.  $\mathfrak{H}_1$  besteht also aus der Gesamtheit der Wege, die von geschlossenen, in  $\tilde{O}_1$  beginnenden Wegen des gesuchten Überlagerungskomplexes  $\tilde{\mathfrak{K}}$  überlagert werden. Das heißt aber, daß  $\tilde{\mathfrak{K}}$  zu der Gruppe  $\mathfrak{H}_1$  gehört. Wenn es daher überhaupt einen die gegebene Darstellung  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{F}$  induzierenden Überlagerungskomplex gibt, so ist es der zur Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  von  $\mathfrak{F}$  gehörige Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{K}}$ . Die von  $\tilde{\mathfrak{K}}$  in  $\mathfrak{F}$  induzierte Darstellung  $\mathfrak{P}'$  erteilt den zu  $\mathfrak{H}_1$  gehörigen Wegen und nur diesen Permutationen, die die Ziffer 1 fest lassen. Dann müssen aber  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{P}'$  übereinstimmen nach dem gruppentheoretischen

**Hilfsatz:** Eine transitive Darstellung  $\mathfrak{P}$  einer Gruppe  $\mathfrak{F}$  ist bestimmt durch die Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  aller Elemente, die die Ziffer 1 fest lassen.

Beweis: Die Elemente einer Restklasse in der Zerlegung\*)

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1\{F_{11}\} + \mathfrak{H}_1\{F_{12}\} + \dots$$

führen alle die Ziffer 1 in dieselbe Ziffer, Elemente aus verschiedenen Restklassen aber in verschiedene Ziffern über. Man kann annehmen, daß bei der Restklasse  $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$  1 in  $i$  übergeht. Da in den Permutationen der Darstellung  $\mathfrak{P}$  nur die Ziffern 1 bis  $g$  auftreten und da durch geeignete Elemente von  $\mathfrak{F}$  die Ziffer 1 in jede beliebige der Ziffern 1, 2, ...,  $g$  übergeführt werden kann — denn  $\mathfrak{P}$  sollte transitiv sein —, so muß es genau  $g$  Restklassen in der Zerlegung von  $\mathfrak{F}$  nach  $\mathfrak{H}_1$  geben:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1\{F_{11}\} + \mathfrak{H}_1\{F_{12}\} + \dots + \mathfrak{H}_1\{F_{1g}\}.$$

Ist dann  $\{W\}$  ein beliebiges Element aus  $\mathfrak{F}$  und will man wissen, wie die Ziffer  $i$  bei  $\{W\}$  permutiert wird, so bedenke man, daß  $\{F_{1i}\}\{W\}$  einer wohlbestimmten Restklasse angehört, etwa der Restklasse  $\mathfrak{H}_1\{F_{1k}\}$ .  $\{F_{1i}\}\{W\}$  führt also 1 in  $k$  über und daher  $\{W\}$   $i$  in  $k$ . Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Die Aufgabe, alle  $g$ -blättrigen Überlagerungen eines endlichen Komplexes  $\mathfrak{K}$  zu bestimmen, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, alle Darstellungen der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{K}$  durch transitive Permutationengruppen von  $g$  Ziffern zu finden.<sup>32</sup> Man beginnt damit, die Erzeugenden

$$A_1, A_2, \dots, A_s$$

und Relationen

$$R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1$$

der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  nach dem Verfahren von § 46 zu ermitteln. Eine Darstellung  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{F}$  ist offenbar bestimmt, wenn man die den Erzeugenden zugeordneten Permutationen kennt. Man ordne also den Erzeugenden  $A_1, A_2, \dots, A_s$  willkürliche Permutationen  $P_1, P_2, \dots, P_s$  der Ziffern 1, 2, ...,  $g$  zu und prüfe nach, ob folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(M<sub>1</sub>) Die zur linken Seite  $R_j(A_i)$  einer definierenden Relation von  $\mathfrak{F}$  zugehörige Permutation  $R_j(P_i)$  ist die identische.

(M<sub>2</sub>) Die von den Permutationen  $P_1, P_2, \dots, P_s$  erzeugte Permutationengruppe ist transitiv.

Die Bedingung (M<sub>1</sub>) ist gleichbedeutend damit, daß zwei Produkten  $\prod_i(A_i)$  und  $\prod'_i(A_i)$ , die dasselbe Gruppenelement von  $\mathfrak{F}$  darstellen, dieselbe Permutation zukommt, daß also jedem Elemente von  $\mathfrak{F}$  eindeutig eine Permutation zugeordnet ist. Die Bedingung, daß dem Pro-

\*) Obwohl es sich in dem Hilfssatze um abstrakte Gruppentheorie handelt und die Elemente von  $\mathfrak{F}$  keineswegs Wegeklassen sein müssen, behalten wir der Einheitlichkeit wegen in der Bezeichnung der Gruppenelemente die geschweiften Klammern bei.

dukte zweier Gruppenelemente das Produkt der zugeordneten Permutationen entspricht, ist dann offenbar von selbst erfüllt. Da man nur endlich viele Möglichkeiten hat, den endlich vielen Erzeugenden  $A_1, A_2, \dots, A_s$  von  $\mathfrak{F}$  Permutationen von  $g$  Ziffern zuzuordnen, so kann man grundsätzlich alle Darstellungen von  $\mathfrak{F}$  durch Probieren finden. Hat man eine Darstellung gefunden, so kann man die Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  der die Ziffer 1 fest lassenden Elemente von  $\mathfrak{F}$  ermitteln und den Überlagerungskomplex nach § 55 konstruieren.

Da jede Deckbewegung eine bestimmte Permutation der über  $O$  liegenden Punkte  $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \dots, \widetilde{O}_g$  bewirkt, so kann man auch die Deckbewegungsgruppe  $\mathfrak{D}$  eines regulären Überlagerungskomplexes als eine reguläre Permutationengruppe\*) der Ziffern 1, 2, ...,  $g$  darstellen. Doch sind diese Permutationen nur bei abelscher Deckbewegungsgruppe dieselben wie die der Monodromiegruppe  $\mathfrak{M}$ . Die beiden Darstellungen der Gruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  durch reguläre Permutationengruppen sind nämlich die beiden aus der Gruppentheorie bekannten Darstellungen, die entstehen, wenn man einmal dem Elemente  $Q$  von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  die Permutation

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_g \\ X_1 Q & X_2 Q & \dots & X_g Q \end{pmatrix}$$

( $X_1, X_2, \dots, X_g$  sind die Elemente von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$ ), das andere Mal die Permutation

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_g \\ QX_1 & QX_2 & \dots & QX_g \end{pmatrix}.$$

zuordnet. Die erste Permutationengruppe ist die Monodromiegruppe, die zweite die Deckbewegungsgruppe. Man braucht in diesen Permutationen nur die Elemente von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  durch die Punkte  $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \dots, \widetilde{O}_g$  (die ja den Restklassen von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  eindeutig entsprechen) zu ersetzen, um die Monodromiegruppe bzw. Deckbewegungsgruppe als Permutationengruppe der Punkte  $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \dots, \widetilde{O}_g$  zu erhalten. Die Permutationen dieser beiden Gruppen stimmen nur dann überein, wenn für jedes  $Q$  gilt  $X_i Q = Q X_i$ , d. h. wenn die Gruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  abelsch ist.

Als Anwendung der Überlagerungstheorie bestimmen wir\*\*) die drei- und vierblättrigen Überlagerungen des Außenraumes der Kleeblattschlinge, eines Knotens, der in der Fig. 109 in Projektion stark ausgezogen ist. Die Fundamentalgruppe hat nach S. 180 die Relationen

$$A^2 = B^3.$$

Dabei ist  $A$  der Seele des im Endlichen gelegenen Vollringes,  $B$  der Seele des Restvollringes des zur 3-Sphäre geschlossenen gewöhnlichen Raumes homotop.

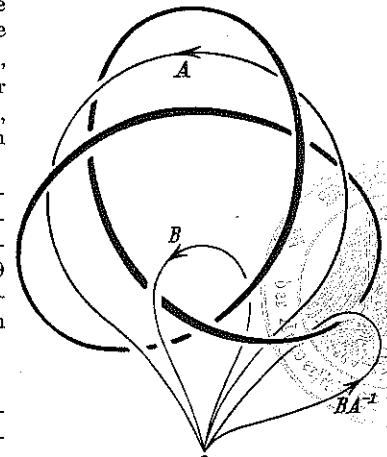


Fig. 109.

\*) Regulär heißt eine Permutationengruppe, wenn die Anzahl der permuierten Ziffern gleich der Ordnung der Gruppe ist.

\*\*) Dieses instruktive Beispiel haben wir uns aus einem Briefwechsel mit Herrn H. Kneser angeeignet.

Um die dreiblättrigen Überlagerungen zu finden, hat man dem Elemente  $B$  eine Permutation von drei Ziffern zuzuordnen, deren dritte Potenz das Quadrat einer andern Permutation wird. Es gibt hierfür offenbar nur zwei Möglichkeiten. Entweder ordnet man  $B$  die identische oder eine zyklische Permutation zu. Die identische Permutation kommt wegen der geforderten Transitivität der Permutationengruppe nicht in Frage, also ordnen wir zu<sup>\*</sup>

$$B \rightarrow (1\ 2\ 3).$$

Für  $A$  hat man dann zwei Möglichkeiten: entweder die identische Permutation

$$A \rightarrow (1\ 2\ 3) \quad (\text{I})$$

oder

$$A \rightarrow (1\ 2)(3). \quad (\text{II})$$

Die Monodromiegruppe ist im Falle (I) zyklisch von der Ordnung 3, also ist die Überlagerung regulär, im Falle (II) ist sie die Diedergruppe der Ordnung 6 (oder die Doppelverhältnisgruppe); da die Ordnung 6 größer als die Blätterzahl 3 ist, ist die Überlagerung nichtregulär. Dem „Meridiankreise“  $B A^{-1}$  entspricht im Falle (I) die zyklische Permutation  $(1\ 2\ 3)$ ; im Überlagerungsraume kommt man also erst nach dreimaliger Umschlingung des Knotens zum Ausgangspunkte zurück. Anders im Falle (II); hier ist  $B A^{-1} = (1)(2\ 3)$ . Der in  $\widetilde{O}_1$  begonnene Überlagerungsweg des Meridiankreises ist daher geschlossen, der in  $\widetilde{O}_2$  begonnene schließt sich erst nach zweimaliger Durchlaufung. Damit sind die dreiblättrigen Überlagerungen ermittelt.

Will man die vierblättrigen Überlagerungsräume bestimmen, so kommt für  $B$  die zyklische Permutation  $(1\ 2\ 3\ 4)$ , sowie die Permutation  $(1\ 2)(3)(4)$  nicht in Frage, weil dann  $B^2$  nicht gleich einem Quadrate wäre. Die identische Permutation scheidet wegen der Transitivität der Monodromiegruppe aus. Es bleiben also die beiden Fälle übrig

$$B \rightarrow (1\ 2\ 3)(4), \quad (\text{I})$$

$$B \rightarrow (1\ 3)(2\ 4). \quad (\text{II})$$

Im Falle (I) muß wegen  $B^3 = (1)(2)(3)(4)$  auch  $A^2 = (1)(2)(3)(4)$  sein. Also kommen für  $A$  nur in Frage eine Vertauschung von nur zwei Elementen und eine Vertauschung von zweimal je zwei Elementen. Mit Rücksicht auf die Transitivität der Monodromiegruppe ergeben sich im Falle (I) nur die beiden Möglichkeiten

$$A \rightarrow (1\ 4)(2)(3), \quad (\text{I}_1)$$

$$A \rightarrow (1\ 4)(2\ 3) \quad (\text{I}_2)$$

und im Falle (II) die eine

$$A \rightarrow (1\ 2\ 3\ 4). \quad (\text{II})$$

Es sind also drei vierblättrige Überlagerungen der Kleeblattschlinge vorhanden. Nur eine von ihnen, die letzte, ist regulär mit zyklischer Deckbewegungsgruppe. Im Falle (I<sub>1</sub>) ist die Monodromiegruppe die symmetrische Gruppe von vier Ziffern (Oktaedergruppe), im Falle (I<sub>2</sub>) die alternierende Gruppe (Tetraedergruppe). Dem Meridiankreise  $B A^{-1}$  entsprechen in den drei Fällen die Blätterpermutationen

$$(1\ 2\ 3\ 4) \quad (\text{I}_1)$$

$$(1\ 3\ 4)(2) \quad (\text{I}_2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4). \quad (\text{II})$$

Nennt man die  $g$ -fache Überlagerung eines Knotens *im Kleinen zyklisch*, wenn ein kleiner um den Knoten gelegter Kreis  $g$ -mal durchlaufen werden muß, damit der

<sup>\*</sup>) Wegen der Schreibung der Permutationen in Zyklen vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1927), S. 106.

Überlagerungsweg geschlossen ist, so sind hiernach (I<sub>1</sub>) und (II) im Kleinen zyklisch. Es ist aber nur (II) auch *im Großen zyklisch*, wenn man darunter eine reguläre Überlagerung mit zyklischer Deckbewegungsgruppe versteht. Eine andere Definition der im Großen zyklischen Überlagerung werden wir in § 77 kennenlernen, wobei sich auch zeigen wird, daß jede im Großen zyklische Überlagerung auch im Kleinen zyklisch ist. Wenn wir von einer zyklischen Überlagerung schlechthin reden, so ist immer eine im Großen zyklische gemeint.

Die Kleeblattschlinge besitzt für beliebige Blätterzahl  $g$  immer eine im Großen zyklische Überlagerung, die durch die Permutationen

$$B \rightarrow (1\ 2\ \dots\ g)^2, \quad A \rightarrow (1\ 2\ \dots\ g)^2$$

bestimmt ist. Die hochgestellten Zahlen 2 und 3 an den Permutationszyklen haben hier die Bedeutung von Exponenten der Permutationen. In § 77 werden wir sehen, daß jeder beliebige Knoten genau eine zyklische Überlagerung vorgegebener Blätterzahl hat.

**Aufgaben:** 1. Man bestimme die fünfblättrigen Überlagerungen der Kleeblattschlinge (es gibt deren zwei).

2. Man zeige, daß es 15 verschiedene zweiblättrige Überlagerungen der Doppelringfläche gibt.

Wir haben bisher die Gruppentheorie angewendet, um die Überlagerungen eines Komplexes zu überblicken. Umgekehrt leistet die Theorie der Überlagerungskomplexe der Gruppentheorie Dienste, wenn es sich darum handelt, die Erzeugenden und Relationen einer Untergruppe  $\mathfrak{H}$  aus denen der ganzen Gruppe  $\mathfrak{F}$  zu ermitteln. Hat  $\mathfrak{F}$  die Erzeugenden  $A_1, \dots, A_a$  und die Relationen  $R_1(A_i) = 1, \dots, R_r(A_r) = 1$ , so konstruiere man einen Flächenkomplex  $\mathfrak{K}$  mit einer einzigen Ecke  $O$ , mit  $a$  Kanten  $A_1, \dots, A_a$ , die nach Orientierung die Erzeugenden der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}$  sein werden, und  $r$  Flächenstücken, die in die geschlossenen Wege  $R_1(A_1), \dots, R_r(A_r)$  eingespannt werden.  $\mathfrak{K}$  ist dann nach § 46 gerade die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}$ . Die Untergruppe  $\mathfrak{H}$  läßt sich nun auffassen als die Fundamentalgruppe des zu  $\mathfrak{H}$  gehörigen Überlagerungskomplexes  $\widetilde{\mathfrak{K}}$ . Die Blätterzahl  $g$ , die gleich dem Index von  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{F}$  ist, setzen wir der Einfachheit halber als endlich voraus. Dann ist  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  ein aus  $g$  Ecken,  $ag$  Kanten und  $rg$  Flächenstücken bestehender Flächenkomplex. Die Erzeugenden und Relationen können nun nach dem Verfahren von § 46 ermittelt werden. — Man kann diese von K. Reidemeister stammende Methode von ihrer geometrischen Einkleidung unabhängig machen und zu einer rein gruppentheoretischen ausgestalten, worüber man K. Reidemeister [1], [7] vergleiche.

## Neuntes Kapitel.

## Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.

## § 59. Allgemeine Eigenschaften.

Eine dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$  ist ein dreidimensionaler zusammenhängender endlicher homogener Komplex. Das Beiwort „geschlossene“ drückt wie bei den Flächen Endlichkeit und Unberandetheit zugleich aus. Da wir es zunächst nur mit geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu tun haben, so lassen wir es gewöhnlich weg. Die Homogenität besagt: Es gibt zu jedem Punkte von  $\mathfrak{M}^3$  eine Umgebung, die sich topologisch auf das Innere der Einheitsvollkugel abbilden läßt. Nach § 33 Satz II sind dann die Homologiegruppen in einem Punkte von  $\mathfrak{M}^3$  dieselben wie die einer 2-Sphäre, also sind die Bettischen Zahlen des Umgebungskomplexes  $p^0 = p^2 = 1, p^1 = 0$ .

Wir wollen die Bedingung der Homogenität kombinatorisch fassen und betrachten zu dem Zwecke eine bestimmte simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{M}^3$ . Mit jedem 2-Simplex  $\mathfrak{E}^2$  müssen dann genau zwei 3-Simplexe inzident sein, damit für den Umgebungskomplex des Mittelpunktes von  $\mathfrak{E}^2$   $p^2 = 1$  wird, wie in § 32 (2. Beispiel) gezeigt wurde. Hieraus folgt, daß die 2- und 3-Simplexe, die um eine Kante  $\mathfrak{E}^1$  von  $\mathfrak{M}^3$  herumliegen, einen oder mehrere, etwa  $l$ , Zyklen bilden von abwechselnd inzidenten Simplexen der Dimension 2 und 3.  $l$  muß  $= 1$  sein. Denn der Umgebungskomplex des Mittelpunktes von  $\mathfrak{E}^1$  besteht aus  $l$  Kugelflächen, die nur die Randpunkte von  $\mathfrak{E}^1$  gemeinsam haben, somit ist die zweite Bettische Zahl des Umgebungskomplexes  $= l$ , sie sollte aber  $= 1$  sein. Betrachtet man schließlich den Simplexstern der um eine Ecke  $\mathfrak{E}^0$  herumliegenden Simplexe von  $\mathfrak{M}^3$ , so ist sein Außenrand ein zweidimensionaler Komplex, in dem mit jedem 1-Simplex genau zwei 2-Simplexe inzident sind, während die Simplexe, die um eine Ecke liegen, genau einen Zyklus bilden (denn nach Projektion von  $\mathfrak{E}^0$  aus müssen die entsprechenden Eigenschaften für die Simplexe der Dimensionen 2 und 3 gelten). Also besteht dieser Außenrand aus einer oder mehreren geschlossenen Flächen. Da aber für den Außenrand  $p^0 = 1$  ist, so kann er nur aus einer geschlossenen Fläche bestehen (§ 18). Da ferner  $p^1 = 0$  ist, kommt als diese Fläche nur die Kugel oder die projektive Ebene in Frage, die letztere scheidet wegen  $p^2 = 1$  aus (§ 41). — Wenn umgekehrt in einem simplizialen Komplex der Umgebungskomplex einer jeden Ecke eine Kugelfläche ist, so ist der Komplex eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Denn aus der Voraussetzung

folgt, daß mit jedem 2-Simplex genau zwei 3-Simplexe inzident sind und daß die um eine Kante herumliegenden Simplexe genau einen Zyklus bilden, also Homogenität in jedem Punkte des Komplexes. Das Ergebnis ist der

Satz I: Ein dreidimensionaler zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex ist dann und nur dann eine geschlossene Mannigfaltigkeit, wenn der Umgebungskomplex einer jeden Ecke eine Kugelfläche ist.

Hieraus folgt

Satz II: Jede dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit ist zugleich eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit.

Es ist nur noch die Verbindbarkeit je zweier 3-Simplexe zu beweisen. Die Gesamtheit der mit einem festen 3-Simplex verbindbaren 3-Simplexe ist ein Teilkomplex. Würde er nicht ganz  $\mathfrak{M}^3$  erschöpfen, so hätte er mit dem restlichen Teilkomplex nur Ecken oder Kanten, aber keine 2-Simplexe gemeinsam. Der Umgebungskomplex einer solchen Ecke oder des Mittelpunktes einer solchen Kante wäre dann sicher keine Kugelfläche, sondern würde aus zwei Teilkomplexen bestehen, die höchstens gemeinsame Ecken haben.

Auf Grund von Satz II kann man zwischen orientierbaren und nichtorientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten unterscheiden.

Wir werden später für  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten den Dualitätsatz beweisen, der aussagt, daß zwischen den Zusammenhangszahlen einer geschlossenen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit die Beziehungen  $q^i = q^{n-i}$  bestehen (§ 69). Für  $n = 3$  ist also

$$q^0 = q^3 \quad \text{und} \quad q^1 = q^2, \quad (1)$$

und daraus folgt für die Charakteristik

$$N = -q^0 + q^1 - q^2 + q^3 = 0. \quad (2)$$

Satz III: Die Charakteristik einer dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit ist 0.

Nach § 23 ist die Charakteristik auch gleich der Wechselsemme über die Bettischen Zahlen

$$N = -p^0 + p^1 - p^2 + p^3.$$

Da  $p^0$  für einen zusammenhängenden Komplex stets  $= 1$ ,  $p^3$  aber  $= 1$  oder 0 ist, je nachdem  $\mathfrak{M}^3$  orientierbar ist oder nicht (§ 24), so hat man

$$p^2 = p^1 \quad \text{für orientierbare Mannigfaltigkeiten,}$$

$$p^2 = p^1 - 1 \quad \text{für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten.}$$

Aus § 24 wissen wir ferner, daß es nur im nichtorientierbaren Falle Torsionskoeffizienten der Dimension 2 gibt, und zwar genau einen vom Werte 2. Die numerischen Invarianten einer dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit, deren Orientierbarkeitscharakter man kennt,

sind also alle schon durch diejenigen der Dimension 1 bestimmt. Diese wiederum folgen aus der Fundamentalgruppe nach § 48. In der Tat wird die Fundamentalgruppe das wichtigste Unterscheidungsmerkmal für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten sein.

Weil in einer nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit nach der letzten Gleichung  $p^1 = p^2 + 1$  ist, so ist  $p^1 > 0$ . Das besagt aber

**Satz IV:** *Die Homologiegruppe der Dimension 1, also erst recht die Fundamentalgruppe einer nichtorientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist unendlich.*

Der Satz ist übrigens, wie das topologische Produkt aus projektiver Ebene und  $(n-2)$ -Sphäre zeigt, nur in drei Dimensionen gültig (vgl. § 43, 1).

### § 60. Darstellung durch ein Polyeder.

Wie man eine Fläche sich zweckmäßig durch ein Polygon mit paarweise zugeordneten Seiten geben kann, so eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M^3$  durch ein dreidimensionales Vollpolyeder mit paarweise zugeordneten Seitenflächen.  $M^3$  entsteht ja, indem man endlich viele 3-Simplice hennimmt und gewisse Seiten identifiziert (§ 10). Diesen Aufbau kann man schrittweise vollziehen, indem man von einem Simplexe ausgeht, daran ein zweites längs einer Seitenfläche ansetzt, daran wieder eines und so fort. So kommt man zu einem der Vollkugel homöomorphen simplizialen Komplexe. Der Rand der Vollkugel ist simplizial zerlegt, und je zwei seiner 2-Simplice entsprechen in  $M^3$  demselben Dreiecke.  $M^3$  entsteht also aus der Vollkugel, wenn man die 2-Simplice des Randes paarweise für äquivalent erklärt und identifiziert.

Man kann sich noch von der Einschränkung befreien, daß die zugeordneten Seiten gerade Dreiecke sind. Zu dem Zwecke definieren wir das dreidimensionale Vollpolyeder als eine Vollkugel (oder ein topologisches Bild einer Vollkugel), deren Rand  $\mathfrak{R}$  in Polygone eingeteilt ist, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein sollen:

Jedes Polygon ist mindestens ein Dreieck; jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  gehört mindestens einem Polygon an; zwei Polygone sind entweder punktfremd oder haben gewisse Ecken oder Kanten gemeinsam.\*.) Die Ecken, Kanten und Polygone des Randes  $\mathfrak{R}$  nennen wir *Ecken, Kanten und Seiten (-flächen) des Vollpolyeders*. — Ein massives Dodekaeder ist z. B. ein Polyeder mit 12 Seiten, 30 Kanten und 20 Ecken. Ebenso ist eine Vollkugel, die durch einen Hauptkreis in zwei Halbkugeln zerlegt ist, wenn man noch den Hauptkreis durch mindestens zwei Ecken unterteilt, ein Polyeder.

Aus dem Polyeder gewinnt man durch Normalunterteilung einen simplizialen Komplex. Die *Normalunterteilung* wird folgendermaßen gebildet:

\*.) Der Rand eines Vollpolyeders ist eine spezielle, die Kugelfläche überdeckende Polyederfläche im Sinne von § 37; speziell deshalb, weil die Polyederflächenstücke jetzt selbst Polygone sind, also Selbstberührungen ausgeschlossen sind.

Zuerst wird jede Kante des Polyeders durch einen mittleren Punkt in zwei Teilsimplete zerlegt; genauer geschieht das so, daß man ein geradliniges normal unterteiltes 1-Simplex, welches ein Simplexstern  $\mathfrak{St}^1$  ist, topologisch auf die Polyederkante abbildet. — Der Rand einer Polyederseite  $a^2$  wird dadurch zu einem der Kreislinie homöomorphen simplizialen Komplexe. Wir nehmen nun einen Simplexstern  $\mathfrak{St}^2$ , dessen Außenrand ebenso simplizial zerlegt ist wie der Rand von  $a^2$  und bilden ihn topologisch auf  $a^2$  ab, so daß die simpliziale Zerlegung des Außenrandes von  $\mathfrak{St}^2$  mit der des Randes von  $a^2$  zur Deckung kommt. Dadurch wird  $a^2$  selbst ein Simplexstern. Indem man mit allen übrigen Polyederseiten ebenso verfährt, wird der Rand des Polyeders  $a^3$  ein simplizialer Komplex. Man nimmt nun einen Simplexstern  $\mathfrak{St}^3$ , dessen Außenrand ebenso simplizial zerlegt ist, und bildet ihn topologisch auf  $a^3$  ab, so daß die simpliziale Zerlegung des Außenrandes von  $\mathfrak{St}^3$  mit der des Randes von  $a^3$  zur Deckung kommt. Die hiermit gewonnene simpliziale Zerlegung des Polyeders heißt seine (erste) Normalunterteilung.

In einem Vollpolyeder seien nun die Seiten paarweise zugeordnet, und zwar vermöge topologischer Abbildungen, die Ecken in Ecken und Kanten in Kanten überführen, was voraussetzt, daß zugeordnete Seiten gleich viele Ecken haben. Außerdem verlangen wir, daß bei dieser topologischen Abbildung die Teilsimplete der Normalunterteilung der beiden Seiten linear aufeinander abgebildet werden. Durch die Zuordnung der Seiten werden gewisse Kanten und gewisse Ecken des Polyeders äquivalent. Wir setzen ein für allemal voraus, daß die Zuordnungen so beschaffen sind, daß niemals eine orientierte Kante mit ihrer entgegengesetzten orientierten äquivalent wird, daß also eine Kante niemals äquivalente mittlere Punkte hat. Diese Bedingung ist insofern unwesentlich, als eine orientierte Kante, die mit ihrer entgegengesetzten äquivalent ist, immer durch Unterteilung in zwei Kanten verwandelt werden kann, die keine äquivalenten mittleren Punkte mehr haben. — Dagegen dürfen die beiden Randpunkte einer Kante äquivalent sein.

Ecken, die durch die Seitenzuordnung äquivalent werden, bezeichnen wir mit ' $a^0$ ', ' $a^0$ ', ...; sie fallen nach Identifizieren äquivalenter Punkte in ein und denselben Punkt  $a^0$  zusammen; der Index  $v$  läuft von 1 bis  $a^0$ . Ebenso wird ein System äquivalenter Kanten mit ' $a^1$ ', ' $a^1$ ', ... bezeichnet\*); die Anzahl der Systeme äquivalenter Kanten sei  $a^1$ , so daß  $v$  hier von 1 bis  $a^1$  läuft. Zwei äquivalente Seiten werden ' $a^2$ ' und ' $a^2$ ' genannt; es seien im ganzen  $a^2$  solche Paare äquivalenter Seiten vorhanden. Schließlich nennen wir ' $a^3$ ' das ganze Vollpolyeder. Dann ist klar, daß durch Identifizieren äquivalenter Punkte aus ' $a^3$ ' ein Komplex entsteht. Zwar geht die Normalunterteilung von ' $a^3$ ' durch Identifizieren noch nicht in einen simplizialen Komplex über, da gewisse nichtäquivalente Teilsimplete von ' $a^3$

\*.) Es handelt sich hier um die Ecken, Kanten und Seiten des Polyeders und nicht etwa um die der Normalunterteilung.

äquivalente Ecken haben, so daß man beim Identifizieren zwei verschiedene Simplexe mit den gleichen Ecken erhalten würde. Es wäre also für die durch Identifizieren entstehende, in Simplexe zerlegte Punktmenge die Bedingung ( $k_3$ ) von § 10 verletzt. Durch eine nochmalige Normalunterteilung aller Simplexe des normal unterteilten Vollpolyders ' $\alpha^3$ ' erreicht man, daß auch nach dem Identifizieren ein simplizialer Komplex  $\mathfrak{K}^3$  entsteht (§ 13 Aufgabe).

Aus dieser Konstruktion ergibt sich noch, daß  $\mathfrak{K}^3$  im Sinne der Homöomorphie eindeutig durch das „Schema“ des Polyeders bestimmt ist, nämlich durch ein Verzeichnis, in dem alle Ecken, Kanten und Seiten mit ihren Inzidenzen und Zuordnungen aufgeführt sind. Denn durch ein solches Schema ist, wie man leicht erkennt, das Schema der ersten und damit der zweiten Normalunterteilung mit allen Zuordnungen festgelegt und damit schließlich das Schema von  $\mathfrak{K}^3$ .

Freilich wird bei beliebiger Zuordnung der Polyederseiten  $\mathfrak{K}^2$  im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit sein. Wir fragen jetzt, welche Bedingung die paarweise Zuordnung erfüllen muß, damit  $\mathfrak{K}^3$  eine Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$  werde.

Die Homogenitätsbedingung kann höchstens in den Punkten

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{\omega^0}^0$$

verletzt sein, die den Ecken des Polyeders entsprechen.

In der Tat, ist  $P$  ein mittlerer Punkt von ' $\alpha^3$ ', so gibt es offenbar eine Umgebung, die dem Inneren einer Vollkugel homöomorph ist.

Ist  $P'$  mittlerer Punkt einer Seite ' $\alpha_v^2$ ',  $P''$  der zugeordnete Punkt auf der zugeordneten Seite ' $\alpha_v^2$ ', so wähle man zu  $P'$  und  $P''$  „halbkuligförmige“ Umgebungen, die sich beim Identifizieren von ' $\alpha_v^2$ ' und ' $\alpha_v^2$ ' zu einer Kugelumgebung zusammenfügen. Ist endlich ' $\alpha_1^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_v^{(r)}$ ' ein System von äquivalenten Polyederkanten und sind  $P', P'', \dots, P^{(r)}$  äquivalente mittlere Punkte dieser Kanten, so wähle man zu diesen Punkten „kugelsektorförmige“ Umgebungen, die sich beim Identifizieren zugeorderter Polyederseiten zu einer Kugelumgebung zusammenschließen.

Ist dagegen  $P$  einer der Punkte  $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{\omega^0}^0$ , so kann der Umgebungs-komplex eine beliebige geschlossene Fläche sein, wofür man leicht Beispiele konstruieren kann.

Damit  $\mathfrak{K}^3$  auch in diesen Punkten homogen, also eine Mannigfaltigkeit sei, ist, wie wir wissen, das Verschwinden der Charakteristik notwendig (§ 59). Es ist bemerkenswert, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, daß also der Satz gilt:

**Satz I:** Ein Komplex  $\mathfrak{K}^3$ , der durch paarweises Identifizieren der Seiten eines Polyeders entsteht, ist dann und nur dann eine Mannigfaltigkeit, wenn seine Charakteristik  $N = 0$  ist.

Da man  $N$  sehr leicht abzählen kann, so liefert dieser Satz ein brauchbares Kriterium für die Homogenität eines solchen Komplexes.

**Beweis:** Die Bedingung, daß  $\mathfrak{K}^3$  aus einem Polyeder durch paarweises Identifizieren der Seiten entsteht, besagt, daß  $\mathfrak{K}^3$  nur in endlich vielen Punkten  $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{\omega^0}^0$  inhomogen sein kann und daß die Umgebungs-komplexe dieser Punkte in einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^3$  geschlos-sene Flächen sind. Die simpliziale Zerlegung wählen wir so, daß

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{\omega^0}^0$$

Ecken werden und daß die Simplexsterne um diese Ecken

$$\text{St}_1^3, \text{St}_2^3, \dots, \text{St}_{\omega^0}^3$$

punktfremd sind. Der Außenrand  $\mathfrak{A}_v$  von  $\text{St}_v^3$  ist eine geschlossene Fläche mit der Charakteristik  $N_v$ , und wir müssen aus  $N = 0$  folgern, daß  $N_v = -2$ , also der Umgebungskomplex eine Kugelfläche ist.  $\mathfrak{K}^3$  sei der Komplex, der aus  $\mathfrak{K}^3$  entsteht, wenn man alle Sterne  $\text{St}_1^3, \text{St}_2^3, \dots, \text{St}_{\omega^0}^3$  entfernt, aber ihre Außenränder stehen läßt. Es ist ein berandeter dreidimen-sionaler Komplex, dessen Rand von den Flächen  $\mathfrak{A}_v$  gebildet wird. Seine Charakteristik beträgt

$$N + \sum_{v=1}^{\omega^0} (N_v + 1).$$

Wenn man nämlich alle Simplexe von  $\text{St}_v^3$  (auch diejenigen des Außen-randes) fortläßt, so hat man damit die Charakteristik von  $\mathfrak{K}^3$  um 1 erhöht; denn die Charakteristik eines Simplexsternes ist stets  $= -1$  (§ 23 Aufgabe 1). Nimmt man dann die Simplexe von  $\mathfrak{A}_v$  wieder hinzu, so tritt eine weitere Erhöhung der Charakteristik um  $N_v$  ein. Wir bilden nun die Verdoppelung  $\bar{\mathfrak{K}}_2^3$  von  $\mathfrak{K}^3$ . Sie entsteht, wenn man in zwei Exem-plaren von  $\mathfrak{K}^3$  entsprechende Randpunkte identifiziert. Ihre Charakteristik ist also doppelt so groß wie diejenige von  $\mathfrak{K}^3$ , vermindert um die Summe der Charakteristiken der Randflächen, also gleich

$$2N + 2 \sum_{v=1}^{\omega^0} (N_v + 1) - \sum_{v=1}^{\omega^0} N_v = 2N + \sum_{v=1}^{\omega^0} (N_v + 2).$$

Nun ist, wie man sich leicht überlegt,  $\bar{\mathfrak{K}}_2^3$  in allen Punkten homogen, also eine Mannigfaltigkeit, die Charakteristik also  $= 0$ . Da ferner  $N = 0$  an-genommen war, so bleibt

$$\sum_{v=1}^{\omega^0} (N_v + 2) = 0.$$

$N_v$  ist aber als Charakteristik einer Fläche  $\geq -2$ , somit folgt  $N_v = -2$ , was zu beweisen war.

Die Charakteristik eines Komplexes  $\mathfrak{K}^3$  ist

$$N = -\bar{\alpha}^0 + \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^3,$$

wenn  $\bar{\alpha}^i$  die Anzahl der  $i$ -Simplexe einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}^3$  oder allgemeiner die Anzahl der  $i$ -Blöcke eines Blocksystems bezeichnet

(§ 23). Ist  $\mathbb{R}^3$  durch ein Vollpolyeder  $'\alpha^3$  mit paarweise zugeordneten Seiten gegeben, so wird ein solches Blocksystem, wie sich im folgenden Paragraphen zeigen wird, von den orientierten Ecken, Kanten, Seiten und dem orientierten Vollpolyeder gebildet, wobei natürlich äquivalente Ecken, Kanten und Seiten als nicht verschiedene Blöcke zählen. Man braucht also für  $\bar{\alpha}^0, \bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2$  nur die Anzahlen  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$  der nichtäquivalenten Ecken, Kanten und Seiten von  $'\alpha^3$  und  $\bar{\alpha}^3 = 1$  zu setzen, um den richtigen Wert der Charakteristik  $N$  zu erhalten.

Wir führen noch einige Beispiele von später gebrauchten Polyedern vor.

1. Beispiel: *Linsenräume*. Wenn man als Maß für die Kompliziertheit eines Polyeders die Anzahl der Paare zugeordneter Seiten nimmt, so sind die Linsen die einfachsten Polyeder. Eine Linse ist ein von zwei Kugelkalotten begrenztes Raumstück; ihre scharfe Kante sei in  $p$  gleiche Kreisbögen eingeteilt, wodurch die beiden Kalotten zu  $p$ -Ecken  $'\alpha^2$  und  $"\alpha^2$  werden. Die Zuordnung von  $'\alpha^2$  und  $"\alpha^2$  kann auf verschiedene Weisen erfolgen, z. B. kann man die untere Kalotte  $'\alpha^2$  an der durch die scharfe Linsenkante gelegten Ebene spiegeln, wodurch sie mit der oberen Kalotte  $"\alpha^2$  zur Deckung kommt. Allgemeiner kann man dieser Spiegelung noch eine starre Drehung der gespiegelten Kalotte  $'\alpha^2$  in sich durch den Winkel  $\frac{2\pi q}{p}$  folgen lassen, wofür wir kürzer sagen, daß die Zuordnung von  $'\alpha^2$  zu  $"\alpha^2$  durch eine Schraubung um den Winkel  $\frac{2\pi q}{p}$  erfolgt. Durch den Schraubwinkel  $\frac{2\pi q}{p}$  ist die Zuordnung der Punkte der Linsenoberfläche vollkommen bestimmt. Es ist deshalb keine Einschränkung,  $p$  und  $q$  relativ prim anzunehmen, überdies kann man noch  $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$  voraussetzen, da es für die entstehende Mannigfaltigkeit offenbar gleichgültig ist, ob man rechts- oder linksherum schraubt. Die  $p$  Ecken und Kanten, in die die scharfe Linsenkante zerfällt, werden dann alle untereinander äquivalent, so daß man  $\alpha^0 = \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 1$  und daher  $N = 0$  hat. Der durch Identifizieren entstehende Komplex ist also tatsächlich homogen (wovon man sich übrigens auch leicht direkt überzeugen kann) und heißt der *Linsenraum* ( $p, q$ ). In der Fig. 110 ist  $p = 3, q = 1$  angenommen. Für  $p = 2$  geht die Zuordnung in eine „Diametralpunktvertauschung“ über, wenn man als Linse die Vollkugel und als Linsenkante den Äquatorkreis wählt; der entstehende Linsenraum ist dann nach § 14 der projektive Raum  $\mathbb{P}^3$ . Für  $p = 1$  würde sich kein Polyeder ergeben, da die Linsenkante dann nur durch eine Ecke geteilt wäre, also als Polyederkante eine unzulässige Selbstberührung aufwiese. Fügt man noch

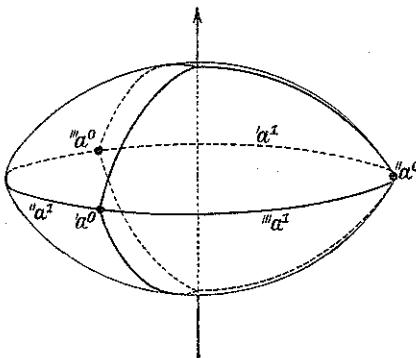


Fig. 110.

einen zweiten Teilpunkt hinzu, so entsteht ein Polyeder, das sich, da die Drehung hier wegfällt, durch Spiegelung am Äquatorkreise zur 3-Sphäre  $\mathbb{S}^3$  schließt (§ 14). Diese rechnen wir ebenfalls unter die Linsenräume.

Es ist bezeichnend für die Schwierigkeit der dreidimensionalen Topologie, daß schon für diese einfachen Linsenräume das Homöomorphieproblem nicht gelöst ist, also nicht allgemein feststeht, wann zwei Linsenräume  $(p, q)$  und  $(p', q')$  homöomorph sind; vgl. S. 215 und S. 279.

2. Beispiel: *Topologisches Produkt aus drei Kreisen*. Wie das topologische Produkt aus zwei Kreisen, die Ringfläche, als Quadrat dargestellt werden kann, dessen Gegenseiten durch Translationen zugeordnet sind, so erhält man das topologische Produkt dreier Kreise aus einem Würfel, indem man in ihm Gegenseiten vermöge Translationen identifiziert. Es gibt drei nichtäquivalente Kanten und ebenso viele Seiten, während alle Ecken untereinander äquivalent werden. Daher ist  $N = 0$ .

### § 61. Homologiegruppen:

Im vorigen Paragraphen haben wir die Bedingung dafür abgeleitet, daß der aus einem Vollpolyeder durch Seitenidentifizieren entstehende Komplex eine Mannigfaltigkeit ist. Es ist aber wohl zu beachten, daß wir für die jetzt betrachteten Vollpolyeder diese Bedingung nicht als erfüllt voraussetzen, der Komplex  $\mathbb{R}^3$  darf also in den Polyederecken inhomogen sein.

Das Vollpolyeder  $'\alpha^3$ , seine Seiten  $'\alpha^2$  und  $"\alpha^2$ , seine Kanten  $'\alpha^1$ ,  $"\alpha^1$ ,  $\alpha^1$ , ... und seine Ecken  $'\alpha^0$ ,  $"\alpha^0$ ,  $\alpha^0$ , ... sind drei-, zwei-, ein- und nulldimensionale Elemente, also orientierbare berandete Pseudomannigfaltigkeiten. Daher kann man eine beliebige simpliziale Zerlegung dieser Elemente kohärent orientieren. Wir betrachten unter den simplizialen Zerlegungen immer nur die zweifache Normalunterteilung von  $'\alpha^3$ . Die Ecken sollen mit dem Vorzeichen + orientiert werden, die Kanten und Seiten dagegen so, daß zugeordnete dieselbe Orientierung erhalten, daß sich also die Orientierungen bei der Abbildung der äquivalenten Elemente mitübertragen. In den Figuren zeichnen wir die simpliziale Zerlegung nicht mit ein und deuten die Orientierung der Kanten durch einen aufgesetzten Pfeil, die der Seiten durch einen eingezeichneten Kreispfeil an. Ist  $'\alpha^k, "\alpha^k, \dots$  ein System äquivalenter  $k$ -dimensionaler Elemente des Polyeders, so bezeichnen wir die  $k$ -Kette, die von einem orientierten Elemente gebildet wird, mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben  $\alpha^k$  bzw.  $"\alpha^k, \dots$  Dagegen bedeutet  $\alpha^k$  die  $k$ -Kette im simplizialen Komplex  $\mathbb{R}^3$ , die durch Identifizieren äquivalenter Punkte aus den Ketten  $'\alpha^k, "\alpha^k, \dots$  hervorgegangen ist. Man hat also auf  $\mathbb{R}^3$  die folgenden Ketten der Dimension 0 bis 3:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{\alpha^0}^0, \\ &\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_{\alpha^1}^1, \\ &\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{\alpha^2}^2, \\ &\alpha^3. \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß sie ein System von Blöcken (§ 22) auf  $\mathbb{R}^3$  bilden. Wegen der Simplexfremdheit sind sie nämlich linear unabhängig. Ferner setzt sich der Rand eines jeden  $\alpha_i^k$  aus Ketten  $\alpha_i^{k-1}$  zusammen. Um zu beweisen, daß auch  $(Bl_3)$  und  $(Bl_4)$  erfüllt sind, betrachten wir eine simpliziale Kette  $U^k$  auf  $\mathbb{R}^3$ , deren Rand eine lineare Kombination der Ketten  $\alpha_i^{k-1}$ , unter Umständen die  $(k-1)$ -Kette 0 ist, und suchen eine homologe

Kette  $V^k \sim U^k$  zu konstruieren, die sich ganz aus Ketten  $a_v^k$  zusammensetzt. Es ist bequem, eine Kette  $'U^k'$ , ein „Urbild“ von  $U^k$ , auf dem Polyeder  $'a^3'$  zu betrachten, die aus  $U^k$  dadurch entsteht, daß man jedem  $k$ -Simplexe von  $U^k$  eines der ihm in  $'a^3'$  entsprechenden Simplexe zuordnet und es mit derselben Orientierung und Vielfachheit versieht. Ist dann  $k = 3$ , so muß in  $'U^k'$  jedes der kohärenen orientierten 3-Simplexe von  $'a^3'$  mit der gleichen Vielfachheit vorkommen. Denn sonst wäre  $\partial' U^k$  keine lineare Kombination der Ketten  $a_v^3$ . Also ist  $'U^k'$  ein Vielfaches von  $'a^3$ , womit für  $k = 3$  unser Ziel erreicht ist. Ist  $k = 2$ , so betrachten wir die Kette  $'U_m^2'$ , die von denjenigen Simplexen von  $'U^2'$  gebildet wird, die nicht auf dem Rande von  $'a^3'$  liegen. Der Rand von  $'U_m^2$  liegt auf dem Rande von  $'a^3$  und ist daselbst als geschlossene 1-Kette auf einer 2-Sphäre Rand einer Kette  $'U_r^2'$ .  $'U_m^2 - U_r^2$  ist also eine geschlossene Kette und daher nullhomolog auf  $'a^3'$ . Erst recht ist dann  $U_m^2 \sim U_r^2$  auf  $\mathbb{R}^3$ , so daß die Ersetzung von  $U_m^2$  durch  $U_r^2$  von der Kette  $U^2$  zu einer homologen Kette  $V^2$  führt. Ein Urbild  $'V^2'$  enthält keine mittleren Simplexe von  $'a^3$ , und man kann es so normieren, daß man von den beiden möglichen Urbildern eines 2-Simplexes von  $V^2$  dasjenige wählt, das zu  $'a_v^2$  (und nicht zu  $'a_v^3'$ ) gehört. Dann ist  $V^2$  eine lineare Kombination der Ketten  $a_v^2$ . Denn da der Rand von  $V^2$  eine lineare Kombination der  $a_v^1$  ist, so muß in  $V^2$  jedes der kohärenen orientierten 2-Simplexe von  $'a^3$  mit derselben Vielfachheit vorkommen. Also ist  $V^2$  eine Kette, wie wir sie suchen. Ebenso führt dieses Verdrängungsverfahren für  $k = 1$  zum Ziele: Man drängt erst  $'U^1'$  auf den Rande von  $'a^3'$  und danach ebenso auf den Rande jedes einzelnen  $'a_v^1'$ . Die Kette  $V^1$ , die man so aus  $U^1$  erhält, ist von selbst eine lineare Kombination der Ketten  $a_v^1$ .

Man kann somit die Homologiegruppen von  $\mathbb{R}^3$  aus dem Blocksystem der  $a_v^k$  nach dem Verfahren von § 22 berechnen. Insbesondere ist damit die einfache Berechnung der Charakteristik, die wir in § 60 angaben, gerechtfertigt.

Offenbar ist  $\mathbb{R}^3$  dann und nur dann orientierbar, wenn  $\partial a^3 = 0$  ist, d. h. wenn in

$$\partial' a^3 = \sum_{v=1}^{a^2} (\varepsilon_v a_v^3 + \varepsilon_v'' a_v^3)$$

$\varepsilon_v + \varepsilon_v'' = 0$  ist. Das bedeutet, daß  $a_v^3$  und  $a_v^3$  auf dem Rande des Polyeders entgegengesetzt orientiert sein müssen, gemessen an einer kohärenten Orientierung des ganzen Polyederrandes. Dafür kann man sagen, daß für einen außerhalb des Polyeders stehenden Beobachter die Orientierungspfeile je zweier zugeordneter Seiten entgegengesetzten Umlaufsinn haben müssen. Zwei orientierte Seiten  $a_v^3$  und  $a_v^3$ , für die das der Fall ist, heißen *nach der ersten Art* zugeordnet, andernfalls *nach der zweiten Art*.  $\mathbb{R}^3$  ist dann und nur dann orientierbar, wenn alle Seitenzuordnungen nach der ersten Art erfolgen. Die Linsenräume und das Produkt aus drei Kreisen sind orientierbar.

1. Beispiel: *Linsenräume*. Die Blockinkidenzmatrizen des Linsenraumes  $(p, q)$  lauten

$$\begin{array}{c|cc} E^0 & a^1 \\ \hline a^0 & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} E^1 & a^2 \\ \hline a^1 & p \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} E^2 & a^3 \\ \hline a^2 & 0 \end{array}.$$

Diese Blockinkidenzmatrizen stehen bereits in der Normalform. Die Elementanzahlen  $a^k$ , die Ränge  $p^k$  und die nach der Formel  $p^k = a^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$  (S. 77) daraus berechneten Bettischen Zahlen stellen wir in einer Tabelle zusammen:

|            | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------------|---|---|---|---|
| $a^k$      | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\gamma^k$ | 0 | 1 | 0 | — |
| $p^k$      | 1 | 0 | 0 | 1 |

Es ist ein einziger Torsionskoeffizient der Dimension 1 vom Werte  $p$  vorhanden. Die Zahl  $q$  geht in die Homologiegruppen überhaupt nicht ein.

An diesem Beispiel wird die geometrische Bedeutung eines Torsionskoeffizienten der Dimension 1 klar: Ein solcher Torsionskoeffizient vom Werte  $p$  besagt, daß eine geschlossene 1-Kette vorhanden ist, die erst  $p$ -mal durchlaufen eine 2-Kette berandet. In der Tat berandet die scharfe Kante der Linse, die aus  $p$  äquivalenten Kanten  $a^1, a^1, \dots, a^1$  besteht, ein Flächenstück, nämlich die Linsenkantone. Im Falle  $p = 2$  (projektiver Raum  $\mathbb{P}^2$ ) gibt es zwei äquivalente Kanten, die nach dem Identifizieren einer projektiven Geraden homotop sind; bekanntlich berandet eine projektive Gerade zweimal durchlaufen ein Elementarflächenstück, nämlich eine von ihr aufgeschnittene projektive Ebene (S. 62). Auch die Bezeichnung „Torsionskoeffizient“ rechtfertigt sich jetzt. Das Vollpolyeder schließt sich zum Linsenraume, indem man es längs der Linsenachse toriert, d. h. die untere der oberen Kalotte durch Schraubung zuordnet.

2. Beispiel: Der Oktaederraum wird erhalten, wenn man in einem Volloktaeder gegenüberliegende Dreiecke, um  $\frac{\pi}{3}$  gegeneinander verschraubt, einander zuordnet und identifiziert. In der Fig. 111 ist das Netz des Oktaeders gezeichnet, und zwar die stereographische Projektion der Oktaederfläche in die Ebene, die durch einen unendlich fernen Punkt zur Kugelfläche geschlossen zu denken ist. Der unendlich ferne Punkt ist eine Ecke des Netzes. Der Übersichtlichkeit wegen sind in der Figur zugeordnete Elemente mit dem gleichen Symbol bezeichnet und nicht wie in der allgemeinen Theorie mit  $(\omega)a_v^k$ .

Die Blockinkidenzmatrix  $E^1$  läßt sich nach dem Verfahren von § 87 auf die Normalform bringen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

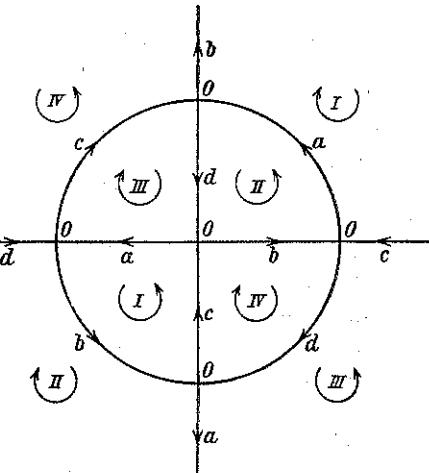


Fig. 111.

Die Anzahlen der Systeme äquivalenter Ecken, Kanten und Seiten sowie die Ränge der Inzidenzmatrizen und die Bettischen Zahlen  $p^k$  stellen wir wie im vorigen Beispiel in einer Tabelle zusammen:

|            |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $k =$      | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\alpha^k$ | 1 | 4 | 4 | 1 |
| $\gamma^k$ | 0 | 4 | 0 | — |
| $p^k$      | 1 | 0 | 0 | 1 |

Es ist ein Torsionskoeffizient der Dimension 1 vom Werte 3 vorhanden. Die Homologiegruppe der Dimension 1 hat daher die Ordnung 3.

**Aufgabe:** Man zeige, daß im Oktaederraume die vier Kanten  $a, b, c, d$  einander homolog sind und daß jede erst dreimal durchlaufen nullhomolog wird.

## § 62. Fundamentalgruppe:

Wie wir im vorigen Paragraphen die Homologiegruppen bestimmt haben, so gehen wir jetzt darauf aus, die Fundamentalgruppe der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^3$  aus ihrem Polyeder ' $\alpha^3$ ' abzulesen. Dies leistet uns der

**Satz I:** Die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{R}^3$  stimmt überein mit der Fundamentalgruppe des Flächenkomplexes  $\mathbb{R}^2$ , der aus dem Rande des Polyeders ' $\alpha^3$ ' durch Identifizieren äquivalenter Punkte entsteht.

**Beweis:** Man muß zweierlei zeigen: I. Jeder geschlossene Weg  $w$ , dessen Anfangspunkt ein fester Punkt  $O$  von  $\mathbb{R}^2$  ist, ist in einen Weg  $w_1$  von  $\mathbb{R}^2$  deformierbar. II. Ist ein Weg  $w_1$  von  $\mathbb{R}^2$  nullhomotop in  $\mathbb{R}^3$ , so auch in  $\mathbb{R}^2$ . Zum Beweise von I. betrachten wir die Punktmenge  $w'$  aller Punkte des Polyeders ' $\alpha^3$ ', die sich in Punkte von  $w$  abbilden. Wenn es einen mittleren Punkt  $P$  auf ' $\alpha^3$ ' gibt, der nicht zu  $w'$  gehört, so deformieren wir  $w'$  auf den Rand von ' $\alpha^3$ ' „durch Projektion von  $P$  aus“, d. h. wir lassen die Punkte von  $w'$  auf den von  $P$  gezogenen geradlinigen Strahlen mit konstanter Geschwindigkeit nach dem Rande von ' $\alpha^3$ ' laufen. Dieser Projektion entspricht in  $\mathbb{R}^3$  eine Deformation von  $w$  in einen Weg  $w_1$  von  $\mathbb{R}^2$ . Sollte  $w'$  alle mittleren Punkte von ' $\alpha^3$ ' erschöpfen, so muß man erst einen Punkt  $P$  freimachen, was z. B. durch eine simpliziale Approximation von  $w$  in  $\mathbb{R}^3$  (die ja nach S. 115 eine Deformation von  $w$  ist) geschehen kann. — Auf die gleiche Weise läßt sich II. beweisen. Bezeichnet  $\mathfrak{A}$  das „singuläre Deformationsrechteck“, das  $w_1$  bei der Deformation in den Punkt  $O$  überstreicht, und  $\mathfrak{U}$  die Menge aller Punkte von ' $\alpha^3$ ', die sich in  $\mathfrak{A}$  abbilden, so projiziert man ' $\mathfrak{A}$ ' von einem nicht zu ' $\mathfrak{U}$ ' gehörigen mittleren Punkte  $P$  von ' $\alpha^3$ ' auf den Rand von ' $\alpha^3$ '. Dem entspricht eine Verdrängung von  $\mathfrak{A}$  aus  $\mathbb{R}^3$  auf den Teilkomplex  $\mathbb{R}^2$ . Gibt es keinen solchen Punkt  $P$ , so wird  $\mathfrak{A}$  zuvor simplizial approximiert, d. h. es wird die stetige Abbildung des genügend fein simplizial unterteilten Deformationsrechteckes  $\overline{\mathfrak{A}}$  auf  $\mathfrak{A}$  simplizial in  $\mathbb{R}^3$  approximiert.

Die Bestimmung der Relationen kann nach dem Verfahren von § 46 erfolgen. Besonders einfach ist sie in dem Falle, daß alle Ecken

des Polyeders äquivalent sind. Sie entsprechen dann ein und demselben Punkte  $O$  in  $\mathbb{R}^3$ , der zum Anfangspunkte der geschlossenen Wege ernannt wird. Da die Hilfswege fortfallen, so sind die orientierten Kanten des Polyeders, vielmehr die ihnen entsprechenden geschlossenen Wege in  $\mathbb{R}^3$  die Erzeugenden der Fundamentalgruppe, und die Relationen erhält man durch Umlaufen der Polyederseiten.

Dieser einfache Fall liegt z. B. beim Linsenraume  $(p, q)$  vor. Es gibt eine einzige Erzeugende  $a$  (wir lassen die Indizes des vorigen Paragraphen jetzt fort), während man die einzige Relation durch Umlaufen eines der beiden äquivalenten Polygone erhält:  $a^p = 1$ . Die Fundamentalgruppe des Linsenraumes  $(p, q)$  ist daher zyklisch von der Ordnung  $p$  und unabhängig von  $q$ .

Es sind nun zwei Fälle denkbar: Entweder sind zwei Linsenräume  $(p, q)$  und  $(p, q')$  für  $q \neq q'$  homöomorph oder die uns bisher bekannten Invarianten, Fundamentalgruppe und Homologiegruppen sind zu schwach, um ihre Verschiedenheit nachzuweisen. Es stellt sich heraus, daß beide Fälle eintreten, je nach der Beschaffenheit der Zahlen  $q$  und  $q'$ . Was die Homöomorphie anlangt, so kann man leicht folgenden Satz beweisen:

**Satz II:** Die Linsenräume  $(p, q)$  und  $(p, q')$  sind homöomorph, wenn  $q$  und  $q'$  der Kongruenz genügen

$$qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Da diese Kongruenz bei vorgegebenem  $q$  genau eine Lösung  $q'$  hat, die der Normierungsbedingung  $0 \leq q' \leq \frac{p}{2}$  genügt, so sind  $q$  und  $q'$  umkehrbar eindeutig durch einander bestimmt.

**Beweis:** Wir zerlegen die Linse  $\mathfrak{L}$  mit dem Schraubwinkel  $\frac{2\pi q}{p}$  durch  $p$  in die Linsenachse eingespannte Halbebene in  $p$  gleiche tortenstückartige Tetraeder  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_p$  (die Figur 110 zeigt den Fall  $p = 3$ ) und setzen daraus eine neue Linse  $\mathfrak{L}'$  mit dem Schraubwinkel  $\frac{2\pi q'}{p}$  zusammen.  $\mathfrak{T}_i$  hat mit der unteren Linsenkralotte ein Dreieck  $\Delta_i$  und mit der oberen Linsenkralotte ein Dreieck  $\bar{\Delta}_i$  gemeinsam. Ferner ist allen  $\mathfrak{T}_i$  die Linsenachse  $b$  gemeinsam, während die  $b$  gegenüberliegenden Kanten ebenfalls untereinander äquivalent sind und im Linsenraume ein und dieselbe Kante  $a$  ausmachen. Die Dreiecke sind paarweise äquivalent vermöge der Zuordnung der Linsenkralotten, und zwar ist  $\Delta_i$  äquivalent mit  $\bar{\Delta}_{i+q}$ , wobei nötigenfalls  $i + q \pmod{p}$  zu reduzieren ist. Um nun aus den  $p$  Tetraedern die neue Linse  $\mathfrak{L}'$  aufzubauen, setzen wir an das Dreieck  $\Delta_1$  von  $\mathfrak{T}_1$  das Tetraeder  $\mathfrak{T}_{1+q}$  mit seinem äquivalenten Dreieck  $\bar{\Delta}_{1+q}$  an, an  $\Delta_{1+q}$  wird weiter  $\mathfrak{T}_{1+2q}$  längs des Dreieckes  $\Delta_{1+2q}$  angesetzt usw. Man erhält eine Linse  $\mathfrak{L}'$ , die sich von der ersten nur dadurch unterscheidet, daß die Kanten  $a$  und  $b$  ihre Rollen vertauscht haben. Ist  $\frac{2\pi q'}{p}$  der Schraubwinkel von  $\mathfrak{L}'$ , so gibt  $q'$  an, daß in der zyklischen Folge  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_{1+q}, \mathfrak{T}_{1+2q}, \dots, \mathfrak{T}_2, \dots$ , in der die Tetraeder in  $\mathfrak{L}'$  sich um die Achse  $a$  anordnen,  $\mathfrak{T}_1$  und  $\mathfrak{T}_2$ , das mit  $\mathfrak{T}_{2+xp}$  übereinstimmt, um  $q'$  bzw.  $p - q'$  Stellen voneinander entfernt sind. Es ist daher in der zyklischen Folge die Indexdifferenz zwischen  $\mathfrak{T}_{2+xp}$  und  $\mathfrak{T}_1$  einerseits  $= q'q'$  bzw.  $q(p - q')$ , andererseits gleich  $(2 + xp) - 1$ , also

$$(2 + xp) - 1 = q'q' \text{ bzw. } q(p - q') \\ \text{oder} \\ q'q' \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

So sind z.B. die Linsenräume  $(7, 2)$  und  $(7, 3)$  homöomorph, weil  $2 \cdot 3 \equiv -1 \pmod{7}$  ist. Ob aber die Linsenräume  $(p, 1)$  und  $(p, 2)$  homöomorph sind, läßt sich mit dem Satze II niemals entscheiden. Wir werden später eine über die Fundamentalgruppe hinausgehende Invariante kennenzulernen (§ 77), die die Verschiedenheit gewisser Linsenräume, z. B. von  $(5, 1)$  und  $(5, 2)$  festzustellen gestattet. Dagegen bleibt die Verschiedenheit von  $(7, 1)$  und  $(7, 2)$  unentschieden.

Es sei noch bemerkt, daß man jeden Linsenraum in zwei Vollringe mit gemeinsamer Randringfläche zerlegen kann. Man bohre aus der Linse  $\mathfrak{L}$  die Linsenachse  $b$  durch einen konzentrischen Vollzyylinder  $\mathfrak{B}$  aus.  $\mathfrak{B}$  schließt sich beim Identifizieren der Linsenkalotten zu einem Vollringe. Das gleiche gilt von dem Restraume  $\mathfrak{A}$ , der nach dem Ausbohren von  $\mathfrak{B}$  übrigbleibt. Man braucht, um dies einzusehen, die Linse  $\mathfrak{L}$  nur wie soeben in  $p$  Tetraeder zu zerlegen und aus ihnen die Linse  $\mathfrak{L}'$  zusammenzusetzen. In  $\mathfrak{L}'$  ist jetzt  $\mathfrak{A}$  ein die Achse  $a$  von  $\mathfrak{L}'$  umgebender Zylinder, und er schließt sich beim Identifizieren äquivalenter Punkte zu einem Vollringe; man vgl. hierzu auch S. 220.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den *sphärischen Dodekaederraum*.\*) Er entsteht aus einem Dodekaeder, wenn man gegenüberliegende Fünfecke, um  $\frac{\pi}{5}$  gegeneinander verschraubt, identifiziert. Das Netz des Dodekaeders, das den Raum vollständig bestimmt, ist in der Fig. 112 gezeichnet. Es gibt  $\omega^0 = 5$  nichtäquivalente Ecken  $O, P, Q, R, S$ , während die Kanten zu je dreien äquivalent sind. Die Charakteristik ist  $N = -5 + 10 - 6 + 1 = 0$ , so daß

eine Mannigfaltigkeit vorliegt. Wir wählen  $O$  zum Anfangspunkte der geschlossenen Wege und ernen die Wege  $a, h, f^{-1}, f^{-1}d$  zu Hilfswegen nach den Ecken  $P, Q, R, S$ . Die erzeugenden Wegeklassen der Fundamentalgruppe werden dann von den geschlossenen Wegen repräsentiert:

$$\begin{aligned} A &= aa^{-1} \\ B &= abh^{-1} \\ C &= hef \\ D &= f^{-1}d(d^{-1}f) \\ E &= (f^{-1}d)e \\ F &= f^{-1}f \\ G &= (f^{-1}d)g a^{-1} \\ H &= hh^{-1} \\ J &= aif \\ K &= hk(d^{-1}f). \end{aligned}$$

\*) H. Kneser [8], S. 256.

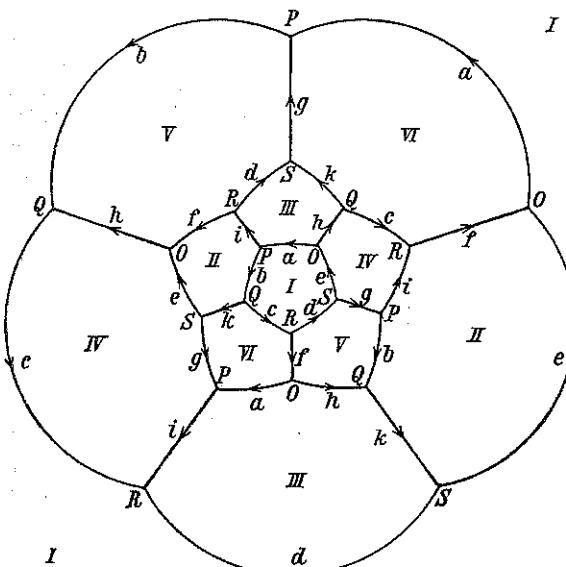


Fig. 112.

Die Relationen der Art I gehen hieraus hervor, wenn man auf der rechten Seite überall große statt der kleinen Buchstaben schreibt. Es werden  $A = D = F = H = 1$ , und dadurch werden die übrigen Relationen trivial.

Als Relationen der Art II erhält man durch Umlaufen der Fünfecke die folgenden 6:

$$\left. \begin{array}{l} ABCDE = 1 \\ BKEF^{-1}J^{-1} = 1 \\ AJDK^{-1}H^{-1} = 1 \\ CJ^{-1}G^{-1}EH = 1 \\ BH^{-1}F^{-1}DG = 1 \\ AG^{-1}K^{-1}CF = 1 \end{array} \right\} \text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} BCE = 1 \\ BKEJ^{-1} = 1 \\ J = K \\ CJ^{-1}G^{-1}E = 1 \\ B = G^{-1} \\ G^{-1}K^{-1}C = 1 \end{array} \right\}.$$

Elimination von  $G$  und  $K$  liefert

$$\begin{aligned} BCE &= 1 \\ BJEE^{-1} &= 1 \\ CJ^{-1}BE &= 1 \\ BJ^{-1}C &= 1. \end{aligned}$$

Nach der ersten und vierten dieser Relationen ist

$$E = C^{-1}B^{-1}, \quad J = CB.$$

Eliminiert man damit  $E$  und  $J$  aus der zweiten und dritten Relation, so ergibt sich

$$BCBC^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1 \quad (\text{I})$$

und

$$CE^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} = 1. \quad (\text{II})$$

Bestimmen wir aus diesen beiden Relationen die erste Homologiegruppe, indem wir die Relationen (I) und (II) abelsch machen! Wir gehen wie immer bei abelschen Gruppen zur additiven Schreibung über und bezeichnen die Elemente der Homologiegruppe durch Querstriche. Es wird

$$-\overline{C} = 0 \quad (\text{I})$$

$$-\overline{C} - \overline{B} = 0, \quad (\text{II})$$

also  $\overline{B} = \overline{C} = 0$ . D. h. die erste Homologiegruppe besteht aus dem Nullelement allein. Da der Dodekaederraum orientierbar ist, hat man somit die folgenden Werte für die Bettischen Zahlen:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = p^2 = 0, \quad p^3 = 1;$$

Torsionskoeffizienten fehlen.

Das sind gerade die numerischen Invarianten der 3-Sphäre. Um zu entscheiden, ob der Dodekaederraum mit der 3-Sphäre übereinstimmt oder nicht, reichen also die Homologiegruppen nicht aus. Wir untersuchen deshalb, ob sich die Fundamentalgruppen unterscheiden, und formen zu dem Zwecke die noch etwas unübersichtlichen Relationen (I) und (II) weiter um. Wir setzen (II) in (I) an der durch den Punkt bezeichneten Stelle ein und erhalten am Stelle von (I) die Relation

$$BCBC^{-1} \cdot CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1$$

oder nach Kürzung

$$B^2C^{-1}B^{-3}C^{-1} = 1. \quad (\text{I}')$$

Führt man in (I') und (II) noch vermöge  $C = U^{-1}B$  die neue Erzeugende  $U$  ein, so kommt

$$B^2 \cdot B^{-1}U \cdot B^{-3} \cdot B^{-1}U = 1, \quad U^{-1}B \cdot B^{-1} \cdot B^{-1}U \cdot B \cdot B^{-1}U \cdot B^{-1} = 1$$

oder

$$B^4 = U B U,$$

$$U^2 = B U B$$

oder auch

$$B^5 = (B U)^2 = U^3. \quad (\text{III})$$

Aus den Relationen (III) erkennt man, daß der Dodekaederraum sicher nicht mit der 3-Sphäre homöomorph ist. Denn die Fundamentalgruppe besteht nicht aus dem Einselement allein. Vielmehr werden die Relationen (III) von der Ikosaedergruppe erfüllt, wenn man unter  $B$  eine Drehung um eine Ecke des Ikosaeders durch den Winkel  $\frac{2\pi}{5}$  und unter  $U$  eine gleichsinnige Drehung um den Mittelpunkt eines angrenzenden Dreieckes durch den Winkel  $\frac{2\pi}{3}$  versteht. Die Ikosaedergruppe ist also entweder die Gruppe (III) selbst oder eine Faktorgruppe von ihr, also sicher besteht die Fundamentalgruppe nicht aus dem Einselement allein. Man kann übrigens zeigen, daß (III) die Ordnung 120 hat und die „binäre Ikosaedergruppe“ ist.\*)

Im sphärischen Dodekaederraume haben wir eine Mannigfaltigkeit gewonnen, die dieselben Homologiegruppen hat wie die 3-Sphäre, ohne doch mit ihr homöomorph zu sein. Eine solche Mannigfaltigkeit heißt ein *Poincaréscher Raum*. Man kennt unendlich viele verschiedene Poincarésche Räume. Doch ist der sphärische Dodekaederraum der einzige bekannte mit endlicher Fundamentalgruppe.<sup>23</sup>

Durch die Homologiegruppen ist die 3-Sphäre also sicher nicht charakterisiert. Daß sie durch ihre Fundamentalgruppe charakterisiert ist, ist der Inhalt der bis heute unbewiesenen „Poincaréschen Vermutung“. Da die Fundamentalgruppe der 3-Sphäre aus dem Einselement allein besteht, kann man das Problem auch folgendermaßen aussprechen: Gibt es außer der 3-Sphäre noch andere 3-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeiten, in denen jeder geschlossene Weg sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt (nullhomotop ist)?

**Aufgaben:** 1. Man zeige, daß der *hyperbolische Dodekaederraum*, zu dem sich das Volldodekaeder schließt, wenn man gegenüberliegende Fünfecke um  $\frac{3\pi}{5}$  (und nicht wie beim sphärischen Dodekaederraum um  $\frac{\pi}{5}$ ) gegeneinander verschraubt, identifiziert, eine Mannigfaltigkeit ist, und beweise durch Aufstellen seiner Fundamentalgruppe, daß er 3 Torsionskoeffizienten vom Werte 5 hat und die Bettische Zahl  $p_1^1 = 0$  ist.

2. Man beweise, daß die Relationen der Fundamentalgruppe des Oktaederraumes (§ 61) lauten

$$abc = adb = acd = bdc = 1$$

und daß die Tetraedergruppe eine Faktorgruppe dieser Gruppe ist [Die Relationen gelten in der Tetraedergruppe, wenn man unter  $a, b, c, d$  die vier Drehungen durch  $\frac{2\pi}{3}$  um die vier Ecken des Tetraeders versteht.]

3. Aus zwei dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M_1$  und  $M_2$ , kann man durch „Sammenbildung“ eine neue ableiten: Man bohrt aus jeder eine kleine Kugel aus und klebt die beiden entstehenden „berandeten Mannigfaltigkeiten“ mit ihren Randkugelflächen aufeinander, was noch auf zwei wesentlich verschiedene Weisen, näm-

\*.) Jhber. Deutsch. Math. Vereinig. 42 (1932) Aufg. 84 S. 3.

lich mit Erhaltung und Umkehrung der Orientierung geschehen kann. Von der entstehenden geschlossenen Mannigfaltigkeit bestimme man die Fundamentalgruppe, wenn die Fundamentalgruppen von  $M_1$  und  $M_2$  bekannt sind, sowie die erste Homologiegruppe.

4. Man konstruiere mit Benutzung der 3. Aufgabe dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit beliebig vorgegebener erster Homologiegruppe.

### § 63. Heegaard-Diagramm.

Wir haben bisher allgemeine Sätze über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten aufgestellt, aber nur einzelne Beispiele von Mannigfaltigkeiten kennengelernt. Das Problem, alle dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten aufzuzählen, ist im Gegensatze zu zwei Dimensionen ungelöst. Als einen Ansatz zu seiner Lösung kann man das *Heegaard-Diagramm* ansehen, das wir jetzt auseinandersetzen wollen.

Ein *Henkelkörper vom Geschlechte h* entsteht aus einer dreidimensionalen Vollkugel, wenn man  $2h$  getrennt liegender Elementarflächenstücke ihrer Oberfläche paarweise nach der ersten Art (S. 212) identifiziert. Man kann das Identifizieren im gewöhnlichen Raum vornehmen, indem man die Vollkugel so deformiert, daß immer zwei zugeordnete Flächenstücke zur Deckung kommen. Der so entstehende Körper läßt sich auch als eine Vollkugel mit  $h$  angesetzten Vollhenkeln auffassen. Seine Oberfläche ist eine orientierbare Fläche vom Geschlechte  $h$ . Die  $h$  Kreise, die aus den Rändern der paarweise identifizierten Elementarflächenstücke entstehen, heißen die Meridiankreise des Henkelkörpers. Ein Henkelkörper vom Geschlechte 1 ist ein gewöhnlicher Vollring. Nun gilt der

**Satz:** *Man kann jede orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M^3$  dadurch erhalten, daß man zwei Henkelkörper gleichen Geschlechts mit ihren Oberflächen aufeinanderklebt, das heißt ihre Oberflächen topologisch aufeinander abbildet und zugeordnete Punkte identifiziert.*

**Beweis:** Man denke sich die dreidimensionale Mannigfaltigkeit simplicial zerlegt und bohre die  $a^0$  Ecken der Zerlegung durch kleine darumgelegte Kugeln aus, ebenso die  $a^1$  Kanten durch kleine darumgelegte Zylinder, die die um die Endpunkte der Kanten gelegten Kugeln verbinden. Der nach Ausbohren der Ecken und Kanten übrigbleibende Teilraum  $M_1^3$  setzt sich aus  $a^3$  längs der Kanten abgestumpften 3-Simplexen zusammen und ist ein Henkelkörper. Man kann ihn nämlich dadurch aufbauen, daß man von einem abgestumpften Simplexe  $G_1^3$  ausgeht, ein benachbartes  $G_2^3$  längs einer Seite ansetzt, ein weiteres  $G_3^3$  längs einer Seite an  $G_1^3$  oder  $G_2^3$  und so weiter. Hat man alle Simplexe aufgebraucht, so hat man eine topologische Vollkugel gewonnen, in der noch gewisse punktfremde Flächenstücke der Oberfläche paarweise zu identifizieren sind. Daß die Zuordnung dieser Flächenstücke nach der ersten Art erfolgt, ist klar, da andernfalls  $M_1^3$  und damit  $M^3$  nichtorientierbar werden würde. Ebenso zeigt man, daß der ausgebohrte Teil  $M_2^3$ , der sich aus  $a^0$  Vollkugeln und  $a^1$  Vollzylindern zusammensetzt, ein Henkelkörper ist.

Man kann sich hiernach jede orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit durch eine orientierbare Fläche  $\mathfrak{M}^2$  vom Geschlechte  $h$ , nämlich die gemeinsame Oberfläche von  $\mathfrak{M}_1^2$  und  $\mathfrak{M}_2^2$  geben, wenn man auf  $\mathfrak{M}^2$  noch markiert, wie die Henkelkörper daran ansitzen. Das geschieht durch Angabe der Meridiankreise von  $\mathfrak{M}_1^2$  und  $\mathfrak{M}_2^2$  auf  $\mathfrak{M}^2$ . Sie bilden zwei Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  von je  $h$  doppelpunktfreien und (unter sich, aber nicht notwendig miteinander) punktfremden Kreisen mit der Eigenschaft, daß  $\mathfrak{M}^2$  durch Aufschneiden\*) längs der  $h$  Kreise von  $\Sigma_1(\Sigma_2)$  zu einer Kugelfläche mit  $2h$  Löchern wird. Hat man auf einer orientierbaren Fläche  $\mathfrak{M}^2$  vom Geschlechte  $h$  zwei solche Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  beliebig vorgegeben, so ist dadurch immer eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt. Man schneidet nämlich  $\mathfrak{M}^2$  längs der Kreise von  $\Sigma_1$  zu einer Kugelfläche mit  $2h$  Löchern auf, schließt die Löcher durch Elementarflächenstücke (Deckel) und füllt in die entstehende Kugelfläche eine Vollkugel hinein. Paarweises Identifizieren der Deckel liefert einen Henkelkörper, dessen Oberfläche  $\mathfrak{M}^2$  und dessen Meridiankreise die Kreise von  $\Sigma_1$  sind. Ebenso wird zu dem Systeme  $\Sigma_2$  der Henkelkörper konstruiert. Eine geschlossene Fläche  $\mathfrak{M}^2$  mit den beiden Systemen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  heißt ein Heegaard-Diagramm der Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$ .

Die Heegaard-Diagramme auf der Ringfläche kann man leicht ermitteln; sie bestehen aus irgend zwei nicht nullhomotopen Rückkehrschnitten (= doppelpunktfreien geschlossenen Kantenzügen einer simplizialen Zerlegung). Unter den Mannigfaltigkeiten, die die Ringfläche zu einem Heegaard-Diagramm haben, kommen sicher die Linsenräume vor. Denn jeder Linsenraum zerfällt durch Ausbohrung der Linsenachse in zwei Vollringe, wie wir S. 216 sahen. Ebenso hat das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche zu einem Heegaard-Diagramm die Ringfläche, denn es entsteht, indem man in zwei topologisch aufeinander abgebildeten Vollringen entsprechende Punkte der Oberflächen identifiziert, wofür man auch sagen kann, daß es durch Verdoppelung (§ 36) eines Vollringes entsteht. Hier stimmen also die beiden Meridiankreise des Heegaard-Diagrammes überein. Man kann beweisen, daß hiermit alle Mannigfaltigkeiten, deren Heegaard-Diagramm auf der Ringfläche liegt, erschöpft sind.<sup>34</sup>

Über die Heegaard-Diagramme höheren Geschlechts weiß man wenig. Der sphärische Dodekaederraum hat ein Heegaard-Diagramm vom Geschlechte 2, und H. Poincaré ist durch Angabe des Heegaard-Diagrammes auf diesen Raum gestoßen.<sup>35</sup>

Auch für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten kann man das Heegaard-Diagramm definieren. Man muß nur nichtorientierbare Henkelkörper einführen. Sie entstehen aus einer Vollkugel durch paarweise Zuordnung punktfreier Polygone der Oberfläche, wobei aber mindestens eine Zuordnung nach der zweiten Art erfolgt; die Oberfläche ist alsdann eine

\*) Das Aufschneiden hat einen Sinn, wenn die Kreise von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  sich aus Kanten einer simplizialen Zerlegung zusammensetzen, was wir voraussetzen wollen.

nichtorientierbare Fläche von gerader Charakteristik  $N$ , also auch von geradem Geschlecht  $k = 2k'$  (nach S. 140, denn die Charakteristik bleibt die gleiche, ob man nach der ersten oder zweiten Art zuordnet). Daß man jede nichtorientierbare geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit in zwei nichtorientierbare Henkelkörper zerlegen kann, wird ebenso bewiesen wie für die orientierbaren.

Durch das Heegaard-Diagramm ist die Konstruktion der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt, nämlich auf die Aufzählung aller Heegaard-Diagramme. Selbst wenn aber diese Aufzählung gelungen wäre, so wäre damit das dreidimensionale Homöomorphieproblem noch nicht gelöst, weil noch die Entscheidung ausstünde, wann zwei verschiedene Heegaard-Diagramme dieselbe Mannigfaltigkeit erzeugen. In dem einfachsten Falle, daß das Heegaard-Diagramm das Geschlecht 1 hat, gelingt zwar die Aufzählung vollständig, aber die Frage nach der Übereinstimmung, das Homöomorphieproblem der Linsenräume, ist schon hier ungelöst.

Ein anderer Versuch der Aufzählung aller dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten würde darin bestehen, daß man alle Polyeder mit paarweiser Seitenzuordnung konstruiert. Auch dieses ist ein zweidimensionales Problem, das so wenig wie die Aufzählung der Heegaard-Diagramme gelöst ist.

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß man jede geschlossene orientierbare Fläche als verzweigte Überlagerungsfläche der Zahenkugel gewinnen kann, wobei die Verzweigung in endlich vielen Punkten stattfindet. Entsprechend kann man jede geschlossene orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit als verzweigte Überlagerung der 3-Sphäre darstellen.<sup>36</sup> Die Verzweigung geht hier längs geschlossener Linien (Knoten) vor sich, die in der 3-Sphäre darin liegen. Auch hier führt die Aufzählung und Unterscheidung der einzelnen Überlagerungsräume zu ungelösten Fragen. Die Mannigfaltigkeiten lassen sich unter Umständen auf vielfache Art aus ganz verschiedenen Verzweigungsknoten ableiten; z. B. sind für den sphärischen Dodekaederraum drei verschiedene Verzweigungsknoten bekannt.<sup>37</sup>

**Aufgabe:** Wenn man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit durch ein Polyeder mit  $h$  Paaren zugeordneter Seiten geben kann, so besitzt die Mannigfaltigkeit ein Heegaard-Diagramm vom Geschlechte  $h$ . (Wie weit hiervon die Umkehrung gilt, ist nicht entschieden.)

#### § 64. Berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Eine berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist ein berandeter reiner endlicher zusammenhängender Komplex  $\mathbb{R}^3$ , der eine simpliziale Zerlegung mit folgenden Eigenschaften zuläßt:

1. Der Umgebungskomplex eines mittleren Punktes von  $\mathbb{R}^3$  ist eine Kugelfläche;
2. Der Umgebungskomplex eines Randpunktes bezüglich  $\mathbb{R}^3$  ist eine Kreisscheibe.

Es ist leicht, durch Betrachtung der Homologiegruppen in den Punkten von  $\mathbb{R}^3$  nachzuweisen, daß dann jede beliebige Zerlegung von  $\mathbb{R}^3$  diese Eigenschaften hat.

Einfachste Beispiele von dreidimensionalen berandeten Mannigfaltigkeiten sind Vollkugel, Hohlkugel und Vollring.

Man hätte die berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit auch als einen berandeten reinen Komplex definieren können, dessen Verdoppelung eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist.

*Der Rand  $\mathbb{R}^2$  von  $\mathbb{R}^3$  besteht aus einer oder mehreren geschlossenen Flächen.*

Da nämlich der Umgebungskomplex eines Randpunktes  $Q$  bezüglich  $\mathbb{R}^3$  eine Kreisscheibe ist, so ist der Umgebungskomplex von  $Q$  bezüglich  $\mathbb{R}^2$  eine Kreislinie. Zerfällt also  $\mathbb{R}^2$  in die isolierten Teilkomplexe  $\mathbb{R}_1^2, \mathbb{R}_2^2, \dots, \mathbb{R}_r^2$ , so ist ein jeder von ihnen ein endlicher zusammenhängender zweidimensionaler homogener Komplex, also eine geschlossene Fläche (S. 141).

Wir legen uns nun die Frage vor, ob jede beliebige geschlossene Fläche als Rand einer dreidimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit auftreten kann und inwieweit durch die Eigenschaften der Randflächen die Eigenschaften von  $\mathbb{R}^3$  selbst bestimmt sind.

Ist  $\mathbb{R}^3$  orientierbar, so erhält man durch kohärente Orientierung aller 3-Simplices eine 3-Kette, deren Rand eine geschlossene 2-Kette auf  $\mathbb{R}^2$  ist. In ihr kommt jedes 2-Simplex von  $\mathbb{R}^2$  wirklich vor. Es müssen also auf den Randflächen  $\mathbb{R}_1^2, \mathbb{R}_2^2, \dots, \mathbb{R}_r^2$  nichtverschwindende geschlossene 2-Ketten existieren, was nur bei orientierbaren Flächen der Fall ist. Das besagt aber

**Satz I:** Eine orientierbare berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit hat lauter orientierbare Randflächen.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt natürlich nicht, da aus jeder nichtorientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit durch Fortnahme eines 3-Simplices eine von einer Kugelfläche berandete nichtorientierbare berandete Mannigfaltigkeit entsteht.

**Folgerung:** Es ist unmöglich, die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2$  in den (durch einen uneigentlichen Punkt zur 3-Sphäre  $\mathbb{S}^3$  geschlossenen) dreidimensionalen Zahlenraum hineinzulegen. Genauer:  $\mathbb{P}^2$  kann nicht Teilkomplex einer simplizialen Zerlegung der 3-Sphäre  $\mathbb{S}^3$  sein.<sup>36</sup> — Denn  $\mathbb{P}^2$  ist ein reiner unberandeter zweidimensionaler Komplex (§ 12). Als Teilkomplex von  $\mathbb{S}^3$  wäre also  $\mathbb{P}^2$  dasselbe wie eine geschlossene 2-Kette mod 2 (§ 23). Da nun die zweite Zusammenhangszahl von  $\mathbb{S}^3$   $q^2 = 0$  ist, also jede geschlossene 2-Kette mod 2 berandet (§ 24), so gäbe es einen dreidimensionalen Teilkomplex  $\mathbb{R}^3$  mit dem Rande  $\mathbb{P}^2$ .  $\mathbb{R}^3$  ist eine dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit, denn ein Punkt  $Q$  von  $\mathbb{R}^3$ , der nicht auf  $\mathbb{P}^2$  liegt, hat als Umgebungskomplex bezüglich  $\mathbb{R}^3$  eine Kugelfläche; liegt aber  $Q$  auf  $\mathbb{P}^2$ , so wird sein Umgebungskomplex bezüglich  $\mathbb{S}^3$  durch  $\mathbb{P}^2$  in zwei berandete Flächen mit gemeinsamem Randkreise zerlegt. Diese

berandeten Flächen sind beides Kreisscheiben, da sie zusammen eine Kugelfläche ergeben müssen. Da  $\mathbb{R}^3$  überdies orientierbar ist — denn  $\mathbb{S}^3$  ist orientierbar —, so ist damit ein Widerspruch zu Satz I aufgezeigt.

Bildet man die Verdoppelung  $\mathbb{R}_2^2$  von  $\mathbb{R}^3$ , so erfährt hierbei der Umgebungskomplex eines Randpunktes ebenfalls eine Verdoppelung. Die Verdoppelung einer Kreisscheibe ist aber die Kugelfläche.  $\mathbb{R}_2^2$  ist somit homogen und daher eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Ihre Charakteristik muß verschwinden (§ 59). Bezeichnet also  $N$  die Charakteristik von  $\mathbb{R}^3$ ,  $\bar{N}$  diejenige des Randes  $\mathbb{R}^2$ , so ist

$$2N - \bar{N} = 0, \quad (1)$$

daher gilt

**Satz II:** Die Charakteristik einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit und die Charakteristik ihres Randes bestimmen einander umkehrbar eindeutig.

Weiter folgt aus (1)

**Satz III:** Die Charakteristik des Randes einer berandeten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist stets gerade. Daher kann die projektive Ebene, allgemeiner eine nichtorientierbare Fläche von ungeradem Geschlecht niemals den Rand einer berandeten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ausmachen.

Dagegen ist es sehr wohl möglich, daß zwei projektive Ebenen zusammen den Rand ausmachen, wie man am Beispiel des topologischen Produktes aus projektiver Ebene und Strecke sieht.

Ist  $\mathbb{R}^3$  orientierbar und haben die Randflächen  $\mathbb{R}_1^2, \mathbb{R}_2^2, \dots, \mathbb{R}_r^2$  bzw. das Geschlecht (Henkelzahl)  $h_1, h_2, \dots, h_r$ , so ist nach § 38

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^r (2h_i - 2) = 2 \sum_{i=1}^r h_i - 2r.$$

Ferner ist in

$$N = -p^0 + p^1 - p^2 + p^3$$

die Bettische Zahl  $p^0 = 1$  und  $p^3 = 0$ , da es keine geschlossene simpliziale 3-Kette  $\neq 0$  in  $\mathbb{R}^3$  gibt. Setzt man diese Werte für  $N$  und  $\bar{N}$  in (1) ein, so ergibt sich

$$p^1 = 1 + p^2 + \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{i=1}^r h_i - 2r \right) = p^2 - (r-1) + \sum_{i=1}^r h_i.$$

Nun ist  $p^2$  wenigstens  $= r-1$ . Denn die Randflächen  $\mathbb{R}_1^2, \mathbb{R}_2^2, \dots, \mathbb{R}_{r-1}^2$  stellen, nachdem man sie kohärent orientiert hat,  $r-1$  homolog unabhängige 2-Ketten dar, weil sie zusammen nicht beranden.

Somit ist

$$p^1 \geqq \sum_{i=1}^r h_i,$$

und es gilt

**Satz IV:** Die erste Bettische Zahl einer orientierbaren berandeten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist mindestens gleich der Gesamthenkel-

zahl der Randflächen. Erreicht wird diese untere Grenze für  $p^1$  z. B. im  $h$ -Henkelkörper (§ 63).

Eine Folge hiervon ist, daß eine berandete orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit, in der jeder geschlossene Weg nullhomolog ist, also erst recht jede einfach zusammenhängende solche Mannigfaltigkeit, nur Kugeln zu Randflächen haben kann.<sup>37</sup>

### § 65. Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten aus Knoten.

Unter den zahlreichen Möglichkeiten<sup>38</sup> der Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten wählen wir als Beispiel das von M. Dehn [2] angegebene Verfahren der Ausbohrung und nachfolgenden Schließung eines Knotens aus. Es läßt sich kurz so beschreiben. In dem durch einen unendlich fernen Punkt zur 3-Sphäre geschlossenen Zahlenraume wird ein Knoten ausgebohrt. Die entstehende berandete Mannigfaltigkeit, der Außenraum des Knotens, wird durch Einsetzen eines Vollringes, des Verschlußringes, zu einer neuen geschlossenen Mannigfaltigkeit gemacht, indem die Randfläche des Außenraumes und die des Verschlußringes topologisch aufeinander abgebildet und identifiziert werden.

Wir beginnen mit der Erklärung der Begriffe Knoten und Ausbohrung. Die durch Schließung des dreidimensionalen Zahlenraumes mit einem unendlich fernen Punkte entstandene 3-Sphäre  $S^3$  sei in bestimmter Weise simplizial zerlegt und die Zerlegung ebenfalls mit  $S^3$  bezeichnet. Ein Knoten  $f$  ist dann ein 1-dimensionaler Teilkomplex auf dieser simplizialen

Zerlegung, in dem jede Ecke mit genau zwei Kanten inzident ist. Ein Knoten ist also ein topologischer Kreis, das ist das topologische Bild eines Kreises. Aber nicht jeder topologische Kreis in  $S^3$  ist ein Knoten. Z. B. würde ein topologischer Kreis, in den unendlich viele immer kleiner werdende und sich gegen einen Punkt häufende Schlingen gemacht sind, also ein „unendlich oft verknoteter Kreis“, wie ihn Fig. 113 andeutet, kein Knoten sein, da er sich nicht aus Kanten einer simplizialen Zerlegung von  $S^3$  zusammensetzen läßt.

Bisweilen wird ein Knoten auch erklärt als ein aus endlich vielen geradlinigen Strecken bestehender doppelpunktfreier geschlossener Kantenzug des  $M^3$ . Ein solcher Kantenzug ist ein Knoten im Sinne unserer Definition, da man die geradlinigen Strecken leicht zu Kanten einer simplizialen Zerlegung machen kann.

Zwei Knoten heißen äquivalent, wenn es eine topologische Selbstabbildung von  $S^3$  mit Erhaltung der Orientierung gibt, die den einen Knoten in den anderen überführt.<sup>39</sup>

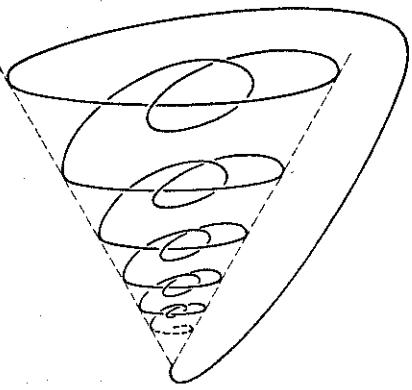


Fig. 113.

Um die Ausbohrung zu erklären, setzen wir von der simplizialen Zerlegung von  $S^3$  noch voraus, daß jedes  $i$ -Simplex, dessen Ecken auf  $f$  liegen, selbst zu  $f$  gehört, daß also niemals alle Ecken eines Dreieckes auf  $f$  liegen und daß eine Kante niemals Sehne von  $f$  ist. Diese Eigenschaft der simplizialen Zerlegung läßt sich immer durch Normalunterteilung herbeiführen.

Sind dann  $P_1, P_2, \dots, P_r$  die Ecken von  $f$  in ihrer zyklischen Reihenfolge und  $St_1, St_2, \dots, St_r$  die Simplexsterne in der Normalunterteilung  $S^3$  von  $S^3$ , so folgt aus der über  $S^3$  gemachten Voraussetzung, daß immer nur aufeinanderfolgende Sterne  $St_q$  und  $St_{q+1}$  ( $q+1$  ist nötigenfalls mod  $r$  zu reduzieren) gemeinsame Punkte haben, die dann genau ein Elementarflächenstück  $E_{q, q+1}$  ausmachen.\*). Überdies sind die Elementarflächenstücke  $E_{q, q+1}$  alle untereinander punktfremd. Hieraus folgt, daß der aus den Simplexsternen  $St_1, St_2, \dots, St_r$  bestehende Teilkomplex ein Vollring  $\mathfrak{B}_0$  mit der Seele  $f$  ist. Denn  $\mathfrak{B}_0$  kann man sich dadurch entstanden denken, daß man von einem Stern  $St_1$  ausgehend immer den folgenden Stern längs eines Elementarflächenstückes ansetzt, wodurch jedesmal eine Vollkugel entsteht, bis schließlich beim letzten Schritt punktfremde Elementarflächenstücke auf dem Rande einer Vollkugel identifiziert werden. Die Ausbohrung des Knotens  $f$  besteht nun darin, daß man die mittleren Punkte des Vollringes  $\mathfrak{B}_0$  fortläßt. Der Restraum  $\mathfrak{A}$  ist eine dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit, deren Rand von einer Ringfläche  $\mathfrak{T}$  gebildet wird. Bestimmen wir die Homologiegruppe  $H_1$  der Dimension 1 des „Außenraumes“  $\mathfrak{A}$ . Wir wählen auf der Ringfläche  $\mathfrak{T}$  einen Meridiankreis  $m_0$ , z. B. einen Randweg des Elementarflächenstückes  $E_{r,0}$ , und einen Breitenkreis  $b_0$ , das ist ein Weg, der in  $\mathfrak{B}_0$  der orientierten Seele  $f$  homolog ist.  $b_0$  ist daher nur bis auf Vielfache von  $m_0$  bestimmt. Wir wenden nun den Satz II von § 52 auf die beiden Teilkomplexe  $\mathfrak{B}_0$  und  $\mathfrak{A}$  von  $S^3$  an. Die erste Homologiegruppe von  $\mathfrak{B}_0$  hat die Erzeugenden  $m_0$  und  $b_0$  und die eine Relation  $m_0 \sim 0$ .\*\*) Denkt man sich auch die Homologiegruppe  $H_1$  durch Erzeugende und Relationen dargestellt, so kann man annehmen, daß  $m_0$  und  $b_0$  unter den Erzeugenden vorkommen. Dann ergeben sich die Relationen der Homologiegruppe  $H_1$  von  $S^3$ , wenn man zu den uns unbekannten Relationen von  $H_1$  diejenigen von  $\mathfrak{B}_0$ , d.h.  $m_0 \sim 0$  hinzufügt (die Vertauschbarkeitsrelationen führen wir nicht mit auf, da sie in der additiven Schreibung der Homologien enthalten sind). Nun besteht  $H_1$  aus dem Nullelemente allein. Setzt man daher in der Homologiegruppe  $H_1$   $m_0 \sim 0$ , so werden alle Elemente zu 0. Das ist

\*) Betrachtet man die simpliziale Zerlegung  $S^3$  als eine Zellteilung (§ 63), so sind die 3-Sterne  $St_q$  und die Elementarflächenstücke  $E_{q, q+1}$  die zu den Ecken und Kanten von  $f$  dualen Zellen.

\*\*) Die Erzeugenden der Homologiegruppe sind die Homologieklassen, die von  $m_0$  und  $b_0$  bestimmt werden. Man müßte also eigentlich für  $m_0$  seine Homologieklasse und für das Zeichen  $\sim$  das Gruppenelemente verknüpfende Gleichheitszeichen setzen.

nur möglich, wenn  $\mathfrak{H}_\mathfrak{X}$  eine von  $m_0$  erzeugte zyklische Gruppe ist. Diese zyklische Gruppe  $\mathfrak{H}_\mathfrak{X}$  ist eine freie zyklische Gruppe.\*.) Denn nach Satz IV von § 64 ist die erste Bettische Zahl von  $\mathfrak{A}$  mindestens gleich der Gesamthinkelzahl der Randflächen, also mindestens = 1, die Gruppe  $\mathfrak{H}_\mathfrak{X}$  also unendlich. Insbesondere ist  $b_0 \sim xm_0$  in  $\mathfrak{A}$ , wobei  $x$  eine eindeutig bestimmte ganze Zahl ist. Sollte  $x \neq 0$  sein, so ersetzen wir  $b_0$  durch den Breitenkreis  $b^* \sim b_0 - xm_0$ , der dann nullhomolog in  $\mathfrak{A}$  ist.

Aus  $\mathfrak{A}$  gewinnen wir eine geschlossene Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$ , indem wir die Randringfläche  $\mathfrak{T}'$  eines Vollringes  $\mathfrak{B}'$  topologisch auf die Randringfläche  $\mathfrak{T}$  von  $\mathfrak{A}$  abbilden und zugeordnete Punkte identifizieren.\*\*) Das Bild  $m$  eines Meridiankreises  $m'$  von  $\mathfrak{B}'$  auf  $\mathfrak{T}$  ist ein Weg auf  $\mathfrak{T}$ , also homolog einer linearen Kombination von  $m_0$  und  $b_0^*$ :

$$m \sim \alpha m_0 + \beta b_0^* \quad (\text{auf } \mathfrak{T}). \quad (1)$$

Die ganzen Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  sind, nebenbei bemerkt, da  $m$  doppelpunktfrei ist, teilerfremd. Die erste Homologiegruppe  $\mathfrak{H}_1$  von  $\mathfrak{M}^3$  ergibt sich wieder nach Satz IV § 64 aus  $\mathfrak{H}_\mathfrak{X}$  durch Nullsetzen des Meridiankreises  $m$  des Verschlußringes:

$$\alpha m_0 + \beta b_0^* \sim 0 \quad (\text{in } \mathfrak{M}^3).$$

Daher bleibt wegen  $b_0^* \sim 0$  in  $\mathfrak{A}$

$$\alpha m_0 \sim 0$$

als definierende Relation von  $\mathfrak{M}^3$ .  $\mathfrak{M}^3$  ist also zyklisch von der Ordnung  $\alpha$ .

Insbesondere erhält man einen Poincaréschen Raum oder die 3-Sphäre, wenn in (1)  $\alpha = 0$  ist. Man hat dann immer noch unendlich viele verschiedene Schließungsmöglichkeiten, je nach der Wahl von  $\beta$ .

Erläutern wir dieses Verfahren am Beispiel der Kleeblattschlinge! Die Relationen der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{A}$  sind nach § 52

$$A^2 = B^2. \quad (2)$$

Als Anfangspunkt der geschlossenen Wege sei ein Punkt von  $\mathfrak{T}$  gewählt. Als Meridiankreis  $m_0$  kann man einen Weg

$$m_0 = BA^{-1}$$

(Fig. 109) und als Breitenkreis einen Weg

$$b_0 = A^2$$

wählen, denn  $A^2$  ist in der Bezeichnung von § 52 die Mittellinie des Kreisringes  $\mathfrak{D}$ . Um den im Außenraum nullhomologen Breitenkreis  $b_0^*$  zu finden, bilden wir mit einer unbestimmten Zahl  $x$

$$b_0^* = A^2(BA^{-1})^{-x} \sim A^2 + xB^{-x}. \quad (3)$$

\*) Ein einfacherer Beweis für diese Tatsache findet sich S. 281.

\*\*) Die Behauptung, daß hierbei immer ein Komplex entsteht, ist gleichbedeutend damit, daß die simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{T}$  nach topologischer Übertragung auf  $\mathfrak{T}'$  sich zu einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{B}'$  vervollständigen läßt. Den Beweis für diese Tatsache erbringen wir hier nicht, sondern setzen voraus, daß die topologische Abbildung von  $\mathfrak{T}$  auf  $\mathfrak{T}'$  diese Beschaffenheit hat.

Man muß also  $x = -6$  setzen. Denn dann ist wegen (2)

$$b_0^* \sim A^{-4}B^6 \sim (A^{-2}B^3)^2 \sim 0 \quad (\text{in } \mathfrak{A}).$$

Um einen Poincaréschen Raum zu erhalten, wählen wir als Meridiankreis des Verschlußringes einen Weg

$$m = m_0 b_0^* \beta = BA^{-1}[A^2(BA^{-1})^6]^\beta. \quad (4)$$

$m$  ist nullhomotop im Verschlußring, also in  $\mathfrak{M}^3$ , so daß in  $\mathfrak{M}^3$  außer (2) noch die Relation

$$(BA^{-1})[A^2(BA^{-1})^6]^\beta = 1 \quad (5)$$

gilt. Daß dies alle Relationen der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{M}^3$  sind, folgt aus Satz I von § 52. Die einfachste Schließung von  $\mathfrak{A}$  erhält man für  $\beta = 0$ . Dann wird  $m = m_0$  und es ergibt sich die 3-Sphäre, von der wir ausgegangen sind. Für  $\beta = -1$  ergeben sich für die Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{M}^3$  die Relationen (2) und (5):

$$A^2 = B^2, \quad BA^{-1}(BA^{-1})^{-6}A^{-2} = 1 \quad \text{oder} \quad A^2 = (BA^{-1})^{-5},$$

d. h.

$$A^2 = B^2 = (BA^{-1})^{-5},$$

und nach Einführung einer neuen Erzeugenden  $C$  an Stelle von  $A$  durch die Gleichung  $A = CB$ :

$$(CB)^2 = B^2 = C^5.$$

Das sind bis auf die Bezeichnung die Relationen des sphärischen Dodekaederraumes (§ 62). Der Beweis, daß nicht nur die Fundamentalgruppen, sondern auch die Räume selbst übereinstimmen, würde Hilfsmittel voraussetzen, die über den Rahmen dieses Buches hinausgehen.<sup>ss</sup>

Für die anderen Werte von  $\beta$  ergeben sich ebenfalls Poincarésche Räume, und zwar, da die Fundamentalgruppen sich als verschieden erweisen lassen, lauter nicht-homöomorphe.

Der simpliziale Komplex, der von den sämtlichen Simplexen der Sterne von  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  gebildet wird, heißt die *Normalunterteilung* von  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  und wird mit  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  bezeichnet. In Fig. 114 ist ein Stück eines 2-Sternkomplexes gezeichnet; die 2-Sterne bestehen aus den stark umrandeten Polygonen.

Beispiel: Aus jedem endlichen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  kann man einen Sternkomplex dadurch herstellen, daß man ihn zunächst in irgendeiner Weise simplizial zerlegt und den so erhaltenen simplizialen Komplex normal unterteilt. Die  $k$ -Sterne sind die normal unterteilten  $k$ -Simplexe von  $\mathfrak{K}^n$ .

Liegt in  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  ein  $(k-1)$ -Stern  $a_i^{k-1}$  auf dem Außenrande eines  $k$ -Sterns  $a_i^k$ , so heißen  $a_i^{k-1}$  und  $a_i^k$  unmittelbar *incident*. Gibt es zwischen zwei Sternen  $a^i$  und  $a^k$  ( $i < k$ ) eine Folge  $a^i, a^{i+1}, \dots, a^{k-1}, a^k$  von Sternen wachsender Dimension, deren jeder mit dem folgenden unmittelbar inzident ist, so heißen  $a^i$  und  $a^k$  mittelbar inzident oder *schlechthin*.

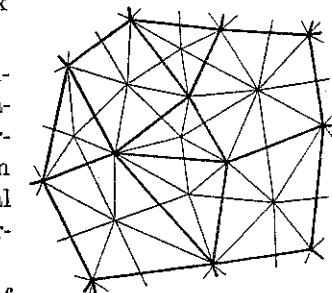


Fig. 114.

Aus der Definition des Sternkomplexes geht hervor, daß man die Anzahlen  $a^0, a^1, \dots, a^n$  der Sterne der Dimension 0 bis  $n$  sowie ihre unmittelbaren Inzidenzen beliebig vorschreiben kann, wenn nur jeder  $k$ -Stern ( $k > 0$ ) mit wenigstens einem  $(k-1)$ -Stern inzident ist. Ist  $P_\alpha^k$  der Mittelpunkt\*) des Sternes  $a_\alpha^k$ , so kann man die Konstruktion des Sternkomplexes geradlinig in einem  $(a^0 + a^1 + \dots + a^n)$ -dimensionalen Zahlenraum vornehmen. Man wählt dort  $a^0 + a^1 + \dots + a^n$  linear unabhängige Punkte

$$P_1^0, P_2^0, \dots, P_{a^0}^0, \dots, P_1^n, P_2^n, \dots, P_{a^n}^n$$

und projiziert von den Punkten  $P_1^1, P_2^1, \dots, P_{a^1}^1$  diejenigen der Punkte  $P_1^0, P_2^0, \dots, P_{a^0}^0$ , aus denen der Außenrand der Sterne  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_{a^1}^1$  bestehen soll, usf.

Es wird nicht verlangt, daß jeder  $k$ -Stern mit einem  $(k+1)$ -Stern inzident ist. Wenn das doch der Fall ist, so heißt der Sternkomplex *rein*. Der Sternkomplex  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  ist offenbar dann und nur dann rein, wenn seine Normalunterteilung  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  ein reiner simplizialer Komplex ist. Dagegen ist in jedem Falle ein  $k$ -Stern  $a^k$  von  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  ein reiner  $k$ -dimensionaler Teilkomplex von  $\mathfrak{K}_\alpha^n$ , d. h. jedes  $i$ -Simplex ( $i < k$ ) von  $a^k$  ist Seite von wenigstens einem  $k$ -Simplexe.

Wir wollen jetzt die Eigenschaften eines  $n$ -Sternkomplexes und seiner Normalunterteilung durch die Inzidenzen zwischen seinen Sternen ausdrücken.

\*) Der obere Index an einer Ecke weist hier und im folgenden auf die Dimension des Sternes hin, dessen Mittelpunkt die Ecke ist.

## Zehntes Kapitel. $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Unter den Komplexen spielen die homogenen eine durch ihre geometrisch anschauliche Bedeutung ausgezeichnete Rolle. In zwei und drei Dimensionen haben wir die homogenen Komplexe Mannigfaltigkeiten genannt, und unser Ziel war, einen vollständigen Überblick über sie zu gewinnen. Dies gelingt in zwei Dimensionen, während schon in drei Dimensionen man über die Angabe von mehr oder minder systematisch geordneten Beispielen nicht hinauskommt. Die vollständige Aufzählung  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten ist zur Zeit eine hoffnungslose Aufgabe. Das Homöomorphieproblem tritt daher in mehr als drei Dimensionen in den Hintergrund gegenüber allgemeinen Sätzen, die alle auf der Möglichkeit beruhen, Mannigfaltigkeiten mit dualen Zellteilungen zu versehen. Von solchen Sätzen behandeln wir hier den Poincaréschen Dualitätssatz sowie die Theorie der Schnitt- und Verschlingungszahlen. — Von geringerer Bedeutung ist es, daß wir die Mannigfaltigkeiten in mehr als drei Dimensionen zweckmäßig auf allgemeinere Weise als durch die Homogenität definieren werden. Wir beginnen mit einem Hilfsbegriffe, der diese Definition und die Einführung der dualen Zellteilungen vorbereitet, mit dem Sternkomplexe.

### § 66. Sternkomplex.

Ein Sternkomplex ist kurz gesagt ein endlicher simplizialer Komplex, dessen Simplexe der Dimension 0 bis  $n$  in bestimmter Weise in Sterne aufgeteilt sind, so daß der Außenrand eines  $i$ -Sternes ganz aus  $(i-1)$ -Sternen besteht. Die genaue Definition geschieht durch vollständige Induktion über die Dimension des Sternkomplexes wie folgt:

Ein 0-Sternkomplex  $\mathfrak{K}_\alpha^0$  besteht aus endlich vielen Punkten

$$a_1^0, a_2^0, \dots, a_{a^0}^0,$$

die Nullsterne von  $\mathfrak{K}_\alpha^0$  heißen. Aus  $\mathfrak{K}_\alpha^0$  gewinnt man einen 1-Sternkomplex  $\mathfrak{K}_\alpha^1$ , indem man endlich viele 1-Sterne

$$a_1^1, a_2^1, \dots, a_{a^1}^1$$

hinzunimmt, wobei der Außenrand eines jeden  $a_i^1$  aus gewissen 0-Sternen von  $\mathfrak{K}_\alpha^0$  besteht. Ist  $\mathfrak{K}_\alpha^{n-1}$  ein  $(n-1)$ -Sternkomplex mit den Sternen

$$a_1^k, a_2^k, \dots, a_{a^k}^k$$

der Dimension  $k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ), so wird daraus ein  $n$ -Sternkomplex  $\mathfrak{K}_\alpha^n$  erhalten, indem man endlich viele  $n$ -Sterne  $a_1^n, a_2^n, \dots, a_{a^n}^n$  hinzunimmt, wobei der Außenrand eines jeden  $a_i^n$  aus gewissen  $(n-1)$ -Sternen von  $\mathfrak{K}_\alpha^{n-1}$  besteht.

Hierzu dient uns

**Satz I:** Ist  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^k$  ( $k \geq 0$ ) eine Reihe von Sternen, deren jeder mit dem folgenden unmittelbar inzident ist, so bilden deren Mittelpunkte  $P^0, P^1, \dots, P^k$  die Ecken eines zu  $\alpha^k$  gehörigen  $k$ -Simplexes, und jedes  $k$ -Simplex des Sternes  $\alpha^k$  läßt sich aus einer solchen Reihe ableiten.

**Beweis:** Der Satz ist richtig für  $k = 0$ . Er sei für die Dimension  $k - 1$  bereits bewiesen. Dann gilt er auch für die Dimension  $k$ . Denn ist  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}$  eine Reihe von unmittelbar inzidenten Sternen, so bilden ihre Mittelpunkte  $P^0, P^1, \dots, P^{k-1}$  nach Voraussetzung die Ecken eines zu  $\alpha^{k-1}$  gehörigen Simplexes. Wegen der Inzidenz von  $\alpha^{k-1}$  und  $\alpha^k$  liegt das Simplex  $(P^0 P^1 \dots P^{k-1})$  auf dem Außenrande von  $\alpha^k$ , so daß die Ecken  $P^0, P^1, \dots, P^{k-1}, P^k$  ein zu  $\alpha^k$  gehöriges Simplex aufspannen. — Ist umgekehrt  $\mathfrak{E}^k$  ein beliebiges  $k$ -Simplex aus  $\alpha^k$ , so hat es  $P^k$  zur Ecke, und die Gegenseite  $\mathfrak{E}^{k-1}$  liegt auf dem Außenrande von  $\alpha^k$  und gehört dort einem mit  $\alpha^k$  inzidenten Stern  $\alpha^{k-1}$  an. Nach Induktionsvoraussetzung sind die Ecken von  $\mathfrak{E}^{k-1}$  die Mittelpunkte einer Reihe von sukzessiv inzidenten Sternen  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}$ . Die gleiche Eigenschaft hat dann die Reihe  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}, \alpha^k$ , deren Mittelpunkte die Ecken von  $\mathfrak{E}^k$  sind.

Eine Verallgemeinerung von Satz I ist der

**Satz II:** Ist  $\alpha^i, \alpha^k, \dots, \alpha^l$  ( $i < k < \dots < l$ ) eine Reihe von Sternen wachsender Dimension, deren je zwei aufeinander folgende inzident (aber nicht notwendig unmittelbar inzident) sind, so sind ihre Mittelpunkte  $P^i, P^k, \dots, P^l$  die Ecken eines Simplexes von  $\mathfrak{R}_a^n$ , und man erhält auf diese Weise alle Simplexe von  $\mathfrak{R}_a^n$ .

**Beweis:** Man kann die Reihe  $\alpha^i, \alpha^k, \dots, \alpha^l$  durch Einschalten weiterer Sterne zu einer Reihe  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^l$  von Sternen ergänzen, deren je zwei aufeinander folgende unmittelbar inzident sind. Nach Satz I machen die Mittelpunkte dieser Sterne die Ecken eines zu  $\alpha^l$  gehörigen Simplexes aus, und die Mittelpunkte der ursprünglich gegebenen Sterne spannen daher eine Seite dieses Simplexes auf. — Sei umgekehrt  $\mathfrak{E}^j$  ein beliebiges Simplex von  $\mathfrak{R}_a^n$ . Wir betrachten die Teilkomplexe  $\mathfrak{R}_a^0, \mathfrak{R}_a^1, \dots, \mathfrak{R}_a^n$ , die von allen 0-Sternen, bzw. allen 0- und 1-Sternen, schließlich von allen Sternen überhaupt gebildet werden.  $\mathfrak{R}_a^h$  sei der erste, in dem  $\mathfrak{E}^j$  vorkommt. Dann ist eine Ecke von  $\mathfrak{E}^j$  Mittelpunkt eines  $h$ -Sternes  $\alpha^h$ , während die Gegenseite von  $\mathfrak{E}^j$  zum Außenrand von  $\alpha^h$  gehört.  $\mathfrak{E}^j$  ist Seite eines Simplexes  $\mathfrak{E}^h$  von  $\alpha^h$  (oder es ist  $\mathfrak{E}^j = \mathfrak{E}^h$ ); dessen Ecken sind nach Satz I die Mittelpunkte von sukzessiv inzidenten Sternen. Daher sind die Ecken von  $\mathfrak{E}^j$  die Mittelpunkte von (mittelbar oder unmittelbar) inzidenten Sternen.

Weiß man also, wieviel Sterne jeder Dimension in  $\mathfrak{R}_a^n$  vorkommen und welche Sterne unmittelbar inzident sind, so sind damit auch die mittelbaren Inzidenzen bekannt und nach Satz II die Simplexe von  $\mathfrak{R}_a^n$  konstruierbar, und auf Grund von Satz I steht fest, welche Simplexe von  $\mathfrak{R}_a^n$  einen Stern von  $\mathfrak{R}_a^n$  ausmachen. Lassen sich die Sterne zweier Sternkomplexe  $\mathfrak{R}_a^n$

und  $'\mathfrak{R}_a^n$  eineindeutig so zuordnen, daß unmittelbar inzidenten Sternen von  $\mathfrak{R}_a^n$  unmittelbar inzidente von  $'\mathfrak{R}_a^n$  entsprechen und umgekehrt, so ist dadurch zugleich eine eineindeutige und inzidenzerhaltende Zuordnung zwischen den Normalunterteilungen  $\mathfrak{R}_a^n$  und  $'\mathfrak{R}_a^n$  gegeben, so daß dabei die Simplexe eines Sternes von  $\mathfrak{R}_a^n$  in die Simplexe des zugeordneten Sternes von  $'\mathfrak{R}_a^n$  übergehen. Zwei derartige Sternkomplexe  $\mathfrak{R}_a^n$  und  $'\mathfrak{R}_a^n$  nennen wir *isomorph*.

Aus Satz II folgt noch der

**Satz III:** Sind

$$P^i, P^k, \dots, P^l \quad (i < k < \dots < l)$$

die Ecken eines ersten und

$$P^l, P^m, \dots, P^z \quad (l < m < \dots < z)$$

die Ecken eines zweiten Simplexes von  $\mathfrak{R}_a^n$ , so sind auch

$$P^i, P^k, \dots, P^l, P^m, \dots, P^z$$

die Ecken eines Simplexes von  $\mathfrak{R}_a^n$ . Denn die Sterne  $\alpha^i, \alpha^k, \dots, \alpha^l, \alpha^m, \dots, \alpha^z$  sind sukzessiv, wenn auch nicht notwendig unmittelbar inzident.

Wir wenden uns jetzt insbesondere den reinen Sternkomplexen  $\mathfrak{R}_a^n$  zu. Über sie gilt der wichtige Satz von der Existenz des dualen Sternkomplexes, dessentwegen wir uns überhaupt mit den Sternkomplexen befassen.

**Satz IV:** Zu jedem reinen Sternkomplex  $\mathfrak{R}_a^n$  gibt es einen bis auf isomorphe bestimmten dualen Sternkomplex  $\mathfrak{R}_b^n$ .

Er ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Jedem  $k$ -Sterne  $\alpha^k$  von  $\mathfrak{R}_a^n$  entspricht umkehrbar eindeutig ein „dualer“  $(n-k)$ -Stern  $b^{n-k}$  von  $\mathfrak{R}_b^n$ , und inzidenten Sternen entsprechen inzidente Sterne.

**Beweis:** Von dem zu konstruierenden Sternkomplex  $\mathfrak{R}_b^n$  sind die Anzahlen der Sterne jeder Dimension sowie ihre unmittelbaren Inzidenzen vorgeschrieben, und die einzige Bedingung, daß jeder  $k$ -Stern mit wenigstens einem  $(k-1)$ -Sterne inzident ist, ist erfüllt, weil in  $\mathfrak{R}_a^n$  jeder  $(n-k)$ -Stern mit wenigstens einem  $(n-k+1)$ -Sterne inzident ist, wegen der Reinheit von  $\mathfrak{R}_a^n$ . — In Fig. 115 sind die 2-Sterne des ursprünglichen Sternkomplexes (desselben wie in Fig. 114) die stark umrandeten Polygone, die des dualen die gestrichelten Polygone.

Bildet man von  $\mathfrak{R}_b^n$  wieder den dualen Sternkomplex, so erhält man  $\mathfrak{R}_a^n$  zurück, die Beziehung zwischen  $\mathfrak{R}_a^n$  und  $\mathfrak{R}_b^n$  ist also wechselseitig.

Da zwischen den Sternen  $\alpha_x^k$  von  $\mathfrak{R}_a^n$  und den dualen Sternen  $b_z^{n-k}$  von  $\mathfrak{R}_b^n$  eine eineindeutige Zuordnung besteht, so besteht eine ebensolche Zuordnung zwischen den Mittelpunkten  $P_x^k$  und  $Q_z^{n-k}$ , d. h. zwischen den Ecken der Normalunterteilung  $\mathfrak{R}_a^n$  und  $\mathfrak{R}_b^n$ . Ist nun  $(P^i P^k \dots P^l)(i < k < \dots < l)$

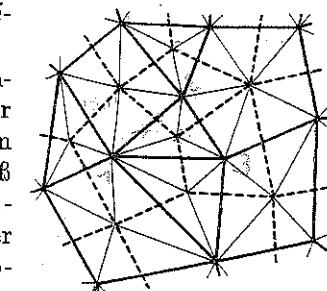


Fig. 115.

ein Simplex von  $\hat{\mathbb{R}}_a^n$ , so sind nach Satz II die zugehörigen Sterne  $a^i, a^k, \dots, a^l$  sukzessiv inzident. Dasselbe gilt dann von den dualen Sternen  $b^{n-i}, b^{n-k}, \dots, b^{n-l}$ . Ihre Mittelpunkte  $Q^{n-i}, Q^{n-k}, \dots, Q^{n-l}$  bilden somit ebenso nach Satz II die Ecken eines Simplexes von  $\hat{\mathbb{R}}_b^n$ . Das heißt, bei der Abbildung  $P_z^k \leftrightarrow Q_z^{n-k}$  gehen Simplexe von  $\hat{\mathbb{R}}_a^n$  in Simplexe von  $\hat{\mathbb{R}}_b^n$  über und umgekehrt. Man kann daher, was wir hinfert tun wollen, die dualen Sternkomplexe  $\hat{\mathbb{R}}_a^n$  und  $\hat{\mathbb{R}}_b^n$  als verschiedene Sternteilungen eines und desselben simplizialen Komplexes  $\hat{\mathbb{R}}^n = \hat{\mathbb{R}}_a^n = \hat{\mathbb{R}}_b^n$  auffassen.

Wir treffen nun die Festsetzung, daß die Ecken irgendeines Simplexes von  $\hat{\mathbb{R}}^n$  stets nach wachsenden oberen Indizes geordnet sein sollen. Nach Satz II sind diese Indizes sämtlich verschieden, d. h. die Ecken sind Mittelpunkte von Sternen verschiedener Dimensionen. Jedes Simplex von  $\hat{\mathbb{R}}^n$  hat dann eine bestimmte erste und eine bestimmte letzte Ecke. Da in  $\hat{\mathbb{R}}^n$  ein  $k$ -Simplex, das zum  $k$ -Stern  $a^k$  von  $\hat{\mathbb{R}}_a^n$  gehört, nach Satz I durch eine Reihe von  $k+1$  sukzessiv inzidenten Sternen  $a^0, a^1, \dots, a^k$  gegeben ist und ein Simplex des dualen Sternes  $b^{n-k}$  entsprechend durch eine Reihe  $a^k, a^{k+1}, \dots, a^n$ , so läßt sich die Lage der Sterne zu ihren dualen Sternen durch den Satz beschreiben:

**Satz V:** Der Stern  $a^k$  besteht aus der Gesamtheit der  $k$ -Simplexe, die seinen Mittelpunkt  $P^k$  zur letzten Ecke haben, der duale Stern  $b^{n-k}$  von  $a^k$  aus der Gesamtheit der  $(n-k)$ -Simplexe, die  $P^k$  zur ersten Ecke haben.

Zwei duale Sterne haben daher nur den Mittelpunkt gemeinsam, während zwei nichtduale Sterne  $a^k$  und  $b^{n-k}$  überhaupt punktfremd sind.

Allgemeiner gilt

**Satz VI:** Der Durchschnitt zweier Sterne  $a^k$  und  $b^{n-i}$  mit den Mittelpunkten  $P^k$  und  $P^i$  besteht aus der Gesamtheit der  $(k-i)$ -Simplexe von  $\hat{\mathbb{R}}^n$ , die  $P^i$  zur ersten und  $P^k$  zur letzten Ecke haben. Sie haben also nur dann einen nicht leeren Durchschnitt, wenn  $i \leq k$  ist und wenn der Mittelpunkt von  $b^{n-i}$  zu  $a^k$  gehört.

**Beweis:** a) Ist  $(P^i P^{i+1} \dots P^{k-1} P^k)$  ein  $(k-i)$ -Simplex, so gehört es einem  $n$ -Simplexe  $(P^0 \dots P^i \dots P^k \dots P^n)$  an. Nach Satz V gehört  $(P^0 \dots P^k)$  zu  $a^k$  und  $(P^i \dots P^n)$  zu  $b^{n-i}$ , die gemeinsame Seite  $(P^i P^{i+1} \dots P^{k-1} P^k)$  also zum Durchschnitt von  $a^k$  und  $b^{n-i}$ .

b) Es ist weiter zu zeigen, daß jedes Simplex des Durchschnitts von  $a^k$  und  $b^{n-i}$  Seite von einem  $(k-i)$ -Simplexe  $(P^i \dots P^k)$  ist. Ist  $\mathfrak{E} = (P^r \dots P^s)$  ein solches (nicht notwendig  $(s-r)$ -dimensionales) gemeinsames Simplex von  $a^k$  und  $b^{n-i}$ , so gibt es ein  $(s-r)$ -dimensionales Simplex  $\mathfrak{E}^{s-r}$ , das  $P^r$  zur ersten und  $P^s$  zur letzten Ecke hat, denn  $\mathfrak{E}$  ist sogar Seite von einem  $n$ -dimensionalen Simplexe. Ferner gibt es ein Simplex  $\mathfrak{E}^{k-s}$ , das  $P^s$  zur ersten und  $P^k$  zur letzten Ecke hat (denn  $P^s$  gehört zu  $a^k$ ) und ein Simplex  $\mathfrak{E}^{r-i}$  mit  $P^i$  als erster und  $P^r$  als letzter Ecke (denn  $P^r$  gehört zu  $b^{n-i}$ ). Die drei Simplexe  $\mathfrak{E}^{s-r}, \mathfrak{E}^{k-s}, \mathfrak{E}^{r-i}$  sind nach Satz IV Seiten eines  $(k-i)$ -Simplexes mit  $P^i$  als erster und  $P^k$  als letzter Ecke.

Wir erläutern die Begriffe an einem simplizialen Komplex  $\hat{\mathbb{R}}_a^n$ , dem Oktaeder. Durch Normalunterteilung seiner acht Dreiecke entsteht aus ihm ein Sternkomplex  $\hat{\mathbb{R}}_b^n$ , der sich aus acht 2-Sternen mit den Mittelpunkten  $P_1^2, P_2^2, \dots, P_8^2$  zusammensetzt. Die Kantenmitten  $P_1^1, P_2^1, \dots, P_{12}^1$  des Oktaeders sind die Mittelpunkte der zwölf 1-Sterne des Komplexes, während die Ecken des Oktaeders die sechs 0-Sterne ausmachen. Der duale Stern des 0-Sternes  $P_1^0$  setzt sich aus acht Dreiecken zusammen, die alle  $P_1^0$  zur ersten Ecke haben. Ihr Außenrand besteht aus vier 1-Sternen, ist also ein Vierseck des dualen Sternkomplexes  $\hat{\mathbb{R}}_b^n$ , das in der Fig. 116 gestrichelten Würfels. Die Figur zeigt die Oktaeder- und die duale Würfelteilung in stereographischer Projektion.

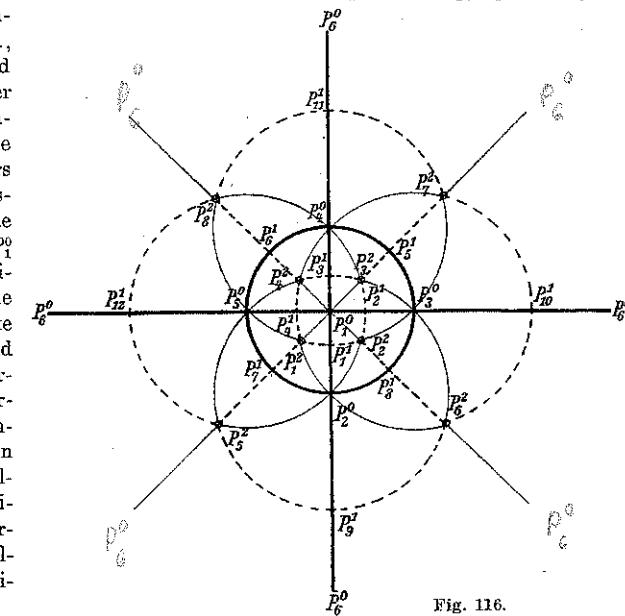


Fig. 116.

### § 67. Zellenkomplex.

Ein  $k$ -Stern heißt eine  $k$ -Zelle, wenn sein Außenrand dieselben Homologiegruppen hat wie eine  $(k-1)$ -Sphäre und wenn er für  $k > 1$  die weitere Bedingung erfüllt, eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit zu sein. Eine 0-Zelle ist ein einzelner Punkt; eine 1-Zelle besteht aus zwei mit einem Punkte inzidenten Strecken. Für zwei Dimensionen ist der Außenrand eine Kreislinie und die 2-Zelle eine Kreisfläche, für drei Dimensionen ist der Außenrand eine Kugelfläche und die 3-Zelle eine Vollkugel (vgl. Aufgabe 1 von § 39). Für vier und mehr Dimensionen lassen sich nicht alle Zellen aufzählen. Es gibt solche, die sich nicht auf eine  $k$ -dimensionale Vollkugel topologisch abbilden lassen. Ein Beispiel hierfür ist ein vierdimensionaler Simplexstern, dessen Außenrand ein dreidimensionaler Poincaréscher Raum ist.

Ein Sternkomplex heißt ein *Zellenkomplex*, wenn seine sämtlichen Sterne Zellen sind.

Da jedes normal unterteilte  $k$ -Simplex eine  $k$ -Zelle ist, kann man jeden endlichen simplizialen Komplex durch Normalunterteilung zu einem Zellenkomplex machen. Die Zellen kann man somit als eine Verallgemeinerung der Simplexe auffassen: sie spielen in einem Zellenkomplex die selbe Rolle wie die Simplexe in einem simplizialen Komplexe. Warum wir

uns nicht auf die Betrachtung von Simplexen beschränken können, wird erst die Untersuchung der Mannigfaltigkeiten im nächsten Paragraphen zeigen.

Der Außenrand einer  $k$ -Zelle  $a^k$  ist für  $k > 1$  eine  $(k-1)$ -dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit. Denn die  $(k-1)$ -te Homologiegruppe ist wie bei einer  $(k-1)$ -Sphäre die freie zyklische Gruppe, was nach § 24 gleichbedeutend mit Orientierbarkeit ist.  $a^k$  selbst ist dann nach S. 91 eine orientierbare berandete Pseudomannigfaltigkeit. Man kann daher ihre  $k$ -Simplexe (auf zwei entgegengesetzte Weisen) kohärent orientieren. Dadurch wird  $a^k$  zur *orientierten  $k$ -Zelle*, die wir mit  $a^k$  bezeichnen. Auch für  $k = 1$  ist eine solche kohärente Orientierung der beiden 1-Simplexe möglich, aus denen die 1-Zelle besteht. 0-Zellen werden wie 0-Simplexe orientiert (S. 41). Eine orientierte  $k$ -Zelle ( $k \geq 0$ ) ist hiernach eine Menge orientierter Simplexe, die wir als eine bestimmte  $k$ -Kette auffassen können, indem wir jedes Simplex mit der Vielfachheit 1 darin auftreten lassen. Die Randkette einer orientierten Zelle  $a^k$  besteht aus dem kohärent orientierten Außenrand von  $a^k$  (S. 91). Hiermit ist eine Orientierung aller  $(k-1)$ -Zellen, aus denen sich der Außenrand einer  $k$ -Zelle in einem Zellenkomplexe zusammensetzt, gegeben; diese Orientierung heißt die von der orientierten  $k$ -Zelle *induzierte Orientierung*.

Die Zellen des Zellenkomplexes  $\mathfrak{K}^n$  denken wir uns von jetzt ab fest orientiert, indem wir von den beiden entgegengesetzten Möglichkeiten der Orientierung eine willkürlich für jede  $k$ -Zelle herausgreifen; die so orientierten Zellen seien  $a_z^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $z = 1, 2, \dots, a^k$ ). Die orientierten Zellen der Dimension  $k$  sind untereinander linear unabhängige Ketten, da keine zwei  $k$ -Zellen ein gemeinsames  $k$ -Simplex haben.

Unter einer  $k$ -Zellenkette eines Zellenkomplexes verstehen wir ein Aggregat

$$q_1 a_1^k + q_2 a_2^k + \dots + q_{a^k} a_{a^k}^k, \quad (1)$$

worin die Zellen  $a_z^k$  als simpliziale Ketten der Normalunterteilung  $\mathfrak{K}^n$  von  $\mathfrak{K}^n$  aufzufassen sind. Eine Zellenkette ist also eine besondere simpliziale Kette, nämlich eine solche, in der sich die Simplexe gemäß (1) zu Zellen zusammenfassen lassen. Ist eine solche Zusammenfassung möglich, dann nur auf eine Weise, denn wegen der linearen Unabhängigkeit der  $k$ -Zellen sind die Koeffizienten  $q_1, q_2, \dots, q_{a^k}$  durch die Kette eindeutig bestimmt.

Eine Zellenkette heißt geschlossen oder nullhomolog, wenn die simpliziale Kette geschlossen bzw. nullhomolog ist. Der Rand einer Zellenkette ist wieder eine Zellenkette. Denn der Rand einer einzelnen Zelle  $a_z^{k+1}$  ist eine Zellenkette:

$$\partial a_z^{k+1} = \sum_{z=1}^{a^k} \varepsilon_{zz}^k a_z^k \quad (z = 1, 2, \dots, a^{k+1}). \quad (2)$$

Darin ist  $\varepsilon_{zz}^k = +1$ , wenn die Orientierung von  $a_z^k$  die von  $a_z^{k+1}$  induzierte Orientierung ist; ist sie die entgegengesetzte, so ist  $\varepsilon_{zz}^k = -1$ , und es ist  $\varepsilon_{zz}^k = 0$ , wenn  $a_z^k$  überhaupt nicht mit  $a_z^{k+1}$  inzident ist.

Zu jeder geschlossenen simplizialen  $k$ -Kette eines Zellenkomplexes  $\mathfrak{K}^n$  gibt es eine homologe Zellenkette. Wir zeigen allgemeiner:

Satz I: Ist  $U^k$  eine simpliziale Kette auf einem Zellenkomplexe  $\mathfrak{K}^n$  und ist  $\partial U^k$  eine  $(k-1)$ -dimensionale Zellenkette\*, die auch die Kette 0 sein kann, so gibt es eine zu  $U^k$  homologe Zellenkette.

Beweis: Sei zunächst  $k = 0$  und  $E^0$  ein 0-Simplex von  $U^0$ . Dann ist  $E^0$  entweder selbst schon eine 0-Zelle oder Mittelpunkt einer  $l$ -Zelle, auf deren Außenrande eine offenbar zu  $E^0$  homologe 0-Zelle liegt. Es ist also jedes 0-Simplex homolog einer 0-Zelle und daher jede 0-Kette homolog einer 0-Zellenkette. — Ist  $k > 0$ , so betrachten wir die Teilkette  $V^k$  aller  $k$ -Simplexe von  $U^k$ , die mit dem Mittelpunkte  $P^n$  einer  $n$ -Zelle  $a^n$  inzident sind. Da  $\partial U^k$  ganz aus  $(k-1)$ -Zellen besteht, so kann kein Randsimplex von  $U^k$ , also auch keines von  $V^k$  mit  $P^n$  inzident sein.  $\partial V^k$  liegt also auf dem Außenrande von  $a^n$ . Es sei nun

a)  $k = n$ . Dann ist  $V^n$  eine  $n$ -Kette auf der Zelle  $a^n$ , deren Rand auf dem Außenrande von  $a^n$  liegt, also ist  $V^n$  nach S. 91 ein Vielfaches von  $a^n$ .  $U^n$  setzt sich ganz aus  $n$ -Zellen zusammen.

b)  $0 < k < n$ . Dann ist  $\partial V^k$  eine geschlossene  $(k-1)$ -Kette des Außenrandes von  $a^n$  und daher nullhomolog auf dem Außenrande von  $a^n$ , weil der Außenrand dieselben Homologiegruppen hat wie eine  $(n-1)$ -Sphäre. (Das gilt auch für  $k = 1$ , weil der algebraische Wert der 0-Kette  $\partial V^k$  verschwindet, wie immer beim Rande einer 1-Kette.) Es gibt also auf dem Außenrande von  $a^n$  eine Kette  $'V^k$  mit dem Rande  $\partial V^k$ .  $V^k - 'V^k$  ist dann eine geschlossene Kette auf  $a^n$  und daher als Kette auf einem  $n$ -Sterne nullhomolog (S. 68). Ersetzt man also in  $U^k$  die Teilkette  $V^k$  durch  $'V^k$ , so erhält man eine zu  $U^k$  homologe Kette, die kein inneres Simplex von  $a^n$  mehr enthält. So verfährt man mit allen  $n$ -Zellen und gewinnt dadurch eine Kette  $U_1^k \sim U^k$ , die auf dem von den Zellen der Dimension 0 bis  $n-1$  gebildeten Teilkomplexe  $\mathfrak{K}^{n-1}$  von  $\mathfrak{K}^n$  liegt. Ist  $k = n-1$ , so ist  $U_1^k$  nach a) schon eine Zellenkette. Andernfalls wendet man das Verfahren b) noch einmal auf  $\mathfrak{K}^{n-1}$  an und ersetzt  $U_1^k$  durch eine homologe Kette  $U_2^k$ , die auf  $\mathfrak{K}^{n-2}$ , dem Teilkomplexe aller 0-, 1-, ...,  $(n-2)$ -Zellen von  $\mathfrak{K}^n$  liegt. Dieses Verdrängungsverfahren wird so oft wiederholt, bis man zu einer Kette  $U_{n-k}^k \sim U^k$  kommt, die auf dem Teilkomplexe  $\mathfrak{K}^k$  aller Zellen bis zur Dimension  $k$  liegt und auf die man die Schlußweise a) anwenden kann.

Damit ist das wichtige Ergebnis gewonnen:

Satz II: Die orientierten Zellen eines Zellenkomplexes bilden ein System von Blöcken. Denn die Bedingungen  $(Bl_1)$  bis  $(Bl_4)$  von § 22 werden von den Zellen erfüllt. Man kann daher die Zellenketten der Berechnung der Homologiegruppen zugrunde legen, wobei als Inzidenzmatrizen, die aus den Berandungsrelationen (2) sich ergebenden Matrizen  $(\varepsilon_{zz}^k)$  zu benutzen sind. Durch diese Inzidenzmatrizen ist der Zellenkomplex (bis auf isomorphe) übrigens vollkommen bestimmt, denn ein Sternkomplex ist durch Angabe seiner Sterne und ihrer unmittelbaren Inzidenzen festgelegt.

\* Für  $k = 0$  fällt die Bedingung für den Rand, eine Zellenkette zu sein, natürlich fort.

Wie wir aus den orientierten Simplexen simpliziale Ketten und aus den nichtorientierten Simplexen simpliziale Ketten mod 2 bilden, so lassen sich den orientierten Zellen *Zellen mod 2* und den Zellketten *Zellketten mod 2* an die Seite stellen. Eine  $k$ -Zelle mod 2 (wofür wir auch sagen: eine nichtorientierte  $k$ -Zelle) ist die simpliziale  $k$ -Kette mod 2, die von allen nichtorientierten  $k$ -Simplexen der Zelle gebildet wird. Eine  $k$ -Zellkette mod 2 ist eine lineare Kombination von  $k$ -Zellen mod 2, deren Koeffizienten Restklassen mod 2, also 0 oder 1 sind. Die Sätze über Zellketten übertragen sich in der gleichen Weise wie bei den simplizialen Ketten auf Zellketten mod 2. Man hat nur in allen Relationen den Koeffizientenbereich der ganzen Zahlen durch den der Restklassen mod 2 zu ersetzen. — Die Zellen mod 2 bilden ein Blocksystem mod 2.

### § 68. Mannigfaltigkeiten.

In zwei und drei Dimensionen haben wir als eine Mannigfaltigkeit einen homogenen Komplex definiert, das ist ein solcher Komplex, in dem jeder Punkt eine dem Innern einer zwei- bzw. dreidimensionalen Vollkugel homöomorphe Umgebung besitzt. Für mehr als drei Dimensionen ist beim heutigen Stande der Topologie diese Definition deshalb unzweckmäßig, weil sie sich nicht kombinatorisch erfassen lässt. Man hat kein Verfahren, um von einem durch sein Schema gegebenen simplizialen Komplexen von mehr als drei Dimensionen zu entscheiden, ob er homogen ist oder nicht. Es ist nämlich unbekannt, ob man aus der Homogenität eines  $n$ -dimensionalen Komplexes  $\mathfrak{R}^n$  folgern darf, daß der  $(n-1)$ -dimensionale Umgebungskomplex einer Ecke einer simplizialen Zerlegung homöomorph der  $(n-1)$ -Sphäre ist. Aber auch wenn das der Fall wäre, so bliebe immer noch die Frage zu entscheiden, ob ein vorgelegter  $(n-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex eine  $(n-1)$ -Sphäre ist oder nicht. Dieses „Sphärenproblem“ ist für mehr als zwei Dimensionen ungelöst. Nun kann man aber eine große Reihe von Sätzen, die von Homologieeigenschaften (und nicht Homotopieeigenschaften) homogener Komplexe handeln, beweisen, ohne die Homogenität des Komplexes voll auszunutzen. Diese Sätze gelten unverändert für einen beliebigen Komplex, wenn er sich nur in der Umgebung eines jeden Punktes bezüglich seiner Homologieeigenschaften wie ein homogener Komplex verhält. Es genügt zu verlangen, daß die Homologiegruppen in jedem Punkte dieselben sind wie die der  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre.

Dementsprechend definieren wir: *Eine (geschlossene)  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  ( $n > 0$ ) ist ein zusammenhängender endlicher  $n$ -dimensionaler Komplex, der in jedem Punkte dieselben Homologiegruppen hat wie die  $(n-1)$ -dimensionale Sphäre.<sup>40</sup>*

Die nullte und  $(n-1)$ -te Homologiegruppe in einem Punkte sind also freie zyklische Gruppen, alle übrigen bestehen aus dem Nullelemente allein, ausgenommen für  $n = 1$ ; in diesem Ausnahmefalle ist die nullte Homologiegruppe die freie Gruppe von zwei Erzeugenden.

Wie bei den Flächen kann man außer den hier allein zu behandelnden geschlossenen Mannigfaltigkeiten noch berandete sowie unendliche Mannigfaltigkeiten betrachten.<sup>41</sup> Die geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind endliche unberandete Mannigfaltigkeiten.

Satz I: *Alle zusammenhängenden endlichen homogenen Komplexe sind Mannigfaltigkeiten.* Dies folgt aus § 33 Satz II.

Insbesondere sind also die im VI. und IX. Kapitel betrachteten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten im Sinne der Definition, ebenso die  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$  und der  $n$ -dimensionale projektive Raum  $\mathbb{P}^n$  für  $n > 0$ . Es gibt eine einzige eindimensionale Mannigfaltigkeit; sie ist homöomorph der Kreislinie. Da nämlich die nullte Homologiegruppe in einer Ecke eines simplizialen eindimensionalen Komplexes ebenso viele freie Erzeugende hat wie 1-Simplexe von der Ecke ausgehen und die nullte Homologiegruppe die freie Gruppe von zwei Erzeugenden sein soll, so müssen mit jeder Ecke genau zwei 1-Simplexe inzident sein. Wir lassen den trivialen Fall  $n = 1$  hinfort außer Betracht.

Ist ein Komplex  $\mathfrak{R}^n$  mit einer simplizialen Zerlegung vorgelegt, so kann man immer entscheiden, ob er eine Mannigfaltigkeit ist oder nicht. Da die  $i$ -te Homologiegruppe in allen mittleren Punkten eines  $k$ -Simplexes dieselbe ist, so braucht man nur für die Mittelpunkte aller  $k$ -Simplexe, also für die Ecken der Normalunterteilung von  $\mathfrak{R}^n$  die Homologiegruppen nachzuprüfen.

Wir zeigen jetzt: I. Jede Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  ist ein reiner Komplex, d. h. in einer beliebigen simplizialen Zerlegung ist ein  $k$ -Simplex ( $k < n$ ) mit wenigstens einem  $n$ -Simplexe inzident. Denn andernfalls würde in einem mittleren Punkte dieses  $k$ -Simplexes die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe nicht die freie zyklische Gruppe sein, sondern aus dem Nullelementen bestehen.

II. Jedes  $(n-1)$ -Simplex ist genau mit zwei  $n$ -Simplexen inzident. Wären es nämlich  $v \neq 2$ , so wäre die  $(n-1)$ -te Homologiegruppe in einem mittleren Punkte des  $(n-1)$ -Simplexes die freie abelsche Gruppe von  $v - 1 \neq 1$  Erzeugenden (§ 32, 2. Beispiel).

Hieraus folgt, daß auch der Umgebungskomplex  $\mathfrak{U}^{n-1}$  einer Ecke  $P$ , also der Außenrand des Simplexsternes mit dem Mittelpunkte  $P$  ein reiner  $(n-1)$ -dimensionaler Komplex ist, in dem jedes  $(n-2)$ -Simplex mit genau zwei  $(n-1)$ -Simplexen inzident ist. Da ferner  $\mathfrak{U}^{n-1}$  die Homologiegruppen der  $(n-1)$ -Sphäre hat, so ist die  $(n-1)$ -te Zusammenhangszahl von  $\mathfrak{U}^{n-1}$   $q^{n-1} = 1$ . Also ist der Umgebungskomplex  $\mathfrak{U}^{n-1}$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit (vgl. S. 89). — Hieraus folgt weiter:

III. In einer Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  kann man je zwei  $n$ -Simplexe durch eine Reihe von sukzessiv inzidenten Simplexen der Dimension  $n$  und  $n-1$  verbinden. Angenommen, der Satz sei falsch. Dann kann man  $\mathfrak{M}^n$  in zwei Teilkomplexe zerlegen, die einen höchstens  $(n-2)$ -dimensionalen Komplex  $\mathfrak{R}^*$  zum Durchschnitt haben. Als den einen Teil

wähle man alle  $n$ -Simplexe, die sich mit einem bestimmten auf die angegebene Art verbinden lassen, als zweiten Teilkomplex alle übrigen  $n$ -Simplexe. Auf dem Umgebungskomplex  $\mathfrak{A}^{n-1}$  einer Ecke von  $\mathfrak{A}^k$  erscheinen dann die beiden Teilkomplexe als zwei  $(n-1)$ -dimensionale Teilkomplexe, deren Durchschnitt entweder leer oder höchstens  $(n-3)$ -dimensional ist. Man könnte also auf  $\mathfrak{A}^{n-1}$  nicht je zwei  $(n-1)$ -Simplexe durch eine Reihe verbinden, was im Widerspruch zu der Tatsache steht, daß  $\mathfrak{A}^{n-1}$  eine Pseudomannigfaltigkeit ist.

Da die hiermit nachgewiesenen Eigenschaften I. bis III. mit den definierenden Eigenschaften  $(PM_1)$  bis  $(PM_3)$  der Pseudomannigfaltigkeiten (§ 24) übereinstimmen, so steht fest:

Satz II: Jede Mannigfaltigkeit ist eine Pseudomannigfaltigkeit.

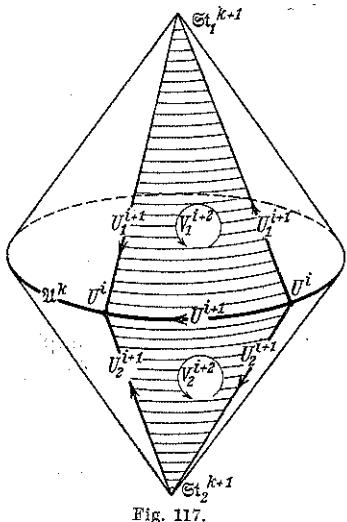


Fig. 117.

Die früher für Pseudomannigfaltigkeiten ausgesprochenen Sätze gelten daher auch für Mannigfaltigkeiten, insbesondere kann man die Mannigfaltigkeiten in orientierbare und nichtorientierbare einteilen.

Um weitere Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten zu gewinnen, beweisen wir den

Hilfsatz: Besteht ein Komplex  $\mathfrak{B}^{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) aus zwei Simplexsternen  $St_1^{k+1}$  und  $St_2^{k+1}$  mit gemeinsamem Außenrande  $\mathfrak{A}^k$  und sind die Homologiegruppen von  $\mathfrak{B}^{k+1}$  diejenigen der  $(k+1)$ -Sphäre, so sind die von  $\mathfrak{A}^k$  gleich denen der  $k$ -Sphäre. Die Fig. 117 erläutert den Fall  $k = 1$ .

Beweis:  $U^i$  sei eine geschlossene  $i$ -Kette\*) auf  $\mathfrak{A}^k$ ;  $0 \leq i \leq k$ . Für  $i = 0$  nehmen wir noch an, daß  $U^i$  den algebraischen Wert 0 hat. In der Figur besteht  $U^i$  aus zwei Punkten mit den Vielfachheiten +1 und -1. Dann ist  $U^i \sim 0$  in  $St_1^{k+1}$  und ebenso in  $St_2^{k+1}$  nach S. 68. Es gibt also Ketten  $U_1^{i+1}$  und  $U_2^{i+1}$  in  $St_1^{k+1}$  und  $St_2^{k+1}$  mit

$$\partial U_1^{i+1} = U^i, \quad (1)$$

$$\partial U_2^{i+1} = U^i. \quad (2)$$

Die Kette

$$U_1^{i+1} - U_2^{i+1} \quad (3)$$

ist also geschlossen. — Es sei nun I.  $i < k$ . Dann ist die Kette (3) nullhomolog auf  $\mathfrak{B}^{k+1}$ , da ihre Dimension  $i+1 > 0$  und  $< k+1$  ist und  $\mathfrak{B}^{k+1}$  die Homologiegruppen der  $(k+1)$ -Sphäre hat. Es sei demgemäß

$$\partial U_1^{i+1} = U_1^{i+1} - U_2^{i+1}. \quad (4)$$

\*) Alle Ketten in diesem Beweise werden als nichtsingulär (d. h. als simplizial) vorausgesetzt. — Den trivialen Fall  $k = 0$  können wir im Beweise übergehen.

Wir zerlegen  $V^{i+2}$  in die Summe

$$V^{i+2} = V_1^{i+2} + V_2^{i+2}, \quad (5)$$

wobei unter  $V_i^{i+2}$  die Gesamtheit der Simplexe von  $V^{i+2}$  verstanden wird, die mit dem Mittelpunkte von  $St_i^{k+1}$  inzident sind. Dann ist wegen (5) und (4)

$$\partial U_1^{i+2} = \partial U_1^{i+1} - \partial U_2^{i+1} = U_1^{i+1} - U_2^{i+1} - \partial U_2^{i+2}. \quad (6)$$

Die linke Seite von (6) gehört zu  $St_1^{k+1}$ , ebenso die Kette  $U_1^{i+1}$  der rechten Seite, also muß auch die Kette  $U_1^{i+1} + \partial U_2^{i+2} = U^{i+1}$  zu  $St_1^{k+1}$  gehören. Da sie anderseits, wie der Index 2 andeutet, zu  $St_2^{k+1}$  gehört, liegt sie auf  $\mathfrak{A}^k$ . Aus (6) folgt  $U_1^{i+1} - U_2^{i+1} \sim 0$ .  $U_1^{i+1}$  und  $U_2^{i+1}$  haben daher denselben Rand  $U^i$ . Damit ist zu der vorgegebenen Kette  $U^i$  eine auf  $\mathfrak{A}^k$  liegende Kette  $U^{i+1}$  konstruiert, die  $U^i$  zum Rande hat, und gezeigt, daß die Homologiegruppen der Dimension 1 bis  $k-1$  von  $\mathfrak{A}^k$  nur aus dem Nullelement bestehen, während die nullete Homologiegruppe die freie zyklische Gruppe ist. — Sei II.  $i = k$ . Da die  $(k+1)$ -te Homologiegruppe von  $\mathfrak{B}^{k+1}$  die freie zyklische Gruppe ist, so gibt es eine Kette  $B^{k+1}$ , von der jede geschlossene  $(k+1)$ -Kette ein Vielfaches ist. Insbesondere gilt dies von der Kette (3):

$$U_1^{k+1} - U_2^{k+1} = m B^{k+1}.$$

$B^{k+1}$  läßt sich eindeutig in zwei Ketten  $B_1^{k+1}$  und  $B_2^{k+1}$  zerlegen, die zu  $St_1^{k+1}$  und  $St_2^{k+1}$  gehören. Dann folgt  $U_1^{k+1} = m B_1^{k+1}$ , also  $U^k = \partial U_1^{k+1} = m \partial B_1^{k+1}$ .  $U^k$  ist also das  $m$ -fache der geschlossenen Kette  $\partial B_1^{k+1}$ , d. h. die  $k$ -te Homologiegruppe von  $\mathfrak{A}^k$  ist die freie zyklische Gruppe.

Nun folgt der wichtige

Satz III: Ist  $P$  eine Ecke in einer simplizial zerlegten Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$ , so ist der Außenrand  $\mathfrak{A}^{n-1}$  des Simplexsternes  $St^n$  um  $P$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; ( $n \geq 2$ ).

Beweis: I.  $\mathfrak{A}^{n-1}$  ist zusammenhängend, endlich und  $(n-1)$ -dimensional. Denn  $\mathfrak{A}^{n-1}$  ist eine  $(n-1)$ -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit. II. Um zu zeigen, daß  $\mathfrak{A}^{n-1}$  in jedem Punkte  $A$  die Homologiegruppen der  $(n-2)$ -Sphäre hat, denken wir alle nicht zu  $St^n$  gehörigen Simplexe von  $\mathfrak{M}^n$  fortgelassen und nehmen an, daß  $A$  Ecke der simplizialen Zerlegung von  $St^n$  ist. Das ist keine Einschränkung, da man  $\mathfrak{A}^{n-1}$  so unterteilen kann, daß  $A$  zur Ecke wird und man diese Unterteilung von  $\mathfrak{A}^{n-1}$  durch Projektion von  $P$  aus zu einer Unterteilung von  $St^n$  vervollständigen kann.  $St^{n-1}$  bezeichne den Simplexstern auf  $\mathfrak{A}^{n-1}$  mit dem Mittelpunkte  $A$ , und  $\mathfrak{A}^{n-2}$  seinen Außenrand (Fig. 118). Ein die Strecke  $(PA)$  enthaltendes  $n$ -Simplex hat dann die Ecken  $P, A, A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$ , wenn

$$(A_0 A_1 \dots A_{n-2})$$

ein  $(n-2)$ -Simplex von  $\mathfrak{A}^{n-2}$  ist. Wir zerlegen das  $n$ -Simplex mit Benutzung des Mittelpunktes  $Q$  von  $(PA)$  in die beiden  $n$ -Simplexe

$$(P Q A_0 A_1 \dots A_{n-2}) \text{ und } (A Q A_0 A_1 \dots A_{n-2})$$

und tun das gleiche mit allen übrigen mit  $(PA)$  inzidenten  $n$ -Simplexen von  $\text{St}^n$ . Durch diese Unterteilung von  $\text{St}^n$  wird  $Q$  zur Ecke, und der Außenrand  $\mathfrak{A}^{n-1}$  des Simplexsternes mit dem Mittelpunkte  $Q$  setzt sich

aus zwei Teilen zusammen: der Gesamtheit der  $(n-1)$ -Simplexe  $(PA_0 A_1 \dots A_{n-2})$  und der  $(n-1)$ -Simplexe  $(AA_0 A_1 \dots A_{n-2})$ , wenn für  $A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$  alle Ecken von  $(n-2)$ -Simplexen von  $\mathfrak{A}^{n-2}$  eingesetzt werden. D. h. der Umgebungskomplex von  $Q$  besteht aus zwei Simplexsternen mit gemeinsamem Außenrand  $\mathfrak{A}^{n-2}$ . Nun sind die Homologiegruppen des Umgebungskomplexes  $\mathfrak{B}^{n-1}$  von  $Q$  nach Definition der Mannig-

faltigkeit gleich denen der  $(n-1)$ -Sphäre. Nach dem Hilfssatz sind dann die Homologiegruppen von  $\mathfrak{A}^{n-2}$ , d. h. diejenigen des Außenrandes  $\mathfrak{A}^{n-1}$  im Punkte  $A$  gleich denen der  $(n-2)$ -Sphäre, was zu beweisen war.

Wir haben gesehen, daß jeder zusammenhängende endliche homogene Komplex eine Mannigfaltigkeit ist. Wir können jetzt umgekehrt zeigen:

**Satz IV:** Für  $n = 1, 2, 3$  und nur für diese Dimensionen ist jede geschlossene Mannigfaltigkeit homogen.

Die einzige eindimensionale Mannigfaltigkeit, die Kreislinie, ist offenbar homogen. — Ist  $P$  ein Punkt einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, so führe man eine simpliziale Zerlegung mit  $P$  als Ecke aus; nach Satz III ist der Umgebungskomplex von  $P$  eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, also homöomorph der Kreislinie, daher der Simplexstern mit dem Mittelpunkte  $P$  homöomorph der Kreisscheibe. Für zwei Dimensionen ist also eine geschlossene Mannigfaltigkeit ein endlicher, zusammenhängender, homogener Komplex, also dasselbe wie eine geschlossene Fläche (S. 141); die geschlossenen Flächen haben wir im sechsten Kapitel vollständig klassifiziert. — In einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$  ist der Umgebungskomplex eines Punktes eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die dieselben Homologiegruppen hat wie die 2-Sphäre. Nach dem Fundamentalsatz der Flächentopologie ist die 2-Sphäre die einzige geschlossene Fläche mit dieser Eigenschaft. Der Simplexstern um einen Punkt von  $\mathfrak{M}^3$  ist also homöomorph der Vollkugel, d. h.  $\mathfrak{M}^3$  ist homogen, also ein Komplex, wie wir ihn in Kap. IX betrachtet haben. — Die Schlußweise versagt für mehr als drei Dimen-

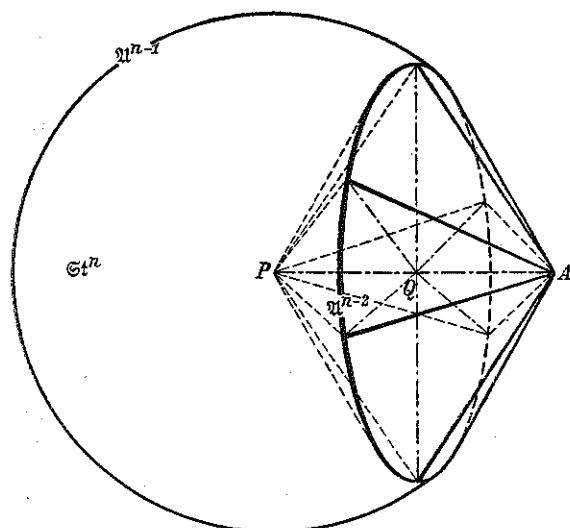


Fig. 118.

sionen, da es dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, die Poincaréschen Räume, gibt, die dieselben Homologiegruppen wie die 3-Sphäre haben und doch nicht mit ihr übereinstimmen. Tatsächlich gibt es vierdimensionale nicht-homogene Mannigfaltigkeiten. Beispiel ist ein Komplex  $\mathfrak{K}^4$ , der aus zwei Simplexsternen  $\text{St}_1^4$  und  $\text{St}_2^4$  mit gemeinsamem Außenrand besteht; dieser Außenrand sei der sphärische Dodekaederraum. Alle Punkte bis auf die Mittelpunkte  $P_1$  und  $P_2$  von  $\text{St}_1^4$  und  $\text{St}_2^4$  haben die 3-Sphäre zum Umgebungskomplex. Aber auch in  $P_1$  und  $P_2$  sind die Homologiegruppen diejenigen der 3-Sphäre; denn für  $P_1$  und  $P_2$  ist der sphärische Dodekaederraum Umgebungskomplex, dessen Homologiegruppen mit denen der 3-Sphäre übereinstimmen (S. 217).  $\mathfrak{K}^4$  ist somit eine Mannigfaltigkeit. Sie ist aber nicht homogen. Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  haben keine Umgebungen, die dem Innern der Vollkugel homöomorph wären, da die Fundamentalgruppe in  $P_1$  und ebenso in  $P_2$  nach S. 218 die binäre Ikosaedergruppe ist und nicht aus dem Einselement besteht.

Nachdem wir uns über den Umfang unseres Mannigfaltigkeitsbegriffs unterrichtet haben, gehen wir zur wichtigsten Eigenschaft der Mannigfaltigkeiten über, das ist die Existenz dualer Zellteilungen. Wir machen eine vorgegebene Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  durch simpliziale Zerlegung und geeignete Zusammenfassung der Simplexe zu Sternen zu einem Sternkomplex. Z. B. erhält man eine solche Sternteilung durch Normalunterteilung einer beliebigen simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{M}^n$  (S. 229). Dann gilt: Jede Sternteilung auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  ist zugleich eine Zellteilung.

**Beweis:** Zunächst sind alle  $n$ -Sterne Zellen, denn der Außenrand eines  $n$ -Sternes ist nach S. 237 eine Pseudomannigfaltigkeit, und er hat die Homologiegruppen einer  $(n-1)$ -Sphäre, da die Homologiegruppen in seinem Mittelpunkte die der  $(n-1)$ -Sphäre sind. Nach demselben Schlusste sind die  $(n-1)$ -Sterne einer  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit Zellen, insbesondere also die  $(n-1)$ -Sterne, aus denen der Außenrand einer  $n$ -Zelle von  $\mathfrak{M}^n$  besteht, denn dieser Außenrand ist nach Satz III eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Da jeder  $(n-1)$ -Stern mit wenigstens einem  $n$ -Sterne inzident ist — denn eine Mannigfaltigkeit ist ein reiner Komplex —, so sind alle  $(n-1)$ -Sterne Zellen. So schließt man weiter bis herab zu den 0-Sternen, womit der Satz bewiesen ist.

Mit jeder Sternteilung ist daher auch die duale Stern teilung eine Zellteilung, jede Mannigfaltigkeit läßt daher duale Zellteilungen zu. — Wir bezeichnen im folgenden

eine vorgelegte Zellteilung von  $\mathfrak{M}^n$  mit  $\mathfrak{M}_a^n$ ,  
die duale mit  $\mathfrak{M}_b^n$  und

die gemeinsame Normalunterteilung mit  $\mathfrak{M}^n$ ;

die orientierten Zellen von  $\mathfrak{M}_a^n$  werden  $a_x^k$ , die dualen Zellen von  $\mathfrak{M}_b^n$   $b_x^{n-k}$ , der gemeinsame Mittelpunkt von  $a_x^k$  und  $b_x^{n-k}$  wird  $P_x^k$  genannt ( $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $x = 1, 2, \dots, a^k$ ).

## § 69. Poincaréscher Dualitätssatz.

Eine Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  sei mit zwei festen dualen Zellteilungen  $\mathfrak{M}_a^n$  und  $\mathfrak{M}_b^n$  vorgegeben. Sie sei orientierbar und fest orientiert, d. h. die  $n$ -Simplexe der Normalunterteilung  $\mathfrak{M}^n$  seien auf eine der beiden entgegengesetzten Weisen kohärent orientiert. Sind  $a_z^k$  und  $b_z^{n-k}$  orientierte duale Zellen, so definieren wir die Schnittzahl  $\mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k})$  durch folgende

**Regel:** Man greift aus der Normalunterteilung von  $a_z^k$  ein  $k$ -Simplex

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \dots P^k)$$

heraus; dessen Orientierung durch die von  $a_z^k$  gegeben ist, ebenso aus der Normalunterteilung von  $b_z^{n-k}$  ein  $(n-k)$ -Simplex

$$E^{n-k} = \eta(P^k P^{k+1} \dots P^n).$$

$$E^n = \xi(P^0 P^1 \dots P^k \dots P^n)$$

ist ein  $n$ -Simplex (nach § 66 Satz III), dessen Vorzeichen  $\xi$  durch die Orientierung von  $\mathfrak{M}^n$  festgelegt ist. Dann ist die Schnittzahl  $\mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k})$  als das Produkt

$$\mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k}) = \xi \eta \xi \quad (1)$$

definiert<sup>42</sup>; sie hat somit immer den Wert  $\pm 1$ . In Fig. 119 ist  $n=2$ ,  $k=1$ ,  $\xi=1$ ,  $\eta=\xi=-1$ . Für die Definition ist es gleichgültig, ob man die Ecken von  $E^k$  und  $E^{n-k}$  nach wachsenden oberen Indizes anordnet, wenn nur  $P^k$  in  $E^k$  an letzter, in  $E^{n-k}$  an erster Stelle steht und die Eckenreihenfolge in  $E^n$  die gleiche ist wie in  $E^k$  und  $E^{n-k}$ . Denn vertauscht man in  $E^k$

zwei Ecken ( $\neq P^k$ ), so kehren sich  $\xi$  und  $\xi$  um, während  $\eta$  erhalten bleibt, und Entsprechendes gilt, wenn man zwei Ecken von  $E^{n-k}$  vertauscht. — Die Definition ist unabhängig von der Auswahl der Simplexe  $E^k$  und  $E^{n-k}$  aus den Normalunterteilungen der Zellen  $a_z^k$  bzw.  $b_z^{n-k}$ . Ersetzt man nämlich  $E^k$  durch ein Simplex  $'E^k'$ , das mit

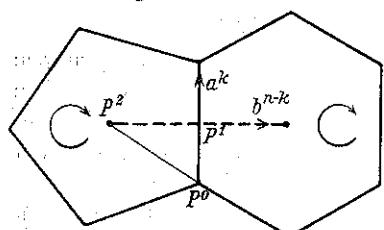


Fig. 119.

$E^k$  alle Ecken bis auf eine, etwa  $P^0$ , gemeinsam hat, die in  $'P^0$  übergehen mag, so ist  $'E^k = -\xi(P^0 P^1 \dots P^k)$ . Denn  $E^k$  und  $'E^k$  induzieren wegen der vorausgesetzten kohärenten Orientierung innerhalb  $a_z^k$  in der gemeinsamen  $(k-1)$ -dimensionalen Seite entgegengesetzte Orientierungen. An Stelle von  $E^n$  tritt dann

$$'E^n = -\xi('P^0 P^1 \dots P^k \dots P^n),$$

dessen Vorzeichen ebenfalls richtig angegeben ist, da  $E^n$  und  $'E^n$  in dem gemeinsamen  $(n-1)$ -Simplexe entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Als Schnittzahl ergibt sich somit

$$(-\xi)\eta(-\xi) = \xi\eta\xi$$

wie zuvor. Nun kann man, indem man  $'E^k$  wieder durch ein benachbartes Simplex von  $a_z^k$  ersetzt und so fortfährt, zu jedem beliebigen Simplexe von  $a_z^k$  gelangen; denn der Außenrand von  $a_z^k$  ist eine Pseudomannigfaltigkeit. Immer bleibt die Schnittzahl erhalten. Die gleiche Überlegung kann man mit der Zelle  $b_z^{n-k}$  anstellen.

Dagegen kehrt sich die Schnittzahl offenbar um, wenn man die Orientierung von  $a_z^k$  oder von  $b_z^{n-k}$  oder von  $\mathfrak{M}^n$  umkehrt.

Ist  $k=0$ , so besteht  $a_z^k$  aus einer Ecke  $P^0$ , die zugleich Mittelpunkt der dualen  $n$ -Zelle  $b_z^n$  ist. Dann ist

$$E^0 = \xi(P^0) \quad \text{und} \quad E^n = \eta(P^0 P^1 \dots P^n).$$

Nimmt man noch an, daß  $a_z^0$  mit dem Vorzeichen  $+1$  orientiert ist, so ist  $\xi=1$  und

$$\mathcal{S}(a_z^0, b_z^n) = \eta\xi = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$

je nachdem die Orientierung von  $b_z^n$  mit der Orientierung von  $\mathfrak{M}^n$  übereinstimmt oder nicht. Man könnte dann die Schnittzahl auch die Überdeckungszahl des Punktes  $P^0$  durch die Zelle  $b_z^n$  nennen.

Bei Vertauschung der beiden dualen Zellen ändert die Schnittzahl unter Umständen ihr Vorzeichen. Es gilt

$$\mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)} \mathcal{S}(b_z^{n-k}, a_z^k). \quad (2)$$

**Beweis:** Es ist

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \dots P^k) = \xi(-1)^k (P^k P^0 \dots P^{k-1})$$

$$E^{n-k} = \eta(P^k P^{k+1} \dots P^n) = \eta(-1)^{n-k} (P^{k+1} \dots P^n P^k)$$

$$E^n = \xi(P^0 P^1 \dots P^{k-1} P^k P^{k+1} \dots P^n)$$

$$= \xi(-1)^{k+(n-k)(k+1)} (P^{k+1} \dots P^n P^k P^0 \dots P^{k-1}).$$

Nach der angegebenen Regel ist nun  $\mathcal{S}(b_z^{n-k}, a_z^k)$  das Produkt der auf den rechten Seiten der drei letzten Gleichungen stehenden Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(b_z^{n-k}, a_z^k) &= \xi \eta \xi (-1)^{k(n-k)} \\ &= (-1)^{k(n-k)} \mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k}), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wir betrachten jetzt neben  $a_z^k$  und  $b_z^{n-k}$  zwei mit diesen Zellen inzidente duale Zellen  $a_i^{k-1}$  und  $b_i^{n-k+1}$ , die wir so orientieren, daß man hat (Fig. 120)

$$\partial a_z^k = a_i^{k-1} + \dots, \quad (3)$$

$$\partial b_i^{n-k+1} = b_z^{n-k} + \dots. \quad (4)$$

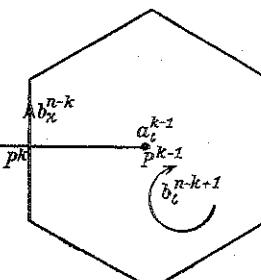


Fig. 120.

Seien  $P^k$  und  $P^{k-1}$  die Mittelpunkte von  $a_z^k$  und  $a_i^{k-1}$ , ferner

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \dots P^k)$$

ein orientiertes Simplex aus  $a_i^k$ ,

$$E^{n-k+1} = \eta(P^{k-1} P^k \dots P^n)$$

ein solches aus  $b_i^{n-k+1}$ , so ist

$$E^{k-1} = \xi(-1)^k(P^0 P^1 \dots P^{k-1})$$

ein Simplex aus  $a_i^{k-1}$  und

$$E^{n-k} = \eta(P^k P^{k+1} \dots P^n)$$

ein solches aus  $b_i^{n-k}$ . Ist endlich die Orientierung von  $\mathfrak{M}^n$  wieder durch

$$E^n = \xi(P^0 P^1 \dots P^n)$$

gegeben, so ist nach der angegebenen Regel

$$\mathcal{O}(a_i^k, b_z^{n-k}) = \xi \eta \xi$$

und

$$\mathcal{O}(a_i^{k-1}, b_z^{n-k+1}) = (-1)^k \xi \eta \xi,$$

also

$$\mathcal{O}(a_z^k, b_z^{n-k}) = (-1)^k \mathcal{O}(a_i^{k-1}, b_z^{n-k+1}). \quad (5)$$

Nimmt man jetzt allgemeiner an, daß die Orientierung der Zellen  $a_i^{k-1}$  und  $b_i^{n-k+1}$  nicht durch die Gleichungen (3) und (4) festgelegt, sondern beliebig vorgegeben sind, so treten an Stelle der Gleichungen (3) und (4) die Gleichungen

$$\mathcal{R} \partial a_z^k = {}^{(a)} \varepsilon_{iz}^{k-1} a_i^{k-1} + \dots = \varrho a_i^{k-1} + \dots, \quad (6)$$

$$\mathcal{R} \partial b_i^{n-k+1} = {}^{(b)} \varepsilon_{zi}^{n-k} b_z^{n-k} + \dots = \sigma b_z^{n-k} + \dots. \quad (7)$$

Dann ist

$$\mathcal{O}(a_z^k, b_z^{n-k}) = \varrho \sigma (-1)^k \mathcal{O}(a_i^{k-1}, b_z^{n-k+1}). \quad (8)$$

Denn durch Umorientierung von  $a_i^{k-1}$  oder  $b_i^{n-k+1}$  kehrt sich das Vorzeichen der rechten Seite von (5) um.

Wir denken uns jetzt die Zellen  $a_z^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $z = 1, 2, \dots, a^k$ ) beliebig orientiert, die Zellen  $b_z^{n-k}$  der dualen Teilung aber so, daß alle Schnittzahlen

$$\mathcal{O}(a_z^k, b_z^{n-k}) = 1$$

werden. Daraus folgt nach (8)  $\varrho \sigma (-1)^k = 1$  oder

$$\varrho = (-1)^k \sigma. \quad (9)$$

Nun ist  $\varrho$  nichts anderes als der Koeffizient  ${}^{(a)} \varepsilon_{iz}^{k-1}$  der Inzidenzmatrix  $E_a^{k-1}$  der Zellteilung  $\mathfrak{M}_a^n$  und  $\sigma$  der Koeffizient  ${}^{(b)} \varepsilon_{zi}^{n-k}$  der Inzidenzmatrix  $E_b^{n-k}$  der Zellteilung  $\mathfrak{M}_b^n$ . Gleichung (9) besagt daher, daß  $E_a^{k-1}$  gleich  $(-1)^k$  mal der transponierten Inzidenzmatrix  $E_b^{n-k}$  ist\*):

$$E_a^{k-1} = (-1)^k E_b^{n-k}, \quad (10)$$

\*): Eine Matrix wird transponiert, indem Zeilen und Spalten vertauscht werden, oder, was dasselbe besagt, indem sie an der Hauptdiagonale gespiegelt wird. Das Transponieren wird durch einen Balken bezeichnet, der in Richtung der Hauptdiagonale über die Matrix gesetzt wird:  $\bar{E}$ .

oder daß die Berandungsrelationen gelten (den Index <sup>(a)</sup> bzw. <sup>(b)</sup> von  $\varepsilon_{iz}^{k-1}$  dürfen wir jetzt wieder fortlassen):

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \partial a_z^k &= \sum_{i=1}^{a^{k-1}} \varepsilon_{iz}^{k-1} a_i^{k-1}, \\ \mathcal{R} \partial b_z^{n-k+1} &= \sum_{z=1}^{a^k} (-1)^k \varepsilon_{zi}^{k-1} b_z^{n-k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Das Ergebnis ist der

Satz I: Orientiert man die Zellen der dualen Zellteilung  $\mathfrak{M}_b^n$  einer gegebenen Zellteilung  $\mathfrak{M}_a^n$  so, daß die Schnittzahl jeder Zelle von  $\mathfrak{M}_a^n$  mit der dualen Zelle von  $\mathfrak{M}_b^n$  (in dieser Reihenfolge!) = 1 ist, so ist die Inzidenzmatrix  $E_a^{k-1}$  von  $\mathfrak{M}_a^n$  gleich  $(-1)^k$  mal der transponierten Inzidenzmatrix  $E_b^{n-k}$  von  $\mathfrak{M}_b^n$ .

Zum Poincaréschen Dualitätssatz gelangt man, wenn man die Homologiegruppen von  $\mathfrak{M}^n$  einmal aus der Zellteilung  $\mathfrak{M}_a^n$ , das andere Mal aus der Zellteilung  $\mathfrak{M}_b^n$  berechnet und die Matrungleichung (10) anwendet. Es ist die  $k$ -te Bettische Zahl

$$p^k = \alpha_a^k - \gamma_a^k - \gamma_a^{k-1} = \alpha_b^k - \gamma_b^k - \gamma_b^{k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Darin bezeichnet  $\alpha_a^k$  die Anzahl der  $k$ -Zellen von  $\mathfrak{M}_a^n$ ,  $\gamma_a^k$  den Rang von  $E_a^k$ , und es ist  $\gamma_a^0 = \gamma_a^n = 0$  (§ 22); entsprechende Bedeutung haben die mit dem Index  $b$  versehenen Zahlen. Nun ist  $\alpha_a^k = \alpha_b^{n-k}$ , weil es zu jeder  $k$ -Zelle genau eine duale  $(n-k)$ -Zelle gibt. Ferner ist wegen (10)  $\gamma_a^{k-1} = \gamma_b^{n-k}$ . Daher

$$p^k = \alpha_b^{n-k} - \gamma_b^{n-k-1} - \gamma_b^{n-k} = p^{n-k}.$$

Die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  sind einmal die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren von  $E_a^k$ , andererseits nach (10) diejenigen von  $E_b^k = (-1)^{n-k} E_a^{n-k-1}$ , sie stimmen also mit den Torsionskoeffizienten der Dimension  $n-k-1$  überein. Daher gilt der

Satz II (Poincaréscher Dualitätssatz): Die  $k$ -te Bettische Zahl einer orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit stimmt mit der  $(n-k)$ -ten überein ( $k = 0, 1, \dots, n$ ); die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  sind gleich denen der Dimension  $n-k-1$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Daraus folgt insbesondere die uns schon bekannte Tatsache, daß es Torsionskoeffizienten der Dimension  $n-1$  in einer orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit nicht gibt. Denn es gibt keinen Torsionskoeffizienten der Dimension 0 (S. 65).

Der Dualitätssatz beruht wesentlich auf der Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit. Denn für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten ist die Matrungleichung (10) durch keine Orientierung der  $n$ -Zellen zu erzielen, weil  $E_a^0$  den Rang  $\alpha_a^0 - 1$  und  $E_b^{n-1}$  den Rang  $\alpha_b^n = \alpha_a^0$  hat (§ 24).

Auch für die nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten kann man einen Dualitätssatz aufstellen, der sich noch einfacher ableiten läßt, da man auf

Orientierung der Zellen keine Rücksicht zu nehmen braucht. Zwischen den Inzidenzmatrizen  $E_a^{k-1}$  und  $E_b^{n-k}$  besteht dann zwar nicht die Gleichung (10), wohl aber die Kongruenz

$$E_a^{k-1} \equiv E_b^{n-k} \pmod{2}.$$

Die Elemente von  $E_a^{k-1}$  und  $E_b^{n-k}$  unterscheiden sich nämlich höchstens durch das Vorzeichen. Mit anderen Worten: Die Inzidenzmatrizen mod 2  $\tilde{E}_a^{k-1}$  und  $\tilde{E}_b^{n-k}$  gehen durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten ineinander über und haben daher denselben Rang  $\delta_a^{k-1} = \delta_b^{n-k}$ . Die  $k$ -te Zusammenhangszahl ist folglich nach Formel (8) von § 23

$$\begin{aligned} q^k &= \alpha_a^k - \delta_a^k - \delta_a^{k-1} = \alpha_b^k - \delta_b^k - \delta_b^{k-1} \\ &= \alpha_a^{n-k} - \delta_a^{n-k-1} - \delta_a^{n-k} = q^{n-k}. \end{aligned}$$

Daher gilt der

**Satz III (Dualitätssatz mod 2):** Für eine orientierbare oder nicht-orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit ist die  $k$ -te Zusammenhangszahl gleich der  $(n-k)$ -ten. Hieraus folgt nach S. 87 (12)

**Satz IV:** Die Eulersche Charakteristik einer Mannigfaltigkeit ungerader Dimension ist  $N = 0$ .

### § 70. Schnittzahlen von Zellenketten.

Der topologische Inhalt des soeben formal aus den Inzidenzmatrizen abgeleiteten Dualitätssatzes stellt sich erst heraus, wenn man von den Bettischen Zahlen zu Bettischen Basen übergeht und nachweist, daß auch diese Basen der Dimension  $k$  und  $n-k$  in einem Dualitätsverhältnis stehen. Zu dem Zwecke müssen wir für zwei Zellenketten die Schnittzahl definieren und sie zur Konstruktion dualer Bettischer Basen benutzen (§ 71).

$$\begin{aligned} A^k &= \xi_1 a_1^k + \xi_2 a_2^k + \cdots + \xi_{\alpha k} a_{\alpha k}^k, \\ B^{n-k} &= \eta_1 b_1^{n-k} + \eta_2 b_2^{n-k} + \cdots + \eta_{\alpha k} b_{\alpha k}^{n-k} \end{aligned}$$

seien zwei Ketten auf dualen Zellteilungen. Da  $a_b^{n-k} = a_a^k$ , etwa  $= a^k$  ist, so laufen in beiden Ketten die Indizes von 1 bis zu dem gemeinsamen Werte  $\alpha^k$ . Die beiden Ketten haben höchstens endlich viele Punkte gemeinsam, denn eine Zelle  $a_i^k$  ist punktfremd zu jeder Zelle  $b_i^{n-k}$ , ausgenommen zur dualen Zelle  $b_i^{n-k}$ , mit der  $a_i^k$  den Mittelpunkt gemeinsam hat. Für zwei duale Zellen wurde die Schnittzahl am Anfang des vorigen Paragraphen definiert. Für zwei nicht zueinander duale Zellen der dualen Teilungen erklären wir als Schnittzahl die Zahl 0. Die Schnittzahl der Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  ist dann die Summe der Schnittzahlen der einzelnen Zellen; genauer ist

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \sum_{z=1}^{\alpha k} \sum_{\lambda=1}^{\alpha k} \xi_z \eta_{\lambda} \mathcal{S}(a_z^k, b_{\lambda}^{n-k}) = \sum_{z=1}^{\alpha k} \xi_z \eta_z \mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k}). \quad (1)$$

Damit ist die Schnittzahl zweier Ketten als eine Bilinearform der beiden Ketten repräsentierenden Vektoren dargestellt.

Durch die feste Orientierung von  $\mathfrak{M}^n$  ist in allen  $n$ -Zellen von  $\mathfrak{M}_b^n$  eine bestimmte Orientierung festgelegt. Die Summe aller so orientierten  $n$ -Zellen heiße  $M_b^n$ . Setzt man dann in Formel (1)  $k = 0$  und  $B^{n-k} = M_b^n$ , so folgt nach S. 243: Die Schnittzahl einer Kette  $A^0$  mit der orientierenden Kette  $M_b^n$  der Mannigfaltigkeit ist gleich dem algebraischen Werte von  $A^0$ .

Offenbar gelten die Rechenregeln

$$\mathcal{S}(A_1^k + A_2^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(A_1^k, B^{n-k}) + \mathcal{S}(A_2^k, B^{n-k}) \quad (2)$$

und

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)} \mathcal{S}(B^{n-k}, A^k) \quad (3)$$

nach Formel (2) von S. 243.

Auch die Formel (5) von § 69:

$$\mathcal{S}(a_z^k, b_z^{n-k}) = (-1)^k \mathcal{S}(a_z^{k-1}, b_z^{n-k+1})$$

läßt sich von zwei dualen Zellen auf beliebige Ketten der Dimension  $k$  und  $n-k$  übertragen. Bedenkt man nämlich, daß alle Randzellen von  $b_z^{n-k+1}$  bis auf  $b_z^{n-k}$  punktfremd zu  $a_z^k$  sind, so kann man auf der linken Seite dieser Formel  $b_z^{n-k}$  durch  $\mathcal{R}\mathcal{D} b_z^{n-k+1}$  ersetzen und entsprechend auf der rechten Seite  $\mathcal{R}\mathcal{D} a_z^k$  für  $a_z^{k-1}$  schreiben. So erhält man

$$\mathcal{S}(a_z^k, \mathcal{R}\mathcal{D} b_z^{n-k+1}) = (-1)^k \mathcal{S}(\mathcal{R}\mathcal{D} a_z^k, b_z^{n-k+1}). \quad (4)$$

Diese Formel ist zunächst unter der Voraussetzung bewiesen worden, daß die zu  $b_z^{n-k+1}$  duale Zelle  $a_z^{k-1}$  inzident mit  $a_z^k$  ist. Sie gilt aber auch, wenn dies nicht der Fall ist. Denn alsdann sind beide Seiten 0. Die linke Seite ist nämlich nur dann  $\neq 0$ , wenn im Rande von  $b_z^{n-k+1}$  die zu  $a_z^k$  duale Zelle  $b_z^{n-k}$  auftritt, wenn also  $b_z^{n-k+1}$  und  $b_z^{n-k}$  und damit auch die dualen Zellen  $a_z^{k-1}$  und  $a_z^k$  inzident sind. Ebenso ist die rechte Seite nur dann  $\neq 0$ , wenn im Rande von  $a_z^k$  die zu  $b_z^{n-k+1}$  duale Zelle  $a_z^{k-1}$  auftritt. Die Formel (4) gilt daher für zwei beliebige Zellen  $a_z^k$  und  $b_z^{n-k+1}$ , und damit gilt für zwei beliebige Zellenketten  $A^k$  und  $B^{n-k+1}$  auf den dualen Zellteilungen  $\mathfrak{M}_a^n$  und  $\mathfrak{M}_b^n$  nach (2) die Formel

$$\mathcal{S}(A^k, \mathcal{R}\mathcal{D} B^{n-k+1}) = (-1)^k \mathcal{S}(\mathcal{R}\mathcal{D} A^k, B^{n-k+1}). \quad (5)$$

Von dieser wichtigen Formel machen wir sogleich eine Anwendung. Wenn insbesondere  $A^k$  geschlossen, also  $\mathcal{R}\mathcal{D} A^k = 0$  ist, so ist die rechte Seite von (5) gleich 0, und auf der linken Seite ist  $\mathcal{R}\mathcal{D} B^{n-k+1}$  eine beliebige nullhomologe  $(n-k)$ -Kette. Man hat also den

**Satz I:** Eine nullhomologe Zellenkette der Dimension  $n-k$ ,  $B^{n-k}$ , hat mit jeder geschlossenen  $k$ -Kette  $A^k$  der dualen Zellteilung die Schnittzahl 0.

Der Satz gilt sogar, wenn  $B^{n-k} \approx 0$  (nur divisions-nullhomolog) ist. Dann ist

$$c B^{n-k} \sim 0 \quad (c \neq 0),$$

also

$$\delta(A^k, cB^{n-k}) = c\delta(A^k, B^{n-k}).$$

Die linke Seite ist = 0 nach Satz I, also auch die rechte; d. h. wegen  $c \neq 0$ , es ist  $\delta(A^k, B^{n-k}) = 0$ . Daraus folgt weiter der

Satz II: Sind  $A^k \approx A^k$  und  $B^{n-k} \approx B^{n-k}$  geschlossene Ketten auf dualen Teilungen, so ist

$$\delta(A^k, B^{n-k}) = \delta'(A^k, B^{n-k}),$$

d. h. die Schnittzahl zweier geschlossener Ketten ändert sich nicht, wenn man jede Kette durch eine divisionshomologe derselben Teilung ersetzt.

Als Beispiel betrachten wir eine Zellteilung  $\mathfrak{M}_a^n$  der Ringfläche in 4 Quadrate, nämlich die stark ausgezogenen Quadrate der Fig. 121, in der Gegenseiten des großen Quadrates zu identifizieren sind. Die duale Zellteilung  $\mathfrak{M}_b^n$  besteht dann ebenfalls aus 4 Quadranten, die in der Figur gestrichelt sind. Die gemeinsame Normalunterteilung  $\mathfrak{M}^n$  besteht aus  $4 \times 8$  Dreiecken, die wir uns kohärent so orientiert denken, wie der Kreispeil des einen Dreiecks der Figur es angibt. Die beiden geschlossenen 1-Ketten der dualen Teilungen, deren Schnittzahl wir untersuchen wollen, seien die aus je zwei 1-Zellen bestehenden Zellenketten  $A^1$  und  $B^1$  (doppelt ausgezogen). Da  $n=2$  und  $k=1$  gewählt ist, so ist hier  $k=n-k=1$ . Die Schnittzahl wird nach der Regel bestimmt: Auf  $A^1$  nehmen wir das 1-Simplex\*, auf  $B^1$  das 1-Simplex + ( $P^1 P^2$ ).

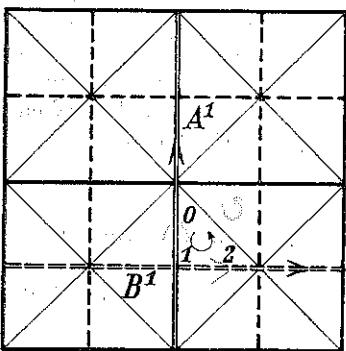


Fig. 121.

$$\delta(A^1, B^1) = (-1)(+1)(+1) = -1.$$

Für die Definition der Schnittzahlen ist die Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit eine wesentliche Voraussetzung. Will man die Theorie auf nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten ausdehnen, so hat man sich auf Ketten mod 2 zu beschränken. Für zwei auf dualen Teilungen gelegenen Zellenketten mod 2,  $\mathfrak{A}^k$  und  $\mathfrak{B}^{n-k}$ , ist die Schnittzahl mod 2 definiert als eine Restklasse der ganzen Zahlen mod 2, und zwar ist

$$\delta(\mathfrak{A}^k, \mathfrak{B}^{n-k}) = \check{0} \text{ oder } \check{1},$$

je nachdem die Anzahl der gemeinsamen Punkte von  $\mathfrak{A}^k$  und  $\mathfrak{B}^{n-k}$  gerade oder ungerade ist. Die Formeln (1) bis (5) gelten auch für Ketten mod 2, wenn man nur die darin vorkommenden ganzen Zahlen durch ihre Restklassen mod 2 ersetzt. Von den Vorzeichen in den Formeln kann man alsdann natürlich absehen.

\* In der Figur sind an die Punkte nur die Indizes geschrieben.

### § 71. Duale Basen.

Es seien zwei Reihen von „Variablen“ oder „Unbestimmten“

$$x_1, x_2, \dots, x_m \text{ und } y_1, y_2, \dots, y_m$$

gegeben, die durch die beiden ganzzahligen unimodularen linearen Transformationen

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} \bar{x}_1 + \alpha_{12} \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_{1m} \bar{x}_m \\ &\vdots \\ x_m &= \alpha_{m1} \bar{x}_1 + \alpha_{m2} \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_{mm} \bar{x}_m \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \bar{y}_1 + A_{12} \bar{y}_2 + \cdots + A_{1m} \bar{y}_m \\ &\vdots \\ y_m &= A_{m1} \bar{y}_1 + A_{m2} \bar{y}_2 + \cdots + A_{mm} \bar{y}_m \end{aligned} \quad (A)$$

in neue quergestrichene Variablenreihen übergeführt werden. Dann heißen die beiden Transformationen und ebenso die Variablenreihen *kontragredient*, wenn von den Transformationsmatrizen  $\alpha$  und  $A$  die eine die transponierte reziproke der anderen ist:

$$A = \alpha^{-1}.$$

Es ist also  $A_{ik}$  das algebraische Komplement (oder die mit dem Vorzeichen der Schachbrettregel versehene adjungierte Unterdeterminante) von  $\alpha_{ik}$ , dividiert durch die Determinante  $|\alpha| = \pm 1$ . Die Beziehung der Kontragredienz ist offenbar wechselseitig.

Die Auflösungen der Gleichungen (A) lauten wegen  $A^{-1} = \check{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \cdots + \alpha_{m1} y_m \\ &\vdots \\ \bar{y}_m &= \alpha_{1m} y_1 + \alpha_{2m} y_2 + \cdots + \alpha_{mm} y_m \end{aligned} \quad (A^{-1})$$

Daher ist

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i = \sum_i \left( \sum_k \alpha_{ik} \bar{x}_k \right) y_i = \sum_k \bar{x}_k \left( \sum_i \alpha_{ik} y_i \right) = \sum_{k=1}^m \bar{x}_k \bar{y}_k.$$

Zwei kontragrediente Transformationen lassen daher die „Einheitsbilinearform“  $\sum x_i y_i$  invariant, eine Eigenschaft, durch die man die Kontragredienz auch hätte definieren können.

Von *kogredienten* Transformationen der beiden Variablenreihen reden wir dagegen, wenn sie sich gleich transformieren.

Beispiele von ko- und kontragredienten Transformationen sind uns bereits S. 74 begegnet.

Sei nun  $\mathfrak{M}^n$  wieder eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit den dualen Zellteilungen  $\mathfrak{M}_a^n$  und  $\mathfrak{M}_b^n$ . Die dualen Zellen  $a_x^k$  und  $b_x^{n-k}$  seien so orientiert, daß  $\delta(a_x^k, b_x^{n-k}) = +1$  ist. Übt man auf die Zellen

$$a_1^k, a_2^k, \dots, a_{\alpha^k}^k$$

die unimodulare Transformation ( $\alpha$ ) aus, so geht man dadurch zu einer neuen Basis

$$\bar{a}_1^k, \bar{a}_2^k, \dots, \bar{a}_{\alpha^k}^k$$

des Gitters aller  $k$ -Zellenketten von  $\mathfrak{M}_\alpha^n$  über. Die Koeffizienten  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\alpha^k}$  in einer Kette  $A^k = \xi_1 a_1^k + \xi_2 a_2^k + \dots + \xi_{\alpha^k} a_{\alpha^k}^k$  erfahren dabei die kontragredienten Transformationen ( $A$ ), denn es ist

$$A^k = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \xi_z a_z^k = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \bar{\xi}_z \bar{a}_z^k.$$

Die dualen Zellen

$$b_1^{n-k}, b_2^{n-k}, \dots, b_{\alpha^k}^{n-k}$$

sollen nun kontragredient zu den  $a_z^k$  transformiert werden, also gemäß der Gleichungen ( $A$ ). Die Koeffizienten  $\eta_z$  in der Kette

$$B^{n-k} = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \eta_z b_z^{n-k} = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \eta_z \bar{b}_z^{n-k}$$

transformieren sich dann ebenfalls kontragredient zu den  $b_z^{n-k}$  und damit auch kontragredient zu den  $\xi_z$ . Daher bleibt die Bilinearform  $\sum \xi_z \eta_z$  invariant:

$$\sum_{z=1}^{\alpha^k} \xi_z \eta_z = \sum_{z=1}^{\alpha^k} \bar{\xi}_z \bar{\eta}_z.$$

Da auf der linken Seite die Schnittzahl  $\delta(A^k, B^{n-k})$  steht, so ist damit gezeigt, daß auch bei Benutzung der neuen Basen  $\bar{a}_z^k$  und  $\bar{b}_z^{n-k}$  die Schnittzahl zweier beliebiger Ketten  $\sum \xi_z \bar{a}_z^k$  und  $\sum \eta_z \bar{b}_z^{n-k}$  durch die Einheitsbilinearform gegeben ist.

Zwei Zellenbasen  $\bar{a}_z^k$  und  $\bar{b}_z^{n-k}$  mit dieser Eigenschaft heißen zueinander *dual*. Es gibt also zu jeder beliebigen Zellenbasis  $\bar{a}_1^k, \bar{a}_2^k, \dots, \bar{a}_{\alpha^k}^k$  eine und offenbar nur eine duale Basis  $\bar{b}_1^{n-k}, \bar{b}_2^{n-k}, \dots, \bar{b}_{\alpha^k}^{n-k}$ , und man erhält jedes Paar dualer Zellenbasen aus einem speziellen Paare durch kontragrediente unimodulare Transformationen.

Nur ein anderer Ausdruck für die Charakterisierung der dualen Basen ist es, wenn man verlangt, daß die Matrix der Schnittzahlen dualer Basen

$$\delta(\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k}) = \delta_{\mu\nu}$$

die Einheitsmatrix von  $\alpha^k$  Reihen ist.

Wir untersuchen nun, wie sich bei der kontragredienten Transformation dualer Basen die Berandungsrelationen (11)

$$\mathcal{R}\partial a_z^k = \sum_{i=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{iz}^{k-1} a_i^{k-1} \quad (1)$$

$$\mathcal{R}\partial b_i^{n-k+1} = (-1)^k \sum_{z=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{iz}^{k-1} b_z^{n-k} \quad (2)$$

von § 69 ändern. Nehmen wir eine ganzzahlige unimodulare Transformation der Zellen  $a_z^k$  vor, so transformieren sich die  $\varepsilon_{iz}^{k-1}$  in Gleichung (1) bei festem Index  $i$  kogredient zu den  $a_i^k$ , die  $\varepsilon_{iz}^{k-1}$  in (2) dagegen kontragredient zu den  $b_z^{n-k}$ . Da aber die  $a_z^k$  und  $b_z^{n-k}$  kontragrediente Transformationen erfahren sollten, so transformieren sich auch die Koeffizienten  $\varepsilon_{iz}^{k-1}$  in (2) kogredient zu den  $a_i^k$ , also ebenso wie in Gleichung (1). Ebenso transformieren sich die  $\varepsilon_{iz}^{k-1}$  bei festem Index  $z$  in beiden Gleichungen in gleicher Weise kogredient zu den  $b_i^{n-k+1}$  (also kontragredient zu den  $a_i^{k-1}$ ), wenn man vermöge zweier kontragredienter Transformationen die dualen Basen  $a_i^{k-1}$  und  $b_i^{n-k+1}$  durch neue duale Basen ersetzt. Nach den beiden Transformationen stimmen also die Koeffizienten  $\varepsilon_{iz}^{k-1}$  in den beiden transformierten Berandungsrelationen

$$\mathcal{R}\partial \bar{a}_z^k = \sum_{i=1}^{\alpha^{k-1}} \bar{\varepsilon}_{iz}^{k-1} \bar{a}_i^{k-1} \quad (1)$$

$$\mathcal{R}\partial \bar{b}_i^{n-k+1} = (-1)^k \sum_{z=1}^{\alpha^k} \bar{\varepsilon}_{iz}^{k-1} \bar{b}_z^{n-k} \quad (2)$$

immer noch überein.

Nach S. 79 kann man durch ganzzahlige unimodulare Transformationen der 0- bis  $n$ -dimensionalen  $a$ -Basen die Zelleninzidenzmatrizen

$$E^0, E^1, \dots, E^{n-1}$$

der Zellteilung  $\mathfrak{M}_\alpha^n$  simultan auf die Normalform bringen. Wir wählen die Bezeichnung so, daß die Matrizen  $(\bar{\varepsilon}_{iz}^{k-1})$  bereits die Normalform darstellen.

Die Basisketten  $\bar{a}_z^k$  zerfallen dann in drei Arten

$$\begin{aligned} {}^1 A_\lambda^k & (\lambda = 1, 2, \dots, r^k = \gamma^{n-k-1}) \\ {}^2 A_\mu^k & (\mu = 1, 2, \dots, p^k = p^{n-k}) \\ {}^3 A_\nu^k & (\nu = 1, 2, \dots, \gamma^{k-1} = \gamma^{n-k}). \end{aligned} \quad (3)$$

In § 22 hatten wir diese drei Arten mit  $\bar{A}_\lambda^k, \bar{B}_\mu^k, \bar{C}_\nu^k$  bezeichnet. Die Zellenketten  ${}^1 A_\lambda^k$  sind divisions-nullhomolog, die  ${}^2 A_\mu^k$  bilden eine Bettische Basis, die  ${}^3 A_\nu^k$  sind nichtgeschlossene Ketten, und die Berandungsrelationen (1) lauten jetzt

$$\mathcal{R}\partial {}^1 A_\lambda^k = 0, \quad \mathcal{R}\partial {}^2 A_\mu^k = 0, \quad \mathcal{R}\partial {}^3 A_\nu^k = c_\nu^{k-1} {}^1 A_\nu^{k-1}. \quad (4)$$

Die Ketten der zu (3) dualen Basis werden der Reihe nach mit

$$\begin{aligned} {}^3 B_\lambda^{n-k} & (\lambda = 1, 2, \dots, \gamma^{n-k-1} = \gamma^k) \\ {}^2 B_\mu^{n-k} & (\mu = 1, 2, \dots, p^{n-k} = p^k) \\ {}^1 B_\nu^{n-k} & (\nu = 1, 2, \dots, \gamma^{k-1} = \gamma^{n-k}) \end{aligned} \quad (5)$$

bezeichnet, und die Berandungsrelationen (2) laufen wegen der nachgewiesenen Übereinstimmung der Koeffizienten  $\bar{\varepsilon}$  in (1) und (2) (4)

$$\mathcal{R}\partial {}^3 B_\lambda^{n-k+1} = (-1)^k c_\lambda^{k-1} {}^1 B_\lambda^{n-k}, \quad \mathcal{R}\partial {}^2 B_\mu^{n-k+1} = 0, \quad \mathcal{R}\partial {}^1 B_\nu^{n-k+1} = 0. \quad (6)$$

Hieraus folgt, daß bei Benutzung der  $\bar{b}$ -Basis die Inzidenzmatrizen sich ebenfalls in der simultanen Normalform befinden und daß die Zellketten  ${}^3B_{\tau}^{n-k}$  nichtgeschlossene Ketten sind, die  ${}^2B_{\mu}^{n-k}$  eine Bettische Basis bilden und die  ${}^1B_{\nu}^{n-k}$  divisions-nullhomolog sind.

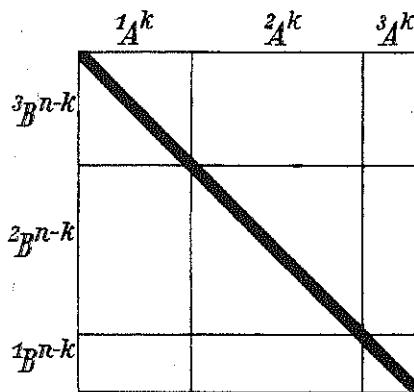


Fig. 122.

Da die Matrix der Schnittzahlen dualer Basen (Fig. 122) eine Einheitsmatrix ist, so ist auch die mittlere Teilmatrix der Schnittzahlen

$$\mathcal{S}({}^2A_{\sigma}^k, {}^2B_{\tau}^{n-k}) = \delta_{\sigma\tau} \quad (7)$$

$(\sigma, \tau = 1, 2, \dots, p^k)$

eine Einheitsmatrix.

Versteht man unter zwei *dualen Bettischen Basen*  ${}^2A_{\mu}^k$  und  ${}^2B_{\nu}^{n-k}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, p^k$ ) solche Bettischen Basen auf dualen Zellteilungen, deren Schnittmatrix (7) die Einheitsmatrix ist, so ist hiermit die Existenz dualer Bettischer Basen bewiesen.

Von hier ist es nur ein Schritt zu dem weitergehenden Ergebnis:

**Satz I:** Zu jeder vorgegebenen  $k$ -dimensionalen Bettischen Basis gibt es eine bis auf divisions-nullhomologe Ketten eindeutig bestimmte duale  $(n-k)$ -dimensionale Bettische Basis.

Denn von der speziellen Bettischen Basis  ${}^2A_{\mu}^k$  gelangt man zur allgemeinsten durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation und durch Addition divisions-nullhomologer Ketten. Durch die Transformation der  ${}^2A_{\mu}^k$  ist aber diejenige der speziellen dualen Bettischen Basis  ${}^2B_{\nu}^{n-k}$  eindeutig, nämlich als die kontragrediente bestimmt, wenn man verlangt, daß die Schnittmatrix nach der Transformation wieder die Einheitsmatrix (7) sein soll. Da sich durch Addition divisions-nullhomologer Ketten die Schnittzahlen nicht ändern, so kann man sowohl zur neuen  $k$ -dimensionalen als zur neuen  $(n-k)$ -dimensionalen Bettischen Basis noch divisions-nullhomologe Ketten addieren.

Die Existenz dualer Bettischer Basen erschließt den tieferen Grund für die Poincarésche Dualitätsbeziehung  $p^k = p^{n-k}$  zwischen den Bettischen Zahlen. Ebenso wird sich die im Dualitätssatz (§ 69) ausgesprochene Beziehung zwischen den Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$  und  $n-k-1$  topologisch fundieren lassen.

Die ersten  $q^k$  unter den Ketten  ${}^1A_{\nu}^k$  von (3), also die Ketten

$${}^1A_1^k, {}^1A_2^k, \dots, {}^1A_{q^k}^k$$

bilden eine Torsionsbasis der Dimensionen  $k$  (S. 70) und die Ketten

$${}^1B_1^{n-k-1}, {}^1B_2^{n-k-1}, \dots, {}^1B_{q^k}^{n-k-1}$$

eine Torsionsbasis der Dimension  $n-k-1$ . Nun ist die Matrix der Schnittzahlen

$$\mathcal{S}({}^1A_{\sigma}^k, {}^1B_{\tau}^{n-k}) = \delta_{\sigma\tau} \quad (\sigma, \tau = 1, 2, \dots, q^k)$$

als Teilmatrix der Matrix Fig. 122 eine Einheitsmatrix. Daher gilt, wenn man abkürzend  ${}^1A_{\sigma}^k = A_{\sigma}^k$ ,  $(-1)^{k+1} {}^1B_{\tau}^{n-k-1} = B_{\tau}^{n-k-1}$  und  ${}^1B_{\tau}^{n-k} = B_{\tau}^{n-k}$  setzt, der

**Satz II:** Es gibt eine Torsionsbasis

$$A_1^k, A_2^k, \dots, A_{q^k}^k$$

der Dimension  $k$  und eine Torsionsbasis

$$B_1^{n-k-1}, B_2^{n-k-1}, \dots, B_{q^k}^{n-k-1}$$

der Dimension  $n-k-1$  mit der folgenden Eigenschaft: Sind

$$B_1^{n-k}, B_2^{n-k}, \dots, B_{q^k}^{n-k}$$

irgende welche Ketten, für die

$$\mathcal{R}B_1^{n-k} = c_1^k B_1^{n-k-1}, \mathcal{R}B_2^{n-k} = c_2^k B_2^{n-k-1}, \dots, \mathcal{R}B_{q^k}^{n-k} = c_{q^k}^k B_{q^k}^{n-k-1}$$

ist (die  $c_{\tau}^k$  sind die Torsionskoeffizienten der Dimension  $k$ ), so ist die Matrix der Schnittzahlen

$$\mathcal{S}(A_{\sigma}^k, B_{\tau}^{n-k}) = \delta_{\sigma\tau}$$

die  $q^k$ -reihige Einheitsmatrix.<sup>43</sup>

Wir haben den Satz nur für den Fall bewiesen, daß die in  $c_{\tau}^k B_{\tau}^{n-k-1}$  eingespannte  $(n-k)$ -Kette  $B_{\tau}^{n-k}$  die spezielle Kette  ${}^3B_{\tau}^{n-k}$  ist. Er gilt aber für irgendeine eingespannte Kette  $B_{\tau}^{n-k}$ ; denn nach Satz I von § 70 ist

$$\mathcal{S}(A_{\sigma}^k, B_{\tau}^{n-k} - {}^3B_{\tau}^{n-k}) = 0,$$

da  $A_{\sigma}^k$  divisions-nullhomolog und  $B_{\tau}^{n-k} - {}^3B_{\tau}^{n-k}$  eine geschlossene Kette ist; also wird  $\mathcal{S}(A_{\sigma}^k, B_{\tau}^{n-k}) = \mathcal{S}(A_{\sigma}^k, {}^3B_{\tau}^{n-k})$ .

Man kann die Betrachtungen dieses Paragraphen auch für Ketten mod 2 durchführen und erhält entsprechend dem Satz I den

**Satz III:** Zu jeder Zusammenhangsbasis

$$\mathfrak{A}_1^k, \mathfrak{A}_2^k, \dots, \mathfrak{A}_{q^k}^k$$

der Dimension  $k$  gibt es eine duale  $(n-k)$ -dimensionale Zusammenhangsbasis

$$\mathfrak{B}_1^{n-k}, \mathfrak{B}_2^{n-k}, \dots, \mathfrak{B}_{q^k}^{n-k}$$

der Art, daß die Matrix der Schnittzahlen mod 2 die  $q^k$ -reihige Einheitsmatrix wird.

Beispiele zu diesem Paragraphen finden sich in § 75.



## § 72. Zellenmäßige Approximation.

Bisher haben wir nur Zellenketten dualer Zellteilungen zum Schnitt gebracht und für diese die Schnittzahlen untersucht. Unser nächstes Ziel ist es, die Ergebnisse von der Benutzung einer speziellen Zellteilung der Mannigfaltigkeit unabhängig zu machen und die Schnittzahlen für beliebige singuläre Ketten zu definieren. Dies geschieht durch Approximation der singulären Ketten. Die Approximation ist aber nicht wie früher eine simpliziale Approximation, sondern sie geht in dualen Zellteilungen vor sich. Diese zellenmäßige Approximation müssen wir jetzt erklären. Die folgenden Untersuchungen gelten in einem beliebigen Zellenkomplex  $\mathfrak{K}^n$ , von dem wir nicht voraussetzen, daß er eine Mannigfaltigkeit ist.

Der grundlegende Satz ist der folgende Approximationssatz, der die Übertragung des simplizialen Approximationssatzes von Kap. IV auf Zellenkomplexe darstellt.

**Satz I:** Ist  $A^k$  eine singuläre Kette auf einem Zellenkomplex  $\mathfrak{K}^n$  und ist der Rand<sup>(\*)</sup>  $A^{k-1}$  von  $A^k$  eine Zellenkette auf  $\mathfrak{K}^n$ , insbesondere die  $(k-1)$ -Kette 0, so gibt es eine zu  $A^k$  homologe Zellenkette  $\bar{A}^k$ .

**Beweis:** Da der Rand von  $A^k$  eine Zellenkette (für  $k > 0$ ), also erst recht eine simpliziale Kette ist, so gibt es nach dem Approximationssatz von § 28 eine homologe simpliziale Kette  $\bar{A}^k$  (das ist also eine Kette auf der Normalunterteilung  $\hat{\mathfrak{K}}^n$  des Zellenkomplexes  $\mathfrak{K}^n$ ) und zu dieser nach § 67 Satz I eine homologe Zellenkette. Für  $k = 0$  bleibt der Satz richtig, die Begründung vereinfacht sich dadurch, daß man nicht auf den Rand zu achten hat.

**Zusatz:** Ist  $\langle A^k \rangle$  der kleinste Zellenteilkomplex, auf dem  $A^k$  liegt, so kann man annehmen, daß auch  $\bar{A}^k$  auf  $\langle A^k \rangle$  liegt und daß  $A^k \sim \bar{A}^k$  auf  $\langle A^k \rangle$  ist.

Der kleinste Teilkomplex  $\langle A^k \rangle$  ist erklärt als der Durchschnitt aller Zellenteilkomplexe, denen  $A^k$  angehört. Er ist dann und nur dann leer, wenn  $A^k$  die  $k$ -Kette 0 ist.<sup>(\*\*)</sup> Der Zusatz ist eine unmittelbare Folge des Satzes I: Man läßt aus  $\mathfrak{K}^n$  alle Zellen fort, die nicht zu  $\langle A^k \rangle$  gehören, betrachtet also  $A^k$  als Kette des Zellenkomplexes  $\langle A^k \rangle$  und wendet Satz I auf  $\langle A^k \rangle$  statt auf  $\mathfrak{K}^n$  an.

Wir wollen jetzt einen beliebigen „singulären Komplex“  $\mathfrak{C}^m$  in  $\mathfrak{K}^n$  zellenmäßig approximieren. Unter einem singulären Komplex verstehen wir eine Menge von endlich vielen singulären nichtausgearteten Simplexen, wobei mit jedem singulären Simplex alle seine nichtausgearteten Seiten ebenfalls zu dieser Menge gerechnet werden. Die zellenmäßige Ap-

<sup>(\*)</sup> Für  $k = 0$  fällt diese Bedingung natürlich fort.

<sup>(\*\*)</sup> In diesem Falle ist  $\langle A^k \rangle$  kein Teilkomplex im Sinne von S. 47, denn dort hatten wir den leeren Teilkomplex ausgeschlossen.

proximation von  $\mathfrak{C}^m$  geht so vor sich: Zunächst werden alle singulären Simplexe von  $\mathfrak{C}^m$  willkürlich orientiert. Sie mögen dann

$$X_1^0, X_2^0, \dots, X_{\rho^0}^0; \dots; X_1^m, X_2^m, \dots, X_{\rho^m}^m$$

heißen. Jedem  $X_z^k$  wird eine  $k$ -Zellenkette  $\mathcal{A}p X_z^k$ , seine Approximation zugeordnet, sowie eine singuläre  $(k+1)$ -Kette  $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} X_z^k$ , die die Verbindungsstrecke von  $X_z^k$  mit seiner Approximation heißt. Alsdann entspricht jeder singulären Kette

$$U^k = \sum u_z X_z^k$$

eine bestimmte Approximation

$$\mathcal{A}p U^k = \sum u_z \mathcal{A}p X_z^k$$

und eine singuläre Verbindungsstrecke

$$\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} U^k = \sum u_z \mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} X_z^k.$$

Die Ketten  $\mathcal{A}p U^k$  und  $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} U^k$  sollen nun so gewählt sein, daß für jede Kette  $U^k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) die Bedingungen erfüllt sind:

a)  $\mathcal{A}p U^k$  und  $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} U^k$  liegen auf dem kleinsten Zellenteilkomplex, auf dem  $U^k$  liegt.

b) Es ist  $\mathcal{R}\mathcal{D} \mathcal{A}p U^k = \mathcal{A}p \mathcal{R}\mathcal{D} U^k$ .

c) Es ist  $\mathcal{R}\mathcal{D} \mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} U^k = U^k - \mathcal{A}p U^k - \mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} \mathcal{R}\mathcal{D} U^k$ .

Wenn jedem singulären Simplexe in dieser Weise eine Zellenkette zugeordnet ist, dann sagen wir, daß der singuläre Komplex  $\mathfrak{C}^m$  in  $\mathfrak{K}^n$  zellenmäßig approximiert ist.

Offenbar genügt es, wenn man die Forderungen a), b), c) an alle singulären Simplexe  $U^k = X_z^k$  stellt. Dann sind sie von selbst für jede beliebige Kette  $U^k$  erfüllt.

Wir behaupten nun

**Satz II:** Jeder beliebige singuläre Komplex  $\mathfrak{C}^m$  läßt sich zellenmäßig approximieren.

Wir zeigen noch mehr: Ist ein singulärer Teilkomplex  $c$  von  $\mathfrak{C}^m$ <sup>(\*\*)</sup> schon approximiert, so läßt sich die Approximation zu einer Approximation von  $\mathfrak{C}^m$  vervollständigen.

**Beweis:** Aus der Menge aller Simplexe von  $\mathfrak{C}^m$ , die nicht zu  $c$  gehören, greifen wir ein Simplex  $X^k$  möglichst kleiner Dimension heraus. Dies ist entweder ein 0-Simplex, oder es gehören im Falle  $k > 0$  alle nicht ausgearteten Seiten von  $X^k$  zu  $c$ . Wir wollen dann für  $X^k$  die Approximation und die Verbindungsketten konstruieren.

<sup>(\*)</sup> Für  $k = 0$  fällt diese Bedingung fort, und in c) ist  $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{B} \mathcal{R}\mathcal{D} U^k = 0$  zu setzen. Die Struktur der Formel c) ist genau die der Verbindungsformeln von S. 104.

<sup>(\*\*)</sup> Das ist ein singulärer Komplex, dessen Simplexe zugleich Simplexe von  $\mathfrak{C}^m$  sind.

Sei zunächst  $k > 0$ . Dann sind die Approximationen und die Verbindungsketten für die nichtausgearteten Seiten von  $X^k$ , die ja zu  $c$  gehören, schon alle erklärt. Insbesondere ist

$$X^k = \mathcal{V}erb \mathcal{R}d X^k \quad (1)$$

eine wohl bestimmte singuläre Kette. Ihr Rand ist

$$\mathcal{R}d X^k = \mathcal{R}d \mathcal{V}erb \mathcal{R}d X^k,$$

also, wenn man  $\mathcal{R}d X^k$  vorübergehend mit  $U^{k-1}$  bezeichnet, um auf das zweite Glied Formel c) für die Dimension  $k - 1$  anzuwenden,

$$= \mathcal{R}d X^k - (\mathcal{R}d X^k - \mathcal{O}_p \mathcal{R}d X^k - \mathcal{V}erb \mathcal{R}d \mathcal{R}d X^k) = \mathcal{O}_p \mathcal{R}d X^k. \quad (2)$$

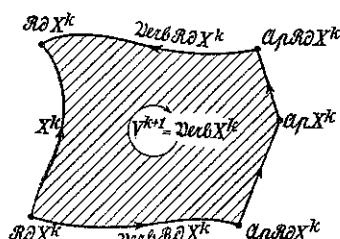


Fig. 123.

$$\mathcal{R}d \mathcal{O}_p X^k = \mathcal{O}_p \mathcal{R}d X^k. \quad (3)$$

Ist weiter  $\langle X^k \rangle$  der kleinste Zellenteilkomplex von  $\mathfrak{K}^n$ , auf dem  $X^k$  liegt, so gehört auch  $\mathcal{R}d X^k$  zu  $\langle X^k \rangle$  und damit wegen a) auch  $\mathcal{V}erb \mathcal{R}d X^k$ , also die Kette (1), und nach dem Zusatz von Satz I auch ihre Approximation  $\bar{A}^k = \mathcal{O}_p X^k$ . Ferner ist nach demselben Satze  $A^k \sim \bar{A}^k$  auf  $\langle X^k \rangle$ , d. h. es gibt auf  $\langle X^k \rangle$  eine singuläre Verbindungskette  $V^{k+1}$  mit dem Rand  $A^k - \bar{A}^k$ . Wir setzen

$$V^{k+1} = \mathcal{V}erb X^k$$

und erhalten

$$\mathcal{R}d \mathcal{V}erb X^k = \mathcal{R}d V^{k+1} = A^k - \bar{A}^k = (X^k - \mathcal{V}erb \mathcal{R}d X^k) - \mathcal{O}_p X^k.$$

Damit sind die Ketten  $\mathcal{O}_p X^k$  und  $\mathcal{V}erb X^k$  konstruiert und die Bedingungen a), b), c) für  $U^k = X^k$  bewiesen. Da a), b), c) für alle Simplexe von  $c$  nach Voraussetzung gelten, so gelten sie überhaupt für alle singulären Ketten, die sich aus den Simplexen von  $c$  und dem neu hinzugenommenen Simplex  $X^k$  bilden lassen. So wird ein Simplex nach dem andern hinzugenommen, bis man schließlich ganz  $\mathfrak{C}^n$  approximiert hat.

Es bleibt noch übrig, den besonders einfachen Fall zu behandeln, daß das hinzugenommene Simplex nulldimensional ist. Der kleinste Zellenteilkomplex  $\langle X^0 \rangle$  ist dann die Zelle kleinster Dimension, auf der  $X^0$  liegt. Es gibt nach dem Zusatz von Satz I eine zellenmäßige Approximation  $\mathcal{O}_p X^0 \sim X^0$  auf  $\langle X^0 \rangle$  und damit eine singuläre Verbindungskette  $\mathcal{V}erb X^0$  mit dem Rande  $X^0 - \mathcal{O}_p X^0$ . Damit ist alles bewiesen.

Nunmehr sei  $A^k$  eine beliebige singuläre  $k$ -Kette. Ihre  $k$ -Simplexe zusammen mit allen ihren nichtausgearteten Seiten der Dimension  $k - 1$  bis 0 bilden einen singulären Komplex  $\mathfrak{U}^k$ .  $A^k$  wird dann zellenmäßig approximiert, indem  $\mathfrak{U}^k$  approximiert wird.

Sind

$$A_1^{k_1}, A_2^{k_2}, \dots, A_r^{k_r} \quad (4)$$

singuläre Ketten beliebiger Dimensionen, so bilden ihre Simplexe und alle ihre nichtausgearteten Seiten ebenfalls einen singulären Komplex  $\mathfrak{G}$ . Wir sagen, die Ketten (4) werden *simultan approximiert*, indem  $\mathfrak{G}$  approximiert wird. Jede zwischen den Ketten (4) und ihren Rändern bestehende lineare Relation gilt dann auch für ihre Approximationen, d. h. ist

$$\Phi(A_1^{k_1}, A_2^{k_2}, \dots, A_r^{k_r}, \mathcal{R}d A_1^{k_1}, \mathcal{R}d A_2^{k_2}, \dots, \mathcal{R}d A_r^{k_r}) = 0$$

eine Beziehung mit ganzen Koeffizienten, so gilt auch

$$\Phi(\mathcal{O}_p A_1^{k_1}, \mathcal{O}_p A_2^{k_2}, \dots, \mathcal{O}_p A_r^{k_r}, \mathcal{R}d \mathcal{O}_p A_1^{k_1}, \mathcal{R}d \mathcal{O}_p A_2^{k_2}, \dots,$$

$$\mathcal{R}d \mathcal{O}_p A_r^{k_r}) = 0.$$

Denn es ist  $\mathcal{O}_p(A + B) = \mathcal{O}_p A + \mathcal{O}_p B$  und  $\mathcal{O}_p \mathcal{R}d = \mathcal{R}d \mathcal{O}_p$ . Würde man die Ketten (4) nicht simultan, sondern jede für sich unabhängig von den anderen approximieren, so würden natürlich die Relationen im allgemeinen nicht erfüllt bleiben. Wenn z. B.  $A_1^{k_1}$  und  $A_s^{k_s}$  denselben Rand haben, so braucht das bei getrennter Approximation für die Ketten  $\mathcal{O}_p A_1^{k_1}$  und  $\mathcal{O}_p A_s^{k_s}$  keineswegs zu gelten. — Ist

$$A_1^{k_1}, A_2^{k_2}, \dots, A_s^{k_s} \quad (5)$$

ein Teilsystem von (4) und ist (5) schon simultan approximiert, so kann man diese Approximation zu einer simultanen Approximation des ganzen Systems (4) vervollständigen, denn der zu den Ketten (5) gehörige singuläre Komplex ist ein Teilkomplex von  $\mathfrak{G}$ .

Die Betrachtungen lassen sich sinngemäß auf Ketten mod 2 übertragen.

### § 73. Schnitzzahlen singulärer Ketten.

Wir betrachten eine orientierbare Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$ , die durch eine orientierende Kette  $O^n$  (S. 129) fest orientiert ist. Die  $n$ -Simplexe einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{M}^n$  lassen sich dann genau auf eine Weise so kohärent orientieren, daß die entstehende  $n$ -Kette  $\sim O^n$  wird. Unser Ziel ist es, die Schnitzzahl  $\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$  zweier beliebiger singulärer Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  zu definieren. Eine Einschränkung müssen wir dabei freilich machen:

(E) Der Rand  $A^{k-1}$  von  $A^k$  sei punktfremd zu  $B^{n-k}$  und der Rand  $B^{n-k-1}$  von  $B^{n-k}$  punktfremd zu  $A^k$ .

Für zwei Zellketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  auf dualen Zellteilungen war diese Bedingung bisher von selbst erfüllt, weil zwei Zellen der Dimension  $k$  und

$n - k$  auf dualen Teilungen entweder punktfremd sind oder den Mittelpunkt gemein haben. Für singuläre Ketten bedürfen wir der Einschränkung (E), weil die Definition von zellenmäßiger Approximation Gebrauch macht und man dadurch zwei singuläre 1-Ketten  $A^k$  und  $B^k$ , die wie die der Fig. 124 gegen die Bedingung (E) verstößen, nach Belieben in zwei einander schneidende oder zwei punktfremde Ketten approximieren kann, wie fein auch die Zellteilung der einbettenden Mannigfaltigkeit beschaffen sei.

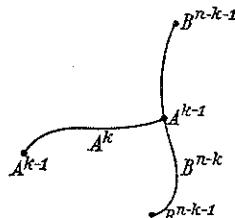


Fig. 124.

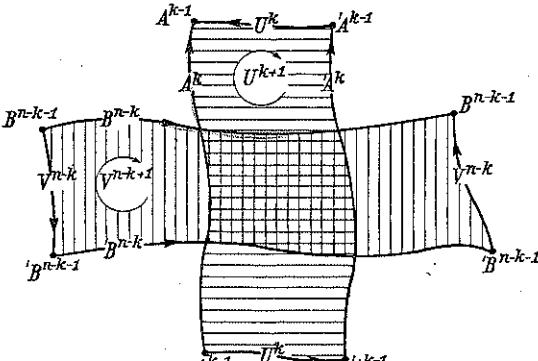


Fig. 125.

Neben den vorgelegten singulären Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  betrachten wir jetzt zwei weitere singuläre Ketten  $'A^k$  und  $'B^{n-k}$ , die ebenfalls die Bedingung (E) erfüllen (Fig. 125). Ihre Ränder bezeichnen wir mit

$$\partial A^k = A^{k-1}, \quad \partial 'A^k = 'A^{k-1} \quad (1a)$$

$$\partial B^{n-k} = B^{n-k-1}, \quad \partial 'B^{n-k} = 'B^{n-k-1}. \quad (1b)$$

Weiter soll es singuläre „Verbindungsketten“  $U^k, U^{k+1}, V^{n-k}, V^{n-k+1}$  geben, die die folgenden Verbindungsformeln befriedigen\*):

$$\begin{aligned} \partial U^k &= A^{k-1} - 'A^{k-1} \\ \partial U^{k+1} &= A^k - 'A^k - U^k \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \partial V^{n-k} &= B^{n-k-1} - 'B^{n-k-1} \\ \partial V^{n-k+1} &= B^{n-k} - 'B^{n-k} - V^{n-k} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2b)$$

Endlich sollen nicht nur die Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k-1}$ , sondern jede der Ketten

$$A^k, \quad 'A^k, \quad U^{k+1} \quad (3a)$$

punktfremd zu jeder der Ketten

$$B^{n-k-1}, \quad 'B^{n-k-1}, \quad V^{n-k} \quad (4b)$$

sein und ebenso die Ketten

$$B^{n-k}, \quad 'B^{n-k}, \quad V^{n-k+1} \quad (3b)$$

\*) In der Fig. 125 besteht  $A^{k-1}$  (und ebenso  $'A^{k-1}, B^{n-k-1}, 'B^{n-k-1}$ ) aus zwei mit entgegengesetzten Orientierungen (Vorzeichen) versehenen Punkten.

punktfremd zu jeder der Ketten

$$A^{k-1}, \quad 'A^{k-1}, \quad U^k. \quad (4a)$$

Wenn es solche Verbindungsketten gibt, so mögen die beiden Paare  $A^k, B^{n-k}$  und  $'A^k, 'B^{n-k}$  miteinander verbunden heißen. Wenn man z. B. auf die Mannigfaltigkeit  $M^n$  eine genügend kleine Deformation ausübt, die die Ketten  $A^k, B^{n-k}$  in die Ketten  $'A^k, 'B^{n-k}$  überführt, so sind dies zwei verbundene Paare, denn bei der Deformation überstreichen  $A^k, A^{k-1}, B^{n-k}, B^{n-k-1}$  gewisse Verbindungsketten  $U^{k+1}, U^k, V^{n-k+1}, V^{n-k}$ , für die gerade die Formeln (2a) und (2b) gelten (vgl. S. 115), und wenn die Deformation klein genug ist, so sind die Ketten (3a) fremd zu (4a) und die Ketten (3b) fremd zu (4b).

Auch bei Approximation der Ketten  $A^k, B^{n-k}$  in genügend feinen dualen Zellteilungen  $M_a^n$  und  $M_b^n$  erhält man ein mit ihnen verbundenes Paar. Es seien nämlich  $\langle A^k \rangle$  und  $\langle A^{k-1} \rangle$  die kleinsten Zellenteilkomplexe von  $M_a^n$ , denen  $A^k$  und  $A^{k-1}$  angehören, und ebenso  $\langle B^{n-k} \rangle$  und  $\langle B^{n-k-1} \rangle$  die kleinsten Zellenteilkomplexe von  $M_b^n$ , auf denen  $B^{n-k}$  und  $B^{n-k-1}$  liegen. Sind dann die Zellen von  $M_a^n$  und  $M_b^n$  so klein, daß  $\langle A^k \rangle$  fremd zu  $\langle B^{n-k-1} \rangle$  und  $\langle B^{n-k} \rangle$  fremd zu  $\langle A^{k-1} \rangle$  ist, so liegen die zellenmäßigen Approximationen von  $A^k, A^{k-1}, B^{n-k}, B^{n-k-1}$  und die dazu gehörigen singulären Verbindungsketten ebenfalls auf diesen kleinsten Teilkomplexen und erfüllen die Punktfremdheitsbedingungen, die wir von verbundenen Paaren fordern. Daß man die Zellteilungen  $M_a^n$  und  $M_b^n$  immer so fein wählen kann, sieht man so ein: Man denke sich  $M^n$  in einem Zahlenraum liegen, in dem die Entfernung zweier Punkte von  $M^n$  (geradlinig) gemessen wird. Die Punkte von  $A^k$  und die von  $B^{n-k-1}$  sind zwei abgeschlossene Mengen des Zahlenraumes und haben eine positive Entfernung  $\delta'$ . Ebenso sei  $\delta'' > 0$  die Entfernung von  $A^{k-1}$  und  $B^{n-k}$ . Ist dann  $\delta$  die kleinere der beiden Zahlen  $\delta'$  und  $\delta''$ , so braucht man nur die Zellen von  $M_a^n$  und  $M_b^n$  kleiner als  $\frac{\delta}{2}$  zu machen, um sicher zu sein, daß  $\langle A^k \rangle$  punktfremd zu  $\langle B^{n-k-1} \rangle$  und  $\langle A^{k-1} \rangle$  punktfremd zu  $\langle B^{n-k} \rangle$  ist. Daß es Zellteilungen mit so kleinen Zellen gibt, folgt daraus, daß sich  $M^n$  beliebig fein simplizial zerlegen läßt und jede (normalunterteilte) simpliziale Zerlegung eine Zellteilung ist.

Nunmehr können wir die Schnitzzahl für zwei singuläre Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$ , die die Bedingung (E) erfüllen, folgendermaßen definieren: Man ersetzt  $A^k, B^{n-k}$  durch zwei auf dualen Zellteilungen  $M_a^n$  und  $M_b^n$  gelegene Zellketten  $'A^k, 'B^{n-k}$ , so daß  $'A^k, 'B^{n-k}$  ein mit  $A^k, B^{n-k}$  verbundenes Paar bilden, und erklärt als Schnitzzahl von  $A^k$  und  $B^{n-k}$  die Schnitzzahl

$$\mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k}),$$

wie sie in § 70 definiert wurde.

### § 74. Invarianz der Schnittzahlen.

Wir müssen nun zeigen, daß die Definition der Schnittzahl unabhängig von der Auswahl der Zellteilungen  $\mathfrak{M}_a$  und  $\mathfrak{M}_b$ , und von der Auswahl des mit  $A^k, B^{n-k}$  verbundenen Paares von Zellenketten auf diesen Zellteilungen ist. Bevor wir diesen Nachweis erbracht haben, hat das Symbol  $\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$  nur Sinn für zwei Zellenketten auf dualen Teilungen.\*)

**Satz I:** Sind  $A^k, B^{n-k}$  und  $'A^k, 'B^{n-k}$  verbundene Paare singulärer Ketten und  $\bar{A}^k, '\bar{A}^k$  simultane Approximationen von  $A^k$  und  $'A^k$  in einer Zellteilung  $\mathfrak{M}_a$ ,  $\bar{B}^{n-k}, '\bar{B}^{n-k}$  simultane Approximationen von  $B^{n-k}$  und  $'B^{n-k}$  auf der dualen Zellteilung  $\mathfrak{M}_b$ , so ist

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}'(\bar{A}^k, 'B^{n-k}),$$

vorausgesetzt, daß die Zellen von  $\mathfrak{M}_a$  und  $\mathfrak{M}_b$  kleiner als ein geeignetes  $\delta$  sind.

**Beweis:** Wir machen  $\delta$  so klein, daß nicht nur die Ketten (3 a) und (4 b) bzw. (3 b) und (4 a) des vorangehenden Paragraphen, sondern sogar die kleinsten Zellenteilkomplexe punktfremd sind, auf denen diese Ketten liegen. Dabei sind für die Ketten (3 a) und (4 a) die Teilkomplexe auf  $\mathfrak{M}_a$ , für die Ketten (3 b) und (4 b) diejenigen auf  $\mathfrak{M}_b$  zu nehmen. Man kann dann die vorgegebenen simultanen Approximationen der Ketten  $A^k, 'A^k$  in der Zellteilung  $\mathfrak{M}_a$  zu einer simultanen Approximation aller Ketten (3 a) und (4 a) ergänzen, und ebenso die simultanen Approximationen der Ketten  $B^{n-k}$  und  $'B^{n-k}$  in der Zellteilung  $\mathfrak{M}_b$  zu einer simultanen Approximation aller Ketten (3 b) und (4 b). Bezeichnen wir die Approximationen durch Querstriche, so gelten die Formeln (1 a), (1 b), (2 a), (2 b), die aus den Formeln (1 a), (1 b), (2 a), (2 b) durch Überstreichen aller Ketten hervorgehen (nach § 72, S. 257); und die den Ketten (3 a) entsprechenden überstrichenen Ketten (3 a) sind punktfremd zu den Ketten (4 b), ebenso (3 b) punktfremd zu (4 a).

Wir haben es hinfert nur noch mit den überstrichenen Ketten zu tun, von denen (3 a), (4 a) Zellenketten auf  $\mathfrak{M}_a$  und (3 b), (4 b) Zellenketten auf der dualen Teilung  $\mathfrak{M}_b$  sind. Die Lage der überstrichenen Ketten unterscheidet sich von der der ungestrichenen beliebig wenig, und man kann sie daher durch dieselbe Fig. 125 illustrieren.

Die folgenden Überlegungen sind nun rein kombinatorischer Natur, da die betrachteten Ketten auf dualen Zellteilungen liegen. Der Beweis der Übereinstimmung der Schnittzahlen  $\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k})$  und  $\mathcal{S}'(\bar{A}^k, 'B^{n-k})$  wird in zwei Schritten geführt. Mit Benutzung der Formel (5) von § 70 ist

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \mathcal{R}\bar{\partial} \bar{V}^{n-k+1}) = (-1)^k \mathcal{S}(\mathcal{R}\bar{\partial} \bar{A}^k, \bar{V}^{n-k+1}) = 0,$$

\*) Den Dimensionsindex  $n$  an  $\mathfrak{M}$  lassen wir der Einfachheit halber bisweilen fort. — Wir denken uns in Satz I bis III  $\mathfrak{M}$  in einem Zahlenraum gelegen. Daß eine Zelle  $< \delta$  ist, soll heißen, daß ihr Durchmesser in diesem Zahlenraum  $< \delta$  ist.

da  $\bar{A}^{k-1} (= \mathcal{R}\bar{\partial} \bar{A}^k)$  und  $\bar{V}^{n-k+1}$  punktfremd sind. Andererseits erhält man durch Einsetzen des Wertes von  $\mathcal{R}\bar{\partial} \bar{V}^{n-k+1}$  nach Formel (2 b)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{A}^k, \mathcal{R}\bar{\partial} \bar{V}^{n-k+1}) &= \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k} - ' \bar{B}^{n-k} - \bar{V}^{n-k}) \\ &= \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k} - ' \bar{B}^{n-k}), \end{aligned}$$

da  $\bar{A}^k$  und  $\bar{V}^{n-k}$  punktfremd sind. Also ist

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(\bar{A}^k, ' \bar{B}^{n-k}). \quad (1)$$

Ebenso ist

$$\mathcal{S}(\mathcal{R}\bar{\partial} \bar{U}^{k+1}, ' \bar{B}^{n-k}) = (-1)^{k+1} \mathcal{S}(\bar{U}^{k+1}, \mathcal{R}\bar{\partial} ' \bar{B}^{n-k}) = 0$$

wegen der Punktfremdheit von  $\bar{U}^{k+1}$  und  $' \bar{B}^{n-k-1}$ . Andererseits erhält man durch Einsetzen des Wertes von  $\mathcal{R}\bar{\partial} \bar{U}^{k+1}$  nach Formel (2 a)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{R}\bar{\partial} \bar{U}^{k+1}, ' \bar{B}^{n-k}) &= \mathcal{S}(\bar{A}^k - ' \bar{A}^k - \bar{U}^k, ' \bar{B}^{n-k}) \\ &= \mathcal{S}(\bar{A}^k - ' \bar{A}^k, ' \bar{B}^{n-k}), \end{aligned}$$

da  $\bar{U}^k$  und  $' \bar{B}^{n-k}$  punktfremd sind. Daher

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, ' \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(' \bar{A}, ' \bar{B}^{n-k}). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt das gewünschte Ergebnis

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(' \bar{A}, ' \bar{B}^{n-k}).$$

Den Übergang von einer Zellteilung zur anderen leistet der folgende

**Satz II<sup>k</sup>:** Auf dualen Zellteilungen  $\mathfrak{M}_a$  und  $\mathfrak{M}_b$  von  $\mathfrak{M}$  seien  $a^k$  und  $b^{n-k}$  orientierte duale Zellen mit der Schnittzahl

$$\eta = \mathcal{S}(a^k, b^{n-k}) = \pm 1.$$

Approximiert man  $a^k$  und  $b^{n-k}$  in zwei neuen dualen Teilungen  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  und  $\bar{\mathfrak{M}}_b$ , deren Zellen kleiner als ein geeignetes  $\delta$  sind, so haben die Approximationen  $\bar{a}^k$  und  $\bar{b}^{n-k}$  dieselbe Schnittzahl\*).

$$\eta = \mathcal{S}(\bar{a}^k, \bar{b}^{n-k}).$$

$a^k$  ist ein kohärent orientierter Simplexstern der Normalunterteilung  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{M}_a$  und stellt daher in bezug auf  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  eine singuläre  $k$ -Kette dar, die sich zellennäherig im Sinne von § 72 approximieren läßt.  $\bar{a}^k$  ist also eine Zellenkette auf  $\bar{\mathfrak{M}}_a$ . Ebenso ist  $\bar{b}^{n-k}$  eine Zellenkette auf der dualen Teilung  $\bar{\mathfrak{M}}_b$ .

Der Beweis von Satz II<sup>k</sup> geschieht durch vollständige Induktion über  $k$ . Wir beweisen zunächst Satz II<sup>0</sup>. Dann haben wir es mit den dualen Zellen  $a^0$  und  $b^n$  zu tun. Wir orientieren die Zellteilungen  $\mathfrak{M}_b$  und  $\bar{\mathfrak{M}}_b$  beide

\*) Man beachte, daß das Symbol  $\mathcal{S}$  in zwei verschiedenen Bedeutungen auftritt: einmal als Schnittzahl bezüglich der dualen Teilungen  $\mathfrak{M}_a$  und  $\mathfrak{M}_b$ , das andere Mal als Schnittzahl bezüglich  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  und  $\bar{\mathfrak{M}}_b$ .

kohärent, so daß die entstehenden Ketten  $M_b^n$  und  $\bar{M}_b^n$  homolog zur orientierenden Kette  $O^n$  werden:

$$M_b^n \sim \bar{M}_b^n \sim O^n. \quad (3)$$

Nun ist

$$M_b^n = \varepsilon_b b^n + 'b^n. \quad (4)$$

Hierin ist  $\varepsilon_b = \pm 1$  das Vorzeichen, mit dem  $b^n$  in  $M_b^n$  vorkommt und  $'b^n$  die Summe der von  $b^n$  verschiedenen  $n$ -Zellen von  $M_b^n$ . Die vorgegebene Approximation von  $b^n$  in  $\bar{M}_b$  kann man zu einer simultanen Approximation von  $b^n$  und  $'b^n$  vervollständigen. Hierbei gehe  $'b^n$  in  $\bar{b}^n$  über. Die Approximation von  $M_b^n = \varepsilon_b b^n + 'b^n$  ist daher die Kette  $\varepsilon_b \bar{b}^n + 'b^n$ , und da eine geschlossene Kette durch Approximation in eine homologe Kette übergeht und  $\bar{M}_b^n$  die einzige zu  $M_b^n$  homologe Zellenkette auf  $\bar{M}_b$  ist, so ist

$$\bar{M}_b^n = \varepsilon_b \bar{b}^n + 'b^n. \quad (4)$$

Wir setzen nun die Zellen von  $\bar{M}_a$  und  $\bar{M}_b$  als so klein voraus, daß nicht nur  $a^0$  und  $'b^n$ , sondern sogar die kleinsten Teilkomplexe von  $\bar{M}_a$  und  $\bar{M}_b$ , denen  $a^0$  bzw.  $'b^n$  angehören, punktfremd sind. Dasselbe gilt dann von den Ketten  $\bar{a}^0$  und  $\bar{b}^n$ , die ja als Approximationen diesen kleinsten Teilkomplexen angehören. Bezeichnet noch  $\varepsilon_a = \pm 1$  den algebraischen Wert von  $a^0$ , so ist dies zugleich der algebraische Wert von  $\bar{a}^0$ , denn  $\bar{a}^0$  ist als Approximation homolog zu  $a^0$ . Man hat dann

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(a^0, b^n) &= \varepsilon_b \mathcal{S}(a^0, \varepsilon_b b^n) \\ &= \varepsilon_b \mathcal{S}(a^0, \varepsilon_b b^n + 'b^n) \\ &= \varepsilon_b \mathcal{S}(a^0, M_b^n) \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_a \quad \text{nach S. 247}, \end{aligned} \quad (5)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{a}^0, \bar{b}^n) &= \varepsilon_b \mathcal{S}(\bar{a}^0, \varepsilon_b \bar{b}^n) \\ &= \varepsilon_b \mathcal{S}(\bar{a}^0, \bar{b}^n + 'b^n) \\ &= \varepsilon_b \mathcal{S}(\bar{a}^0, \bar{M}_b^n) \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_a. \end{aligned} \quad (5)$$

Aus (5) und (5) folgt

$$\mathcal{S}(a^0, b^n) = \mathcal{S}(\bar{a}^0, \bar{b}^n)$$

und damit Satz II<sup>0</sup>.

Wir nehmen nun an, daß Satz II<sup>k-1</sup> schon bewiesen ist, und beweisen Satz II<sup>k</sup>. Es sei  $a^{k-1}$  eine mit  $a^k$  inzidente Zelle auf  $\bar{M}_a$ . Dann ist auch die zu  $a^{k-1}$  duale Zelle  $b^{n-k+1}$  mit  $b^{n-k}$  inzident. Die Orientierungen von

$a^{k-1}$  und  $b^{n-k+1}$  seien so gewählt, daß  $a^{k-1}$  im Rande von  $a^k$  und  $b^{n-k}$  im Rande von  $b^{n-k+1}$  mit der Vielfachheit +1 auftritt (Fig. 126):

$$\mathcal{R}\partial a^k = a^{k-1} + 'a^{k-1},$$

$$\mathcal{R}\partial b^{n-k+1} = b^{n-k} + 'b^{n-k}.$$

Die Approximation von  $b^{n-k}$  in  $\bar{b}^{n-k}$  läßt sich zu einer simultanen Approximation von  $b^{n-k}$ ,  $'b^{n-k}$ ,  $b^{n-k+1}$  erweitern. Die Approximationen dieser Ketten heißen  $\bar{b}^{n-k}$ ,  $'b^{n-k}$ ,  $b^{n-k+1}$ . Wir wählen nun die Zellteilungen  $\bar{M}_a$  und  $\bar{M}_b$  so fein, daß die Ketten  $'a^{k-1}$  und  $b^{n-k+1}$  einerseits,  $'b^{n-k}$  und  $a^k$  anderseits auch nach der Approximation noch punktfremd sind. Es soll also

$$\alpha) \quad 'a^{k-1} \text{ fremd zu } b^{n-k+1},$$

$$\beta) \quad 'b^{n-k} \text{ fremd zu } a^k \text{ sein.}$$

Außerdem kann man auf Grund von Satz II<sup>k-1</sup> noch verlangen, daß

$$\gamma) \quad \mathcal{S}(a^{k-1}, b^{n-k+1}) = \mathcal{S}(\bar{a}^{k-1}, \bar{b}^{n-k+1})$$

ist. Nun ist nach § 69 (5)

$$\mathcal{S}(a^k, b^{n-k}) = (-1)^k \mathcal{S}(a^{k-1}, b^{n-k+1}). \quad (6)$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{a}^k, \bar{b}^{n-k}) &= \mathcal{S}(\bar{a}^k, \bar{b}^{n-k} + 'b^{n-k}) \text{ wegen } \beta) \\ &= \mathcal{S}(\bar{a}^k, \mathcal{R}\partial \bar{b}^{n-k+1}) \\ &= (-1)^k \mathcal{S}(\mathcal{R}\partial \bar{a}^k, \bar{b}^{n-k+1}) \text{ nach § 70 (5)} \\ &= (-1)^k \mathcal{S}(\bar{a}^{k-1} + 'a^{k-1}, \bar{b}^{n-k+1}) \\ &= (-1)^k \mathcal{S}(\bar{a}^{k-1}, \bar{b}^{n-k+1}) \text{ wegen } \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Wegen  $\gamma)$  sind die rechten Seiten von (6) und (6) einander gleich, also auch die linken, was zu beweisen war.

Satz II<sup>k</sup> läßt sich leicht auf Zellenketten ausdehnen:

Satz III: Sind

$$A^k = \sum \xi_u a_u^k \quad \text{und} \quad B^{n-k} = \sum \eta_v b_v^{n-k}$$

zwei Zellenketten auf dualen Zellteilungen  $\bar{M}_a$  und  $\bar{M}_b$  der orientierbaren Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ ,  $\bar{A}^k$  und  $\bar{B}^{n-k}$  ihre Approximationen in zwei anderen dualen Zellteilungen  $\bar{M}_a$  und  $\bar{M}_b$ , so ist

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}),$$

wenn nur die Zellen von  $\bar{M}_a$  und  $\bar{M}_b$  kleiner sind als ein gewisses  $\delta$ .

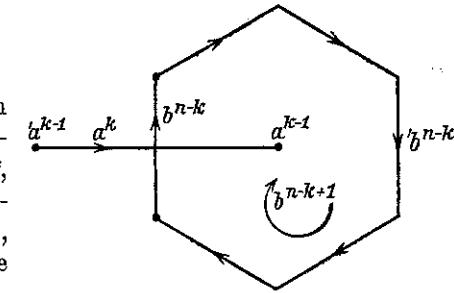


Fig. 126.

Beweis: Man wähle  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  und  $\bar{\mathfrak{M}}_b$  so fein, daß für die Approximationen  $\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k}$  je zweier Zellen  $a_\mu^k$  und  $b_\nu^{n-k}$  aus  $A^k$  und  $B^{n-k}$ :

$$\mathcal{S}(\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k}) = \mathcal{S}(a_\mu^k, b_\nu^{n-k})$$

ist. Für  $\mu = \nu$  ist das möglich nach Satz II<sup>k</sup>. Für  $\mu \neq \nu$  sind  $a_\mu^k$  und  $b_\nu^{n-k}$  punktfremd und daher auch noch ihre Approximationen bei genügend feiner Zellteilung. Dann ist

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(\sum \xi_\mu a_\mu^k, \sum \eta_\nu b_\nu^{n-k}) = \sum \xi_\mu \eta_\nu \mathcal{S}(a_\mu^k, b_\nu^{n-k})$$

und

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(\sum \xi_\mu \bar{a}_\mu^k, \sum \eta_\nu \bar{b}_\nu^{n-k}) = \sum \xi_\mu \eta_\nu \mathcal{S}(\bar{a}_\mu^k, \bar{b}_\nu^{n-k}).$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, so ergibt sich

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}).$$

Nunmehr folgt die Invarianz der Schnittzahlen so: Hat man zu den vorgelegten singulären Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  das eine Mal auf den dualen Zellteilungen  $'\mathfrak{M}_a$  und  $'\mathfrak{M}_b$  das mit  $A^k, B^{n-k}$  verbundene Paar  $'A^k, 'B^{n-k}$ , das andere Mal auf den dualen Zellteilungen  $''\mathfrak{M}_a$  und  $''\mathfrak{M}_b$  das verbundene Paar  $''A^k, ''B^{n-k}$  gewählt, so gehen die Ketten  $A^k, 'A^k, ''A^k$  durch simultane Approximation in einer dritten Teilung  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  über in die Ketten  $\bar{A}^k, 'A^k, ''A^k$  und ebenso die Ketten  $B^{n-k}, 'B^{n-k}, ''B^{n-k}$  durch simultane Approximation in der dualen Teilung  $\bar{\mathfrak{M}}_b$  in die Ketten  $\bar{B}^{n-k}, 'B^{n-k}, ''B^{n-k}$ . Nach Satz I ist, wenn  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  und  $\bar{\mathfrak{M}}_b$  genügend fein sind,

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k}),$$

ebenso

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}^{n-k}) = \mathcal{S}(''A^k, ''B^{n-k}),$$

also

$$\mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k}) = \mathcal{S}(''A^k, ''B^{n-k}). \quad (7)$$

Ferner ist nach Satz III

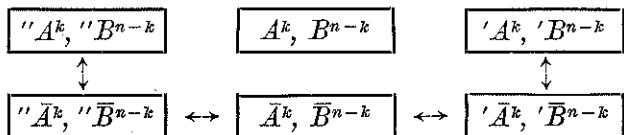
$$\mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k}) = \mathcal{S}('A^k, B^{n-k}),$$

denn  $'A^k, 'B^{n-k}$  sind Zellenketten auf dualen Zellteilungen, und ebenso

$$\mathcal{S}(''A^k, ''B^{n-k}) = \mathcal{S}(''A^k, ''B^{n-k}).$$

Setzt man dies in (7) ein, so ergibt sich

$$\mathcal{S}('A^k, 'B^{n-k}) = \mathcal{S}(''A^k, ''B^{n-k}).$$



An dem vorstehenden Schema können wir den Beweisgang noch einmal überblicken: Die singulären Ketten  $A^k, B^{n-k}$  wurden in zwei verschiedenen dualen Zellteilungen durch je zwei mit ihnen verbundene Paare von Zellketten  $'A^k, 'B^{n-k}$  und  $''A^k, ''B^{n-k}$  ersetzt und in diesen Zellteilungen die Schnittzahlen kombinatorisch nach § 70 bestimmt. Die Übereinstimmung der so ermittelten Werte wurde durch zellenmäßige Approximation aller sechs Ketten in einer dritten Zellteilung, der quergestrichenen (untere Reihe) gezeigt, und zwar in Richtung der vertikalen Pfeile mit Hilfe von Satz III, in Richtung der horizontalen mit Hilfe von Satz I dieses Paragraphen.<sup>44</sup>

Es ist nun leicht, die für Zellenketten in § 70 bewiesenen Sätze auf singuläre Ketten zu übertragen. Dabei wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß zwei singuläre Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$ , wenn sie in einem Symbole  $\mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$  auftreten, die Bedingung (E) von § 73 erfüllen.

Sind zwei singuläre Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  punktfremd, so ist ihre Schnittzahl = 0, denn man kann sie so fein approximieren, daß auch ihre Approximationen noch punktfremd sind.

Es gilt für die Schnittzahlen das Distributivgesetz

$$\mathcal{S}(A^k, B_1^{n-k} + B_2^{n-k}) = \mathcal{S}(A^k, B_1^{n-k}) + \mathcal{S}(A^k, B_2^{n-k}). \quad (8)$$

Approximiert man nämlich  $A^k$  in einer Zellteilung  $\bar{\mathfrak{M}}_a$ ,  $B_1^{n-k}$  und  $B_2^{n-k}$  simultan in der dualen Teilung  $\bar{\mathfrak{M}}_b$ , so gilt für die Approximationen die Gleichung

$$\mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}_1^{n-k} + \bar{B}_2^{n-k}) = \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}_1^{n-k}) + \mathcal{S}(\bar{A}^k, \bar{B}_2^{n-k}). \quad (\bar{8})$$

Nun stimmen bei genügender Feinheit der Zellteilungen  $\bar{\mathfrak{M}}_a$  und  $\bar{\mathfrak{M}}_b$  die Schnittzahlen der Ketten mit denen ihrer Approximationen überein. Also folgt aus (8) Formel (8).

Ebenso wie (8) überträgt man die Formel

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)} \mathcal{S}(B^{n-k}, A^k) \quad (9)$$

und die Formel

$$\mathcal{S}(A^k, \mathcal{R}\partial B^{n-k}) = (-1)^k \mathcal{S}(\mathcal{R}\partial A^k, B^{n-k+1}), \quad (10)$$

wobei  $A^k$  und  $B^{n-k+1}$  irgend zwei singuläre Ketten sind, deren Ränder sich nicht treffen.

Hieraus folgt wie früher: Die Schnittzahl einer geschlossenen  $k$ -Kette und einer divisions-nullohomologen  $(n-k)$ -Kette ist = 0, und die Schnittzahl zweier geschlossener Ketten ändert sich nicht, wenn man jede durch eine dazu divisionshomologe Kette ersetzt. Man kann auf Grund des letzten Satzes von der Schnittzahl zweier Homologieklassen (mit Division) der Dimensionen  $k$  und  $n-k$  sprechen, wenn sie in bestimmter Reihenfolge gegeben sind. Damit fällt auch die in Satz I und II von § 71 stillschweigend gemachte Voraussetzung fort, daß die Ketten dualer Bettischer Basen

bezw. Torsionsbasen auf dualen Zellteilungen liegen sollen; man kann irgendwelche singulären Ketten nehmen.

Sind zwei orientierbare und in bestimmter Weise orientierte Pseudomannigfaltigkeiten  $\mathfrak{R}^k$  und  $\mathfrak{R}^{n-k}$  vermöge der stetigen Abbildungen  $f$  und  $g$  in eine orientierbare Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  abgebildet, so gehen die orientierenden Ketten  $B^k$  und  $B^{n-k}$  von  $\mathfrak{R}^k$  und  $\mathfrak{R}^{n-k}$  in zwei singuläre geschlossene Ketten  $f(B^k)$  und  $g(B^{n-k})$  über (S. 98), die eine bestimmte Schnittzahl besitzen. Benutzt man an Stelle von  $B^k$  und  $B^{n-k}$  andere orientierende Ketten  $'B^k \sim B^k$  (auf  $\mathfrak{R}^k$ ) und  $'B^{n-k} \sim B^{n-k}$  (auf  $\mathfrak{R}^{n-k}$ ), so ist erst recht

$$\left. \begin{array}{l} f(B^k) \sim f('B^k) \\ g(B^{n-k}) \sim g('B^{n-k}) \end{array} \right\} \text{auf } \mathfrak{M}^n$$

und daher

$$\mathcal{S}(f(B^k), g(B^{n-k})) = \mathcal{S}(f('B^k), g('B^{n-k})).$$

Den singulären Bildern der orientierten Pseudomannigfaltigkeiten  $\mathfrak{R}^k$  und  $\mathfrak{R}^{n-k}$  kommt also in  $\mathfrak{M}^n$  eine bestimmte Schnittzahl zu, die nur von der Orientierung von  $\mathfrak{R}^k$  und  $\mathfrak{R}^{n-k}$  und von den stetigen Abbildungen abhängt. Die Schnittzahl mod 2 existiert auch noch, wenn  $\mathfrak{R}^k$ ,  $\mathfrak{R}^{n-k}$  oder  $\mathfrak{M}^n$  nicht-orientierbar sind.

So bequem die dualen Zellteilungen für die Aufstellung der allgemeinen Theorie sind, so umständlich ist es, in praktischen Fällen die Schnittzahl zweier Ketten durch zellenmäßige Approximationen in dualen Zellteilungen zu bestimmen. Bevor wir uns den Beispielen zuwenden, wollen wir deshalb einen Hilfssatz beweisen, der für die Ermittlung der Schnittzahlen von Nutzen ist.

**Hilfssatz:**  $\mathfrak{M}^n$  sei eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit einer kohärenten orientierten simplizialen Zerlegung und  $E^n$  ein orientiertes  $n$ -Simplex darauf. In  $E^n$  mögen zwei geradlinige orientierte Simplexe  $X^k$  und  $X^{n-k}$  liegen, die außer ihrem gemeinsamen Mittelpunkte  $P_k$  keinen Punkt gemein haben. Ist dann  $\xi(P_0 P_1 \dots P_k)$  ein orientiertes Simplex der Normalunterteilung von  $X^k$ ,  $\eta(P_k P_{k+1} \dots P_n)$  ein solches der Normalunterteilung von  $X^{n-k}$ , und hat man das Vorzeichen  $\xi$  so gewählt, daß das  $n$ -Simplex  $\xi(P_0 P_1 \dots P_k \dots P_n)$  gleich orientiert mit  $E^n$  ist (§ 29), so ist

$$\mathcal{S}(X^k, X^{n-k}) = \xi \eta \xi.$$

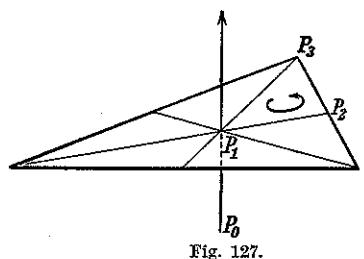


Fig. 127.

**Beweis:** Beim Beweise wird davon Gebrauch gemacht, daß die Schnittzahlen zweier verbundener Paare singulärer Ketten übereinstimmen. Hält man  $X^k$  fest und deforme man  $X^{n-k}$  stetig in ein neues Simplex  $'X^{n-k}$ ,

so daß der Rand von  $X^{n-k}$  niemals  $X^k$  und der Rand von  $X^k$  niemals  $X^{n-k}$  trifft, so ist

$$\mathcal{S}(X^k, X^{n-k}) = \mathcal{S}(X^k, 'X^{n-k}),$$

denn  $X^k$ ,  $X^{n-k}$  und  $X^k$ ,  $'X^{n-k}$  bilden zwei verbundene Paare (vgl. S. 115, Satz II).

Wir betrachten zuerst den Fall  $k = 0$  und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $X^0$  mit dem Vorzeichen  $\xi = +1$  und  $X^n$  mit  $E^n$  gleich orientiert ist, d. h. daß  $\eta$  und  $\xi$  übereinstimmen. Es ist dann zu zeigen, daß  $\mathcal{S}(X^0, X^n) = 1$  ist. Zu dem Zwecke führen wir in drei Schritten  $X^n$  in das Simplex  $E^n$  und  $X^0$  in den Mittelpunkt von  $E^n$  über. Der erste Schritt besteht darin,  $X^n$  durch Deformation in eine zu  $E^n$  ähnliche Lage  $X_1^n$  zu bringen, so daß  $X_1^n$  Ähnlichkeitszentrum wird. Das kann man offenbar immer so einrichten, daß bei dieser Deformation der festgehaltene Punkt  $X^0$  nicht vom Rande von  $X^n$  getroffen wird. Daher ist

$$\mathcal{S}(X^0, X^n) = \mathcal{S}(X^0, X_1^n).$$

Darauf wird  $X_1^n$  vom Ähnlichkeitszentrum  $X^0$  aus in das Simplex  $E^n$  projiziert. Hierbei wird  $X^0$  nicht vom Rande von  $X_1^n$  überschritten, so daß

$$\mathcal{S}(X^0, X_1^n) = \mathcal{S}(X^0, E^n)$$

ist. Endlich wird  $X^0$  in den Mittelpunkt  $X_1^0$  von  $E^n$  überführt, der mit demselben Vorzeichen  $\xi = 1$  orientiert sei wie  $X^0$ . Man hat daher

$$\mathcal{S}(X^0, E^n) = \mathcal{S}(X_1^0, E^n),$$

also im ganzen

$$\mathcal{S}(X^0, X^n) = \mathcal{S}(X_1^0, E^n).$$

Die simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{M}^n$  läßt sich als eine Zellteilung betrachten, in der  $E^n$  eine  $n$ -Zelle und  $X_1^0$  die dazu duale 0-Zelle ist. Daher ist

$$\mathcal{S}(X_1^0, E^n) = 1.$$

Der Hilfssatz sei nunmehr für zwei Simplexe der Dimension  $k - 1$  und  $n - k + 1$  bewiesen. Wir beweisen ihn dann für zwei Simplexe  $X^k$  und  $X^{n-k}$ . Die Orientierung von  $X^k$  ist durch das Teilsimplex

$$\xi(P_0 P_1 \dots P_k) \quad (X^k)$$

gegeben und die von  $X^{n-k}$  durch das Teilsimplex

$$\eta(P_k P_{k+1} \dots P_n). \quad (X^{n-k})$$

Man kann annehmen, daß  $P_{k-1}$  der Mittelpunkt einer  $(k-1)$ -dimensionalen Seite  $X^{k-1}$  von  $X^k$  ist (und nicht etwa der Mittelpunkt einer Seite niedriger Dimension). Es gibt dann ein Simplex  $X^{n-k+1}$ , das  $X^{n-k}$  zur Seite und  $P_{k-1}$  zum Mittelpunkte hat.  $X^k$  und  $X^{n-k+1}$  haben die Strecke  $P_{k-1} P_k$  zum Durchschnitt.\*  $X^{k-1}$  sei so orientiert, daß es im

\* Sollte  $X^{n-k+1}$  über  $E^n$  hinausragen, so nehme man zuvor eine ähnliche Verkleinerung der Simplexe  $X^k$  und  $X^{n-k}$  von  $P_k$  aus vor, bei der sich weder die Schnittzahl  $\mathcal{S}(X^k, X^{n-k})$  noch die Koeffizienten  $\xi, \eta, \zeta$  ändern.

Rande von  $X^k$  mit dem Vorzeichen +1 auftritt. Seine Orientierung ist dann gegeben durch das Teilsimplex

$$(-1)^k \xi(P_0 P_1 \dots P_{k-1}). \quad (X^{k-1})$$

Ebenso sei  $X^{n-k+1}$  so orientiert, daß  $X^{n-k}$  im Rande von  $X^{n-k+1}$  mit dem Vorzeichen +1 auftritt. Die Orientierung ist also durch das Teilsimplex

$$\eta(P_{k-1} P_k \dots P_n) \quad (X^{n-k+1})$$

bestimmt. Nun ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\delta(X^{k-1}, X^{k-k+1}) = (-1)^k \xi \eta \xi.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \delta(X^k, X^{n-k}) &= \delta(X^k, \partial X^{n-k+1}) \\ &= (-1)^k \delta(\partial X^k, X^{n-k+1}) \quad (\text{nach Formel 10}) \\ &= (-1)^k \delta(X^{k-1}, X^{n-k+1}). \end{aligned}$$

Daher ist, wie zu beweisen war,

$$\delta(X^k, X^{n-k}) = \xi \eta \xi.$$

Bei der Bestimmung der Schnittzahl zweier singulärer Ketten  $A^k$  und  $B^{n-k}$  kann man zunächst alle singulären Simplexe fortlassen, die punktfremd zum Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  der von  $A^k$  und  $B^{n-k}$  überdeckten Punktmengen sind, weil man die Schnittzahl nach Formel (8) zerlegen kann und punktfremde Ketten die Schnittzahl 0 haben. Hervorzuheben ist der Fall, daß der Durchschnitt aus endlich vielen Punkten besteht und daß sich in jedem Punkte immer nur zwei Simplexe so durchsetzen, wie es der Hilfssatz angibt. Dafür sagen wir auch, daß sich die beiden singulären Ketten in den gemeinsamen Punkten *glatt durchsetzen*. Dann ist die Schnittzahl  $\delta(A^k, B^{n-k})$  die Summe der aus dem Hilfssatz zu bestimmenden Schnittzahlen für die einzelnen Schnittpunkte.

Die Methoden und Sätze dieses Paragraphen übertragen sich unmittelbar auf Ketten mod 2.

### § 75. Beispiele.

1. Als Beispiel betrachten wir die orientierbaren Flächen, und wir greifen nur des einfacheren Ausdrückes wegen diejenige vom Geschlechte  $h = 2$ , die Doppelringfläche, heraus, die wir uns zum Fundamentalpolygon aufgeschnitten denken. Wir wissen bereits, daß die geschlossenen Ketten  $a, b, c, d$  eine Bettische Basis bilden (§ 41), und wir suchen jetzt eine duale Basis dazu. Die Schnitte lassen sich in der Fig. 128 besser verfolgen, wenn man die Ketten durch homologe  $a', b', c', d'$  ersetzt, die im Innern des Achtecks verlaufen. Bei geeigneter simplizialer Zerlegung durchsetzen sich die Ketten offenbar glatt. Man bestimmt die Schnittzahl aus einer solchen speziellen Zerlegung und erhält, wenn die Orientierung der Fläche durch den Randkreis  $ab a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1}$  gegeben ist,

$$\delta(a', b') = 1 \quad \text{und} \quad \delta(b', a') = -1$$

im Einklang mit Formel (9) von § 74. Da  $a'$  und  $c'$  punktfremd sind, so hat man  $\delta(a', c') = 0$ . Ebenso ist  $\delta(a', a') = 0$ . Denn wegen  $a' \sim a$  ist  $\delta(a', a') = \delta(a', a)$ , und diese Schnittzahl ist = 0 wegen der Punktfremdheit von  $a$  und  $a'$ . Die Schnittmatrix lautet daher\*

| $\delta$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| $a$      |     | 1   |     |     |
| $b$      | -1  |     |     |     |
| $c$      |     |     |     | 1   |
| $d$      |     |     | -1  |     |

(1)

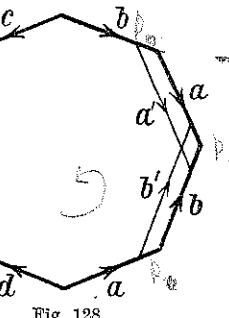


Fig. 128.

Leer gelassene Felder hat man sich durch Nullen ausgefüllt zu denken.

Durch Umordnung und Umorientierung der Spalteneingänge gewinnt man aus ihr die Einheitsmatrix

| $\delta$ | $b$ | $-a$ | $d$ | $-c$ |
|----------|-----|------|-----|------|
| $a$      | 1   |      |     |      |
| $b$      |     | 1    |     |      |
| $c$      |     |      |     | 1    |
| $d$      |     |      |     | 1    |

(2)

Die Ketten

$$b, -a, d, -c$$

bilden also die gesuchte zu

$$a, b, c, d$$

duale Basis.

Die Basis  $a, b, c, d$  hat die besondere Eigenschaft, daß die Ketten sich zu Paaren anordnen lassen derart, daß die Ketten eines Paares unter sich die Schnittzahl  $\pm 1$  haben, mit anderen aber die Schnittzahl 0. Dies ist nicht eine besondere Eigenschaft der Flächen, sondern sie wiederholt sich in allen Dimensionen der Form  $2(2m+1)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Zum Beweise betrachten wir in einer Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^{2k}$  die Ketten der „mittleren“ Dimension  $k$ . Es ist nach § 74 Formel (9)

$$\delta(A^k, B^k) = (-1)^{kk} \delta(B^k, A^k),$$

also ist  $\delta(A^k, B^k) = \pm \delta(B^k, A^k)$ , je nachdem  $k$  gerade oder ungerade ist. Die Schnittmatrix

$$\delta(B_u^k, B_v^k)$$

einer Bettischen Basis

$$B_1^k, B_2^k, \dots, B_p^k$$

ist daher bei ungeradem  $k$  schiefsymmetrisch und bei geradem  $k$  symmetrisch. In jedem Falle hat sie die Determinante  $\pm 1$ . Denn durch ge-

\* ) Im Schnitt der  $i$ -ten Zeile mit der  $k$ -ten Spalte steht die Schnittzahl der  $i$ -ten Kette als erster mit der  $k$ -ten als zweiter.

eignete unabhängige ganzzahlige unimodulare Transformation der Zeilen und Spalten kann man zu dualen Basen übergehen (§ 71), und für diese ist die Schnittmatrix die Einheitsmatrix.

Für den uns allein interessierenden Fall eines ungeraden  $k$  besagt nun ein algebraischer Satz, daß man eine ganzzahlige unimodulare schiefsymmetrische Matrix durch kогредиенте ganzzahlige unimodulare Transformation der Zeilen und Spalten auf die „Kästchenform“ (1) bringen kann, in der sich längs der Hauptdiagonale lauter Hauptminoren der Form

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

aneinanderreihen, während alle übrigen Elemente 0 sind.\*). Die so gewonnene neue Bettische Basis kann als das  $2(2m+1)$ -dimensionale Analogon zu den konjugierten Rückkehrschritten der geschlossenen orientierbaren Flächen betrachtet werden.<sup>45</sup>

Hieraus folgt weiter, daß die mittlere Bettische Zahl (der Dimension  $k = 2m+1$ ) einer  $2(2m+1)$ -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit gerade ist, und hieraus weiter, daß die Charakteristik  $N$  gerade ist, denn sie ist nach dem Poincaréschen Dualitätssatz

$$N = -\sum_{r=0}^{2k} (-1)^r p^r = -2p^0 + 2p^1 - \dots \pm 2p^{k-1} \mp p^k.$$

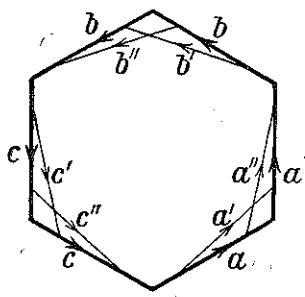


Fig. 129.

während das Geschlecht 3 zugrunde — bilden eine Zusammenhangsbasis der Dimension 1 (§ 41). In der Fig. 129 ist die Kante  $a$  auf zwei verschiedene Weisen in eine homologe Kette mod 2  $a'$  bzw.  $a''$  abgeändert worden. Da  $a'$  und  $a''$  einander glatt durchsetzen, ist die Schnittzahl mod 2

$$\delta(a, a) = \delta(a', a'') = 1,$$

während die Schnittzahlen von  $a'$  mit den Kanten  $b$  und  $c = \bar{0}$  sind. Daher lautet die Schnittmatrix mod 2

| $\delta$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|----------|-----|-----|-----|
| $a$      | 1   |     |     |
| $b$      |     | 1   |     |
| $c$      |     |     | 1   |

Die Zusammenhangsbasis ist also zu sich selbst dual.

\*) Vgl. K. Hensel u. G. Landsberg, Theorie d. algebr. Funkt. einer Var. S. 636 f. (Leipzig 1902).

3. Fortsetzung der Orientierung längs eines Weges. Wenn eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M^n$  in einer bestimmten Zellteilung  $M_a^n$  vorgelegt ist, so wollen wir unter den Ecken von  $M_a^n$  die Nullzellen und unter den Kanten die 1-Zellen verstehen.  $w$  sei ein geschlossener Kantenweg auf  $M_a^n$ . Jeder Ecke von  $w$  entspricht eine  $n$ -Zelle, jeder Kante eine  $(n-1)$ -Zelle der dualen Zellteilung  $M_b^n$ . Diese  $n$ - und  $(n-1)$ -Zellen wechseln in einer durch den Weg bestimmten Folge miteinander ab. Sie sollen jetzt orientiert werden; die dem Anfangspunkte  $O$  entsprechende  $n$ -Zelle wird beliebig orientiert, die nächste  $n$ -Zelle so, daß in der gemeinsamen  $(n-1)$ -Zelle entgegengesetzte Orientierungen induziert werden, und so fort. Auf diese Weise kann man die Orientierung der Anfangs- $n$ -Zelle über den ganzen Weg fortsetzen, und man kommt entweder nach Durchlaufung des Weges mit der Ausgangsorientierung zur Anfangs- $n$ -Zelle zurück oder mit der entgegengesetzten. Je nachdem sagt man, daß längs des Weges  $w$  die Orientierung erhalten bleibt oder sich umkehrt. Diese Definition hat nur einen Sinn für eine bestimmte Zellteilung und einen in ihr gelegenen Kantenweg; die Schnittzahlen geben uns das Mittel an die Hand, sie unabhängig von der Zellteilung zu machen.

$M^n$  ist offenbar dann und nur dann orientierbar im Sinne von § 24, wenn die Orientierung längs eines jeden geschlossenen Kantenweges von  $M_a^n$  erhalten bleibt. Wir beschränken uns daher im folgenden auf nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten. In einer solchen gibt es genau einen Torsionskoeffizienten der Dimension  $n-1$  vom Werte 2 (S. 90), es gibt also genau eine Homologieklasse der Dimension  $n-1$  von der Ordnung 2, und die darin enthaltenen (singulären) Ketten sind dadurch charakterisiert, daß sie zwar nicht selbst, aber doppelt genommen nullhomolog sind. Eine  $(n-1)$ -Kette  $U^{n-1}$  mit dieser Eigenschaft erhält man folgendermaßen: Man orientiert die  $n$ -Zellen von  $M_b^n$  willkürlich, aber fest, und von der  $n$ -Kette  $U^n$ , die aus der Gesamtheit der so orientierten  $n$ -Zellen besteht, bildet man den Rand. Eine  $(n-1)$ -Zelle kommt dann entweder überhaupt nicht oder doppelt in  $\partial U^n$  vor, je nachdem die beiden angrenzenden  $n$ -Zellen in ihr entgegengesetzte oder gleiche Orientierungen induzieren. Daher ist  $\partial U^n$  gleich dem Doppelten einer Kette  $U^{n-1}$ . Für  $U^{n-1}$  gilt dann gerade  $2U^{n-1} \sim 0$ ,  $U^{n-1} \not\sim 0$  (man vergleiche S. 90; der Unterschied gegen früher besteht nur darin, daß wir an Stelle der Simplexe jetzt Zellen benutzen).

Nun sieht man leicht, daß die Orientierung längs des Kantenweges  $w$  dann und nur dann erhalten bleibt, wenn  $w$  die Kette  $U^{n-1}$  in einer geraden Anzahl von Punkten trifft. Denn  $U^{n-1}$  enthält genau die  $(n-1)$ -Zellen von  $M_b^n$ , in denen von den beiden angrenzenden  $n$ -Zellen die gleiche Orientierung induziert wird. Wir können also sagen: *Die Orientierung bleibt längs  $w$  dann und nur dann erhalten, wenn die Schnittzahl mod 2 von  $w$  mit  $U^{n-1}$  gleich 0 ist.*\*). Diese Definition läßt sich auf beliebige stetige

\*) Genauer müßte man von der Schnittzahl der zu  $w$  und  $U^{n-1}$  gehörigen Ketten mod 2 reden.

Wege ausdehnen, die nicht notwendig Kantenwege sind, und ist unabhängig von einer simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{M}^n$ , da, wie wir gezeigt haben,  $U^{n-1}$  bis auf Addition nullhomologer Ketten topologisch invariant durch  $\mathfrak{M}^n$  bestimmt ist.

Zugleich folgt, daß sich homologe Wege in bezug auf die Erhaltung der Orientierung gleich verhalten, denn die Schnitzzahl ändert sich nicht bei Ersetzung einer Kette durch eine homologe.

Erst recht verhalten sich dann homotope Wege gleich, so daß die Elemente der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{M}^n$  in zwei Arten zerfallen, je nach der Beschaffenheit ihrer Wege bezüglich Erhaltung der Orientierung.\*.) Die Wegeklassen mit Erhaltung der Orientierung machen eine Untergruppe  $\mathfrak{H}$  vom Index 2 in  $\mathfrak{F}$  aus. Denn das Produkt aus zwei Wegen mit Umkehrung der Orientierung ist ein Weg, auf dem die Orientierung erhalten bleibt. Die zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$  gehörige (zweiblätterige) Überlagerung  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  (§ 55) ist hiernach topologisch invariant mit der Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  verknüpft.

$\tilde{\mathfrak{M}}^n$  ist orientierbar. Man kann nämlich die dualen Zellteilungen  $\mathfrak{M}_a^n$  und  $\mathfrak{M}_b^n$  nach  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  durchdrücken. Wenn sich nun längs eines geschlossenen Kantenweges  $\tilde{w}$  von  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  die Orientierung umkehrte, so auch längs des zugehörigen Grundweges  $w$  in  $\mathfrak{M}_a^n$ .  $w$  könnte also nicht zu  $\mathfrak{H}$  gehören, und  $\tilde{w}$  wäre gegen die Voraussetzung nicht geschlossen. —  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  ist die einzige orientierbare zweiblätterige Überlagerung von  $\mathfrak{M}^n$ . Denn ist  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  eine weitere orientierbare zweiblätterige Überlagerung, so drückt sich ein geschlossener Kantenweg  $\tilde{w}$  von  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  in einen geschlossenen Weg von  $\mathfrak{M}^n$  durch, längs dessen sich die Orientierung erhält, der also zu  $\mathfrak{H}$  gehört. Die zu  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  gehörige Untergruppe  $\mathfrak{H}'$  ist also eine Untergruppe von  $\mathfrak{H}$ , und da sie ebenso wie  $\mathfrak{H}$  vom Index 2 in  $\mathfrak{F}$  ist, fällt sie mit  $\mathfrak{H}$  zusammen.<sup>46</sup>

## § 76. Orientierbar und zweiseitig.

Die Orientierbarkeit einer Fläche haben wir als eine Eigenschaft erkannt, die der Fläche als einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit kommt, unabhängig von jeder Einbettung in den Raum. Dem Gegensatzpaar orientierbar—nichtorientierbar tritt das Gegensatzpaar einseitig—zweiseitig gegenüber, das auf die Einbettung einer Fläche in eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit Bezug nimmt. Um die zweiseitige Lage einer Fläche in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$  anschaulich zu erfassen, denken wir uns „senkrecht“ zur Fläche einen kleinen Pfeil hindurchgesteckt und führen ihn längs eines geschlossenen Weges auf der Fläche in den Ausgangspunkt zurück. Kehrt sich dabei niemals die Pfeillrichtung um, so liegt die Fläche zweiseitig in  $\mathfrak{M}^3$ , andernfalls einseitig.

\*) Immer sind im folgenden Wege  $w$  gemeint, die von einem festen Punkt  $O$  von  $\mathfrak{M}^n$ , und Wege  $\tilde{w}$ , die von einem über  $O$  liegenden festen Punkt  $\tilde{O}$  von  $\tilde{\mathfrak{M}}^n$  ausgehen.

Man nennt bisweilen orientierbare Flächen zweiseitig. Daß diese beiden Begriffe sich nicht decken, erhellt daraus, daß sie zu folgender vierfacher Disjunktion Anlaß geben: Es gibt

1. orientierbare zweiseitige Flächen, z. B. Kugel- und Ringfläche in dem (zur 3-Sphäre geschlossenen) dreidimensionalen Zahlenraum;
2. nichtorientierbare einseitige Flächen, z. B. die projektive Ebene im projektiven Raum;
3. orientierbare einseitige und
4. nichtorientierbare zweiseitige Flächen.

Ein Beispiel für die letzteren beiden findet sich in dem topologischen Produkt aus projektiver Ebene und Kreislinie. Man kann sich das Produkt dadurch konstruieren, daß man auf der Randringfläche eines Vollringes Diametralpunkte der Meridiankreise identifiziert. Hierbei schließt sich eine in einen Meridiankreis eingespannte Kreisscheibe zur projektiven Ebene, einer nichtorientierbaren Fläche, die offenbar zweiseitig in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit liegt. In der Fig. 130 ist der Schnitt des Vollringes mit einer Meridianebebene gezeichnet, und die eingespannte Kreisscheibe ist schraffiert. — Die Aquatorebene hingegen durchsetzt den Vollring in einem Kreisring, der sich durch die Diametralpunktidentifizierung zu einer Ringfläche schließt, einer orientierbaren Fläche, die offenbar einseitig in der Mannigfaltigkeit liegt. Die Fig. 131 zeigt den Schnitt mit der Aquatorebene.

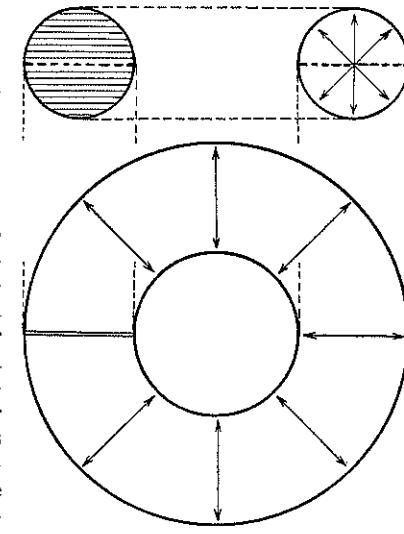


Fig. 130/131.

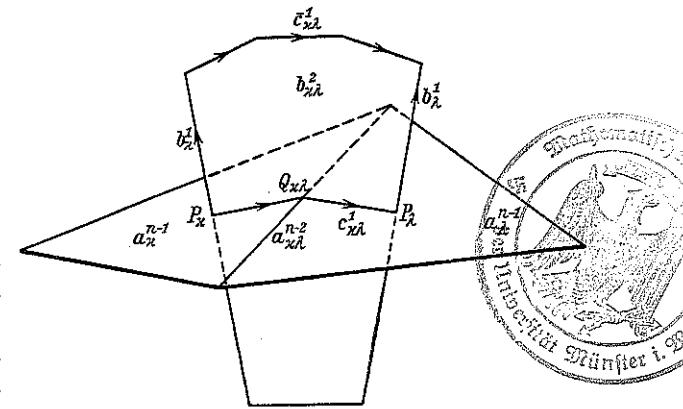


Fig. 132.

Teilmenge von  $\mathfrak{M}^n$ . An die Einlagerung stellen wir die weitere Forderung, daß es eine simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{M}^n$  geben soll, von der  $\mathfrak{M}^{n-1}$  ein Teilkomplex ist. Wir definieren die Einseitigkeit und Zweiseitigkeit von

$\mathfrak{M}^{n-1}$  zunächst mit Benutzung einer bestimmten solchen Zerlegung, deren normalunterteilte Simplexe wir als Zellen einer Zellteilung  $\mathfrak{M}_a^n$  auffassen. Dadurch ist zugleich auf  $\mathfrak{M}^{n-1}$  eine Zellteilung  $\mathfrak{M}_a^{n-1}$  gegeben. Die  $(n-1)$ -Zellen von  $\mathfrak{M}_a^{n-1}$  seien mit  $a_x^{n-1}$  bezeichnet. Ferner sei — siehe Fig. 132 —

- $P_x$  der Mittelpunkt von  $a_x^{n-1}$ ,
- $b_x^1$  die zu  $a_x^{n-1}$  in  $\mathfrak{M}^n$  duale 1-Zelle,
- $a_{x\lambda}^{n-2}$  die  $(n-2)$ -Zelle auf  $\mathfrak{M}_a^{n-1}$ , die gemeinsame Seite von  $a_x^{n-1}$  und  $a_\lambda^{n-1}$  ist,
- $Q_{x\lambda}$  der Mittelpunkt von  $a_{x\lambda}^{n-2}$ ,
- $b_{x\lambda}^2$  die zu  $a_{x\lambda}^{n-2}$  in  $\mathfrak{M}^n$  duale Zelle,
- $c_{x\lambda}^1$  die zu  $a_{x\lambda}^{n-2}$  in  $\mathfrak{M}^{n-1}$  duale Zelle mit dem Anfangspunkte  $P_x$  und dem Endpunkte  $P_\lambda$ .

In den orientierten Zellen  $b_x^1$  haben wir die mathematische Fassung der durch die Fläche gesteckten Pfeile vor uns. Wir nennen sie die *transversalen 1-Zellen* von  $\mathfrak{M}^{n-1}$ . Zwei transversale 1-Zellen  $b_x^1$  und  $b_\lambda^1$  heißen benachbart, wenn die  $(n-1)$ -Zellen  $a_x^{n-1}$  und  $a_\lambda^{n-1}$  eine gemeinsame Seite  $a_{x\lambda}^{n-2}$  haben. Da die Inzidenzen beim Übergange zu den dualen Zellen erhalten bleiben, so kommen  $b_x^1$  und  $b_\lambda^1$  im Rande von  $b_{x\lambda}^2$  vor:

$$\Re b_{x\lambda}^2 = \varepsilon_x b_x^1 + \varepsilon_\lambda b_\lambda^1 + \dots$$

Sind die Koeffizienten  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_\lambda$  entgegengesetzt gleich, so sagen wir, daß  $b_x^1$  und  $b_\lambda^1$  *gleichgerichtet* sind. Andernfalls sind sie *entgegengesetzt gerichtet*. Die genaue Definition der Ein- und Zweiseitigkeit lautet nun so:

$\mathfrak{M}^{n-1}$  liegt *zweiseitig* in  $\mathfrak{M}^n$ , wenn sich die transversalen 1-Zellen so orientieren lassen, daß je zwei benachbarte gleichgerichtet sind. Ist dies nicht möglich, so liegt  $\mathfrak{M}^{n-1}$  *einseitig* in  $\mathfrak{M}^n$ . Es wird sich zeigen, daß diese Definition nur scheinbar noch von der Auswahl der benutzten Zellteilung abhängt.

$c_{x\lambda}^1$  kann als Durchschnitt von  $\mathfrak{M}^{n-1}$  mit  $b_{x\lambda}^2$  aufgefaßt werden. Denn  $b_{x\lambda}^2$  kann nur mit solchen Zellen von  $\mathfrak{M}_a^{n-1}$  Punkte gemeinsam haben, die den Mittelpunkt  $Q_{x\lambda}$  von  $b_{x\lambda}^2$  enthalten (nach § 66 Satz VI), also mit den Zellen  $a_x^{n-2}$ ,  $a_x^{n-1}$ ,  $a_\lambda^{n-1}$ . Der Durchschnitt von  $b_{x\lambda}^2$  mit  $a_x^{n-1}$  besteht aus der Verbindungsstrecke (dem 1-Simplexe)  $(P_x, Q_{x\lambda})$ . — Die 1-Zellen  $c_{x\lambda}^1$  mögen die *Kanten* von  $\mathfrak{M}^{n-1}$  heißen. Sind dann  $b_x^1$  und  $b_\lambda^1$  gleichgerichtet, so verstehen wir unter dem zur Kante  $c_{x\lambda}^1$  gehörigen *Ersatzbogen*  $\bar{c}_{x\lambda}^1$  den Bogen auf dem Randkreise von  $b_{x\lambda}^2$ , der vom Endpunkte von  $b_x^1$  nach dem Endpunkte von  $b_\lambda^1$  führt, ohne  $\mathfrak{M}^{n-1}$  zu treffen. Nun sei  $C$  ein geschlossener Kantenweg auf  $\mathfrak{M}^{n-1}$ , also ein Weg, der sich aus lauter Kanten  $c_{x\lambda}^1$  zusammensetzt. Er führe der Reihe nach über die Punkte

$$P_1, P_2, \dots, P_r, P_{r+1} = P_1.$$

Wir orientieren die transversalen 1-Zellen  $b_1^1, b_2^1, \dots, b_r^1, b_{r+1}^1$  so, daß je zwei aufeinanderfolgende gleichgerichtet sind, was nach willkürlicher Orientierung von  $b_1^1$  nur auf eine Weise möglich ist. Dabei kann ein und

dieselbe transversale Zelle mehrmals, auch mit entgegengesetzten Orientierungen auftreten. Je nachdem dann  $b_{r+1}^1 = + b_1^1$  oder  $= - b_1^1$  ist, sagen wir, daß sich längs  $C$  die *Pfeilrichtung erhält oder umkehrt*. Offenbar bleibt bei *Zweiseitigkeit von  $\mathfrak{M}^{n-1}$*  längs jedes Kantenweges  $C$  die Pfeilrichtung erhalten, während es bei *einseitiger Einlagerung* mindestens einen Kantenweg mit Umkehrung der Pfeilrichtung gibt. Ersetzt man in  $C$  jede Kante  $c_{x\lambda}^1$  durch ihren zugehörigen Ersatzbogen  $\bar{c}_{x\lambda}^1$ , so ergibt sich bei Erhaltung der Pfeilrichtung ein geschlossener Weg  $\bar{C}$ , der  $\mathfrak{M}^{n-1}$  nicht trifft. Bei Umkehrung der Pfeilrichtung längs  $C$  dagegen führt der Weg vom Endpunkte von  $b_x^1$  nach dem Anfangspunkte von  $b_\lambda^1$  und soll durch Hinzufügung der Zelle  $b_x^1$  zu einem geschlossenen Wege  $\bar{C}$  mit dem Anfangspunkte  $P_1$  gemacht werden.  $C$  ist offenbar in seinen Ersatzweg deformierbar. Man braucht nur jede Kante  $c_{x\lambda}^1$  über die halbe Zelle  $b_{x\lambda}^2$  stetig in den Bogen  $\bar{c}_{x\lambda}^1$  überzuführen, wobei Anfangs- und Endpunkt von  $c_{x\lambda}^1$  längs  $b_x^1$  und  $b_\lambda^1$  in die Endpunkte von  $b_x^1$  und  $b_\lambda^1$  wandern. Ist  $C$  ein Weg mit Erhaltung der Pfeilrichtung, so hat  $\bar{C}$  und daher auch der homotope Weg  $\bar{C}$  mit  $\mathfrak{M}^{n-1}$  als Schnittzahl mod 2 die Restklasse 0. Denn  $\mathfrak{M}^{n-1}$  und  $\bar{C}$  sind punktfremd. Bei Umkehrung der Pfeilrichtung hingegen ist die Schnittzahl 1, da  $\mathfrak{M}^{n-1}$  von  $\bar{C}$  genau im Punkte  $P_1$  durchsetzt wird. Da es ferner zu jedem geschlossenen Wege von  $\mathfrak{M}^{n-1}$  einen homologen Kantenweg gibt — denn die sämtlichen Kanten  $c_{x\lambda}^1$  bilden den Kantenkomplex der zu  $\mathfrak{M}_a^{n-1}$  dualen Zellteilung —, so folgt

**Satz I:** Ist  $\mathfrak{M}^{n-1}$  zweiseitig, so ist für jeden beliebigen Weg  $C$  auf  $\mathfrak{M}^{n-1}$  die Schnittzahl mod 2  $\mathcal{S}(\mathfrak{M}^{n-1}, C) = 0$ ; ist  $\mathfrak{M}^{n-1}$  einseitig, so gibt es einen Weg  $C$ , für den  $\mathcal{S}(\mathfrak{M}^{n-1}, C) = 1$  ist. Hierbei sind natürlich  $\mathfrak{M}^{n-1}$  und  $C$  als Ketten mod 2 zu betrachten.

In diesem Satze haben wir eine Charakterisierung der Einseitigkeit und Zweiseitigkeit gewonnen, die nicht mehr auf eine simpliziale Zerlegung Bezug nimmt. Denn die Schnittzahlen sind davon unabhängig.

Wir geben noch eine andere Charakterisierung der Ein- und Zweiseitigkeit. Da  $C$  ein Kantenweg der zu  $\mathfrak{M}_a^{n-1}$  dualen Zellteilung ist, so kann man längs  $C$  die Orientierung der  $(n-1)$ -dimensionalen „Flächenzellen“  $a_x^{n-1}$  fortsetzen, indem man  $a_1^{n-1}$  beliebig orientiert und jede folgende Zelle der Reihe

$$a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \dots, a_r^{n-1}, a_{r+1}^{n-1} = \pm a_1^{n-1}$$

so, daß je zwei aufeinanderfolgende in der gemeinsamen  $(n-2)$ -Zelle entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Je nachdem dann  $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$  oder  $-a_1^{n-1}$  ist, sagen wir,  $C$  sei ein Weg mit Erhaltung oder Umkehrung der „Flächenorientierung“. Ebenso kann man längs des Ersatzweges  $\bar{C}$  die Orientierung der  $n$ -dimensionalen „räumlichen“ Zellen fortsetzen. Denn  $\bar{C}$  besteht aus 1-Zellen der zu  $\mathfrak{M}_a^n$  dualen Zellteilung, und es hat einen Sinn zu sagen,  $\bar{C}$  sei ein Weg mit Erhaltung oder Umkehrung der räumlichen Orientierung. Mit  $a_x^n$  sei die mit  $a_x^{n-1}$  inzidente  $n$ -Zelle bezeichnet, in der

der Endpunkt von  $b_x^1$  liegt (in der Reihe  $b_1^1, b_2^1, \dots, b_r^1, b_{r+1}^1$  setzen wir wieder je zwei aufeinanderfolgende 1-Zellen als gleichgerichtet voraus), und  $a_x^n$  sei so orientiert, daß auf seinem Rande  $a_x^{n-1}$  mit dem Vorzeichen + 1 vorkommt:

$$\partial a_x^n = a_x^{n-1} + \dots \quad (1)$$

Geht man dann auf dem Wege  $\bar{c}_x^1$  vom Mittelpunkte von  $a_x^n$  nach dem Mittelpunkt von  $a_x^n (\lambda = x + 1)$  und setzt die Orientierung von  $a_x^n$  längs  $\bar{c}_x^1$  fort, so kommt man mit der Orientierung  $+a_x^n$  an (wie man leicht abzählt, wenn man bedenkt, daß alle  $n$ -Zellen, die man passiert, die Seite  $a_x^{n-2}$  haben). Überträgt man also die räumliche Orientierung längs  $\bar{C}$ , so kommt man von  $+a_1^n$  nach  $+a_{r+1}^n$ .

Wir unterscheiden nun

Fall I: Die Pfeilrichtung bleibt längs  $C$  erhalten;

a: Die Flächenorientierung bleibt längs  $C$  erhalten; dann ist  $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$  und daher wegen (1)  $a_{r+1}^n = a_1^n$ , d. h. die räumliche Orientierung bleibt längs  $\bar{C}$  ebenfalls erhalten.

b: Die Flächenorientierung kehrt sich längs  $C$  um, dann ist  $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$  und daher  $a_{r+1}^n = -a_1^n$ , d. h. die räumliche Orientierung kehrt sich längs  $\bar{C}$  um.

Fall II: Die Pfeilrichtung kehrt sich längs  $C$  um;

a: Die Flächenorientierung bleibt längs  $C$  erhalten:  $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$ .  $a_{r+1}^n$  und  $a_1^n$  liegen jetzt auf verschiedenen Seiten von  $a_1^{n-1}$ . Wegen (1) induzieren sie in  $a_1^{n-1}$  gleiche Orientierungen, d. h. die räumliche Orientierung kehrt sich längs  $\bar{C}$  um.

b: Die Flächenorientierung kehrt sich längs  $C$  um:  $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$ .  $a_{r+1}^n$  und  $a_1^n$  induzieren entgegengesetzte Orientierungen in  $a_1^{n-1}$ . Also bleibt die räumliche Orientierung längs  $\bar{C}$  erhalten.

Bedenkt man noch, daß die Fortsetzung der Orientierung auch längs beliebiger stetiger Wege auf topologisch invariante Weise erklärt wurde (§ 75) und daß homotope Wege, z. B.  $C$  und  $\bar{C}$ , immer zugleich die Orientierung umkehren oder erhalten, so ergibt sich der

Satz II: Liegt  $M^{n-1}$  zweiseitig in  $M^n$  (Fall I), so kehren sich Flächenorientierung und räumliche Orientierung längs eines Weges  $C$  von  $M^{n-1}$  entweder gleichzeitig um, oder sie bleiben gleichzeitig erhalten. Liegt  $M^{n-1}$  einseitig in  $M^n$  (Fall II), so gibt es mindestens einen Weg, längs dessen sich entweder nur die Flächenorientierung oder nur die räumliche Orientierung umkehrt.

Ist  $M^n$  orientierbar, so bleibt die räumliche Orientierung längs jeden Weges erhalten. Also folgt

Satz III: In einer orientierbaren Mannigfaltigkeit  $M^n$  ist Orientierbarkeit der eingelagerten  $M^{n-1}$  gleichbedeutend mit Zweiseitigkeit und Nichtorientierbarkeit gleichbedeutend mit Einseitigkeit.

Insbesondere liegt im dreidimensionalen Zahlenraum jede orientierbare Fläche zweiseitig, jede nichtorientierbare einseitig darin.

### § 77. Verschlingungszahlen.

Die Verschlingungszahlen sind in einer  $n$ -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit  $M^n$  erklärt für zwei nullhomologe oder allgemeiner divisions-nullhomologe punktfremde singuläre Ketten

$$A^{k-1} \text{ und } B^{n-k}.$$

Betrachten wir zuerst den Fall, daß  $A^{k-1}$  nullhomolog und  $B^{n-k}$  divisions-nullhomolog (also möglicherweise auch nullhomolog) ist. Dann ist  $A^{k-1}$  Rand einer singulären Kette  $A^k$ , und die Verschlingungszahl

$$\mathcal{V}(A^{k-1}, B^{n-k})$$

ist erklärt als die Schnittzahl

$$\mathcal{S}(A^k, B^{n-k}).$$

Diese existiert, da die geschlossene Kette  $B^{n-k}$  nach Voraussetzung punktfremd zum Rande von  $A^k$  ist. Mit anderen Worten ist die Verschlingungszahl  $\mathcal{V}(A^{k-1}, B^{n-k})$  die Schnittzahl einer in  $A^{k-1}$  eingespannten  $k$ -Kette mit  $B^{n-k}$ . Es ist dabei gleichgültig, ob man  $A^k$  oder eine andere Kette ' $A^k$ ' in  $A^{k-1}$  eingespannt. Denn da  $B^{n-k}$  divisions-nullhomolog und  $A^k - 'A^k$  geschlossen ist, so ist

$$\mathcal{S}(A^k - 'A^k, B^{n-k}) = 0, \text{ d. h. } \mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) = \mathcal{S}'(A^k, B^{n-k}).$$

Ist z. B.  $M^n$  der durch einen unendlich fernen Punkt zur 3-Sphäre geschlossene dreidimensionale Zahlenraum und sind  $A^{k-1}$  und  $B^{n-k}$  Meridiankreis und Seele eines Vollringes, also zwei verschlungene Kreise, so kann man als  $A^k$  eine in den Meridiankreis eingespannte Kreisscheibe benutzen, die von der Seele des Vollringes glatt durchsetzt wird. Die Verschlingungszahl von Meridiankreis und Seele ist also  $\pm 1$ .

Ist auch  $A^{k-1}$  nur divisions-nullhomolog, so gibt es eine Zahl  $\alpha \neq 0$  derart, daß  $\alpha A^{k-1} \sim 0$  ist ( $\alpha$  braucht nicht die kleinste Zahl zu sein, für die die Homologie  $\alpha A^{k-1} \sim 0$  gilt). Ist dann  $A^k$  eine in  $\alpha A^{k-1}$  eingespannte Kette, also

$$\partial A^k = \alpha A^{k-1},$$

so erklären wir die Verschlingungszahl<sup>47</sup> durch die Gleichung

$$\mathcal{V}(A^{k-1}, B^{n-k}) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{S}(A^k, B^{n-k}).$$

$\mathcal{V}$  ist also im allgemeinen ein Bruch. Hätte man statt  $A^k$  eine andere Kette ' $A^k$ ' mit dem Rande ' $\alpha A^{k-1}$ ' benutzt, so hätte man als Verschlingungszahl  $\frac{1}{\alpha} \mathcal{S}'(A^k, B^{n-k})$  erhalten. Nun ist aber  $\alpha 'A^k - 'A^k$  eine geschlos-

sene Kette, die mit jeder divisions-nullhomologen Kette die Schnittzahl 0 hat. Daher ist

$$\alpha \mathcal{S}'(A^k, B^{n-k}) = \alpha \mathcal{S}(A^k, B^{n-k})$$

oder

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{S}'(A^k, B^{n-k}) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{S}(A^k, B^{n-k}).$$

Die Definition hängt also nicht von der Auswahl von  $A^k$  ab.

Anstatt  $B^{n-k}$  mit einer in  $\alpha A^{k-1}$  eingespannten Kette  $A^k$  zum Schnitt zu bringen, kann man auch umgekehrt  $A^{k-1}$  mit einer in  $\beta B^{n-k}$  eingespannten Kette  $B^{n-k+1}$  schneiden und erhält bis auf das Vorzeichen dieselbe Verschlingungszahl. Denn es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A^{k-1}, B^{n-k}) &= \frac{1}{\alpha} \mathcal{S}(A^k, B^{n-k}) \\ &= \frac{1}{\alpha \beta} \mathcal{S}(A^k, \beta B^{n-k}) \\ &= (-1)^k \frac{1}{\alpha \beta} \mathcal{S}(\alpha A^{k-1}, B^{n-k+1}) \quad [\text{nach der Hauptformel}] \\ &\quad (10) \text{ von § 74] } \\ &= (-1)^k \frac{1}{\beta} \mathcal{S}(A^{k-1}, B^{n-k+1}). \end{aligned}$$

Den Formeln (8) und (9) von § 74 entsprechen bei den Verschlingungszahlen die Formeln

$$\mathcal{D}(A^{k-1}, B_1^{n-k} + B_2^{n-k}) = \mathcal{D}(A^{k-1}, B_1^{n-k}) + \mathcal{D}(A^{k-1}, B_2^{n-k})$$

und

$$\mathcal{D}(A^{k-1}, B^{n-k}) = (-1)^{(k-1)(n-k)+1} \mathcal{D}(B^{n-k}, A^{k-1}).$$

Die Verschlingungszahl ändert sich nicht, wenn man die Kette  $A^{k-1}$  im „Komplementärraum“ von  $B^{n-k}$  bezüglich  $\mathfrak{M}^n$  durch eine homologe Kette  $'A^{k-1}$  ersetzt. Ist nämlich  $U^k$  fremd zu  $B^{n-k}$  und

$$\mathcal{R} U^k = A^{k-1} - 'A^{k-1},$$

so hat man

$$\mathcal{D}(A^{k-1} - 'A^{k-1}, B^{n-k}) = \mathcal{S}(U^k, B^{n-k}) = 0.$$

Ebenso kann man  $B^{n-k}$  durch eine im Komplementärraum von  $A^{k-1}$  homologe Kette ersetzen.

Dagegen ändert sich  $\mathcal{D}(A^{k-1}, B^{n-k})$  um eine ganze Zahl, wenn man  $A^{k-1}$  durch eine beliebige in  $\mathfrak{M}^n$  homologe und zu  $B^{n-k}$  punktfremde Kette ersetzt. Denn da  $A^{k-1} - 'A^{k-1}$  alsdann eine beliebige nullhomologe Kette ist, so ist die Verschlingungszahl mit  $B^{n-k}$ , wie wir zuerst sahen, eine ganze Zahl. Man kann somit zwei Homologieklassen  $H^{k-1}$  und  $H^{n-k}$ , die als Elemente der Homologiegruppen endliche Ordnungen haben, eine bis auf ganze Zahlen bestimmte Verschlingungszahl

zuordnen, nämlich die Verschlingungszahl irgend zweier einander nicht treffender Repräsentanten. Insbesondere entspricht in einer  $(2m+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit jeder Homologieklasse endlicher Ordnung von der Dimension  $m$  eine *Eigenverschlingungszahl*, das ist die Verschlingungszahl zweier punktfremder homologer  $m$ -Ketten. Diese Eigenverschlingungszahlen stellen Invarianten der Mannigfaltigkeit dar und können bisweilen zur Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten benutzt werden, was wir am Beispiel der Linsenräume erläutern wollen.

Um im Linsenraume  $(p, q)$  die Eigenverschlingungszahl der Achse  $b$  zu ermitteln, deformieren wir sie, indem wir den Anfangspunkt auf der unteren Kalotte in einen Punkt  $P'$  der scharfen Linsenkante überführen. Der äquivalente Endpunkt  $Q$  wandert dann von selbst auf der oberen Kalotte nach einem bestimmten Punkte  $Q'$  der Linsenkante. Die übrigen Punkte von  $b$  lassen wir im Innern der Linse in den Verbindungsbogen  $b' = P'Q'$  der scharfen Kante übergehen, der den  $\frac{q}{p}$ -ten Teil der Gesamtkante ausmacht.  $b$  und  $b'$  sind zwei homologe geschlossene 1-Ketten. Um ihre Verschlingungszahl zu bestimmen, nehmen wir das  $p$ -fache von  $b'$ , das ist die  $q$ -mal durchlaufene Linsenkante, und spannen in sie eine 2-Kette ein, etwa die  $q$ -fach genommene Kreisfläche  $K^2$ , die die Linse in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Da sich  $b$  und  $K^2$  glatt durchsetzen, so ist ihre Schnittzahl  $\pm 1$ , daher  $\mathcal{S}(b, qK^2) = \pm q$  und die gesuchte Eigenverschlingungszahl

$$\mathcal{D}(b, b') = \pm \frac{q}{p}.$$

Hieraus kann man die Eigenverschlingungszahlen der übrigen Homologieklassen dadurch ableiten, daß man zum  $v$ -fachen der Achse  $b$  übergeht ( $v = 0, 1, \dots, p-1$ ). Denn die geschlossene 1-Kette  $b$  bildet eine Homologiebasis der Dimension 1. Man hat

$$\mathcal{D}(vb, vb') = \pm v^2 \frac{q}{p},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nach der Orientierung des Linsenraumes.

Damit zwei Linsenräume  $(p, q)$  und  $(p', q')$  homöomorph seien, ist zunächst die Übereinstimmung der Fundamentalgruppen, d. h.  $p = p'$  eine notwendige Bedingung. Außerdem muß aber die in  $(p, q')$  auftretende Eigenverschlingungszahl  $\frac{q'}{p}$  auch in  $(p, q)$  vorkommen. Es muß daher  $\frac{q'}{p}$  einer der Zahlen  $\pm v^2 \frac{q}{p}$  kongruent mod 1 sein. Es muß also eine ganze Zahl  $v$  geben, so daß

$$q' \equiv \pm v^2 q \pmod{p}$$

ist. Nimmt man z. B.  $(p, q) = (5, 1)$ , so wird diese Kongruenz nur von  $q' = \pm 1$  erfüllt.  $q' = 2$  ist also keine Lösung. Sicher sind daher die Linsenräume  $(5, 1)$  und  $(5, 2)$  verschieden (Alexander [2], [10]).

Der Wertevorrat möglicher Eigenverschlingungszahlen von 1-Ketten einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist also eine topologische Invariante, die unter Umständen noch da Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden gestattet, wo das stärkste uns bisher bekannte Unterscheidungsmerkmal, die Fundamentalgruppe, versagt.

Für  $(7, 1)$  und  $(7, 2)$  dagegen lösen auch die Verschlingungszahlen nicht das Homöomorphieproblem, da der Wertevorrat der Eigenverschlingungszahlen für beide Linsenräume der gleiche ist, wie man leicht nachrechnet.

Im Linsenraum  $(3, 1)$  sind die möglichen Eigenverschlingungszahlen

$$0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{3} \equiv \frac{1}{3} \pmod{1}$$

bei der einen Orientierung und  $0, -\frac{1}{3}$  bei der anderen Orientierung des Raumes. Da die beiden Systeme verschieden sind, so folgt, daß es unmöglich ist, den Linsenraum  $(3, 1)$  mit Umkehrung der Orientierung topologisch auf sich abzubilden, wofür man auch sagt: Der Linsenraum  $(3, 1)$  ist *asymmetrisch*. Diese Erscheinung tritt erstmalig bei den dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten zutage.<sup>48</sup>

**Aufgaben:** 1. Die beiden Mannigfaltigkeiten, die man aus zwei Linsenräumen  $(3, 1)$  durch Summenbildung (vgl. Aufg. 3 von § 62) erhält, sind nicht homöomorph, obwohl sie gleiche Fundamentalgruppen haben. [Man stelle eine Homologiebasis für die zusammengesetzte Mannigfaltigkeit auf und ermittle den Wertevorrat der Eigenverschlingungszahlen.]

2. In einer orientierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  gibt es eine Torsionsbasis der Dimension  $k$ :  $A_1^k, A_2^k, \dots, A_{q^k}^k$  und eine Torsionsbasis der Dimension  $n-k-1$ :  $B_1^{n-k-1}, B_2^{n-k-1}, \dots, B_{q^k}^{n-k-1}$  derart, daß die Verschlingungszahl  $\mathcal{D}(A_\mu^k, B_\nu^{n-k-1}) = 0$  für  $\mu \neq \nu$  und  $= \frac{1}{c_\mu}$  für  $\mu = \nu$  ist. Dabei bezeichnet  $c_\mu$  den zu  $A_\mu^k$  gehörigen Torsionskoeffizienten. [Vgl. § 71.]

3. Hat eine dreidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^3$  genau einen Torsionskoeffizienten der Dimension 1, so gibt es mindestens eine 1-Kette mit einer von 1 verschiedenen Eigenverschlingungszahl.

4. Hat eine orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit eine Primzahl der Form  $4x+3$  zum einzigen Torsionskoeffizienten der Dimension 1, so ist sie asymmetrisch.

Wir haben schon mehrfach den Außenraum eines Knotens in den Kreis unserer Betrachtung gezogen. Das eine Mal dienten uns die Torusknoten zur Illustration der Fundamentalgruppe (§ 52), ein anderes Mal ein beliebiger Knoten zur Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (§ 65), und in § 58 haben wir die Kleeblattschlinge zur Demonstration von Überlagerungskomplexen benutzt. Diese letzte Anwendung steht in enger Beziehung zu den Verschlingungszahlen.

In der simplizial zerlegten 3-Sphäre  $\mathbb{S}^3$  liege ein mit einer bestimmten Orientierung versehener Knoten  $k$ . Er setzt sich aus Kanten der simplizialen Zerlegung zusammen. Überdies gehe er niemals durch die sämtlichen Ecken eines Dreiecks und enthalte kein 1-Simplex als Sehne. Faßt man die normal unterteilten Simplexe von  $\mathbb{S}^3$  als Zellen einer Zellteilung  $\mathbb{S}_a^3$  auf, so besteht die in § 65 erklärte Ausbohrung des Knotens darin, daß alle 3-Zellen der dualen Zellteilung  $\mathbb{S}_b^3$ , deren Mittelpunkte die Ecken von  $k$  sind, fortgelassen werden. Die zu den Kanten von  $k$  dualen 2-Zellen sind Meridianschnitte des ausgebohrten Vollrings  $\mathfrak{B}$ , und ihre Randkreise sind Meridiankreise von  $\mathfrak{B}$ . Sie sind bei geeigneter Orientierung alle untereinander homolog auf der Randringfläche  $\mathfrak{T}$  von  $\mathfrak{B}$ . Eine beliebige auf  $\mathbb{S}_b^3$  liegende 1-Zellenkette  $u$  des Außenraumes  $\mathfrak{U}$  ist nullhomolog in  $\mathbb{S}^3$  und daher Rand einer Zellenkette  $U^2$ . Läßt man aus  $U^2$  alle Zellen fort, die zu Kanten von  $k$  dual sind, d. h. alle Meridianschnitte des Vollrings  $\mathfrak{B}$ , so ergibt sich eine Kette  $'U^2$ , deren Rand von  $u$  und gewissen

Meridiankreisen von  $\mathfrak{B}$  gebildet wird. Also ist, da alle Meridiankreise homolog auf  $\mathfrak{T}$  zu einem festen Meridiankreise  $m_0$  sind,

$$u \sim \alpha m_0 \quad (\text{auf } \mathfrak{U}).$$

$\alpha$  gibt die Verschlingungszahl von  $u$  mit  $k$  an. Denn  $m_0$  hat mit  $k$  die Verschlingungszahl 1 bei passender Orientierung von  $\mathbb{S}^3$ . Daher ist

$$\mathcal{D}(k, u) = \mathcal{D}(k, \alpha m_0) = \alpha.$$

Haben nun zwei Zellenketten  $u$  und  $v$  dieselbe Verschlingungszahl  $\alpha$  mit  $k$ , so sind sie beide  $\sim \alpha m_0$  und daher einander homolog auf  $\mathfrak{U}$ . Da ferner jede beliebige singuläre geschlossene 1-Kette auf  $\mathfrak{U}$  homolog einer Zellenkette ist, so folgt:

**Satz:** Zwei singuläre 1-Ketten  $u$  und  $v$  im Außenraum  $\mathfrak{U}$  eines Knotens  $k$  sind dann und nur dann homolog auf  $\mathfrak{U}$ , wenn sie die gleichen Verschlingungszahlen mit  $k$  haben.

Damit ist aufs neue bewiesen, daß die Homologiegruppe von  $\mathfrak{U}$  die freie zyklische Gruppe ist (§ 65).

In der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  des Außenraumes  $\mathfrak{U}$ , der sogenannten *Knotengruppe*, bilden diejenigen Wege, deren Verschlingungszahl mit dem Knoten  $k$  durch eine bestimmte Zahl  $g$  teilbar ist, eine Untergruppe  $\mathfrak{H}$ .

Wir wollen die zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$  gehörige Überlagerung  $\tilde{\mathfrak{U}}$  von  $\mathfrak{U}$  untersuchen.

Jedem Element von  $\mathfrak{F}$  gehört eine bestimmte Verschlingungszahl zu, nämlich die Verschlingungszahl irgendeines repräsentierenden Weges mit dem Knoten  $k$ . Indem man jedem Element von  $\mathfrak{F}$  seine mod  $g$  reduzierte Verschlingungszahl zuordnet, wird eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf die zyklische Gruppe der Ordnung  $g$  hergestellt, bei der gerade die Untergruppe  $\mathfrak{H}$  in das Einselement übergeht.  $\mathfrak{H}$  ist also Normalteiler und  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  zyklisch von der Ordnung  $g$ . Die Überlagerung  $\tilde{\mathfrak{U}}$  ist somit regulär und die Deckbewegungsgruppe ist zyklisch, d. h.  $\tilde{\mathfrak{U}}$  ist eine zyklische Überlagerung im Sinne von S. 203.  $\tilde{\mathfrak{U}}$  ist dadurch charakterisiert, daß ein geschlossener Weg des Grundkomplexes  $\mathfrak{U}$  dann und nur dann nach Durchdrückung in den Überlagerungskomplex  $\tilde{\mathfrak{U}}$  geschlossen ist, wenn seine Verschlingungszahl mit  $k$  kongruent 0 (mod  $g$ ) ist.

Die hier angegebene Überlagerung ist übrigens die einzige  $g$ -blätterige zyklische Überlagerung. Ist nämlich  $\mathfrak{H}$  der zu einer vorgegebenen zyklischen Überlagerung gehörige Normalteiler der Knotengruppe  $\mathfrak{F}$ , so ist  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  zyklisch von der Ordnung  $g$ . Bei der homomorphen Abbildung  $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  geht darum jeder Kommutator  $F_i F_k F_i^{-1} F_k^{-1}$  in das Einselement von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  über. D. h. jeder Kommutator von  $\mathfrak{F}$  gehört zu  $\mathfrak{H}$ , und daher enthält  $\mathfrak{H}$  die Kommutatorgruppe  $\mathfrak{K}$  von  $\mathfrak{F}$ .  $\mathfrak{H}$  besteht somit aus gewissen Restklassen der Zerlegung von  $\mathfrak{F}$  nach  $\mathfrak{K}$ , und diese Restklassen, als Elemente der Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$  aufgefaßt, bilden eine Untergruppe vom Index  $g$  in  $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ . Nun ist aber  $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$  die abelsch gemachte Knotengruppe, also die freie zyklische

Gruppe. Diese hat nur eine Untergruppe vom Index  $g$ . Damit ist die Einzigkeit von  $\mathfrak{A}$  bewiesen und zugleich ein rein gruppentheoretischer Beweis für die Existenz der zyklischen Überlagerung erbracht.

Man kann beweisen, daß sich in jeden Knoten eine singularitätenfreie orientierbare Fläche einspannen läßt, die den Knoten zum Rand hat. Man erhält dann die  $g$ -blätterige zyklische Überlagerung auch dadurch, daß man den Außenraum  $\mathfrak{A}$  längs dieser Fläche zu einem „Blatt“ aufschneidet und  $g$  solche Blätter zyklisch aneinanderheftet. Denn die entstehende Überlagerung läßt offenbar eine zyklische Deckbewegungsgruppe der Ordnung  $g$  zu.

Die zyklischen Überlagerungen spielen in der Knotentheorie eine Rolle. Während die abelsch gemachte Knotengruppe immer die freie zyklische Gruppe ist, haben die endlichblätterigen zyklischen Überlagerungen im allgemeinen Torsionskoeffizienten der Dimension 1. Eine notwendige Bedingung für die Gleichheit zweier Knoten ist die Übereinstimmung der Torsionskoeffizienten der  $g$ -blätterigen zyklischen Überlagerungen.\*)

Statt für den Außenraum  $\mathfrak{A}$ , also für die 3-Sphäre, aus der der Knoten ausgebohrt ist, hätten wir die zyklischen Überlagerungen ebensogut für den Komplementärraum des Knotens definieren können, das ist der Raum  $S^3 - k$ , also die 3-Sphäre, aus der die Punkte des Knotens entfernt sind. Denn der Satz dieses Paragraphen gilt auch noch, wenn man  $\mathfrak{A}$  durch  $S^3 - k$  ersetzt. Wenn nämlich  $u$  und  $v$  zwei singuläre 1-Ketten in  $S^3 - k$  sind, so kann man  $k$  durch einen so dünnen Vollring ausbohren, daß  $u$  und  $v$  ganz im Außenraum  $\mathfrak{A}$  liegen. Haben nun  $u$  und  $v$  die gleiche Verschlingungszahl  $\mathcal{V}(k, u) = \mathcal{V}(k, v)$  mit dem Knoten, so ist  $u \sim v$  im Außenraume  $\mathfrak{A}$ , also erst recht im Komplementärraume  $S^3 - k$ . —  $\mathfrak{A}$  ist ein endlicher,  $S^3 - k$  ein unendlicher Komplex.

\*) J. W. Alexander [17], K. Reidemeister [6], wo man auch weitere Literaturangaben findet.

## Elftes Kapitel.

### Stetige Abbildungen.

#### § 78. Abbildungsgrad.

Von den zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten der bisher entwickelten Methoden in der Theorie der Abbildungen von Komplexen und Mannigfaltigkeiten greifen wir nur zwei heraus: den Abbildungsgrad und die Fixpunktformel.

In § 31 hatten wir die stetigen Abbildungen eines Komplexes  $\mathfrak{K}$  in einen Komplex  $K$  in Abbildungsklassen, d. h. Klassen homotop ineinander deformierbarer Abbildungen eingeteilt. Es ist ein wichtiges Problem der Topologie, alle möglichen Abbildungsklassen für zwei vorgelegte Komplexe  $\mathfrak{K}$  und  $K$  anzugeben. In dieser Allgemeinheit ist das Problem freilich nur für spezielle Komplexe gelöst, z. B. für den Fall, daß  $K$  die  $n$ -Sphäre und  $\mathfrak{K}$  ein beliebiger  $n$ -dimensionaler Komplex ist.\*.) Notwendige Bedingungen dafür, daß zwei Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  zur selben Klasse gehören, haben wir schon kennengelernt: die durch  $\varphi$  und  $\psi$  bewirkten homomorphen Abbildungen der Homologiegruppen von  $\mathfrak{K}$  in die von  $K$  und ebenso die (bis auf innere Automorphismen bestimmte) homomorphe Abbildung der Fundamentalgruppe von  $\mathfrak{K}$  in die Fundamentalgruppe von  $K$ , müssen für  $\varphi$  und  $\psi$  übereinstimmen.

Sind insbesondere  $\mathfrak{K}$  und  $K$  orientierbare und in bestimmter Weise orientierte geschlossene Pseudomannigfaltigkeiten derselben Dimension  $n$ , so ist die  $n$ -te Homologiegruppe in beiden Komplexen die freie zyklische Gruppe. Eine Homologiebasis in  $\mathfrak{K}$  ( $K$ ) wird z. B. von der  $n$ -Kette  $B^n$  ( $B^n$ ) gebildet, die durch kohärente Orientierung der Simplexe einer bestimmten simplizialen Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  ( $K$ ) entsteht. Die durch die stetige Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{K}$  in  $K$  bewirkte homomorphe Abbildung der  $n$ -ten Homologiegruppe ist dann durch eine einzige Zahl  $\gamma$  gegeben, die angibt, daß das Bild der Kette  $B^n$  homolog  $\gamma B^n$  ist.  $\gamma$  heißt der Abbildungsgrad<sup>49</sup> der Abbildung  $\varphi$ . Der Abbildungsgrad ist also eine Invariante der Abbildungsklasse. Deformiert man  $\varphi$  in eine simpliziale Abbildung  $\psi$  (nach vorheriger genügend feiner Unterteilung von  $\mathfrak{K}$ ), so gehen bei  $\psi$  die Simplexe von  $\mathfrak{K}$  in unter Umständen ausgeartete Simplexe von  $K$  über, und das Bild der Kette  $B^n$  ist nicht nur homolog, sondern direkt gleich der Kette  $\gamma B^n$ . In ein bestimmtes Simplex  $\Sigma^n$  der simplizialen Zerlegung von  $K$  werden sich etwa  $a$  Simplexe von  $\mathfrak{K}$  mit Erhaltung und

\*) Vgl. H. Hopf [19].

$b$  Simplexe mit Umkehrung der Orientierung abbilden. Dann ist  $\gamma = a - b$ . Anschaulich gesprochen: der Abbildungsgrad gibt an, wie oft  $K$  von dem Bild von  $\mathfrak{K}$  positiv überdeckt wird.

**Beispiele:** Die S. 117 betrachtete Selbstabbildung des Randes eines  $n$ -Simplexes, bei der sich zwei Ecken vertauschen, während alle anderen fest bleiben, hat den Abbildungsgrad  $\gamma = -1$ . Ein Beispiel für eine Abbildung von beliebigem Abbildungsgrade  $\gamma$  erhält man so: Auf einer Kugelfläche  $S^2$  sei  $\lambda$  die geographische Länge und  $\vartheta$  die Breite. Durch die Formeln

$$\lambda' = \gamma \lambda, \quad \vartheta' = \vartheta$$

wird eine stetige Abbildung von  $S^2$  in eine andere Kugelfläche ' $S^2$ ' mit den geographischen Koordinaten  $\lambda'$ ,  $\vartheta'$  hergestellt. Der Abbildungsgrad ist  $\gamma$  bei passender Orientierung von  $S^2$  und ' $S^2$ '. Ist nämlich  $\gamma \neq 0$ , so geht eine simpliziale Zerlegung von  $S^2$ , die durch den Äquator und  $3\gamma$  äquidistante Meridiankreise hergestellt wird, bei der Abbildung in eine von dem Äquator und  $3$  äquidistanten Meridiankreisen bewirkte simpliziale Zerlegung von ' $S^2$ ' über. Jedes Dreieck von ' $S^2$ ' wird dann von  $|\gamma|$  Dreiecken von  $S^2$  gleichsinnig überdeckt. Ist aber  $\gamma = 0$ , so wird ganz  $S^2$  in einen einzigen Meridiankreis von ' $S^2$ ' abgebildet, und der Abbildungsgrad ist  $0$  auf Grund des folgenden Satzes.

*Wird bei der stetigen Abbildung  $\varphi$  ein Punkt  $P$  von  $K$  nicht vom Bilde von  $\mathfrak{K}$  überdeckt, oder läßt sich  $\varphi$  in eine Abbildung  $\psi$  mit dieser Eigenschaft deformieren, so ist der Abbildungsgrad 0.*

**Beweis:** Man macht  $P$  zur Ecke einer simplizialen Zerlegung von  $K$ , die so fein sein soll, daß der Simplexstern  $St^n$  um  $P$  fremd zu  $\varphi(\mathfrak{K})$  ist. Die singuläre Kette  $\psi(B^n)$  liegt dann auf dem Komplexe  $\bar{K}$ , der aus  $K$  durch Fortlassen der  $n$ -Simplexe von  $St^n$  übrig bleibt. Nach dem Approximationssatz (§ 28) gibt es auf  $\bar{K}$  eine homologe simpliziale Kette, die gleich  $0$  sein muß, weil sie die Simplexe von  $St^n$  nicht enthält; daher ist  $\psi(B^n) \sim 0$  auf  $K$ , d. h.  $\psi$  hat den Abbildungsgrad  $0$ .

Läßt man  $\mathfrak{K}$  mit  $K$  zusammenfallen, so ergibt sich: Eine Deformation eines Komplexes in sich hat den Abbildungsgrad  $+1$ . Denn die identische Selbstabbildung hat den Abbildungsgrad  $+1$ .

$\mathfrak{K}$  sei vermöge  $\varphi$  stetig in  $K$  und  $K$  vermöge  $\varphi_1$  stetig in  $K_1$  abgebildet. Dann ist  $\varphi_1 \varphi$  eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{K}$  in  $K_1$ . Sind  $\gamma$  und  $\gamma_1$  die Abbildungsgrade von  $\varphi$  und  $\varphi_1$ , so ist der Abbildungsgrad von  $\varphi_1 \varphi$  gleich  $\gamma_1 \gamma$ . Hat nämlich die Kette  $B_1^n$  auf  $K_1$  dieselbe Bedeutung wie  $B^n$  auf  $\mathfrak{K}$  und  $B^n$  auf  $K$ , so ist

$$\varphi(B^n) \sim \gamma B^n \quad (\text{auf } K), \quad (1)$$

$$\varphi_1(B_1^n) \sim \gamma_1 B_1^n \quad (\text{auf } K_1). \quad (2)$$

Die Homologie (1) bleibt bei der Abbildung  $\varphi_1$  erhalten (§ 27, Satz I). Daher ist

$$\varphi_1(\varphi(B^n)) \sim \gamma \varphi_1(B^n) \sim \gamma \gamma_1 B_1^n \quad (\text{auf } K_1),$$

was zu beweisen war.

Ist insbesondere  $\varphi$  eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{K}$  auf  $K$  und  $\varphi_1$  die reziproke, so ist  $\varphi_1 \varphi$  die identische Abbildung, also  $\gamma \gamma_1 = 1$  und daher  $\gamma = \gamma_1 = \pm 1$ . Eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{K}$  auf  $K$  hat den Abbildungsgrad  $\pm 1$ . Dies haben wir schon in § 36 erkannt. Auf Grund dieser Tatsache teilen wir die topologischen Abbildungen von  $\mathfrak{K}$  auf  $K$  in Abbildungen mit und ohne Erhaltung der Orientierung ein, je nachdem der Abbildungsgrad  $+1$  oder  $-1$  ist.

Ist  $K$  sogar eine Mannigfaltigkeit, so kann man den Abbildungsgrad auch als Schnittzahl eines (mit dem Vorzeichen + orientierten) Punktes  $P$  von  $K$  mit der Bildkette  $\varphi(B^n) \sim \gamma B^n$  auffassen. Denn es ist  $\delta(P, \varphi(B^n)) = \delta(P, \gamma B^n) = \gamma \delta(P, B^n) = \gamma$  (S. 247). Diese Definition ist auch dann noch brauchbar, wenn man annimmt, daß  $\mathfrak{K}$  eine berandete orientierbare Pseudomannigfaltigkeit und  $K$  eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit ist, wenn es sich also z. B. um die Abbildung einer Kreisscheibe in eine Kugelfläche handelt; der Abbildungsgrad ist dann freilich immer nur in bezug auf einen bestimmten Punkt von  $K$  definiert, der übrigens nicht dem Bilde des Randes von  $\mathfrak{K}$  angehören darf.

**Aufgabe:** Eine  $n$ -dimensionale orientierbare berandete Pseudomannigfaltigkeit  $\mathfrak{K}$  sei stetig in eine  $n$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit  $K$  abgebildet.

a) Lassen sich zwei Punkte  $P$  und  $Q$  auf  $K$  durch einen Weg verbinden, der das Bild des Randes von  $\mathfrak{K}$  nicht trifft, so ist der Abbildungsgrad in  $P$  und  $Q$  derselbe.

b) Deformiert man die Abbildung, und ist der Punkt  $P$  von  $K$  während der ganzen Deformation fremd zum Bild des Randes von  $\mathfrak{K}$ , so bleibt der Abbildungsgrad in  $P$  während der Deformation ungeändert.

### § 79. Spurformel.

Wir wenden uns jetzt den Existenzsätzen über Fixpunkte stetiger Abbildungen zu und leiten zu dem Zwecke die fundamentale „Spurformel“ von H. Hopf ab.

$\mathbb{K}^n$  sei ein endlicher  $n$ -dimensionaler Komplex mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung. Die Anzahl der  $k$ -Simplexe sei  $a^k$  und

$$V_1^k, V_2^k, \dots, V_{a^k}^k$$

sei eine Basis des Gitters  $\mathbb{T}^k$  aller  $k$ -Ketten. Ordnet man jeder Kette  $V_x^k$  eine Kette

$$U_x^k = \sum_{i=1}^{a^k} r_{xi}^k V_i^k \quad (x = 1, 2, \dots, a^k) \quad (1^k)$$

zu, so ist durch diese lineare Transformation eine homomorphe Abbildung  $T^k$  des Gitters  $\mathbb{T}^k$  in sich gegeben. Dies sei für alle Dimensionen  $k = 0, 1, \dots, n$  geschehen. Die Abbildungen  $T^k$  sollen indessen nicht völlig unabhängig voneinander sein, vielmehr verlangen wir, daß sie randtreu sind, d. h., geht auf Grund der Gleichungen (1 $k$ ) eine Kette

$$U^k = \sum_{x=1}^{a^k} u_x V_x^k$$

in die Kette

$$'U^k = \sum_{z=1}^{ak} u_z' V_z^k$$

über, so soll  $\mathcal{R}U^k$  auf Grund der Gleichungen (1<sup>k-1</sup>) in  $\mathcal{R}'U^k$  übergehen. Im folgenden Paragraphen werden uns die randtreuen Abbildungen  $T^k$  durch eine simpliziale Selbstabbildung des Komplexes  $\mathbb{R}^n$  gegeben sein; hier aber machen wir nur von der angegebenen Voraussetzung der Randtreue Gebrauch.

Die Bedingung der Randtreue zieht nach sich, daß eine geschlossene Kette in eine geschlossene Kette, eine nullhomologe in eine nullhomologe und eine divisions-nullhomologe in eine divisions-nullhomologe übergeht. Ist nämlich z. B.  $U^{k-1} \approx 0$ , also etwa  $\mathcal{R}U^k = cU^{k-1}$ , so hat man wegen der Randtreue  $\mathcal{R}'U^k = c'U^{k-1}$ , d. h.  $'U^{k-1}$  ist ebenfalls divisions-nullhomolog. Es entspricht daher einer Klasse einander divisionshomologer  $k$ -Ketten eine bestimmte Bildklasse, woraus folgt, daß die Bettischen Gruppen der Dimensionen  $0, 1, \dots, n$  durch die randtreuen Abbildungen  $T^k$  selbst homomorphe Abbildungen in sich erfahren.

Ist  $B_\varrho^k$  ( $\varrho = 1, 2, \dots, p^k$ ) eine Bettische Basis der Dimension  $k$ , so ist die homomorphe Abbildung  $B^k$  der  $k$ -ten Bettischen Gruppe durch die Divisionshomologien

$$'B_\varrho^k \approx \sum_{\sigma=1}^{p^k} \beta_{\varrho\sigma}^k B_\sigma^k \quad (\varrho = 1, 2, \dots, p^k) \quad (2^k)$$

gegeben. Die Formel, die wir ableiten wollen, behauptet eine Beziehung zwischen den Spuren der Transformationen  $T^k$  und  $B^k$ . Unter der Spur einer linearen Transformation versteht man die Summe der in der Hauptdiagonale der Matrix stehenden Koeffizienten; also ist die Spur von  $T^k$  die Zahl

$$\mathcal{S}p T^k = \sum_{z=1}^{ak} \tau_{zz}^k,$$

die von  $B^k$

$$\mathcal{S}p B^k = \sum_{\varrho=1}^{p^k} \beta_{\varrho\varrho}^k.$$

Die Spur ist eine Invariante der Abbildung und hängt nicht von der Auswahl der Basiselemente  $V_z^k$  bzw.  $B_\varrho^k$  ab.\*)

Die aufzustellende Formel folgt unmittelbar aus der simultanen Normalform  $H^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ) der Inzidenzmatrizen (§ 21). In den Eingängen dieser Matrizen stehen drei Arten von Ketten  $A^k, B^k, C^k$ . Die  $A^k$  sind divisions-nullhomolog, die  $B^k$  bilden eine Bettische Basis, von der wir annehmen, daß die gleich bezeichnete in Formel (2<sup>k</sup>) mit ihr übereinstimmt, und die  $C^k$  sind nichtgeschlossene Ketten. Es ist

$$\mathcal{R}C_\mu^k = c_\mu^{k-1} A_\mu^{k-1} \quad (\mu = 1, 2, \dots, r^{k-1}). \quad (3)$$

\*) Vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, S. 148 (Berlin 1927). Die Spur nennt man zuweilen auch „Charakter“ der Matrix.

Die  $A^k, B^k, C^k$  bilden zusammen eine Basis für das Gitter  $\mathfrak{T}^k$  aller  $k$ -Ketten, und sie sollen als Basisketten  $V^k$  in den linearen Transformationen (1<sup>k</sup>) benutzt werden. Die quadratische Matrix  $(\tau_{\mu\nu}^k) = T^k$  der Gleichungen (1<sup>k</sup>) zerfällt dann in 9 Teilrechtecke

| $T^k$  | $A^k$                      | $B^k$                     | $C^k$                      |                |
|--------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------|
| $'A^k$ | $\alpha_{\varrho\sigma}^k$ | (1 2)                     | (1 3)                      | $\gamma^k$     |
| $'B^k$ | (2 1)                      | $\beta_{\varrho\sigma}^k$ | (2 3)                      | $p^k$          |
| $'C^k$ | (3 1)                      | (3 2)                     | $\gamma_{\varrho\sigma}^k$ | $\gamma^{k-1}$ |

Wir nutzen jetzt die Randtreue der Abbildung ( $T^k$ ) aus. Aus ihr folgt erstens, da die Ketten  $A^k$  und  $B^k$  geschlossen sind, daß gleiches von den Ketten  $'A^k$  und  $'B^k$  gilt. Daher können in den Ausdrücken für  $'A^k$  und  $'B^k$  keine Ketten  $C^k$  auftreten, und es müssen die Koeffizienten der Rechtecke (1 3) und (2 3) verschwinden. Es stimmen daher die Koeffizienten  $\beta_{\varrho\sigma}^k$  mit den bereits gleich bezeichneten Koeffizienten  $\beta_{\varrho\sigma}^k$  der Divisionshomologie (2<sup>k</sup>) überein. Zweitens sind die Ketten  $A^k$  divisions-nullhomolog, daher auch die Bilder  $'A^k$ , was nur sein kann, wenn alle Koeffizienten (1 2) verschwinden. Drittens muß Gleichung (3) in eine richtige Gleichung übergehen, wenn man die Ketten durch ihre Bilder ersetzt:

$$\mathcal{R}C_\mu^k = c_\mu^{k-1} 'A_\mu^{k-1} \quad (\mu = 1, 2, \dots, r^{k-1}).$$

Die lineare Abbildung  $T^k$  der  $k$ -Ketten liefert für  $'C_\mu^k$  einen bestimmten linearen Ausdruck in den  $A^k, B^k, C^k$ , ebenso die lineare Abbildung  $T^{k-1}$  der  $(k-1)$ -Ketten für  $'A_\mu^{k-1}$  einen bestimmten Ausdruck in den Ketten  $A^{k-1}$  allein. Führt man diese Ausdrücke in die letzte Gleichung ein und bedenkt man, daß die Ketten  $A^k$  und  $B^k$ , weil geschlossen, keinen Beitrag zum Rande liefern, so ergibt sich

$$\mathcal{R} \sum_{v=1}^{r^{k-1}} \gamma_{\mu v}^k C_v^k = c_\mu^{k-1} \sum_v \alpha_{\mu v}^{k-1} A_v^{k-1},$$

also unter Benutzung von (3)

$$\sum_v \gamma_{\mu v}^k c_v^{k-1} A_v^{k-1} = c_\mu^{k-1} \sum_v \alpha_{\mu v}^{k-1} A_v^{k-1},$$

daher

$$\gamma_{\mu v}^k c_v^{k-1} = c_\mu^{k-1} \alpha_{\mu v}^{k-1},$$

insbesondere also für  $\mu = v$

$$\gamma_{\mu\mu}^k = c_\mu^{k-1} \quad (\mu = 1, 2, \dots, r^{k-1}).$$

Die Spuren der Teilmatrizen  $\Gamma^k = (\gamma_{\mu\nu}^k)$  und  $A^{k-1} = (\alpha_{\mu\nu}^{k-1})$  stimmen also überein:

$$\mathcal{S}p \Gamma^k = \mathcal{S}p A^{k-1}. \quad (4)$$

Wir bilden unter Benutzung dieser Gleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \mathcal{S}_P T^k &= \sum (-1)^k \mathcal{S}_P A^k + \sum (-1)^k \mathcal{S}_P B^k + \sum (-1)^k \mathcal{S}_P C^k \\ &= \sum (-1)^k \mathcal{S}_P B^k + \mathcal{S}_P C^0 + (-1)^n \mathcal{S}_P A^n.\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_P A^n$  ist = 0, da es keine divisions-nullhomologen  $n$ -Ketten gibt, und  $\mathcal{S}_P C^0$  ist = 0, weil alle 0-Ketten geschlossen sind. Daher gilt die Spurformel von H. Hopf

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \mathcal{S}_P T^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathcal{S}_P B^k. \quad (\text{H})$$

Nimmt man als die Abbildungen  $T^k$  die identischen Abbildungen, so ist die Matrix  $T^k$  die  $\alpha^k$ -reihige Einheitsmatrix und  $B^k$  die  $p^k$ -reihige Einheitsmatrix, also

$$\mathcal{S}_P T^k = \alpha^k \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_P B^k = p^k,$$

und die Spurformel geht in die Eulersche Formel (§ 23)

$$\sum (-1)^k \alpha^k = \sum (-1)^k p^k$$

über, als deren Verallgemeinerung sie sich dadurch darstellt.

### § 80. Fixpunktformel.

Wir betrachten nun eine beliebige stetige Selbstabbildung  $g_0$  unseres endlichen Komplexes  $\mathbb{R}^n$ . Wir zeichnen auf  $\mathbb{R}^n$  zwei simpliziale Zerlegungen aus, eine grobe und eine feine. Die feine sei aus der groben durch  $m$ -fache Normalunterteilung hervorgegangen und so fein, daß das Bild eines jeden Simplexsternes ganz im Innern eines Simplexsternes der groben Teilung liegt, was nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit erreichbar ist.

Nach dem Deformationssatz kann man dann  $g_0$  in eine simpliziale Abbildung  $g_1$  deformieren. Bei  $g_1$  geht ein orientiertes  $k$ -Simplex  $e_v^k$  der feinen Teilung in ein orientiertes Simplex  $E_v^k$  über:

$$e_v^k \rightarrow E_v^k. \quad (1)$$

$E_v^k$  ist entweder ein  $k$ -Simplex der groben Teilung oder, falls bei der simplizialen Abbildung  $e_v^k$  in ein Simplex von niedriger als  $k$ -ter Dimension übergeht, ein ausgeartetes Simplex, also gleichbedeutend mit der  $k$ -Kette 0. Da die  $m$ -fache Normalunterteilung  $E_v^k$  von  $E_v^k$  eine  $k$ -Kette auf der feinen Teilung ist, so ordnet die simpliziale Abbildung  $g_1$  jedem  $k$ -Simplex  $e_v^k$  eine bestimmte  $k$ -Kette  $\dot{E}_v^k$  der feinen Teilung zu:

$$e_v^k \rightarrow \dot{E}_v^k. \quad (2)$$

Einer beliebigen Kette  $\sum u_v e_v^k$  entspricht dann die Kette  $\sum u_v \dot{E}_v^k$ . Damit ist eine homomorphe Abbildung  $T^k$  des Gitters  $\mathfrak{T}^k$  aller  $k$ -Ketten der feinen Teilung in sich gegeben.

Sie ist randtreu, weil  $\partial \mathcal{S}_P$  in den  $m$ -fach normalunterteilten Rand von  $E_v^k$ , d. h. in  $\partial E_v^k$  übergeht, denn der Rand der Normalunterteilung eines Simplexes ist gleich der Normalunterteilung des Randes (S. 106). Man kann daher auf diese homomorphe Abbildung die Formel (H) von § 79 anwenden.

Nun wird die Bedingung hinzugenommen, daß die Abbildung  $g_0$  fixpunktlos sei. Denkt man sich  $\mathbb{R}^n$  in einen Zahlenraum gelegt, so ist die Entfernung eines Punktes  $P$  von seinem Bildpunkt  $g_0(P)$  eine stetige Funktion von  $P$ . Die untere Grenze  $\delta$  dieser Entfernungen, die nach S. 29 Satz III wirklich angenommen wird, ist wegen der Fixpunktlosigkeit von  $g_0$  positiv. Wählt man nun die grobe Teilung schon so fein, daß der Durchmesser eines jeden Simplexes kleiner als  $\frac{\delta}{2}$  ist, so gehören Originalpunkt und Bildpunkt bei  $g_0$  punktfremden Simplexen an. Gleicher gilt dann bei der approximierenden simplizialen Abbildung  $g_1$ , da bei der Approximation kein Punkt ein Simplex verläßt, dem er zu Anfang angehörte (§ 31). Die Bildkette  $\dot{E}_v^k$  von  $e_v^k$  enthält also  $e_v^k$  nicht. Daher ist

$$\mathcal{S}_P T^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Die Spurformel (H) geht also bei der fixpunktlosen Abbildung (2) über in

$$\sum (-1)^k \mathcal{S}_P B^k = 0.$$

Es handelt sich dabei zunächst um die durch (2) bewirkte Abbildung der Bettischen Gruppen, das ist aber dieselbe wie die, die durch (1) bewirkt wird. Denn das Bild einer geschlossenen Kette bei (2) ist eine Unterteilung des Bildes bei (1), und daher sind die beiden Bilder homolog. Die durch (1) bewirkte homomorphe Abbildung ist nun ihrerseits dieselbe wie die durch  $g_0$  bewirkte, da die beiden Abbildungen ineinander deformierbar sind (§ 31, Satz III).

Wir haben daher das folgende Ergebnis gewonnen, aus dem alle Approximationen wieder verschwunden sind:

Satz: Eine notwendige Bedingung für Fixpunktlosigkeit einer stetigen Selbstabbildung eines endlichen Komplexes  $\mathbb{R}^n$  in sich besteht darin, daß die Wechselsumme über die Spuren der homomorphen Abbildungen, die die Bettischen Gruppen erfahren, = 0 ist:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \mathcal{S}_P B^k = 0 \quad (\text{Fixpunktformel}).^{50} \quad (\text{F})$$

### § 81. Anwendungen.

Für die folgenden Beispiele zur Formel (F) sind drei Bemerkungen wichtig: Der Komplex  $\mathbb{R}^n$  sei zusammenhängend. Dann wird eine Bettische Basis der Dimension 0 von einem mit + orientierten Punkte gebildet (S. 65). Dieser geht bei einer stetigen Abbildung in einen mit + orientierten Punkt über. Daher ist die Spur der Abbildung der nullten Bettischen Gruppe = 1. Mit anderen Worten:

(I) Aus  $p^0 = 1$  folgt  $\mathcal{S}_P B^0 = 1$ .

Weil im Falle  $p^k = 0$  die Bettische Basis aus 0  $k$ -Ketten besteht, ergibt sich ferner:

(II) Aus  $p^k = 0$  folgt  $\delta p B^k = 0$ .

(III) Wenn  $\mathfrak{B}^n$  eine orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, so ist die Bettische Zahl  $p^n = 1$ , und eine Bettische Basis wird von der  $n$ -Kette  $M^n$  gebildet, die aus der kohärenten orientierten Mannigfaltigkeit besteht. Ist das Bild von  $M^n$  homolog zu  $M^n$ , so ist  $\delta p B^n = \gamma$ , wobei  $\gamma$  der Abbildungsgrad ist.

1. Beispiel:  $n$ -dimensionale Vollkugel. Nach § 19 ist

$$p^0 = 1, p^1 = p^2 = \dots = p^n = 0,$$

nach Bemerkung (I) und (II) daher

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \delta p B^k = 1 - 0 + 0 - \dots = 1 \neq 0.$$

Eine stetige Selbstabbildung der Vollkugel hat also stets mindestens einen Fixpunkt.

2. Beispiel:  $n$ -Sphäre. Nach § 19 gilt

$$p^0 = 1, p^1 = \dots = p^{n-1} = 0, p^n = 1.$$

Nun ist nach der Fixpunktformel

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \delta p B^k = 1 + (-1)^n \gamma = 0,$$

wenn die Abbildung fixpunktlos sein soll. Also ist der Abbildungsgrad einer fixpunktlosen Selbstabbildung der  $n$ -Sphäre  $\gamma = (-1)^{n+1}$ . Dieses Ergebnis lässt sich auch auf elementarem Wege einsehen: Ist  $P'$  das Bild eines Punktes  $P$  bei einer fixpunktlosen Selbstabbildung  $g_0$  der Einheits- $n$ -Sphäre, so lasse man  $P'$  auf dem von  $P$  und  $P'$  bestimmten Hauptkreise in den Diametralpunkt von  $P$  wandern. Dies ist eine homotope Deformation der Abbildung  $g_0$  in die Diametralpunktvertauschung  $g_1$ .  $g_0$  und  $g_1$  haben denselben Abbildungsgrad (S. 283). Der Abbildungsgrad von  $g_1$  ist aber  $(-1)^{n+1}$ , da man die Diametralpunktvertauschung als Produkt von  $n+1$  Spiegelungen auffassen kann, deren jede den Abbildungsgrad  $-1$  hat. Man bestätigt das Ergebnis leicht an den Dimensionen  $n = 1, 2, 3$ .

3. Beispiel: Fixpunktlose Deformationen. Ist die stetige Selbstabbildung eine Deformation eines Komplexes in sich, so ist die homomorphe Abbildung der Bettischen Gruppen die Identität (§ 31, Satz IV) und daher

$$\delta p B^k = p^k.$$

Mithin ist nach § 23, Formel (12)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \delta p B^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k p^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^k = -N.$$

Daher ist nach der Fixpunktformel das Verschwinden der Eulerschen Charakteristik eine notwendige Bedingung für die Existenz fixpunktloser Deformationen.<sup>51</sup>

Ist der Komplex  $\mathfrak{B}^n$  insbesondere eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$ , so ist für ungerades  $n$  diese Bedingung (§ 69 Satz IV) stets erfüllt, für gerades  $n$  dagegen beschränkt sie die Mannigfaltigkeiten, die eine fixpunktlose Deformation zulassen. Z. B. ist für geschlossene Flächen ( $n = 2$ )

$$N = 2(h-1) \text{ bzw. } = k-2,$$

wo  $h$  und  $k$  Henkel- und Kreuzhaubenzahl der geschlossenen Fläche sind. Nur für  $h = 1$  und  $k = 2$ , d. h. für orientierbare und nichtorientierbare Ringfläche, verschwindet  $N$ ; nur diese beiden geschlossenen Flächen lassen also möglicherweise fixpunktlose Deformationen zu. In der Tat kann man für sie leicht solche angeben.

4. Beispiel: Ausgebohrte  $n$ -dimensionale Vollkugel. Aus der  $n$ -dimensionalen Vollkugel  $\mathfrak{B}^n$ , die in bestimmter simplizialer Zerlegung gegeben sei, seien die mittleren Punkte von  $l$  untereinander und mit dem Rande von  $\mathfrak{B}^n$  punktfremden orientierten  $n$ -Simplexen  $E_1^n, E_2^n, \dots, E_l^n$  entfernt. Für den übrigbleibenden Komplex  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  ist  $p^0 = 1$ . Eine geschlossene  $k$ -Kette  $U^k$  der simplizialen Zerlegung ist für  $k > 0$  nach Wiederaufüllung der Ausbohrungen, also in  $\bar{\mathfrak{B}}^n$ , nullhomolog (§ 19). Also gibt es eine simpliziale Kette  $U^{k+1}$ , deren Rand sie ist:

$$U^k = \mathcal{R}\partial U^{k+1}. \quad (1)$$

Ist nun  $k < n-1$ , so treten die ausgebohrten  $n$ -Simplexe nicht in  $U^{k+1}$  auf, also liegt  $U^{k+1}$  schon in  $\bar{\mathfrak{B}}^n$ , und  $U^k$  ist schon in  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  nullhomolog. Somit hat  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  die Bettischen Zahlen

$$p^0 = 1, p^1 = p^2 = \dots = p^{n-2} = 0. \quad (2)$$

Ist dagegen  $k = n-1$  ist, so ist die vorgegebene Kette  $U^{n-1}$  wegen der Gleichung (1) Rand einer simplizialen Kette

$$U^n = \alpha_1 E_1^n + \dots + \alpha_l E_l^n + U^n \quad (U^n \text{ auf } \bar{\mathfrak{B}}^n),$$

also

$$U^{n-1} = \mathcal{R}\partial U^n = \alpha_1 \mathcal{R}\partial E_1^n + \dots + \alpha_l \mathcal{R}\partial E_l^n + \mathcal{R}\partial' U^n,$$

oder

$$U^{n-1} \sim \alpha_1 \mathcal{R}\partial E_1^n + \dots + \alpha_l \mathcal{R}\partial E_l^n \quad (\text{auf } \bar{\mathfrak{B}}^n).$$

D. h. jede  $(n-1)$ -Kette von  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  ist homolog einer linearen Kombination der  $l$  Randketten

$$\mathcal{R}\partial E_1^n, \dots, \mathcal{R}\partial E_l^n. \quad (3)$$

Diese sind aber homolog unabhängig. Bestünde eine Homologie zwischen ihnen:

$$\beta_1 \mathcal{R}\partial E_1^n + \dots + \beta_l \mathcal{R}\partial E_l^n \sim 0,$$

so gäbe es eine  $n$ -Kette  $W^n \neq 0$  auf  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  mit dem Rand

$$\partial W^n = \beta_1 \partial E_1^n + \cdots + \beta_l \partial E_l^n.$$

Nach Ausfüllen der  $l$  Ausbohrungen wäre dann  $W^n = \beta_1 E_1^n + \cdots + \beta_l E_l^n$  eine geschlossene  $n$ -Kette auf  $\mathfrak{B}^n$ . Die einzige solche ist aber die Kette 0. Da  $W^n$  kein Simplex  $E_i^n$  enthält, so folgt hieraus  $\beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$ . Daher bilden die  $l$  Ketten (3) eine Bettische Basis der Dimension  $(n-1)$  in  $\bar{\mathfrak{B}}^n$ , und es ist  $p^{n-1} = l$ .

Von dem äußeren Rande von  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  setzen wir voraus, daß er in sich übergehe oder allgemeiner in eine homologe  $(n-1)$ -Kette; er darf also z. B. zusammenschrumpfen. Gehen dann überdies  $a$  der  $l$  Randsphären (3) einzeln in sich oder in homologe Ketten über, während  $b = l - a$  sich untereinander vertauschen, so stehen in der Hauptdiagonale der Abbildungsmatrix  $B^{n-1}$   $a$  Einsen und  $b$  Nullen. Es ist daher

$$\partial B^{n-1} = a$$

und wegen (2)

$$\partial B^0 = 1, \partial B^1 = \cdots = \partial B^{n-2} = 0.$$

Die Fixpunktformel liefert somit die folgende notwendige Bedingung für Fixpunktlosigkeit

$$1 - 0 + \cdots + (-1)^{n-1} a = 0$$

oder

$$a = (-1)^n.$$

Da  $a$  eine Anzahl ist, kann es für ungerades  $n$  überhaupt keine fixpunktlose Abbildung von  $\bar{\mathfrak{B}}^n$  geben; für gerades nur dann, wenn  $a = 1$  ist. Ein Kreisring z. B. läßt eine fixpunktlose Drehung um den Mittelpunkt zu, eine Hohlkugel dagegen keine fixpunktlose Selbstabbildung, bei der die beiden Randkugeln in homologe abgebildet werden.

**Aufgaben:** 1. Wenn bei einer eindeutigen und stetigen Abbildung der  $n$ -Sphäre in sich das Bild einen Punkt frei läßt, so hat die Abbildung einen Fixpunkt.

2. Eine stetige Selbstabbildung des projektiven Raumes  $\mathfrak{P}^n$  hat für gerades  $n$  immer einen Fixpunkt, für ungerades  $n$  muß der Abbildungsgrad  $= 1$  sein, wenn es eine fixpunktlose Abbildung geben soll.

3. Eine stetige Selbstabbildung der Kugelfläche besitzt entweder einen Fixpunkt oder einen „Diametralpunkt“ oder beides.

4. Auf der Kugelfläche gibt es kein stetiges Vektorfeld.

## Zwölftes Kapitel.

### Hilfssätze aus der Gruppentheorie.

#### § 82. Erzeugende und Relationen.

Die Topologie ist eng mit der Gruppentheorie verflochten. Die gruppentheoretischen Sätze, von denen wir im Laufe unserer topologischen Untersuchungen Gebrauch zu machen hatten, stellen wir in diesem Kapitel kurz zusammen. Im Gegensatz zu den Gruppen, die man in der Algebra oder Geometrie zumeist zu betrachten pflegt, werden die Gruppen, die in der Topologie eine Rolle spielen, meist durch Erzeugende und Relationen gegeben. Auf diese Art der Bestimmung einer Gruppe gehen wir daher an erster Stelle ein.

$\mathfrak{F}$  sei eine endliche oder unendliche Gruppe\*) und

$$A_1, A_2, \dots, A_a \quad (1)$$

eine Anzahl von (nicht notwendig verschiedenen) Elementen von  $\mathfrak{F}$ . Man sagt, daß diese Elemente *Erzeugende* von  $\mathfrak{F}$  sind, wenn sich jedes Element von  $\mathfrak{F}$  als Produkt der  $A_1, A_2, \dots, A_a$  und ihrer Reziproken

$$A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_a^{-1} \quad (2)$$

schreiben läßt. Ein solches Produkt heißt ein „Wort“. Z. B. ist  $A_1 A_1^{-1}$  oder  $A_2^{-1} A_6 A_3^5$  ein Wort. Aus formalen Gründen führen wir auch das leere Wort ein, das aus keiner der Erzeugenden besteht. Jedes Wort stellt somit ein Gruppenelement dar, aber verschiedene Wörter können dasselbe Gruppenelement sein. Insbesondere ist das leere Wort die *Gruppeneins*, die wir auch mit 1 bezeichnen. Abkürzend schreiben wir für ein Wort auch  $W(A_i)$ , und wir setzen

$$W_1(A_i) \equiv W_2(A_i)$$

(lies: *identisch*), wenn beide Wörter Element für Element übereinstimmen. Stellen dagegen  $W_1(A_i)$  und  $W_2(A_i)$  das gleiche Gruppenelement dar, ohne notwendig Element für Element übereinzustimmen, so bezeichnen wir sie als *gleich*:

$$W_1(A_i) = W_2(A_i).$$

Das Wort, das durch Umkehrung der Reihenfolge aller Elemente eines Wortes  $W(A_i)$  und gleichzeitige Umkehrung des Vorzeichens aller Ex-

\*) Definition und elementare Sätze findet man z. B. in B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I (Berlin 1930) II. Kap. oder in K. Reidemeister [7].

ponenten aus  $W(A_i)$  hervorgeht, heißt das *reziproke Wort*  $W^{-1}(A_i)$ ; es stellt bekanntlich und offenbar das zu dem Gruppenelement  $W(A_i)$  reziproke Gruppenelement dar.

Sind zwei Wörter  $W_1(A_i)$  und  $W_2(A_i)$  gleich, so nennt man die Gleichung

$$W_1(A_i) = W_2(A_i)$$

eine *Relation* der Gruppe  $\mathfrak{F}$ , die zwischen den Erzeugenden  $A_1, A_2, \dots, A_a$  besteht. Gewöhnlich schreibt man sie so, daß auf der rechten Seite die Gruppeneins steht:

$$W_1(A_i) W_2^{-1}(A_i) = 1.$$

Die Frage nach allen Relationen ist hiernach gleichbedeutend mit der Frage nach allen Darstellungen der Gruppeneins. Unter den Relationen sind immer die *trivialen Relationen*

$$A_i A_i^{-1} = 1 \quad \text{und} \quad A_i^{-1} A_i = 1 \quad (3)$$

enthalten.

Ist jetzt  $R(A_i) = 1$  eine Relation und  $W(A_i)$  irgendein Wort von  $\mathfrak{F}$ , so kann man durch „Anwendung der Relation  $R(A_i) = 1$ “ aus  $W(A_i)$  ein neues Wort gewinnen. Die Anwendung der Relation  $R(A_i) = 1$  besteht darin, daß man entweder das etwa in  $W$  auftretende Wort  $R^{\pm 1}$  herausstreicht, also von  $W \equiv W_1 R^{\pm 1} W_2$  zu dem neuen Worte  $W_1 W_2$  übergeht, oder das Wort  $R^{\pm 1}$  einfügt. Die so erhaltenen Wörter sind wegen  $R^{\pm 1} = 1$  die gleichen Gruppenelemente wie die alten.

Seien jetzt

$$R_1(A_i) = 1, \quad R_2(A_i) = 1, \quad \dots, \quad R_r(A_i) = 1 \quad (4)$$

endlich viele Relationen von  $\mathfrak{F}$ ;  $r$  darf auch  $= 0$  sein. Kann man dann durch endlichmalige Anwendung der Relationen (4) und der trivialen Relationen (3) ein Wort  $W(A_i)$  in das leere Wort überführen, so ist

$$W(A_i) = 1$$

eine Relation in  $\mathfrak{F}$  und heißt eine *Folgerelation* der Relationen (4). Wenn jede Relation von  $\mathfrak{F}$  eine Folgerelation von (4) ist, so heißt (4) ein *System definierender Relationen* der Gruppe  $\mathfrak{F}$ . Es ist dadurch charakterisiert, daß man eine beliebige Darstellung der Gruppeneins durch Anwendung der Relationen (4) und der trivialen Relationen (3) in das leere Wort überführen kann. Alsdann kann man auch jedes Wort in jedes gleiche durch Anwendung dieser Relationen überführen. — Wir verlangen von einem System definierender Relationen nicht, daß die Relationen unabhängig seien, d. h. daß keine eine Folgerelation der übrigen ist.

Zusammen mit den Erzeugenden (1) bestimmt ein System definierender Relationen (4) die Gruppe  $\mathfrak{F}$  vollständig. Denn mit (4) sind alle Folgerelationen von (4) festgelegt und damit alle Darstellungen der Gruppeneins. Dann steht aber von zwei Wörtern fest, ob sie das gleiche Gruppen-

element sind oder nicht. Dennoch ist es eine im allgemeinen ungelöste Frage der Gruppentheorie, die Entscheidung darüber, ob zwei Wörter gleich sind, durch ein Rechenverfahren herbeizuführen (Wortproblem).

Die von uns geübte Beschränkung auf endlich viele Erzeugende und definierende Relationen ist gruppentheoretisch nicht gerechtfertigt. Sind doch bekannte Gruppen, wie die aller rationalen Zahlen unter Ausschluß der Null mit der algebraischen Multiplikation als Gruppenmultiplikation nur durch unendlich viele Erzeugende darstellbar, weil es unendlich viele Primzahlen gibt. Da wir aber in der Theorie der endlichen Komplexe, die im Mittelpunkt unserer Untersuchungen steht, nur Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden und definierenden Relationen brauchen, so gehen wir der Einfachheit halber nur auf diese ein.

1. Beispiel: Die ganzen Zahlen mit der algebraischen Addition als Gruppenmultiplikation bilden eine unendliche Gruppe. Als Erzeugende  $A$  kann man die Zahl  $+1$  wählen. Die Gruppeneins ist die Zahl  $0$ , das Element  $A^k$  die Zahl  $+k$ . Ein Wort  $A^{\varepsilon_1} A^{\varepsilon_2} \dots$ , worin die  $\varepsilon = \pm 1$  sind, kann man mit Hilfe nur der trivialen Relationen in  $A^k$  überführen, und es ist nur dann gleich der Gruppeneins, wenn  $k = 0$  ist. Jede Relation ist daher eine Folgerelation der trivialen Relationen, und ein System definierender Relationen ist das leere System. Eine derartige Gruppe, die eine einzige Erzeugende und keine definierenden Relationen hat, heißt die *freie zyklische Gruppe*.

2. Beispiel: Die Restklassen der ganzen Zahlen mod  $g$  bilden bei „elementweiser“ Addition als Verknüpfung eine Gruppe der Ordnung  $g$ . Erzeugendes Element ist die Restklasse  $A$ , in der die Zahl  $1$  liegt. Ein System definierender Relationen besteht aus der einzigen Relation  $A^g = 1$ . In dieser Gleichung bedeutet  $1$  die Gruppeneins, das ist die Restklasse, in der die Zahl  $0$  liegt. Eine derartige Gruppe heißt die *zyklische Gruppe der Ordnung  $g$* .

Wenn uns eine Gruppe durch ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen gegeben ist, so leiten sich daraus andere Erzeugende und Relationensysteme durch die folgenden Operationen ab:

### 1. Hinzufügen oder Fortlassen einer Folgerelation.

Ist

$$R_1(A_i) = 1, \quad R_2(A_i) = 1, \quad \dots, \quad R_r(A_i) = 1 \quad (5)$$

ein System definierender Relationen von  $\mathfrak{F}$  und  $R_{r+1}(A_i) = 1$  eine Folgerelation von (5), so ist auch

$$R_1(A_i) = 1, \quad R_2(A_i) = 1, \quad \dots, \quad R_r(A_i) = 1, \quad R_{r+1}(A_i) = 1 \quad (6)$$

ein System definierender Relationen und umgekehrt. Denn die Gesamtheit der Folgerelationen der beiden Systeme (5) und (6) stimmt überein.

### 2. Neueinführung oder Elimination einer Erzeugenden.

Sind

$$A_1, A_2, \dots, A_a \quad (7)$$

die Erzeugenden von  $\mathfrak{F}$  und (5) die definierenden Relationen, so kann man ein beliebiges Produkt  $W(A_i) = A_{a+1}$  als neue Erzeugende einführen.

Für die Erzeugenden

$$A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1} \quad (8)$$

ist

$$R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1, A_{a+1}^{-1}W(A_i) = 1 \quad (9)$$

ein System definierender Relationen. Ist nämlich

$$R(A_1, A_2, \dots, A_{a+1}) = 1$$

eine beliebige Relation in  $\mathfrak{F}$ , so erhält man durch Anwenden der Relation  $A_{a+1} = W(A_i)$  die Relation

$$R(A_1, A_2, \dots, W(A_i)) = 1, \quad (10)$$

in der das neue Element  $A_{a+1}$  nicht mehr auftritt. Diese Relation ist eine Folgerelation der Relationen (5), weil (5) ein System definierender Relationen von  $\mathfrak{F}$  ist. Die linke Seite von (10) läßt sich also durch Anwendung der Relationen (5) und trivialer Relationen in das leere Wort überführen.

Setzen wir umgekehrt voraus, daß (9) ein System definierender Relationen zwischen den Erzeugenden (8) ist, so folgt daraus, daß auch (7) Erzeugende der Gruppe sind und (5) ein System definierender Relationen zwischen ihnen. Jedes Produkt der Erzeugenden (8) läßt sich nämlich wegen  $A_{a+1} = W(A_i)$  auch durch die Erzeugenden (7) ausdrücken. Eine Relation  $R(A_1, A_2, \dots, A_a) = 1$  ist nach Voraussetzung eine Folgerelation der Relationen (9). Es gibt daher eine endliche Folge von Wörtern

$$\begin{aligned} & R(A_1, A_2, \dots, A_a) \\ & R'(A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1}) \\ & R''(A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1}) \\ & \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

deren jedes aus dem vorangehenden durch Anwendung einer Relation (9) oder einer trivialen Relation  $A_i^\varepsilon A_i^{-\varepsilon} = 1$  ( $\varepsilon = \pm 1; i = 1, 2, \dots, a+1$ ) hervorgeht und deren letztes das leere Wort ist. Man bildet daraus, indem man überall für  $A_{a+1}$  das Wort  $W(A_i)$  einsetzt, die Folge von Wörtern

$$\begin{aligned} & R(A_1, A_2, \dots, A_a) \\ & R'(A_1, A_2, \dots, A_a, W(A_i)) \\ & R''(A_1, A_2, \dots, A_a, W(A_i)) \\ & \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen können, daß jedes dieser Wörter in das folgende allein durch Anwendung der Relationen (5) und der trivialen Relationen  $A_i^\varepsilon A_i^{-\varepsilon} = 1$  ( $i = 1, \dots, a$ ) überführbar ist, so sind wir fertig. Geht das Wort

$$R^{(k+1)}(A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1}) \text{ aus } R^{(k)}(A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1})$$

durch Anwendung einer der  $r$  ersten Relationen (9) oder einer trivialen Relation  $A_i^\varepsilon A_i^{-\varepsilon} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, a$ ) hervor, so auch das Wort

$$R^{(k+1)}(A_1, A_2, \dots, A_a, W(A_i)) \text{ aus } R^{(k)}(A_1, A_2, \dots, A_a, W(A_i))$$

durch gleichartige Anwendung derselben Relationen. Entsteht aber

$$R^{(k+1)}(A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1}) \text{ aus } R^{(k)}(A_1, A_2, \dots, A_a, A_{a+1})$$

durch Anwendung der Relation  $A_{a+1}^{-1}W(A_i) = 1$  oder einer trivialen Relation  $A_{a+1}^\varepsilon A_{a+1}^{-\varepsilon} = 1$ , so

$$R^{(k+1)}(A_1, A_2, \dots, A_a, W(A_i)) \text{ aus } R^{(k)}(A_1, A_2, \dots, A_a, W(A_i))$$

durch Anwendung der Relation  $W^\varepsilon(A_i)W^{-\varepsilon}(A_i) = 1$ , die sich auf lauter triviale Relationen zurückführen läßt.

Es gilt der Satz, von dem wir indessen später keinen Gebrauch machen werden, daß man von jeder Darstellung einer Gruppe  $\mathfrak{F}$  durch Erzeugende und definierende Relationen zu jeder anderen Darstellung durch endlich-malige Anwendung der eben beschriebenen elementaren Operationen gelangen kann. Man führe den Beweis durch, indem man aus jeder der beiden Darstellungen durch Einführung von neuen Erzeugenden und von Folgerelationen ein und dieselbe dritte Darstellung ableitet, in der sowohl die Erzeugenden der ersten als auch die der zweiten Darstellung auftreten.

### § 83. Homomorphe Abbildung und Faktorgruppe.

Wenn jedem Elemente  $F$  einer Gruppe  $\mathfrak{F}$  eindeutig ein Element  $\bar{F}$  einer zweiten Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  als Bildelement zugeordnet ist, so daß das Bild  $\bar{F}_3$  des Produktes  $F_1 F_2 = F_3$  gleich dem Produkt der Bilder  $\bar{F}_1 \bar{F}_2$  ist, so ist damit eine *homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  in  $\bar{\mathfrak{F}}$*  gegeben. Ist jedes Element von  $\bar{\mathfrak{F}}$  Bild eines Elementes von  $\mathfrak{F}$ , so reden wir von einer *homomorphen Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf  $\bar{\mathfrak{F}}$* . Ist die Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf  $\bar{\mathfrak{F}}$  umkehrbar eindeutig, so heißen  $\mathfrak{F}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}$  1-isomorph oder *isomorph* schlechthin. — Von den homomorphen Abbildungen zweier Gruppen gilt der folgende fundamentale Satz, der jede homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf  $\bar{\mathfrak{F}}$  zu einer Faktorgruppe von  $\mathfrak{F}$  in Beziehung setzt:

**H o m o m o r p h i e s a t z:** *Jede Gruppe  $\mathfrak{F}$ , auf die die Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  homomorph abgebildet ist, ist isomorph einer Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ ; dabei ist  $\mathfrak{N}$  derjenige Normalteiler von  $\mathfrak{F}$ , dessen Elementen das Einselement von  $\bar{\mathfrak{F}}$  entspricht. Umgekehrt ist  $\mathfrak{F}$  auf jede Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$  (wo  $\mathfrak{N}$  Normalteiler von  $\mathfrak{F}$  ist) homomorph abgebildet.* Den Beweis findet man z. B. bei B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra I*, S. 35 (Berlin 1930).

Wenn nun  $\mathfrak{F}$  durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben ist [ $\S 82, (1), (4)$ ], so gilt es, eine Faktorgruppe  $\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$  durch Erzeugende und Relationen darzustellen. Von  $\mathfrak{N}$  setzen wir voraus, daß es darin endlich viele Elemente  $S_1(A_i), S_2(A_i), \dots, S_s(A_i)$  der Art gibt, daß  $\mathfrak{N}$  der

kleinste Normalteiler ist, der diese Elemente enthält. (Diese Voraussetzung ist immer erfüllt, wenn  $\mathfrak{N}$  endlich viele Erzeugende  $S_1(A_i), S_2(A_i), \dots, S_s(A_i)$  besitzt.) Jedes Element von  $\mathfrak{N}$  ist dann ein Produkt von endlich vielen Elementen der Form

$$F(A_i) S_k^{\epsilon}(A_i) F^{-1}(A_i) \quad (\epsilon = \pm 1). \quad (1)$$

Denn jedes solche Produkt ist ein Element von  $\mathfrak{N}$ , weil  $\mathfrak{N}$  Normalteiler ist, und andererseits bilden diese Produkte bereits einen Normalteiler, also machen sie ganz  $\mathfrak{N}$  aus, weil  $\mathfrak{N}$  der kleinste Normalteiler sein sollte.

Bezeichnet man durch Überstreichen eines Elementes von  $\mathfrak{F}$  die Restklasse von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ , in der das Element liegt, so bilden offenbar

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_a \quad (2)$$

ein System von Erzeugenden von  $\bar{\mathfrak{F}}$ , und es bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} R_1(\bar{A}_i) &= \bar{1}, \dots, R_r(\bar{A}_i) = \bar{1}, \\ S_1(\bar{A}_i) &= \bar{1}, \dots, S_s(\bar{A}_i) = \bar{1}. \end{aligned} \quad | \quad (3)$$

Die Restklasse  $\bar{1}$ , in der das Einselement von  $\bar{\mathfrak{F}}$  liegt, ist dabei der Normalteiler  $\mathfrak{N}$ .

Wir behaupten, daß (3) ein definierendes Relationensystem von  $\bar{\mathfrak{F}}$  ist, daß also jede Relation  $R(\bar{A}_i) = \bar{1}$  eine Folgerelation von (3) ist.  $R(\bar{A}_i) = \bar{1}$  bedeutet nämlich, daß  $R(A_i)$  zu  $\mathfrak{N}$  gehört. Nun ist jedes Element von  $\mathfrak{N}$  gleich einem Produkt von Elementen der Form (1). Man kann also  $R(A_i)$  mit Hilfe der Relationen  $R_1(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1$  und trivialer Relationen in ein Produkt von Elementen der Form (1) überführen. Also kann man ebenso  $R(\bar{A}_i)$  durch Anwendung der Relationen  $R_1(\bar{A}_i) = \bar{1}, \dots, R_r(\bar{A}_i) = \bar{1}$  und trivialer Relationen in ein Produkt von Transformierten der  $S_1^{\pm 1}(\bar{A}_i), \dots, S_s^{\pm 1}(\bar{A}_i)$  überführen und dieses wieder durch Anwendung der Relationen  $S_1(\bar{A}_i) = \bar{1}, \dots, S_s(\bar{A}_i) = \bar{1}$  und trivialer Relationen in das leere Produkt verwandeln.

Man erhält somit die Relationen der Faktorgruppe, indem man gewisse Zusatzrelationen zu den Relationen der Gruppe hinzunimmt.

Das Ergebnis ist der

**Satz I:** Hat die Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  die Erzeugenden

$$A_1, A_2, \dots, A_a$$

und die Relationen

$$R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1$$

und ist  $\mathfrak{N}$  der kleinste Normalteiler, der gewisse Elemente

$$S_1(A_i), S_2(A_i), \dots, S_s(A_i)$$

enthält, so hat die Faktorgruppe  $\bar{\mathfrak{F}}/\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{F}}$  die Erzeugenden

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_a$$

und die definierenden Relationen

$$\begin{aligned} R_1(\bar{A}_i) &= \bar{1}, R_2(\bar{A}_i) = \bar{1}, \dots, R_r(\bar{A}_i) = \bar{1}, \\ S_1(\bar{A}_i) &= \bar{1}, S_2(\bar{A}_i) = \bar{1}, \dots, S_s(\bar{A}_i) = \bar{1}; \end{aligned}$$

dabei bezeichnet  $\bar{A}_i$  die Restklasse, in der  $A_i$  liegt.

Bei der Ableitung des Satzes I sind wir von einem bestimmten Normalteiler  $\mathfrak{N}$  ausgegangen und haben die Relationen von  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$  gesucht. Man kann aber auch umgekehrt zu den Relationen von  $\mathfrak{F}$  beliebige Zusatzrelationen hinzufügen und erhält immer eine Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ , nämlich die Faktorgruppe nach dem kleinsten Normalteiler, der die linken Seiten der Zusatzrelationen enthält.

Von dem Homomorphiesatz machen wir eine Anwendung, die wir in § 20 benutzen. Von drei Gruppen

$$\mathfrak{F}, \mathfrak{D}, \mathfrak{N} \quad (4)$$

seien  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{N}$  Normalteiler von  $\mathfrak{F}$ , und  $\mathfrak{N}$  sei in  $\mathfrak{D}$  enthalten. Durch  $\mathfrak{N}$  ist eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf die Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{F}}$  bestimmt. Hierbei gehen die Gruppen (4) der Reihe nach über in die Gruppen

$$\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}, \quad \bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}/\mathfrak{N}, \quad \bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \bar{1}.$$

Da  $\mathfrak{D}$  Normalteiler von  $\mathfrak{F}$  ist, so ist  $\bar{\mathfrak{D}}$  Normalteiler von  $\bar{\mathfrak{F}}$ , und es gibt eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf  $\bar{\mathfrak{F}}/\bar{\mathfrak{D}}$ . Die beiden homomorphen Abbildungen, nacheinander ausgeführt, ergeben eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}$  auf  $\bar{\mathfrak{F}}/\bar{\mathfrak{D}}$ , bei der gerade die Elemente von  $\mathfrak{D}$  in das Einselement von  $\bar{\mathfrak{F}}/\bar{\mathfrak{D}}$  übergehen. Somit sind  $\mathfrak{F}/\mathfrak{D}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}/\bar{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{F}/\mathfrak{N})/(\mathfrak{D}/\mathfrak{N})$  isomorph.

#### § 84. Abelschmachen von Gruppen.

Wir wenden Satz I des vorigen Paragraphen auf einen wichtigen Sonderfall an.  $\mathfrak{F}$  sei eine Gruppe mit den Erzeugenden

$$A_1, A_2, \dots, A_a \quad (1)$$

und den definierenden Relationen

$$(\mathfrak{F}) \quad R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1 \quad (2)$$

und  $\mathfrak{N}$  der kleinste Normalteiler, der die Kommutatoren

$$A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1} \quad (i, k = 1, 2, \dots, a) \quad (3)$$

alle enthält. Die Faktorgruppe  $\mathfrak{F}/\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{F}}$  hat dann nach Satz I die Erzeugenden

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_a \quad (1)$$

und die definierenden Relationen

$$(\bar{\mathfrak{F}}) \quad R_1(\bar{A}_i) = \bar{1}, R_2(\bar{A}_i) = \bar{1}, \dots, R_r(\bar{A}_i) = \bar{1}; \quad (2)$$

$$\bar{A}_i \bar{A}_k \bar{A}_i^{-1} \bar{A}_k^{-1} = \bar{1} \quad (i, k = 1, 2, \dots, a). \quad (3)$$

$\bar{A}_i$  bezeichnet dabei die Restklasse des Elementes  $A_i$  von  $\mathfrak{F}$  bei der Zerlegung nach  $\mathfrak{N}$ . Für (3) könnte man ebensogut schreiben

$$\bar{A}_i \bar{A}_k = \bar{A}_k \bar{A}_i.$$

Die erzeugenden Elemente von  $\bar{\mathfrak{F}}$  und damit alle Elemente von  $\bar{\mathfrak{F}}$  sind also miteinander vertauschbar,  $\bar{\mathfrak{F}}$  ist daher abelsch und heißt die *abelsch gemachte Gruppe*  $\bar{\mathfrak{F}}$ ; sie wird aus  $\mathfrak{F}$  durch Hinzunahme der Vertauschbarkeitsrelationen (3) gewonnen.

Wir müssen nur noch zeigen, daß  $\bar{\mathfrak{F}}$  allein durch  $\mathfrak{F}$  bestimmt ist und nicht etwa von der Auswahl der Erzeugenden und definierenden Relationen von  $\mathfrak{F}$  abhängt. Das gelingt dadurch, daß man für  $\bar{\mathfrak{F}}$  eine zweite Definition angibt, die ihre Unabhängigkeit von der Darstellung von  $\mathfrak{F}$  in Evidenz setzt. Die *abelsch gemachte Gruppe*  $\bar{\mathfrak{F}}$  ist die Faktorgruppe von  $\mathfrak{F}$  nach der Kommutatorgruppe  $\mathfrak{K}$ . Unter der Kommutatorgruppe einer Gruppe  $\mathfrak{F}$  wird bekanntlich der Normalteiler  $\mathfrak{K}$  verstanden, der von den sämtlichen Kommutatoren  $F_\sigma F_\tau F_\sigma^{-1} F_\tau^{-1}$  erzeugt wird;  $F_\sigma$  und  $F_\tau$  sind dabei beliebige Elemente aus  $\mathfrak{F}$ . Wir haben zu zeigen, daß  $\mathfrak{N} = \mathfrak{K}$  ist. Nach § 83 Satz I ist  $\mathfrak{N}$  der kleinste Normalteiler, der die Kommutatoren  $A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1}$ , also spezielle Kommutatoren von  $\mathfrak{F}$  enthält. Daher ist  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{K}$  enthalten. Es ist aber auch  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{N}$  enthalten, denn ein beliebiger Kommutator  $F_\sigma F_\tau F_\sigma^{-1} F_\tau^{-1}$  bildet sich bei der homomorphen Abbildung  $\mathfrak{F} \rightarrow \bar{\mathfrak{F}}$  in das Einselement 1 ab, da  $\bar{\mathfrak{F}}$  abelsch ist. Daher enthält  $\mathfrak{N}$  alle Kommutatoren von  $\mathfrak{F}$  und damit  $\mathfrak{K}$ . Also ist  $\mathfrak{N} = \mathfrak{K}$ .

### § 85. Freies und direktes Produkt.

Eine Gruppe  $\mathfrak{F}$  heißt das *freie Produkt* der Untergruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$ , in Formeln

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \circ \dots \circ \mathfrak{F}_h, \quad (1)$$

wenn jedes vom Einselement verschiedene Element von  $\mathfrak{F}$  eindeutig als Produkt

$$F_{i_1} F_{k_2} \dots F_{z_\xi} \quad (2)$$

dargestellt werden kann; hierin sind die Elemente  $F_{i_1}, F_{k_2}, \dots$  vom Einselemente verschiedene Elemente aus den Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ , und je zwei aufeinanderfolgende gehören verschiedenen dieser Gruppen an, es ist also  $i \neq k$  usw. Durch die Struktur der Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$  ist auch die Struktur des freien Produktes  $\mathfrak{F}$  bestimmt. Denn zwei in der Form (2) gegebene Elemente

$$F_{i'_1} F_{k'_2} \dots F_{z'_\zeta} \text{ und } F_{i''_1} F_{k''_2} \dots F_{z''_\zeta}$$

werden multipliziert, indem man sie nebeneinander schreibt. Das so entstehende Element

$$F_{i'_1} F_{k'_2} \dots F_{z'_\zeta} F_{i''_1} F_{k''_2} \dots F_{z''_\zeta} \quad (3)$$

hat schon die Form (2), wenn  $i' \neq i''$ . Gehören aber  $F_{i'_\zeta}$  und  $F_{i''_{\zeta'}}$  derselben Gruppe an, so ist  $F_{i'_\zeta} F_{i''_{\zeta'}}$  ein bestimmtes Element  $F_z$  der Gruppe  $\mathfrak{F}_z$ . Ist nun  $F_z \neq 1$ , so hat das Produkt die Normalform (2). Andernfalls kann man  $F_z$  streichen und das Verfahren von neuem anwenden. So erhält man für das Produkt eine eindeutige Normalform der Gestalt (2) oder das Einselement.

Den Satz, daß zu  $h$  beliebigen Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$  es ein freies Produkt gibt, beweisen wir nicht. Man findet diesen Existenzbeweis bei F. Klein, Höhere Geometrie, 3. Aufl., S. 361 (Berlin 1926).

Sind uns die Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$  durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben, so lassen sich daraus Erzeugende und definierende Relationen des freien Produktes ableiten. Wir zeigen dies für zwei Gruppen  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  mit den Erzeugenden und definierenden Relationen

$$\left. \begin{array}{l} A_1, A_2, \dots, A_a \\ R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1 \end{array} \right\} \quad (\mathfrak{F}_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} B_1, B_2, \dots, B_b \\ S_1(B_k) = 1, S_2(B_k) = 1, \dots, S_s(B_k) = 1. \end{array} \right\} \quad (\mathfrak{F}_2)$$

Die Elemente

$$A_1, A_2, \dots, A_a, B_1, B_2, \dots, B_b$$

erzeugen offenbar das freie Produkt  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ , und es sind die Relationen

$$R_1(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1, S_1(B_k) = 1, \dots, S_s(B_k) = 1 \quad (\mathfrak{F})$$

im freien Produkt erfüllt. Diese Relationen sind definierende Relationen des freien Produktes, d. h. es ist jede im freien Produkte gültige Relation eine Folgerelation dieser Relationen. Denn ist irgendein dem Einselement von  $\mathfrak{F}$  gleiches aus den  $A$ 's und  $B$ 's gebildetes Produkt vorgelegt, so zerlege man es in möglichst lange Teilprodukte, deren jedes aus  $A$ 's oder  $B$ 's allein besteht, sodaß also die aus den  $A$ 's bzw.  $B$ 's bestehenden Produkte in dem Gesamtprodukte abwechseln. Jedes der Teilprodukte muß dann nach (2) einzeln = 1 sein und läßt sich daher durch Anwendung der Relationen ( $\mathfrak{F}$ ), und zwar entweder nur der ersten  $r$  oder nur der letzten  $s$  und durch Anwendung trivialer Relationen in das leere Wort verwandeln, also gilt das gleiche von dem ganzen vorgelegten Produkte. — Der Beweis gilt offenbar auch für eine beliebige Anzahl von Gruppen. Als Ergebnis haben wir daher den

Satz I: Man erhält ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen des freien Produktes einer Anzahl von Gruppen, indem man die Erzeugenden und Relationen der einzelnen Gruppen zusammenschreibt.

Als Beispiel betrachten wir das freie Produkt von  $h$  freien zyklischen Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$ . Die Gruppe  $\mathfrak{F}_i$  hat dann eine Erzeugende  $A_i$  und keine Relationen. Das freie Produkt  $\mathfrak{F}$  hat also  $h$  Erzeugende und keine Relation. Man bezeichnet  $\mathfrak{F}$  deshalb als die *freie Gruppe von  $h$  Erzeugenden*  $A_1, A_2, \dots, A_h$ .

Hieraus folgt weiter, daß man die Erzeugenden in beliebiger Zahl und die Relationen in beliebiger Zahl und Gestalt vorgeben kann und es immer eine Gruppe  $\mathfrak{F}$  gibt, die von diesen Erzeugenden erzeugt wird und die Relationen zu definierenden Relationen hat. Um die Gruppe  $\mathfrak{F}$  zu konstruieren, bildet man zunächst aus den gegebenen Erzeugenden die freie Gruppe. Durch Hinzunahme der Relationen erhält man nach Satz I von § 83 eine Faktorgruppe, die die Gruppe der gewünschten Beschaffenheit ist.

**Aufgabe:** Man beweise, daß das freie Produkt zweier Gruppen höchstens dann endliche Ordnung hat, wenn ein Faktor aus dem Einselement allein besteht.

Eine Gruppe  $\mathfrak{F}$  heißt das *direkte Produkt* der Untergruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$ , in Formeln

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_h, \quad (4)$$

wenn jedes Element von  $\mathfrak{F}$  eindeutig als Produkt

$$F_1, F_2, \dots, F_h \quad (5)$$

darstellbar ist und jedes Element von  $\mathfrak{F}$ , mit jedem von  $\mathfrak{F}_\mu$  für  $\mu \neq \nu$  vertauschbar ist. Auch die Struktur des direkten Produktes ist durch die der Faktoren eindeutig bestimmt, da die Gleichung

$$F_1, F_2, \dots, F_{h-\xi}, F_{1'}, F_{2'}, \dots, F_{h-\xi'} = (F_1, F_2, \dots, F_{h-\xi}) (F_{1'}, F_{2'}, \dots, F_{h-\xi'}) \quad (6)$$

die Multiplikation im direkten Produkte auf diejenige in den Gruppenfaktoren zurückführt.

Die Existenz des direkten Produktes beliebig vorgegebener Faktoren wird durch die Konstruktion dieses direkten Produktes bewiesen: Man führt als Elemente die symbolischen Produkte oder Buchstabenfolgen (5) ein und definiert die Verknüpfung der Elemente durch die Gleichung (6).

Sind uns die Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$  durch Erzeugende und Relationen gegeben, so lassen sich die Erzeugenden und definierenden Relationen des direkten Produktes ebenfalls angeben. Wir betrachten wieder den Fall von zwei Gruppen mit den Erzeugenden und definierenden Relationen ( $\mathfrak{F}_1$ ) und ( $\mathfrak{F}_2$ ). Die Elemente

$$A_1, A_2, \dots, A_a, \quad B_1, B_2, \dots, B_b$$

erzeugen offenbar das direkte Produkt  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$ , und die Relationen

$$R_1(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1, \quad S_1(B_k) = 1, \dots, S_s(B_k) = 1$$

zusammen mit den Vertauschbarkeitsrelationen der Erzeugenden

$$A_i B_k A_i^{-1} B_k^{-1} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, a; k = 1, 2, \dots, b)$$

sind offenbar richtige Relationen in  $\mathfrak{F}$ . Sie bilden ein System definierender Relationen, denn irgendein Produkt aus  $A$ 's und  $B$ 's kann man mit Hilfe der Vertauschbarkeitsrelationen in die Form

$$\prod_i A_i \cdot \prod_k B_k$$

bringen, und wenn dieses Produkt = 1 ist, so müssen einzeln  $\prod_i A_i = 1$  und  $\prod_k B_k = 1$  sein. Denn nach Definition ist jedes Element des direkten Produktes eindeutig in der Form (5) darstellbar, insbesondere das Einselement nur in der Form 1 · 1. Dann lassen sich aber die Teilprodukte  $\prod_i A_i$  und  $\prod_k B_k$  durch die Relationen der Gruppen  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  und trivialer Relationen einzeln in das leere Wort überführen.

Unser Ergebnis ist der

**Satz II:** *Man erhält ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen des direkten Produktes  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_h$ , indem man die Erzeugenden und Relationen der einzelnen Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_h$  zusammenschreibt und die Vertauschbarkeitsrelationen zwischen den Erzeugenden je zweier Gruppen  $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_k$  ( $i \neq k$ ) hinzunimmt.*

**Aufgabe:** Die Ordnung des direkten Produktes ist gleich dem Produkte der Ordnungen der Faktoren.

Als Beispiel betrachten wir das direkte Produkt von  $h$  freien zyklischen Gruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_h$ , die von  $A_1, A_2, \dots, A_h$  erzeugt werden. Erzeugende des direkten Produktes sind diese  $A$ 's und Relationen nur die Vertauschbarkeitsrelationen

$$A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1} = 1 \quad (i, k = 1, 2, \dots, h).$$

Da die Faktoren hier abelsche Gruppen sind, so ist auch das direkte Produkt abelsch. Man nennt dieses direkte Produkt die *freie abelsche Gruppe von  $h$  Erzeugenden*. Da jedes Element von  $\mathfrak{F}_i$  eindeutig in der Form  $A_i^{\alpha_i}$  darstellbar ist, so ist jedes Element der freien abelschen Gruppe von  $h$  Erzeugenden eindeutig in der Form

$$F = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_h^{\alpha_h}$$

darstellbar, und das Produkt zweier Elemente

$$A_1^{\alpha'_1} A_2^{\alpha'_2} \dots A_h^{\alpha'_h} \quad \text{und} \quad A_1^{\alpha''_1} A_2^{\alpha''_2} \dots A_h^{\alpha''_h}$$

ist das Element

$$A_1^{\alpha'_1 + \alpha''_1} A_2^{\alpha'_2 + \alpha''_2} \dots A_h^{\alpha'_h + \alpha''_h}.$$

Wenn man also dem Element  $F$  den ganzzahligen Vektor  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$  zuordnet, so ist damit ein Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{F}$  und der Gruppe aller ganzzahligen  $h$ -dimensionalen Vektoren (mit der Vektoraddition als Verknüpfung) hergestellt. Jedes Element von  $\mathfrak{F}$  läßt sich daher durch einen ganzzahligen  $h$ -dimensionalen Vektor oder, was dasselbe besagt, durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten im  $h$ -dimensionalen Zahlenraume darstellen. Diese Punkte bilden ein  $h$ -dimensionales Punktgitter. Wir ersetzen daher bisweilen den Terminus „freie abelsche Gruppe von  $h$  Erzeugenden“ durch „ $h$ -dimensionales Gitter“. Statt durch einen

Vektor können wir das Element  $F$  ebensogut durch die Translation darstellen, die dieser Vektor angibt; die Gruppe ist in bekannter Weise der Gruppe der Decktransformationen des  $k$ -dimensionalen Punktgitters isomorph. Unter einem nulldimensionalen Gitter verstehen wir die Gruppe, die nur aus dem Einselement besteht.

Noch eine Bemerkung! Im direkten Produkten  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_n$  ist jede der Untergruppen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$  Normalteiler. Eine Restklasse in der Zerlegung von  $\mathfrak{F}$  nach  $\mathfrak{F}_1$  besteht aus der Gesamtheit der Elemente, die man erhält, wenn man in (5) die Elemente  $F_{2,}, \dots, F_{n,}$  festhält und  $F_1,$  alle Elemente von  $\mathfrak{F}_1$  durchlaufen lässt. Die Faktorgruppe ist somit 1-isomorph zur Gruppe  $\mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_n.$

### § 86. Abelsche Gruppen.

Für den gruppentheoretischen Verknüpfungsprozeß haben wir bisher das Zeichen der algebraischen Multiplikation gebraucht. Wenn es sich aber um abelsche Gruppen handelt, so pflegt man das Multiplikationszeichen durch das Additionszeichen zu ersetzen und dementsprechend das Einselement der Gruppe statt mit 1 mit 0 zu bezeichnen. Statt Produkt zweier Elemente sagt man dann Summe, statt reziprokes Element negatives, statt direktes Produkt direkte Summe, statt Einselement Nullelement. Diese Umbenennung erfolgt, um die enge Beziehung, in der die Theorie der abelschen Gruppen zu denjenigen der ganzzahligen linearen Gleichungen steht, augenfällig zu machen. Wo immer wir die *additive Schreibung* benutzen und Gruppenelemente durch das Pluszeichen verknüpfen, da versteht es sich von selbst, daß der Verknüpfungsprozeß abelsch ist, und wir schreiben die Vertauschbarkeitsrelationen nicht ausdrücklich hin. Die Relation, die eine zyklische Gruppe der Ordnung  $p$  bestimmt, lautet also in additiver Schreibung nicht mehr  $A^p = 1$ , sondern  $pA = 0.$  (Man hüte sich, in Analogie mit einer algebraischen Gleichung aus ihr  $A = 0$  zu folgern. Rechts und links vom Gleichheitszeichen stehen Gruppenelemente, nicht Zahlen, und die Übereinstimmung besteht nur in der Bezeichnung.)

Wir betrachten zuerst eine freie abelsche Gruppe  $\mathfrak{F}_m$  mit den Erzeugenden

$$A_1, A_2, \dots, A_m. \quad (1)$$

Jedes Element von  $\mathfrak{F}_m$  ist nach S. 303 eindeutig in der Form darstellbar

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m. \quad (2)$$

Eine Reihe von Elementen von der Eigenschaft, daß jedes Element aus  $\mathfrak{F}_m$  sich eindeutig als lineare Kombination dieser Elemente darstellen lässt, heißt eine *Basis* von  $\mathfrak{F}_m;$  die Elemente (1) bilden also eine Basis. Sei

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_n \quad (3)$$

eine weitere Basis von  $\mathfrak{F}_m,$  so muß zunächst  $m = n$  sein. Wäre etwa  $m < n,$  so drücke man die Elemente der neuen Basis durch die alte Basis aus:

$$A'_v = \sum_{\mu=1}^m \alpha'_{v\mu} A_\mu \quad (v=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Wegen  $m < n$  gäbe es eine Relation mit rationalen Koeffizienten zwischen den Zeilen der Matrix  $(\alpha'_{v\mu}),$  also auch eine Relation mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten. Daraus würde eine ebensolche Relation zwischen den  $A'_v$  folgen, was der Basiseigenschaft der  $A'_v$  widerspricht. Die Matrix  $(\alpha'_{v\mu})$  ist somit quadratisch, womit zugleich bewiesen ist, daß die Zahl  $m$  (Dimension des Gitters) eine charakteristische Eigenschaft des Gitters ist:

**Satz I:** *Zwei Gitter sind dann und nur dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.*

Umgekehrt lassen sich die  $A_\mu$  durch die  $A'_v$  eindeutig ausdrücken:

$$A_\mu = \sum_{\lambda=1}^m \beta_{\mu\lambda} A'_\lambda \quad (\mu=1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Durch Einsetzen von (5) in (4) folgt

$$A'_v = \sum_{\mu, \lambda=1}^m \alpha'_{v\mu} \beta_{\mu\lambda} A'_\lambda. \quad (6)$$

Wegen der Basiseigenschaft der  $A'_v$  ist somit

$$\sum_{\mu=1}^m \alpha'_{v\mu} \beta_{\mu\lambda} = \delta_{v\lambda} \begin{cases} = 1 & \text{für } v = \lambda \\ = 0 & \text{für } v \neq \lambda \end{cases} \quad (7)$$

oder in Matrzensprache

$$(\alpha'_{ik})(\beta_{ik}) = (\delta_{ik}).$$

Durch Übergang zu den Determinanten folgt daraus

$$|\alpha'_{ik}| |\beta_{ik}| = 1,$$

also wegen der Ganzzahligkeit

$$|\alpha'_{ik}| = \pm 1,$$

und (7) besagt, daß  $(\beta_{ik})$  die reziproke Matrix von  $(\alpha'_{ik})$  ist. Der Übergang von einer Basis zu einer anderen vollzieht sich also durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation.

**Satz II:** *Eine Untergruppe  $\mathfrak{G}$  eines  $m$ -dimensionalen Gitters  $\mathfrak{F}_m$  ist ein höchstens  $m$ -dimensionales Gitter.*

**Beweis:** Sind  $A_1, A_2, \dots, A_m$  die Erzeugenden von  $\mathfrak{F}_m,$  so sei  $\mathfrak{F}_{m-1}$  das von  $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$  erzeugte Teilgitter von  $\mathfrak{F}_m$  und  $\mathfrak{H}$  die Untergruppe aller Elemente von  $\mathfrak{G}$ , die zu  $\mathfrak{F}_{m-1}$  gehören. Wir nehmen den Satz für  $\mathfrak{F}_{m-1}$  als bewiesen an. Dann ist  $\mathfrak{H}$  ein höchstens  $(m-1)$ -dimensional-

sionales Gitter.  $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}$  sei eine Basis von  $\mathfrak{H}$  ( $k \leq m$ ). Unter allen Elementen

$$G = g_1 A_1 + \dots + g_m A_m$$

von  $\mathfrak{G}$  suchen wir ein Element

$$B_k = g_1^* A_1 + \dots + g_m^* A_m$$

aus, für das der letzte Koeffizient einen möglichst kleinen positiven Wert hat. (Den Fall, daß  $g_m$  stets = 0 ist, können wir ausschließen, da dann wegen  $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$  nichts mehr zu beweisen ist.)  $g_m$  ist offenbar ein Vielfaches von  $g_m^*$  und daher

$$G - \frac{g_m}{g_m^*} B_k$$

ein Element von  $\mathfrak{H}$ , also eine lineare Kombination von  $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}$ . Also bilden  $B_1, B_2, \dots, B_k$  ein System von Erzeugenden von  $\mathfrak{G}$ : — Jedes Element ist eindeutig durch  $B_1, B_2, \dots, B_k$  darstellbar. Andernfalls gäbe es eine Relation

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_k B_k = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten. Drückt man hierin die  $B$ 's durch die  $A$ 's aus, so ergibt sich  $x_k g_m^* \neq 0$  als Koeffizient von  $A_m$ , während doch zwischen den  $A$ 's keine Relation besteht.  $\mathfrak{G}$  ist also ein  $k$ -dimensionales Gitter ( $k \leq m$ ) mit der Basis  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Da der Satz für ein 0-dimensionales Gitter offenbar richtig ist, so gilt er allgemein.

Auf Grund des Satzes II bezeichnen wir eine Untergruppe eines Gitters gelegentlich auch als *Teilgitter*.

$\mathfrak{F}$  sei jetzt eine beliebige abelsche Gruppe mit den Erzeugenden

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m$$

und  $\mathfrak{F}_m$  ein  $m$ -dimensionales Gitter mit der Basis

$$A_1, A_2, \dots, A_m.$$

Ordnet man jedem Element von  $\mathfrak{F}_m$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_m A_m$$

das Element

$$a_1 \bar{A}_1 + a_2 \bar{A}_2 + \dots + a_m \bar{A}_m$$

von  $\mathfrak{F}$  zu, so ist damit eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{F}_m$  auf  $\mathfrak{F}$  gegeben. Diejenigen Elemente von  $\mathfrak{F}_m$ , die sich in das Nullelement von  $\mathfrak{F}$  abbilden, machen eine Untergruppe  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{F}_m$ , also ein Teilgitter aus, und die Elemente von  $\mathfrak{F}$  entsprechen eindeutig den Restklassen in der Zerlegung von  $\mathfrak{F}_m$  nach  $\mathfrak{N}$ .  $\mathfrak{F}$  selbst ist die Faktorgruppe  $\mathfrak{F}_m/\mathfrak{N}$ .

Wir wählen nun aus  $\mathfrak{N}$  irgendwelche Erzeugenden

$$N_1, N_2, \dots, N_n$$

aus; da  $\mathfrak{N}$  ein höchstens  $m$ -dimensionales Gitter ist, ist dies möglich. Doch verlangen wir nicht, daß diese Elemente eine Basis von  $\mathfrak{N}$  bilden sollen. Ist

$$N_v = \sum_{\mu=1}^m a_{v\mu} A_\mu \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

so sind durch die *Koeffizientenmatrix*

$$(a_{v\mu}) \quad (8)$$

die  $N_v$  und damit  $\mathfrak{N}$ , also auch  $\mathfrak{F}_m/\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{F}}$  vollkommen bestimmt. Doch ist das Umgekehrte offenbar nicht der Fall, da man die Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  auf beliebig viele Weisen durch eine Matrix  $(a_{v\mu})$  beschreiben kann. Z. B. kann man dadurch zu einer neuen Matrix gelangen, daß man die Erzeugenden  $A_1, A_2, \dots, A_m$  und  $N_1, N_2, \dots, N_n$  der Gitter  $\mathfrak{F}_m$  und  $\mathfrak{N}$  durch neue Erzeugende  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m, N'_1, N'_2, \dots, N'_n$  ersetzt, die mit den alten durch unimodulare ganzzahlige Transformationen zusammenhängen. Wir wollen nun versuchen, durch solche Transformationen die Matrix  $(a_{v\mu})$  in eine Normalform überzuführen. Das erreichen wir schrittweise durch endlichmalige Ausübung der folgenden speziellen unimodularen Transformationen (*elementaren Umformungen*):

a) Ersetzung von  $A_\sigma$  durch  $A_\sigma - A_\tau$  ( $\sigma \neq \tau$ ).

Dem entspricht in der Matrix  $(a_{v\mu})$  Addition der  $\sigma$ -ten Spalte zur  $\tau$ -ten. Denn es ist

$$\begin{aligned} N_v &= \sum a_{v\mu} A_\mu = \dots + a_{v\sigma} A_\sigma + \dots + a_{v\tau} A_\tau + \dots \\ &= \dots + a_{v\sigma} (A_\sigma - A_\tau) + \dots + (a_{v\tau} + a_{v\sigma}) A_\tau + \dots \end{aligned}$$

b) Ersetzung von  $A_\tau$  durch  $-A_\tau$ , was Vorzeichenwechsel aller Elemente in der  $\tau$ -ten Spalte von  $(a_{v\mu})$  bewirkt.

Entsprechende Ersetzungen können in den Erzeugenden  $N_1, N_2, \dots, N_n$  vorgenommen werden:

a') Ersetzung von  $N_x$  durch  $N_x + N_\lambda$  ( $x \neq \lambda$ ) bewirkt Addition der  $\lambda$ -ten Zeile zur  $x$ -ten.

b') Ersetzung von  $N_\lambda$  durch  $-N_\lambda$  bewirkt Vorzeichenwechsel in der  $\lambda$ -ten Zeile.

Aus diesen vier Operationen — Zeilen- und Spaltenaddition, Vorzeichenwechsel in einer Zeile oder Spalte — lassen sich durch geeignete Kombination weitere ableiten, z. B. Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten. Durch derartige Umformungen kann man, was in § 87 bewiesen wird, die Koeffizientenmatrix vom Range  $\gamma$  in die Diagonalform überführen:

$$\begin{pmatrix} & \xleftarrow[m]{} & & 0 \\ \uparrow & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_\gamma & 0 \\ \downarrow & 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Von den  $c$ 's ist jedes im vorangehenden enthalten, die ersten  $\varrho$  sind von 1 verschieden, die letzten  $\gamma - \varrho$  gleich 1. Man nennt die  $c$ 's die *invarianten Faktoren* der Matrix  $(a_{\nu\mu})$ .

Sind  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$  die neuen Basiselemente von  $\mathfrak{F}_m$ , so hat man in den Elementen

$$\mathfrak{N} = (c_1 A'_1, c_2 A'_2, \dots, c_\gamma A'_\gamma)$$

und allen daraus gebildeten linearen Kombinationen genau die Elemente von  $\mathfrak{N}$  vor sich, und zwei Elemente

$$p_1 A'_1 + p_2 A'_2 + \dots + p_m A'_m,$$

$$q_1 A'_1 + q_2 A'_2 + \dots + q_m A'_m$$

aus  $\mathfrak{F}_m$  gehören dann und nur dann derselben Restklasse von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{F}_m$  an, wenn

$$(p_1 - q_1) A'_1 + (p_2 - q_2) A'_2 + \dots + (p_m - q_m) A'_m$$

zu  $\mathfrak{N}$  gehört, wenn also

$$p_1 \equiv q_1 \pmod{c_1}, p_2 \equiv q_2 \pmod{c_2}, \dots, p_\gamma \equiv q_\gamma \pmod{c_\gamma},$$

$$p_{\gamma+1} = q_{\gamma+1}, \dots, p_m = q_m$$

ist. Man hat daher in den Elementen

$$\xi_1 A'_1 + \xi_2 A'_2 + \dots + \xi_\gamma A'_\gamma + \eta_{\gamma+1} A'_{\gamma+1} + \dots + \eta_m A'_m \quad (9)$$

$$(0 \leq \xi_\mu < c_\mu, \eta_\mu \text{ beliebig}) \quad (10)$$

genau je einen Repräsentanten aus den Restklassen vor sich. Anders ausgedrückt: Die Elemente der Faktorgruppe  $\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_m/\mathfrak{N}$  (die wir wieder durch Überstrichen bezeichnen) lassen sich eindeutig in der Form schreiben:

$$\xi_1 \bar{A}'_1 + \xi_2 \bar{A}'_2 + \dots + \xi_\gamma \bar{A}'_\gamma + \eta_{\gamma+1} \bar{A}'_{\gamma+1} + \dots + \eta_m \bar{A}'_m \quad (11)$$

bei Einhaltung der Normierungsbedingungen (10).

Da die Elemente  $\bar{A}'_\mu$  der Faktorgruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  die Ordnungen  $c_1, c_2, \dots, c_\gamma$ , bzw.  $\infty$  haben, ist  $\bar{\mathfrak{F}}$  die direkte Summe der von  $\bar{A}'_1, \bar{A}'_2, \dots, \bar{A}'_m$  erzeugten zyklischen Untergruppen.

Fassen wir zusammen:

**Satz III:** Jede abelsche Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  mit endlich vielen Erzeugenden ist direkte Summe von  $\varrho$  endlichen zyklischen Gruppen der Ordnungen  $c_1, c_2, \dots, c_\varrho$  und  $p$  freien zyklischen Gruppen. Dabei kann man annehmen, daß jedes  $c$  im vorangehenden enthalten ist.  $c_1, c_2, \dots, c_\varrho$  sind die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren der Koeffizientenmatrix  $(a_{\nu\mu})$ , durch die  $\bar{\mathfrak{F}}$  gegeben ist, und  $p$  ist die Differenz aus der Spaltenzahl  $m$  und dem Rang  $\gamma$  von  $(a_{\nu\mu})$ . Die Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_\varrho$  bzw.  $p = m - \gamma$  sind durch

die abelsche Gruppe eindeutig bestimmt und heißen die Torsionskoeffizienten bzw. die Bettische Zahl der Gruppe.

Diese Benennung rechtfertigt sich durch die geometrische Bedeutung, die diese Größen haben, wenn  $\bar{\mathfrak{F}}$  Homologiegruppe eines Komplexes ist (§§ 18, 61).

Die Eindeutigkeit ist noch zu beweisen. Die von  $\bar{A}'_1, \bar{A}'_2, \dots, \bar{A}'_\varrho$  erzeugte Untergruppe  $\bar{\mathfrak{U}}$  der Ordnung  $c_1 c_2 \dots c_\varrho$  besteht offenbar aus der Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung von  $\bar{\mathfrak{F}}$  und ist daher unabhängig von der Auswahl der Erzeugenden.  $\bar{\mathfrak{F}}/\bar{\mathfrak{U}}$  ist nach S. 304 isomorph zu der von  $\bar{A}'_{\gamma+1}, \dots, \bar{A}'_m$  erzeugten Untergruppe, also ein  $p$ -dimensionales Gitter. Damit ist die Zahl  $p$  als eine Invariante von  $\bar{\mathfrak{F}}$  erkannt, und wir brauchen nur noch die endliche Untergruppe  $\bar{\mathfrak{U}}$  zu betrachten. Multipliziert man alle Elemente der von  $\bar{A}'_\mu$  erzeugten zyklischen Gruppe der Ordnung  $c_\mu$  mit einer ganzen positiven Zahl  $x$ , so bilden diese  $x$ -fachen eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $c_\mu/(c_\mu, x)$ .\* Entsprechend erhält man durch Ver- $x$ -fachung aller Elemente von  $\bar{\mathfrak{U}}$  eine Untergruppe von  $\bar{\mathfrak{U}}$  von der Ordnung

$$M(x) = \frac{c_1}{(c_1, x)} \frac{c_2}{(c_2, x)} \cdots \frac{c_\varrho}{(c_\varrho, x)}.$$

$M(x)$  ist nur dann = 1, wenn alle Faktoren 1 sind, wenn also  $x$  ein Vielfaches von  $c_1$  ist. Damit ist  $c_1$  invariant charakterisiert. Nachdem man schon  $c_\mu$  ( $\mu < \varrho$ ) invariant charakterisiert hat, betrachtet man die Zahlen  $x$ , für die

$$M(x) = \frac{c_1}{(c_1, x)} \frac{c_2}{(c_2, x)} \cdots \frac{c_\mu}{(c_\mu, x)}$$

wird. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Faktoren

$$\frac{c_{\mu+1}}{(c_{\mu+1}, x)}, \dots, \frac{c_\varrho}{(c_\varrho, x)}.$$

alle = 1 sind, wenn also  $x$  ein Vielfaches von  $c_{\mu+1}$  ist. Damit ist auch  $c_{\mu+1}$  invariant charakterisiert.

Die Invarianten der abelschen Gruppe können uns dazu dienen, auch nichtabelsche Gruppen zu unterscheiden. Denn aus jeder nichtabelschen Gruppe  $\mathfrak{F}$  kann man durch Abelschmachen in eindeutiger Weise eine abelsche Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  ableiten. Bezeichnet man als die Torsionskoeffizienten und die Bettische Zahl von  $\bar{\mathfrak{F}}$  die Torsionskoeffizienten und die Bettische Zahl von  $\bar{\mathfrak{F}}$ , so besteht hiernach eine notwendige Bedingung für die Übereinstimmung zweier Gruppen  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  in der Übereinstimmung ihrer Torsionskoeffizienten und Bettischen Zahlen. Ist die Gruppe  $\mathfrak{F}$  durch die Erzeugenden

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

\* )  $(a, b)$  bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen  $a$  und  $b$ .

und die definierenden Relationen

$$R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1 \quad (13)$$

gegeben, so kann man Torsionskoeffizienten und Bettische Zahl folgendermaßen ermitteln: Die Relationen (13) zusammen mit den Vertauschbarkeitsrelationen

$$A_i A_k = A_k A_i \quad (i, k = 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

sind die definierenden Relationen von  $\bar{\mathfrak{F}}$ . Anstatt  $\bar{\mathfrak{F}}$  als Faktorgruppe von  $\mathfrak{F}$  nach der Kommutatorgruppe anzusehen, kann man sich  $\bar{\mathfrak{F}}$  auch aus dem  $m$ -dimensionalen Gitter  $\mathfrak{F}_m$ , das durch die Relationen (14) definiert wird, durch die Zusatzrelationen (13) entstanden denken.  $\bar{\mathfrak{F}}$  ist also Faktorgruppe aus dem Gitter  $\mathfrak{F}_m$  und dem Teilgitter  $\mathfrak{N}$ , das von den linken Seiten der Relationen (13) erzeugt wird. Die Matrix, durch die die Einlagerung von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{F}_m$  bestimmt ist, ist somit einfach die Koeffizientenmatrix der additiv geschriebenen Relationen (13). Aus ihr bestimmen sich Torsionskoeffizienten und Bettische Zahl, wie soeben entwickelt.

Wir demonstrieren das Verfahren an einer Gruppe  $\mathfrak{F}$  mit 3 Erzeugenden und 4 definierenden Relationen:

$$A^2 = B^3 = C^4 = ABC = 1.$$

Nebenbei bemerkt ist die Gruppe die Oktaedergruppe, in der  $A$  eine Drehung um eine Kantenmitte,  $B$  um eine benachbarte Dreiecksmitte und  $C$  um eine Ecke des Oktanden ist.\*.) Die Relationen der abelsch gemachten Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$  sind

$$2\bar{A} = 3\bar{B} = 4\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = 0.$$

Die Koeffizientenmatrix dieser Gruppe lautet daher

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und deren Normalform } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also ein Torsionskoeffizient vom Werte 2 vorhanden und die Bettische Zahl ist 0.

Wenn eine Gruppe  $\mathfrak{F}$  eine von 0 verschiedene Bettische Zahl besitzt, so ist die abelsch gemachte Gruppe  $\bar{\mathfrak{F}}$ , also erst recht  $\mathfrak{F}$  selbst, unendlich. Wenn dagegen die Bettische Zahl = 0 ist, so kann man auf diese Weise über die Unendlichkeit der Gruppe nicht entscheiden. Z. B. hat sowohl das freie Produkt zweier Gruppen der Ordnung 2, als auch ihr direktes Produkt (die Vierergruppe) zwei Torsionskoeffizienten vom Werte 2 und die Bettische Zahl 0. Das freie Produkt ist unendlich, die Vierergruppe endlich.<sup>52</sup>

**Aufgabe:** Man bestimme die Torsionskoeffizienten der symmetrischen Permutationengruppe von  $n$  Ziffern.

\*) Beweis bei W. v. Dyck, Math. Ann. 20 (1882), S. 35.

### § 87. Normalform ganzzahliger Matrizen.

In § 86 haben wir den Satz benutzt, daß man jede ganzzahlige Matrix  $E$  durch elementare Umformungen, das sind Addition oder Subtraktion einer Zeile (Spalte) von einer anderen, Vorzeichenwechsel aller Zahlen einer Zeile (Spalte), Vertauschung zweier Zeilen (Spalten), in die Diagonalförm überführen kann. Den Beweis tragen wir jetzt nach.

Sei die vorgelegte Matrix

$$E = (\varepsilon_{\iota z}) \quad (\iota = 1, 2, \dots, n; z = 1, 2, \dots, m).$$

Die ganze Zahl  $\varepsilon_{\iota z}$  steht in der  $\iota$ -ten Zeile und in der  $z$ -ten Spalte.  $\gamma$  sei der Rang von  $E$ .

Ist  $\gamma = 0$ , so liegt bereits die Normalform vor. Ist  $\gamma > 0$ , so wähle man ein von 0 verschiedenes Element und bringe es an die Stelle  $(1, 1)$ . Wir bezeichnen es wieder mit  $\varepsilon_{11}$ . Sind dann nicht alle Elemente der ersten Zeile und Spalte durch  $\varepsilon_{11}$  teilbar, so sei etwa  $\varepsilon_{1z}$  ein Element der ersten Zeile, das durch  $\varepsilon_{11}$  geteilt den Rest  $\varepsilon'_{1z} < \varepsilon_{11}$  läßt. Durch genügend oft wiederholte Addition oder Subtraktion der ersten Spalte von der  $k$ -ten erreicht man, daß an der Stelle  $(1, k)$  die Zahl  $\varepsilon'_{1k}$  steht, und durch Vertauschen der 1-ten mit der  $k$ -ten Spalte bringt man  $\varepsilon'_{11}$  an die Stelle  $(1, 1)$ . Entsprechend verfährt man, wenn sich in der ersten Spalte ein nicht durch  $\varepsilon_{11}$  teilbares Element befindet. Das Verfahren wiederholt man so oft, bis alle Elemente der ersten Zeile und Spalte durch das Element der Stelle  $(1, 1)$ , das wir wieder mit  $\varepsilon_{11}$  bezeichnen, teilbar sind. Dieser Fall muß einmal eintreten, da sich bei jedem Schritt der absolute Betrag von  $\varepsilon_{11}$  verringert. Durch hinreichend oft wiederholte Addition der ersten Spalte (Zeile) zu den übrigen Spalten (Zeilen) erreicht man, daß alle Elemente der ersten Zeile (Spalte) außer  $\varepsilon_{11}$  gleich 0 werden. Gibt es in der neuen Matrix ein Element  $\varepsilon_{ik}$  ( $i \neq 1, k \neq 1$ ), das nicht durch  $\varepsilon_{11}$  teilbar ist, so bringt man es durch Zeilenaddition in die erste Zeile und beginnt das eben angewandte Verfahren von neuem. So fährt man fort, bis alle Elemente durch das Element der Stelle  $(1, 1)$  teilbar geworden sind und in der ersten Zeile und Spalte außer  $\varepsilon_{11}$  lauter Nullen stehen. — Beliebige elementare Umformungen der Teilmatrix  $E_1$ , die aus  $E$  durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht, können durch elementare Umformungen von  $E$  bewirkt werden, die an der ersten Zeile und Spalte von  $E$  wegen der dort stehenden Nullen nichts mehr ändern. Durch solche Umformungen kann man an die Stelle  $(2, 2)$  ein Element  $\varepsilon_{22}$  bringen, das in allen übrigen Elementen von  $E_1$  enthalten ist, während alle von  $\varepsilon_{22}$  verschiedenen Elementen der zweiten Zeile und Spalte 0 sind. Da bei den elementaren Umformungen von  $E_1$  die Eigenschaft aller Elemente von  $E_1$ , durch  $\varepsilon_{11}$  teilbar zu sein, erhalten bleibt, so ist  $\varepsilon_{22}$  durch  $\varepsilon_{11}$  teilbar. Fortsetzung dieses Verfahrens führt auf eine Matrix, in der alle Elemente bis auf gewisse in der Diagonale stehende = 0 sind. Deren Anzahl muß  $\gamma$  sein, da sich bei elementaren Umformungen der Rang von  $E$  nicht ändert. Jedes der Diagonalelemente  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{\gamma\gamma}$  ist Teiler des folgenden. Diese

Diagonalelemente, die die *invarianten Faktoren* der Matrix  $E$  heißen, unterscheiden sich von den S. 308 erwähnten nur durch die Reihenfolge, die sich durch Zeilen- und Spaltenvertauschung beliebig abändern lässt: Es ist  $\varepsilon_{11} = c_1, \dots, \varepsilon_{yy} = c_1$ .

Die Eindeutigkeit der so gewonnenen Normalform, d. h. ihre Unabhängigkeit von der Leitung des Normierungsprozesses haben wir schon in § 86 dadurch bewiesen, daß wir die invarianten Faktoren als charakteristische Zahlen der durch die Matrix gegebenen abelschen Gruppe erkannten. Man kann die Unabhängigkeit auch unmittelbar wie folgt einsehen. Bezeichnet  $D_i$  den größten gemeinsamen Teiler aller  $i$ -reihigen Unterdeterminanten von  $E$ , so ändert sich  $D_i$  bei den Umformungen nicht, nach bekannten Sätzen der Determinantentheorie.\*). In der Normalform ist  $D_i$  das Produkt der  $i$  ersten Diagonalelemente  $\varepsilon_{11} \dots \varepsilon_{ii}$ , also ist

$$\varepsilon_{ii} = \frac{D_i}{D_{i-1}}$$

schon durch  $E$  bestimmt.

In praktischen Fällen ist es nicht immer ratsam, genau nach dem angegebenen Verfahren vorzugehen, sondern es wird bisweilen eine andere Anordnung der Umformungen rascher zum Ziele führen. Wir erläutern das Verfahren an einem Beispiel, das uns S. 89 als Inzidenzmatrix bei den Pseudomannigfaltigkeiten begegnet ist, nämlich an einer  $n$ -zeiligen und  $m$ -spaltigen Matrix  $E$  von folgender Beschaffenheit:

(a) In jeder Zeile stehen genau zwei von 0 verschiedene Elemente. Ihr absoluter Betrag ist 1.

(b) Teilt man die Spalten irgendwie in zwei Klassen, so gibt es wenigstens eine Zeile, deren beide Einsen in Spalten verschiedener Klassen stehen.

Die Normalisierung wird in vier Schritten durchgeführt:

1. Schritt:  $E$  wird durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in die Matrix

$$\left( \begin{array}{cccccc} \pm 1 & \pm 1 & 0 & \cdot & 0 \\ * & * & \pm 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ * & * & * & \cdot & \pm 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot & * \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ m-1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ n \end{array} \quad (I)$$

$\longleftrightarrow m \longrightarrow$

übergeführt, worin die Sterne für nicht näher zu bezeichnende Elemente — Nullen oder Einsen — stehen. Um (I) aus  $E$  zu gewinnen, bringt man zunächst durch Spaltenvertauschung die beiden Einsen der ersten Zeile an die erste und zweite Stelle. Wegen (b) gibt es eine Zeile, etwa die  $i$ -te, deren eine Eins in der ersten oder zweiten Spalte, deren

\*.) M. Böcher, Einführung in die höhere Algebra (Leipzig 1910).

andere in der  $k$ -ten Spalte ( $k > 2$ ) steht. Man vertauscht dann die dritte mit der  $k$ -ten Spalte und die  $i$ -te Zeile mit der zweiten. Die neue Matrix stimmt in den ersten beiden Zeilen mit (I) überein. So wird Zeile an Zeile gefügt.

2. Schritt: Durch Vorzeichenwechsel in den Spalten erreicht man, daß in jeder der  $m-1$  ersten Zeilen genau eine +1 und eine -1 steht.

3. Schritt: Addition der zweiten bis  $m$ -ten Spalte zur ersten. Die Matrix erhält dadurch die Form

$$\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & * & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & * & * & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot & * \end{array} \right) \quad (II)$$

In der ersten Spalte stehen nur Nullen oder (höchstens in den letzten  $n-m+1$  Zeilen) Zweien. Durch geeignete Vorzeichenänderungen von Zeilen haben die hingeschriebenen Einsen alle das positive Vorzeichen erhalten.

4. Schritt: Durch geeignete Additionen oder Subtraktionen der ersten bzw. zweiten, ..., ( $m-1$ )-ten Zeile zu den übrigen erreicht man, daß in der zweiten bzw. dritten, ...,  $m$ -ten Spalte nur eine einzige Eins steht. Die Matrix hat danach die Form

$$\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{array} \right) \quad (III)$$

Die letzten  $n-m+1$  Zeilen enthalten außer in der ersten Spalte lauter Nullen. Die erste Spalte ist dabei ungeändert geblieben. Stehen nun in der ersten Spalte keine Zweien, also lauter Nullen, so ist die Normalform hergestellt:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{array} \right) \quad (IV)$$

Gibt es mehr als eine Zwei in der ersten Spalte, so kann man durch Zeilenaddition oder -subtraktion eine einzige Zwei herstellen, die man noch durch Zeilenvertauschung in die linke obere Ecke bringt:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{array} \right) \quad (\text{V})$$

Man erhält die Normalform (IV) oder (V), je nachdem die ursprüngliche Matrix  $E$  den Rang  $m-1$  oder  $m$  hat.

## Anmerkungen.

1. (S. 3.) Knoten im  $\mathbb{R}^4$ . Würde man Selbstüberschneidungen zulassen, so ließe sich jeder Knoten in einem  $xyz$ -Raume in eine Kreislinie deformieren. Nun läßt sich das Ergebnis einer solchen Selbstüberschneidung auch ohne Selbstüberschneidung erzielen, wenn der  $xyz$ -Raum in einen vierdimensionalen  $xyzt$ -Raum eingelagert ist. Denken wir uns die beiden kleinen Stücke  $a$  und  $b$  des Knotens, die an der Überschneidung beteiligt sind, etwa folgendermaßen spezialisiert:  $a$  die Strecke  $-1 \leq x \leq +1, y = z = 0$ ;  $b$  der Halbkreis  $y^2 + z^2 = 1, x = 0, z \geq 0$ . Es handelt sich dann darum,  $b$  in den Halbkreis  $b'$ , der durch  $y^2 + z^2 = 1, x = 0, z \leq 0$  gegeben ist, ohne Selbstüberschneidung des im  $xyz$ -Raume liegenden Knotens überzuführen. Dies gelingt dadurch, daß man den Halbkreis  $b$  im  $yzt$ -Raume euklidisch starr um die  $y$ -Achse dreht, bis er in die Lage  $b'$  kommt.
2. (S. 6.) Das Einwickeln der Doppelringfläche findet man besonders handgreiflich dargestellt in Hilbert und Cohn-Vossen [1] S. 265, wo sich auch sonst lehrreiche Bemerkungen zum Anschauungsmaterial finden.
3. (S. 9.) Einbetten nichtorientierbarer Flächen. Alle Möglichkeiten, die projektive Ebene mit doppelpunktfreien Durchdringungskurven in den euklidischen  $\mathbb{R}^3$  zu legen, sind von Boy [1] ermittelt worden. Man vergleiche auch Schilling [1], Ende des ersten Bandes: Topologische Verwirklichung der projektiven Ebene durch eine singularitätenfreie Fläche im Raum. — Die projektive Ebene läßt sich dadurch ohne Selbstdurchdringungen in den euklidischen  $\mathbb{R}^4$  legen, daß man den Rand eines in einem euklidischen Teil- $\mathbb{R}^3$  gelegenen Möbiusbandes von einem nicht diesem Raum angehörigen Punkte aus projiziert und den projizierenden Kegel an das Möbiusband anheftet. — Daß die projektive Ebene sich sogar als eine algebraische Fläche in den  $\mathbb{R}^4$  legen läßt, wird im Anhang I von Hilbert und Cohn-Vossen [1] gezeigt. In diesem Buche findet man auch interessante Bemerkungen über die Schließung des Möbiusbandes im  $\mathbb{R}^3$  und die Gestalten der Kreuzhaube.
4. (S. 13.) Unendliche Flächen werden systematisch behandelt von B. v. Kerekjártó [6], 5. Abschnitt: Offene Flächen.
5. (S. 16.) Raumschließung durch Gruppen. Es liegt die Frage nahe, ob man den euklidischen Raum noch auf andere Weise schließen kann, indem man die Forderung, umkehrbar eindeutig zu werden, an andere Gruppen als an die konforme und projektive Gruppe stellt. Beispiele für solche andersartigen Schließungen findet man bei Seifert [1] S. 30. Die konforme und projektive Gruppe sind indessen dadurch vor anderen ausgezeichnet, daß sie allein in dem geschlossenen Raum die Lie-Helmholzschen Beweglichkeitsbedingungen erfüllen. — Über die Schließung des komplexen Zahlenraumes durch Gruppen rationaler Transformationen vgl. H. Behnke u. P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (Berlin 1934), S. 3.
6. (S. 17.) Lagenräume der Mechanik. Eine besondere mechanische Bedeutung gewinnt der Lagenraum eines mechanischen Systems erst dadurch, daß nicht nur seine topologischen Eigenschaften für den Systemverlauf von Belang sind, sondern nach einem Gedanken von Jacobi\*\*) sich ihm eine Metrik

\*) H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems (Berlin 1923), S. 30.

\*\*) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, Supplementband (Berlin 1884), S. 44.

derart aufprägen läßt, daß die Bahnkurven die geodätischen Linien dieser Metrik sind. Dabei ist die Gesamtenergie ein für allemal fest und die potentielle Energie als Ortsfunktion vorgegeben. Man vergleiche z. B. E. T. Whittaker, Analytische Dynamik (Berlin 1914), § 104. Ist z. B. im Falle des ebenen, im Schwerefelde hängenden Doppelpendels die Gesamtenergie so groß, daß jede Lage durchlaufen werden kann, so ist der Lagerraum die gesamte Ringfläche. Da sich jede geschlossene Kurve auf der Ringfläche zu einer geodätischen Linie der aufgeprägten Metrik straff ziehen läßt (unter gewissen in diesem Sonderfall erfüllten Bedingungen\*)), und da es unendlich viele nichthomotope geschlossene Kurven auf der Ringfläche gibt, so folgt die Existenz unendlich vieler verschiedener periodischer Bewegungen des ebenen Doppelpendels.

7. (S. 18.) Über Phasenräume der Mechanik vgl. Birkhoff [5].
8. (S. 21.) Topologische Räume. Der im Text benutzte, allein durch die Axiome A und B bestimmte Begriff des Umgebungsraumes ist so gefaßt, daß gerade topologische Grundbegriffe, wie offene und abgeschlossene Teilmenge, stetige und topologische Abbildung, Identifizieren, sich darauf gründen lassen. Für uns ist der Umgebungsraum nur Durchgangsbegriff zum Komplex. Er ist zu allgemein, als daß man schon geometrisch wesentliche Sätze von ihm allein beweisen könnte. Die mengentheoretische Topologie versteht daher unter einem Umgebungsraum oder einem topologischen Raum speziellere Gebilde. Z. B. stimmen bei Tietze-Vietoris [8] S. 156 die Axiome (A) und (B) a) mit unseren Axiomen A und B überein. Zu ihnen treten aber noch die weiteren Axiome hinzu: (B) b) Der Durchschnitt zweier Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung des Punktes; (C) Ist die Menge  $U$  eine Umgebung von  $P$ , so ist es auch die Menge aller „inneren“ Punkte von  $U$ , d. h. aller der Punkte  $X$ , für die  $U$  eine Umgebung von  $X$  ist; (D) Ist  $P \neq Q$ , so gibt es Umgebungen von  $P$  und  $Q$  ohne gemeinsamen Punkt. Der Tietzesche Umgebungsraum ist also wesentlich spezieller als unserer. Er ist umfangsgleich mit dem Begriffe des *Hausdorffschen topologischen Raumes*, der zumeist in der Literatur benutzt wird; dessen Axiome sind (Hausdorff [1] S. 213 und 260): (A) das Axiom A des Textes; (B) Zu zwei Umgebungen eines Punktes  $P$  gibt es eine Umgebung von  $P$ , die Teilmenge von beiden ist; (C) Liegt der Punkt  $Q$  in einer Umgebung  $U(P)$  eines Punktes  $P$ , so hat er eine Umgebung  $U(Q)$ , die Teilmenge von  $U(P)$  ist (die Umgebungen sind also offene Mengen); (D) wie oben Axiom (D). Diese Umgebungsaxiome werden z. B. von offenen Kugelumgebungen und offenen Würfelumgebungen des Zahnenraumes erfüllt. Da das Axiom (B) von Tietze fehlt, so haben die Umgebungen bei Hausdorff eine engere Bedeutung als bei Tietze. Z. B. ist der Zahnenraum, der durch Kugelumgebungen zum topologischen Raum gemacht wird, zunächst noch von demjenigen zu unterscheiden, in dem die Umgebungen offene Würfel sind. Daher werden nachträglich zwei Umgebungsstysteme für gleichwertig erklärt, wenn jede Umgebung des ersten Systems eine des zweiten enthält und umgekehrt.
9. (S. 21.) Homogenität des Zahnenraumes. Die Punkte des Zahnenraumes sind nicht als mathematische Gegenstände erklärt, die umkehrbar eindeutig den  $n$ -tupeln reeller Zahlen zugeordnet werden können, sondern ein Punkt ist identisch mit einem Zahnen- $n$ -tupel. Des unbeschadet führen wir S. 36 in den Zahnenraum ein Parallelkoordinatensystem ein, in dem das  $n$ -tupel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  Parallelkoordinaten  $y_1, y_2, \dots, y_n$  erhält; das definierende Zahnen- $n$ -tupel hat man von dem  $n$ -tupel der Parallelkoordinaten zu unterscheiden, obwohl insbesondere  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$  sein kann. — Der Zahnenraum ist nicht in dem logischen Sinne homogen\*\*), daß zwei seiner Punkte begrifflich auf Grund

\*) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Differentialgleichungen, 3. Aufl. (Berlin 1930), S. 195.

\*\*) H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, Sonderausgabe aus dem Handbuch der Philosophie (München 1927), S. A 7.

der Axiome nicht voreinander ausgezeichnet sind. Das ist im Zahnenraume deshalb nicht der Fall, weil die Zahlen durch ihre Eigenschaften voneinander unterschiedene Individuen sind. Dagegen ist der Zahnenraum sehr wohl in dem mathematisch allein belangreichen Sinne des § 12 homogen.

10. (S. 46.) Rein kombinatorische Topologie. Über die Tragweite der rein kombinatorischen Methode unterrichtet Kneser [4], Tietze-Vietoris [8]. Eine vollständige, rein kombinatorische Durchführung der Flächentopologie gibt Reidemeister [7], einen kombinatorischen Abriß der Flächentopologie Levi [1] und Chuard [1]. Die Knotentheorie behandelt kombinatorisch Reidemeister [6]. Der Enzyklopädie-Artikel über Analysis situs (Dehn-Heegaard [1]) ist ebenfalls kombinatorisch gehalten, doch sind darin die Schwierigkeiten, die eine strenge Durchführung der rein kombinatorischen Methode bietet, noch nicht voll zum Ausdruck gekommen. Diese Schwierigkeiten, die schon in den Grundlagen auftreten und in mehr als drei Dimensionen zur Zeit unüberwindlich sind, erkennt man aus Bilz [1], Kneser [4], Furch [2], [3], [5], Weyl [2]. Versuche, durch eine zweckmäßige Definition des Begriffes der Elementarverwandtschaft diese Schwierigkeiten zu beheben, haben unter anderen unternommen Newman [1], [4], Alexander [18], Tucker [3]. Man vergleiche ferner die an Weyl [2] anknüpfende Arbeit von de Rham [1]; ferner Mayer [1] und Bergmann [2].
11. (S. 53.) Streng genommen haben wir im Text nur bewiesen, daß durch Identifizieren der Ränder zweier kongruenter aufeinander abgebildeten Vollkugeln die Sphäre entsteht. Daß das gleiche auch bei einer beliebigen topologischen Abbildung  $A$  der Ränder zweier Vollkugeln  $B_1$  und  $B_2$  gilt, erkennt man so: Es sei  $A'$  eine kongruente Abbildung des Randes von  $B_1$  auf den Rand einer weiteren Vollkugel  $B'_2$ . Dann werden die Ränder von  $B_2$  und  $B'_2$  vermöge  $A'A'^{-1}$  topologisch aufeinander abgebildet, und diese topologische Beziehung läßt sich zu einer topologischen Abbildung von  $B_2$  auf  $B'_2$  erweitern, indem man etwa entsprechende Radien von  $B_2$  und  $B'_2$  linear aufeinander abbildet. Nach S. 33 erhält man einen homöomorphen Umgebungsraum, wenn man nicht  $B_1$  und  $B_2$ , sondern  $B_1$  und  $B'_2$  aufeinanderklebt. Das ergibt aber die Sphäre, da die Ränder von  $B_1$  und  $B'_2$  kongruent aufeinander bezogen sind.
12. (S. 56.) Räume aus Linienelementen. Die Aufgabe gibt zwei Beispiele von Räumen, deren „Punkte“ Linienelemente einer geschlossenen Fläche sind. Die Frage nach allen aus orientierten oder nichtorientierten Linienelementen geschlossener Flächen bestehenden Räumen hat drei Bearbeitungen gefunden: Nielsen [6] S. 306 (es werden die Fundamentalgruppen aller aus orientierten Linienelementen bestehenden Räume angegeben), Hotelling [1], [2], Threlfall [3]. Man vergleiche ferner v. d. Waerden, Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1933), Aufgabe 124, S. 112 (nichtorientierte Linienelemente der projektiven Ebene) und S. 198 dieses Buches, Aufgabe 4.
13. (S. 70.) Bisweilen bezeichnet man die ganze Homologiegruppe als Bettische Gruppe und die im Text Bettische Gruppe genannte Gruppe als reduzierte Bettische Gruppe; siehe Pontrjagin [3].
14. (S. 72.) Mit der Einführung der Incidenzmatrizen hat Poincaré (insbesondere in [4]) den entscheidenden Schritt zur Arithmetisierung der Topologie getan.
15. (S. 81.) Ketten mod  $m$ . Vom algebraischen Standpunkt aus ist eine Kette nichts anderes als eine Linearform, deren Unbestimmte die orientierten Simplexe sind. Die Koeffizienten dieser Linearform gehören einem bestimmten Koeffizientenbereiche an. Ist dieser Koeffizientenbereich der der ganzen Zahlen, so erhält man die gewöhnlichen Ketten, wie sie in § 15 bis § 22 betrachtet wurden. Nimmt man die Restklassen mod 2 als Koeffizienten, so ergeben sich die Ketten mod 2. Allgemeiner hat man als Koeffizienten die Restklassen modulo einer beliebigen ganzen Zahl  $m \neq 1$  benutzt. Man kommt dann zu den Homologiegruppen und Bettischen Zahlen mod  $m$ , deren topologische Invarianz ebenso wie

für gewöhnliche Ketten nachgewiesen werden kann. Die Bettischen Zahlen mod  $m$  sind durch die gewöhnlichen Bettischen Zahlen (die man auch Bettische Zahlen mod 0 nennt) und durch die Torsionskoeffizienten bestimmt, und umgekehrt berechnen sich die Torsionskoeffizienten aus den Bettischen Zahlen mod  $m$  ( $m = 0, 2, 3, \dots$ ). Die Bettischen Zahlen mod  $m$  bieten hiernach für Homologiefragen keine Vorteile vor den gewöhnlichen Homologiegruppen. Dagegen haben sie in letzter Zeit für andere Untersuchungen (Dualitäts- und Abbildungssätze) Bedeutung erlangt; vergleiche z. B. Hopf [13], [19], Pontrjagin [3]. Homologiegruppen mod 2 wurden eingeführt von Tietze [1] und weiter behandelt von Veblen [5]. Homologiegruppen mod  $m$  wurden zuerst von Alexander [15] betrachtet.

16. (S. 92.) Für allgemeinere Umgebungsräume wird man die Definition der Homologiegruppen zweckmäßig so wählen, daß möglichst viele Sätze, die in der Theorie der Komplexe bestehen, ihre Gültigkeit behalten. Folgendes einfache Beispiel mag dies illustrieren: Man betrachte in der Zahlenebene die Punktmenge, die in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ -1 \leq y &\leq +1 & \text{für } x = 0 \end{aligned}$$

gegeben wird, und füge zu dieser Menge noch den unendlich fernen Punkt hinzu, durch den sich die Zahlenebene zur 2-Sphäre  $S^2$  schließt. So erhält man eine abgeschlossene Teilmenge  $\mathcal{M}$  von  $S^2$ , auf der, wie man sich leicht überlegt, jede geschlossene singuläre 1-Kette  $\sim 0$  ist. Anderseits wird  $S^2$  von  $\mathcal{M}$  in genau zwei Gebiete zerlegt. Bei unserer Definition der singulären Homologiegruppen würde also der Alexandersche Dualitätssatz (vgl. Anm. 47), nach welchem die Anzahl der Gebiete um 1 größer ist als die erste Bettische Zahl des eingelagerten Komplexes, für allgemeine abgeschlossene Mengen seine Gültigkeit verlieren. Wie man bei beliebigen abgeschlossenen Teilmengen von Zahlenebenen zu einer zweckmäßigen Definition der Homologiegruppen kommt, darüber vergleiche man Alexandroff [7], [10], Čech [2], Lefschetz [12], Vietoris [2], [4].

17. (S. 112.) Invarianz beweise der Homologiegruppen. Der Gedanke, zum Nachweis der topologischen Invarianz der simplizialen Homologiegruppen singuläre Ketten simplizial zu approximieren, geht auf J. W. Alexander zurück. In seinem ersten Beweise [1] wird die Übereinstimmung der aus zwei verschiedenen simplizialen Zerlegungen eines Komplexes berechneten simplizialen Homologiegruppen bewiesen, ohne daß topologisch invariante singuläre Homologiegruppen wie im Text definiert werden. Der Beweis kommt vielmehr mit einem einfacheren Begriffe der singulären Kette (stetiges Bild einer simplizialen Kette) aus, da die Addierbarkeit der singulären Ketten nicht wie im Texte zur invarianten Definition der Homologiegruppen gebraucht wird. — Ein zweiter Beweis von Alexander [15] benutzt überhaupt keine singulären Ketten, sondern approximiert die Unterteilung der einen simplizialen Zerlegung des Komplexes in der anderen und umgekehrt.

Wir haben im Texte die Invarianz der Zusammenhangszahlen dadurch bewiesen, daß wir sie durch die Bettischen Zahlen und die Torsionskoeffizienten ausdrückten. Man könnte ebensogut die Invarianz direkt einsehen, indem man singuläre Ketten mod 2 einführt, also an Stelle des ganzzahligen Koeffizientenbereiches die Restklassen mod 2 benutzt. Der Beweis des Approximationssatzes und damit der Invarianzbeweis der Zusammenhangsgruppen verläuft für den neuen Koeffizientenbereich nicht anders als im Texte.

18. (S. 119.) Komplexer projektiver Raum. Mit der gleichen Methode beweist man, daß im komplexen projektiven Raum, einer  $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, die Homologiegruppen der geraden Dimensionen

- 0, 2, 4, ...,  $2n$  freie zyklische Gruppen sind und die der ungeraden Dimensionen aus dem Nullelemente allein bestehen. Die Homologiebasen werden von den komplexen projektiven Teilräumen gebildet. (Die Punkte des komplexen projektiven Raumes sind  $(n+1)$ -tupel von Verhältniszahlen, die unabhängig voneinander alle komplexen Zahlen durchlaufen mit Ausschluß nur des aus lauter Nullen bestehenden  $(n+1)$ -tupels. Umgebungen sind ebenso wie im reellen projektiven Raum S. 54 definiert.) Man vergleiche v. d. Waerden [2].
19. (S. 120.) Invarianz im Großen. Für den besonderen Fall der geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit folgt die Invarianz der Dimension bereits aus den Ergebnissen des IV. Kapitels. Denn die Dimension  $n$  läßt sich invariant als die kleinste Zahl von der Art charakterisieren, daß die  $(n+1)$ -te und alle folgenden Zusammenhangszahlen 0 sind.
20. (S. 121.) Homologiegruppen in einem Punkte. Statt, wie wir es tun, die Homologiegruppen in einem Punkte mit Hilfe einer bestimmten simplizialen Zerlegung zu definieren und nachträglich ihre topologische Invarianz festzustellen, könnte man sie auch von vornherein topologisch invariant definieren, wie dies mit den singulären Homologiegruppen geschehen ist (§ 27). Zu dem Zwecke erklärt man nach van Kampen [3] zwei singuläre  $k$ -Ketten  $U^k$  und  $V^k$  eines Komplexes  $\mathfrak{K}$  als „gleich im Punkte  $P$ “, wenn  $U^k - V^k$  fremd zu  $P$  ist. Eine Kette  $U^k$  heißt „geschlossen in  $P$ “ oder ein Zykel in  $P$ , wenn  $\partial U^k$  nicht durch  $P$  geht, und man schreibt  $U^k \sim V^k$  in  $P$ , wenn  $U^k - V^k$  homolog einer zu  $P$  fremden Kette ist. Mit anderen Worten vernachlässigt man in allen Ketten die zu  $P$  fremden, also die zu  $\mathfrak{K} - P$  gehörigen Simplexe; man betrachtet also „Ketten mod  $(\mathfrak{K} - P)$ “. Die  $k$ -Zykeln in  $P$  lassen sich in Homologieklassen einteilen. Sie bilden eine abelsche Gruppe, die ihrer Definition nach topologisch invariant ist und die für  $k > 1$  mit der  $(k-1)$ -ten Homologiegruppe des Umgebungskomplexes von  $P$  übereinstimmt, was sich mittels simplizialer Approximation beweisen läßt. — Ketten und Homologiegruppen mod  $\mathfrak{K}$ , wo  $\mathfrak{K}$  eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von  $\mathfrak{K}$  ist, werden von Lefschetz [12] ausgiebig verwendet, z. B. zur Angleichung der Theorie der berandeten Mannigfaltigkeiten an die der geschlossenen; vergleiche Anmerkung 41.
21. (S. 127.) Unter dem Satze von der Invarianz der Dimension versteht man zumeist den Satz der Aufgabe 2 von § 32. Die Invarianz der Dimension wurde zuerst von Brouwer [6] bewiesen. Andere Beweise findet man bei Alexandroff [16], Lefschetz [12], Sperner [1].
22. (S. 140.) In der rein kombinatorischen Behandlung der Flächentopologie, in der die ursprünglichen Gegenstände endlich oder abzählbar viele Punkte, Strecken und Flächenstücke sind und nur die Frage nach der Elementarverwandtschaft, nicht die nach der Homöomorphie einen Sinn hat, ist der Satz des Textes bereits der Hauptsatz der Flächentopologie. Er wurde zuerst kombinatorisch bewiesen von Dehn und Heegaard [1] S. 190. Die dort benutzte Normalform ist aber nicht das Fundamentalpolygon, sondern sie besteht aus drei Flächenstücken. Das Fundamentalpolygon verwendet zum kombinatorischen Beweise des Fundamentalsatzes Levi [1] S. 71, ebenso Reidemeister [7]. Über andere Normalformen vergleiche Threlfall [1]; zum kombinatorischen Beweise überdies Chuard [1].
23. (S. 148.) Mit der Lösung des Homöomorphieproblems der Flächen sind die Probleme der Flächentopologie nicht erschöpft. Die dreidimensionale Topologie stellt der Flächentopologie z. B. schwierige Fragen, indem sie die Konstruktion und Unterscheidung aller möglichen Heegaarddiagramme fordert (vergleiche Anmerkung 34). Während aber das Homöomorphieproblem sich mit den Homologieeigenschaften geschlossener Flächenkurven lösen läßt, beziehen sich die erwähnten Fragen auf Homotopie- und Isotopieeigenschaften. Die Frage, wann zwei Flächenkurven frei homotop (§ 49) sind, ist nach S. 176 eine rein gruppentheoretische Frage: Man hat alle Klassen konjugierter Elemente der

Fundamentalgruppe der Fläche aufzustellen. Dieses Problem ist von Dehn [3], [4] vollständig gelöst worden; es umfaßt die Frage nach der Existenz *amphidromer* Kurven, das sind solche, die sich auf der Fläche homotop in ihre Reziproken deformieren lassen, auf denen sich also der Durchlaufungssinn durch homotope Deformation umkehren läßt. Zur Isotopie von Flächenkurven vergleiche man Baer [1], [2]. — Ein weiterer hierher gehöriger Satz ist der folgende von Nielsen [6] bewiesene: Jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche läßt sich durch eine topologische Selbstabbildung der Fläche bewirken. — Über Abbildungen und Fixpunktsätze von Flächen vergleiche man Nielsen [2]—[6], Brouwer [1], [5], [14], [15], Kneser [7], [9], Hopf [14]. — Eine zusammenfassende Darstellung der rein kombinatorischen Flächentopologie gibt Reidemeister [7].

24. (S. 149.) Die Gleichheitsdefinition für Wege ist somit eine andere als für orientierte singuläre 1-Simplexe, für die wir lineare Abbildbarkeit der Urbilder gefordert hatten. Wollte man auch für die Wege lineare Abbildbarkeit verlangen, so würde für die Produktbildung der Wege das assoziative Gesetz  $(ab)c = a(bc)$  nicht ohne weiteres gelten.

25. (S. 153.) Der Begriff der Fundamentalgruppe geht auf Poincaré [2], [7] zurück. Die Aufstellung der Erzeugenden und Relationen mittels der Hilfswege (§ 46) haben wir aus Tietze [1] entnommen.

26. (S. 157.) Satz: *Die Zahlen e b e n e ist der einzige zweidimensionale, einfach zusammenhängende, unendliche homogene Komplex.* Zum Beweise konstruieren wir eine Abbildung eines vorgegebenen derartigen Komplexes  $\mathfrak{E}$  auf die Zahlenebene. Wir legen eine feste simpliziale Zerlegung von  $\mathfrak{E}$  zugrunde. Jeder Rückkehrschnitt  $f$  schneidet aus  $\mathfrak{E}$  ein eindeutig bestimmtes Elementarflächenstück aus. Denn  $f$  ist nullhomotop, also auch  $\sim 0 \bmod 2$  und somit Rand eines zweidimensionalen Teilkomplexes  $\mathfrak{G}$ . Dieser Teilkomplex ist eine berandete Fläche, und zwar ein Elementarflächenstück. Es genügt nach § 40 zu zeigen, daß auf  $\mathfrak{G}$  eine beliebige 1-Kette  $\sim 0 \bmod 2$ ,  $u$ , nullhomolog  $\bmod 2$  ist. Sicher ist  $u \sim 0 \bmod 2$  auf  $\mathfrak{E}$ ; es gibt also einen endlichen Teilkomplex  $\mathfrak{U}$  mit dem Rande  $u$ .  $\mathfrak{U}$  kann kein Dreieck enthalten, das außerhalb  $\mathfrak{G}$  liegt, weil  $\mathfrak{U}$  dann alle Dreiecke außerhalb  $\mathfrak{G}$  enthalten müßte; denn  $\partial \mathfrak{U}$  liegt auf  $\mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{U}$  enthält aber nur endlich viele Dreiecke. Also ist  $u$  bereits  $\sim 0 \bmod 2$  auf  $\mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{G}$  ist eindeutig, denn ließe sich eine zweite Fläche  $\mathfrak{G}'$  in  $f$  einspannen, so würden  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$  zusammen eine geschlossene Kette  $\sim 0 \bmod 2$  bilden; es gibt aber außer der Kette 0 keine geschlossene Kette  $\sim 0 \bmod 2$  auf  $\mathfrak{E}$ , weil mit einem Dreiecke auch alle übrigen dazu gehören würden. — Wenn nun  $\mathfrak{G}_1$  ein beliebiges, aus Dreiecken bestehendes Elementarflächenstück von  $\mathfrak{E}$  mit dem Rande  $f_1$  ist, so kann man es eindeutig durch Hinzunahme derjenigen Dreiecke erweitern, die mit Dreiecken von  $\mathfrak{G}_1$  eine Kante oder eine Ecke gemeinsam haben. Den so erhaltenen Teilkomplex  $\mathfrak{T}$ , der unter Umständen „Löcher“ aufweist, ergänzen wir in eindeutiger Weise durch Hinzunahme aller Elementarflächenstücke, die auf ihm verlaufende Rückkehrschnitte zum Rande haben. — Wir behaupten, daß der so entstehende Komplex  $\mathfrak{T}$  ein Elementarflächenstück ist. Denn aus der Konstruktion von  $\mathfrak{T}$  folgt, daß  $\mathfrak{T}$  die Verbindbarkeitsbedingung ( $PM_s$ ) von S. 88 erfüllt. Wir betrachten dann einen aus Randkanten von  $\mathfrak{T}$  bestehenden Rückkehrschnitt  $f_2$ . Er liegt auch auf dem Rande von  $\mathfrak{T}$ , da beim Übergange von  $\mathfrak{T}$  zu  $\mathfrak{E}$  keine neuen Randkanten hinzugekommen sind. Das in  $f_2$  eingespannte Elementarflächenstück  $\mathfrak{G}_2$  gehört also nach Konstruktion zu  $\mathfrak{T}$ . Anderseits besteht  $\mathfrak{T}$  wegen ( $PM_s$ ) aus allen Dreiecken, die mit einem Dreieck von  $\mathfrak{G}_2$  verbinderbar sind. Das sind aber nur die Dreiecke von  $\mathfrak{G}_2$  selbst. Denn der Rand von  $\mathfrak{G}_2$  gehört auch dem Rande von  $\mathfrak{T}$  an. Daher gehört auch  $\mathfrak{T}$  zu  $\mathfrak{G}_2$ ; es ist also  $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}_2$  ein Elementarflächenstück. — Die Gesamtheit der Dreiecke von  $\mathfrak{G}_2$ , die nicht zu  $\mathfrak{G}_1$  gehören, bilden

ein gelochtes Elementarflächenstück, also einen Kreisring  $\mathfrak{B}_1$  mit dem inneren Randkreise  $f_1$  und dem äußeren  $f_2$ . Man bilde nun  $\mathfrak{G}_1$  auf den Einheitskreis der Zahlenebene topologisch ab,  $\mathfrak{B}_1$  auf den Kreisring der Zahlenebene mit dem inneren Radius 1 und dem äußeren 2, so daß die Abbildungen auf dem  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{B}_1$  gemeinsamen Kreise  $f_1$  übereinstimmen, danach  $\mathfrak{B}_2$  auf den Kreisring mit dem inneren Radius 2 und dem äußeren 3 und so fort. So erhält man eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{E}$  auf die ganze Zahlenebene.

27. (S. 160.) Hieraus folgt, daß zwei von  $O$  ausgehende stetig ineinander deformierbare geschlossene Kantenwege  $w_1$  und  $w_2$  auch kombinatorisch ineinander deformierbar sind. Durch kombinatorische Deformation führt man erst  $w_1$  in  $w_1 \cdot w_2^{-1} w_2$  und danach in  $w_2$  über, was möglich ist, weil  $w_1 w_2^{-1}$  stetig und daher nach (II) kombinatorisch nullhomotop ist.

28. (S. 176.) Man bestimme unter den geschlossenen Flächen diejenigen, auf denen sich amphidrome Kurven (Anm. 23) finden. — Im projektiven Raum sind außer den (stets amphidromen) nullhomotopen Kurven noch die projektiven Geraden, also alle Kurven amphidrom, im Linsenraum (3, 1) dagegen nur die nullhomotopen Kurven.

29. (S. 176.) Man kann den Übergang von einem geschlossenen Wege  $w_1$  zu einem homologen Wege auch durch einen Deformationsprozeß bewirken, nämlich durch „Deformation mit Zerreißung“. Damit ist folgendes gemeint: Man deformeiert  $w_1$  in einen Weg  $\bar{w}_1$ , der einen Doppelpunkt (Selbstberührung)  $P$  aufweist, von dem wir annehmen, daß er der Anfangspunkt von  $\bar{w}_1$  ist.  $\bar{w}_1$  ist dann das Produkt zweier geschlossener Wege  $w'_1$  und  $w''_1$ , die jetzt unabhängig voneinander frei deformeirt werden können, bis sie schließlich wieder zu einem einzigen Wege  $w_2$  zusammengefügt werden. Auf  $w_2$  kann man denselben Prozeß anwenden wie auf  $w_1$  usf. Nach  $r$  Schritten kommt man zu einem Wege  $w_r$ , der offenbar homolog zum Ausgangswege  $w_1$  ist. Man überlegt sich leicht, daß man auf diese Weise tatsächlich jeden zu  $w_1$  homologen Weg erhalten kann. Die drei Klassen von S. 176: Wegeklasse, Klasse konjugierter Elemente, Homologieklassse entsprechen somit den drei Deformationsprozessen: Gebundene Deformation, freie Deformation, Deformation mit Zerreißung.

30. (S. 179.) Die Bestimmung der Homologieguppen eines zusammengesetzten Komplexes hat Vietoris [6] durchgeführt. Vergleiche ferner Mayer [1]. Zur Fundamentalgruppe vgl. Seifert [1].

31. (S. 180.) Allgemeiner ist die Gruppe mit der einen Relation  $A^m = B^n$  nur dann isomorph mit der Gruppe  $A^{m'} = B^{n'}$ , wenn die Zahlenpaare  $m, n$  und  $m', n'$  abgesehen von der Reihenfolge übereinstimmen. Zum Beweise hat man in der Gruppe  $A^m = B^n$  die Faktorgruppe nach dem Zentrum zu bilden, das von  $A^m$  erzeugt wird. Die Faktorgruppe hat die Relationen  $\bar{A}^m = \bar{B}^n = 1$ , und in ihr läßt sich jedes Element endlicher Ordnung in eine Potenz von  $\bar{A}$  oder  $\bar{B}$  transformieren. Damit sind die Zahlen  $m, n$  als Invarianten der Gruppe charakterisiert. Vgl. Schreier [1]. Eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz (§ 65) zweier Torusknoten  $m, n$  und  $m', n'$  besteht also in der Übereinstimmung dieser Zahlenpaare. Ist aber  $m = m'$  und  $n = n'$ , so branchen die beiden Knoten noch nicht äquivalent zu sein, da man zwischen dem Knoten und seinem Spiegelbild unterscheiden muß. So gibt es z. B. eine „Rechts“- und eine „Links“-Kleblattschlinge. Vgl. Dehn [5], Goeritz [2], Seifert [4].

32. (S. 200.) Vgl. Reidemeister [4].

33. (S. 218.) Über die Entdeckung der Poincaréschen Räume vergleiche man Poincaré [7]. Das dort S. 106 angegebene Beispiel stimmt mit dem sphärischen Dodekaederraum überein (vgl. Weber und Seifert [1]). — Das erste Verfahren, unendlich viele verschiedene Poincarésche Räume zu konstruieren, gab M. Dehn, vgl. § 65. Ein anderes Verfahren liefert die Theorie der gefaserten Räume (vgl. Anmerkung 38 und Seifert [3], S. 207). Es ergibt sich, daß jeder Poincarésche Seifert-Threlfall, Topologie

Raum, wenn überhaupt, dann nur auf eine Weise faserbar ist (die 3-Sphäre, die sich auf unendlich viele Weisen fassen läßt, rechnen wir nicht zu den Poincaréschen Räumen), und daß er durch die Vielfachheiten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  seiner Ausnahmefasern umkehrbar eindeutig bestimmt ist; die Vielfachheiten müssen nur der Bedingung genügen, paarweise teilerfremd zu sein. — Unter den gefaserten Poincaréschen Räumen ist der sphärische Dodekaederraum der einzige von endlicher Fundamentalgruppe. Daß die mit dem Dehnschen Verfahren aus der Kleeblattschlinge konstruierte Mannigfaltigkeit von S. 227 mit dem sphärischen Dodekaederraum homöomorph ist, folgt aus ihrer Faserbarkeit (vgl. Threlfall und Seifert [2], II, S. 568). Mit der gleichen Methode wird bewiesen, daß der sphärische Dodekaederraum nicht nur 5-facher zyklischer Überlagerungsraum der Kleeblattschlinge, sondern auch 2-facher des Torusknotens 3, 5 und 3-facher des Torusknotens 5, 2 ist (Seifert [3], S. 222).

34. (S. 220.) Vgl. Seifert [1] und Goeritz [1]. Über Heegaarddiagramme höheren Geschlechts vgl. Goeritz [4], Kreines [1], Reidemeister [8], [9], Singer [1].

35. (S. 221.) Siehe Alexander [3], [8].

36. (S. 222.) Der im Text für die projektive Ebene gegebene Beweis gilt offenbar für jede beliebige nichtorientierbare Fläche. Daß sich eine solche Fläche nicht nur nicht als Teilkomplex einer simplizialen Zerlegung, sondern auch nicht irgendwie topologisch in den dreidimensionalen Zahlenraum einlagern läßt, folgt aus dem Alexanderschen Dualitätssatz (Anm. 47).

37. (S. 224.) Dieses Ergebnis wurde auf andere Weise von Kneser [5] gewonnen.

38. (S. 224.) Zwei weitere Konstruktionsverfahren geschlossener dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten ergeben sich aus dem Raumformenproblem und der Theorie der gefaserten Räume. Unter einer Raumform versteht man eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, der erstens eine sphärische, euklidische oder hyperbolische Metrik aufgeprägt ist, d. h. jeder Punkt hat eine Umgebung, die sich kongruent auf eine Vollkugel einer der drei metrischen Grundformen, nämlich des  $n$ -dimensionalen sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Raumes abbilden läßt (Bedingung der metrischen Homogenität). Zweitens wird die Unendlichkeitsbedingung an die Raumform gestellt, nach der man von jedem Punkte aus in jeder Richtung einen geodätischen (unter Umständen in sich zurückkehrenden) Strahl unbegrenzt abtragen kann; diese Bedingung schließt z. B. aus, daß jede offene Teilmenge einer Raumform wieder eine Raumform ist. Die drei Grundformen nehmen unter den Raumformen dadurch eine ausgezeichnete Stellung ein, daß sie die einzigen einfach zusammenhängenden sind. (Nimmt man zu ihnen noch den durch Diametralpunktidentifizierung aus dem metrischen sphärischen Raum entstehenden elliptischen Raum hinzu, so hat man übrigens in diesen vier Raumformen die einzigen, die die Lie-Helmholzschen Beweglichkeitsbedingungen erfüllen.) Nun zeigt sich, daß in zwei Dimensionen jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich eines fixpunktlosen Bewegungsgruppen einer der drei metrischen Grundformen (Kugelfläche, euklidische und hyperbolische Ebene) auftritt (vgl. z. B. Koebe [1]). Daß Entsprechendes in drei Dimensionen nicht gilt, dafür ist das topologische Produkt aus Kugelfläche und Kreislinie ein Beispiel. Doch liefern die Diskontinuitätsbereiche in drei Dimensionen wenigstens ein reichhaltiges Beispielmaterial, dem wir alle Beispiele des IX. Kap. entnommen haben. Die Bewegungsgruppen des sphärischen und euklidischen Raumes mit endlichem Diskontinuitätsbereich lassen sich vollständig aufzählen, man vergleiche Hopf [2], Threlfall u. Seifert [2], Hantzsche u. Wendt, Euklidische Raumformen (erscheint 1934 voraussichtlich in den Math. Annalen). Über die Diskontinuitätsbereiche des hyperbolischen Raumes ist wenig bekannt; man vergleiche Löbell [4], Weber u. Seifert [1].

Zur Betrachtung gefasster Räume geben die Diskontinuitätsbereiche sphärischer Bewegungsgruppen sowie die Räume aus Linienelementen geschlossener Flächen (Anm. 12) Anlaß, da sie mit einer bestimmten Faserung versehen auf-

treten. Die Fasern der Diskontinuitätsbereiche sind die Bahnkurven kontinuierlicher Bewegungsgruppen der Einheits-3-Sphäre (auch Hypersphäre genannt); in den Räumen aus Linienelementen wird eine Faser von den Linienelementen erfüllt, die durch einen festen Punkt gehen. — Ein gefasster Raum ist nun eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte auf  $\infty^2$  geschlossene Kurven, sog. Fasern, verteilt sind; durch jeden Punkt geht genau eine Faser hindurch, und jede Faser  $H$  hat eine „Faserumgebung“, das ist eine solche,  $H$  enthaltende Teilmenge von Fasern, die sich faserfrei auf einen „gefaserter Vollring“ abbilden läßt, wobei  $H$  in die mittlere Faser übergeht. Ein gefasster Vollring ist ein gerader Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die zur Achse parallelen Geraden gefasert ist und dessen Grundfläche und Dachfläche, um einen rationalen Winkel verschraubt, zur Deckung gebracht sind. Man kann nun an Stelle des ungelösten Homöomorphieproblems: das vollständige Invariantensystem dreidimensionaler Punktmanigfaltigkeiten gegen topologische Abbildungen anzugeben, das lösbar Problem treten lassen: das vollständige Invariantensystem gefasster Räume gegen faserfreie Abbildungen zu ermitteln (Seifert [3]). Die dabei gewonnenen Faserinvarianten, aus denen sich die Fundamentalgruppe berechnen läßt, beziehen sich freilich nicht auf eine gegebene Punktmanigfaltigkeit, sondern auf ihre Faserung, so daß bisweilen die Frage offenbleibt, ob zwei verschiedene gefaserte Räume als Punktmanigfaltigkeiten nicht topologisch aufeinander abbildbar sind. Überdies gibt es Mannigfaltigkeiten, die sich überhaupt nicht fasern lassen, da die Faserbarkeit an eine bestimmte notwendige Eigenschaft der Fundamentalgruppe geknüpft ist. Z. B. sind alle geschlossenen hyperbolischen Raumformen sowie fast alle topologischen Summen (man vgl. S. 218) unfasbar. Dennoch dienen die Faserinvarianten der Topologie der Mannigfaltigkeiten, da sie die Entscheidung über deren Homöomorphie in vielen Fällen zu treffen gestatten. Beispiele hierfür bieten die Diskontinuitätsbereiche fixpunktloser Bewegungsgruppen der Einheits-3-Sphäre, die sich infolge ihrer Faserbarkeit überblicken lassen, sowie die in Anm. 33 erwähnten Poincaréschen Räume.

39. (S. 224.) Äquivalenz von Knoten. Man könnte versucht sein, zwei Knoten dann als äquivalent zu betrachten, wenn sich der eine durch eine isotope Deformation der Abbildung seines Urbildes nach § 31 in den anderen deformieren läßt. Dann könnte man aber jeden Knoten in eine Kreislinie überführen. Man hätte nur durch straffes Auseinanderziehen des Knotens die Verknotung auf einen Punkt zusammenzuschnüren. — Ein anderer der Anschauung naheliegender Äquivalenzbegriff würde in der Überführbarkeit zweier Knoten durch eine isotope Deformation (S. 114) des Gesamtraumes bestehen. Wir beweisen nicht, daß dieser Begriff mit dem im Texte angegebenen übereinstimmt. Zwar bewirkt offenbar jede isotope Deformation des Raumes eine topologische Selbstabbildung des Raumes mit Erhaltung der Orientierung. Ob aber umgekehrt jede solche topologische Selbstabbildung durch eine isotope Deformation herbeigeführt werden kann, das lassen wir offen. — Definiert man den Knoten als geradliniges Polygon, so kann man mit kombinatorischen Deformationen arbeiten, denen spezielle isotope Deformationen der Abbildung des Urbildes entsprechen und bei denen das Zusammenschluß der Verknotung auf einen Punkt ausgeschlossen ist, und man kann den Knoten als eine Klasse kombinatorisch ineinander deformierbarer räumlicher Polygone erklären, so Reidemeister [6].

40. (S. 236.) Dies ist eine topologisch invariante Definition, da wir die Homologiegruppen in einem Punkt in § 32 als topologische Invarianten nachgewiesen haben. — Der Gedanke, an Stelle der Homogenität die Homologieeigenschaften in einem Punkte der Definition der Mannigfaltigkeiten zugrunde zu legen, wurde von mehreren Autoren unabhängig gefaßt: Alexander, Pontrjagin (unveröffentlicht), Vietoris [2], Weyl [2]. Die erste vollständige Durchführung verdankt man van Kampen [3]; Pontrjagin [3] nennt diese Mannigfaltigkeiten  $h$ -Mannigfaltigkeiten.

41. (S. 237.) Berandete Mannigfaltigkeiten. Eine berandete  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich nach van Kampen [3], S. 37, als ein berandeter reiner Komplex erklären, dessen Verdoppelung eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist. Da der duale Sternkomplex einer Zellteilung der berandeten Mannigfaltigkeit nicht wieder ein Zellenkomplex ist, so versagt für berandete Mannigfaltigkeiten der formale Beweis des Poincaréschen Dualitätssatzes (§ 69) und der Satz wird falsch. Man erhält dagegen wieder einen Zellenkomplex, wenn man von dem dualen Sternkomplex alle Sterne fortläßt, deren Mittelpunkte auf dem Rande liegen. Will man daher den Dualitätssatz auf berandete Mannigfaltigkeiten übertragen, so kann dies nach Lefschetz [12], S. 154, dadurch geschehen, daß man Ketten modulo des Randes  $\mathfrak{B}$  zuzieht (vgl. Anm. 20). Dann ist die (gewöhnliche) Bettische Zahl  $p^k$  gleich der  $(n-k)$ -ten mod  $\mathfrak{B}$ , und ebenso stimmen die (gewöhnlichen)  $k$ -ten Torsionskoeffizienten mit den  $(n-k-1)$ -ten mod  $\mathfrak{B}$  überein. — Die Theorie der Schnittzahlen dagegen überträgt sich ohne wesentliche Änderung auf berandete Mannigfaltigkeiten. Es müssen nur die singulären Ketten außer der Bedingung E von S. 257 die weitere erfüllen, daß der Durchschnitt der von ihnen überdeckten Punktmenge fremd zum Rande  $\mathfrak{B}$  ist; vgl. van Kampen [3].

42. (S. 242.) Die Definition der Schnittzahlen ist mit einer Willkür behaftet, die in der Literatur nicht einheitlich festgelegt ist. Anstatt  $\delta(a^k, b^{n-k}) = \xi\eta\xi$  zu setzen, kann man  $\xi\eta\xi\omega(k, n)$  als Schnittzahl definieren, worin  $\omega(k, n)$  eine Funktion von  $k$  und  $n$  vom Werte  $\pm 1$  bedeutet. So ist z. B. bei van Kampen [3]  $\omega = (-1)^k$ . — Eine ähnliche Willkür liegt übrigens bei der Definition des Randes und der Verschlingungszahl vor.

43. (S. 253.) Der hier gegebene Beweis der Sätze I und II geht auf Veblen [4] zurück.  
 44. (S. 265.) Den Übergang von einer Zellteilung zur anderen haben wir nach Lefschetz [6], [7], [12] dadurch hergestellt, daß wir die Schnittzahl  $\delta(A^k, B^{n-k})$  durch vollständige Induktion auf eine Schnittzahl  $\delta(A^0, B^n)$  zurückführten, deren Invarianz leicht zu beweisen war. Mit der gleichen Methode beweist Lefschetz, daß zwei geschlossenen singulären Ketten  $A^r$  und  $B^s$  für  $r+s \geq n$  eine  $(r+s-n)$ -dimensionale Schnittkette  $C^{r+s-n}$  zukommt, deren Homologieklasse durch die Homologieklassen von  $A^r$  und  $B^s$  eindeutig bestimmt ist. Man nennt die Homologieklasse von  $C^{r+s-n}$  das „Produkt“ der Homologieklassen von  $A^r$  und  $B^s$ . Die Homologieklassen lassen sich hiernach nicht nur addieren, sondern auch miteinander multiplizieren. Sie bilden einen Ring. Diesen Ring zusammen mit der Fundamentalgruppe kann man mit H. Hopf als das algebraische Gerüst der Mannigfaltigkeit ansprechen, das deren Zusammenhangsverhältnisse schildert, freilich ohne sie zu erschöpfen. Der Ring ist besonders für die Theorie der stetigen Abbildungen von Bedeutung geworden (Hopf [12], [14]).

45. (S. 270.) Zwei Rückkehrschnitte auf einer orientierbaren geschlossenen Fläche heißen konjugiert, wenn sie sich in genau einem Punkte glatt durchsetzen. In Fig. 128, S. 269, sind z. B.  $a, b$  und ebenso  $c, d$  ein Paar konjugierter Rückkehrschnitte.

46. (S. 272.) Die Schnittzahlen spielen eine Rolle in den Anwendungen der Topologie auf die algebraische Geometrie. Betrachten wir etwa in der komplexen projektiven Ebene eine algebraische Kurve  $C_m$   $m$ -ter Ordnung, die durch Nullsetzen einer Ternärform  $m$ -ten Grades gegeben wird. Die Punkte von  $C_m$  bilden, wie sich beweisen läßt, einen Teilkomplex, der sich nach simplizialer Zerlegung und kohärenter Orientierung seiner 2-Simpexe als eine singuläre 2-Kette in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit der komplexen projektiven Ebene auffassen läßt. Bringt man  $C_m$  mit einer passend gewählten projektiven Geraden  $C_1$  (das ist eine Kugelfläche in der komplexen projektiven Ebene) zum Schnitt, so ergeben sich genau  $m$  Schnittpunkte. Man kann nun zeigen, daß dann auch die topologische Schnittzahl  $\delta(C_m, C_1)$  der beiden 2-Ketten  $C_m$  und  $C_1$  gleich  $m$  ist. Dann ist aber die Schnittzahl von  $C_m$  mit einer belie-

bigen projektiven Geraden  $C'_1$  wegen  $C_1 \sim C'_1$  (Anm. 18) ebenfalls  $= m$ , obgleich die tatsächliche Anzahl der gemeinsamen Schnittpunkte von  $C_m$  und  $C_1$  unter Umständen (z. B. wenn  $C_1$  Tangente an  $C_m$  ist) kleiner als  $m$  sein kann. Definiert man nun als Schnittzahl zweier beliebiger algebraischer Kurven die topologische Schnittzahl der ihnen entsprechenden singulären Ketten, so ergibt sich leicht das Bézoutsche Theorem: Die Schnittzahl einer Kurve  $m$ -ter Ordnung  $C_m$  mit einer Kurve  $n$ -ter Ordnung  $C_n$  ist  $mn$ . Beweis: Da die projektive Gerade eine Homologiebasis der Dimension 2 darstellt, so ist  $C_m \sim \mu C_1$ . Die nullhomologe Kette  $C_m - \mu C_1$  hat dann mit einer projektiven Geraden  $C'_1$  die Schnittzahl 0. Daher ist  $\delta(C_m, C'_1) = \mu \delta(C_1, C'_1)$ . Nun ist aber, wie oben festgestellt,  $\delta(C_m, C'_1) = m$  und  $\delta(C_1, C'_1) = 1$ , also  $m = \mu$ . D. h. eine Kurve  $m$ -ter Ordnung ist homolog einer  $m$ -fach genommenen projektiven Geraden. Hiernach hat man  $\delta(C_m, C_n) = \delta(m C_1, n C_1) = mn \delta(C_1, C'_1) = mn$ , was zu beweisen war.

Dieses Beispiel soll nur andeuten, in welcher Weise die Topologie für die algebraische Geometrie nutzbar gemacht werden kann. Eine eingehende Darstellung dieser topologischen Methoden findet sich bei v. d. Waerden [2], [3], Lefschetz [2], [4], [12]; vgl. auch F. Severi.

47. (S. 277.) Die Verschlingungszahlen sind von Brouwer [9] eingeführt worden. — Mit der Theorie der Verschlingungszahlen hängt einer der schönsten und folgenreichsten Sätze der Topologie zusammen, der Alexander'sche Dualitätssatz (Alexander [5]). Es liege in dem  $n$ -dimensionalen Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ) ein endlicher  $r$ -dimensionaler Komplex  $\mathfrak{K}^r$  darin. Damit ist gemeint, daß  $\mathfrak{K}^r$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist. Mit  $\mathbb{R}^n - \mathfrak{K}^r$  sei die Komplementarmenge von  $\mathfrak{K}^r$  in  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet, die als offene Punktmenge eines Zahlenraumes ebenfalls ein Komplex, und zwar ein unendlicher ist (S. 57). Das gilt auch noch von der Punktmenge  $\mathbb{S}^n - \mathfrak{K}^r$ , die entsteht, wenn man  $\mathbb{R}^n$  mit einem einzigen unendlich fernen Punkte zur  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$  schließt. Der Alexander'sche Dualitätssatz spricht dann eine Beziehung zwischen den Bettischen Gruppen von  $\mathfrak{K}^r$  und  $\mathbb{S}^n - \mathfrak{K}^r$  aus. Er lautet: Ist  $p^k$  die  $k$ -te Bettische Zahl von  $\mathfrak{K}^r$  und  $\bar{p}^k$  diejenige von  $\mathbb{S}^n - \mathfrak{K}^r$ , so ist

$$p^k = \bar{p}^{n-k-1} \quad (k \neq 0, k \neq n-1)$$

und in den beiden Ausnahmefällen (die man übrigens durch eine Abänderung der Definition der 0-ten Bettischen Zahl der allgemeinen Formel unterordnen könnte)  $p^0 = \bar{p}^{n-1} + 1$ ,  $p^{n-1} = \bar{p}^0 - 1$ .

Der tiefere Grund für diese Beziehung zwischen den Bettischen Zahlen zeigt sich erst, wenn man eine Bettische Basis von  $\mathfrak{K}^r$  und  $\mathbb{S}^n - \mathfrak{K}^r$  hinzunimmt. Man kann die  $k$ -dimensionale Bettische Basis von  $\mathfrak{K}^r$

$$B_1^k, \dots, B_{p^k}^k$$

und die  $(n-k-1)$ -dimensionale von  $\mathbb{S}^n - \mathfrak{K}^r$

$$\bar{B}^{n-k-1}, \dots, \bar{B}_{\bar{p}^{n-k-1}}^{n-k-1}$$

(für  $k \neq 0$  und  $k \neq n-1$ ) so wählen, daß die Matrix der Verschlingungszahlen

$$\delta(B_i^k, \bar{B}_j^{n-k-1}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

wird. Für  $k = 0$  hat man statt der Bettischen Basis (die alsdann bekanntlich aus so vielen Punkten besteht, wie der Komplex zusammenhängende, isolierte Teilkomplexe enthält) ein vollständiges System homolog unabhängiger 0-Ketten vom algebraischen Werte 0 (S. 65) zu benutzen (das sind um 1 weniger); und Entsprechendes gilt im Falle  $k = n-1$  für die Basis  $\bar{B}_j^{n-k-1}$ .

Derselbe Satz gilt auch mod 2; man hat nur an Stelle der Bettischen Basen und Bettischen Zahlen Zusammenhangsbasen und Zusammenhangszahlen zu setzen

(Alexander [5], Pontrjagin [3]). Ferner ist der Satz von der  $n$ -Sphäre auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausgedehnt worden (van Kampen [3], Pontrjagin [3]).

Folgerungen aus dem Alexanderschen Dualitätssatz:

1. Die Anzahl der Gebiete, in die die  $n$ -Sphäre  $S^n$  durch einen Komplex  $\mathfrak{K}^n$  zerlegt wird, ist allein durch den eingelagerten Komplex bestimmt, unabhängig von der Art der Einlagerung. Sie ist gleich der um 1 vermehrten  $(n-1)$ -ten Bettischen Zahl und ebenso gleich der um 1 vermehrten  $(n-1)$ -ten Zusammenhangszahl von  $\mathfrak{K}^n$ . Hieraus folgt, daß man eine  $(n-1)$ -dimensionale nichtorientierbare Pseudomanigfaltigkeit nicht in  $S^n$  einbetten kann (Brouwer [10]). Denn für sie ist  $p^{n-1} = 0$  und die Zusammenhangszahl  $q^{n-1} = 1$ , so daß die Anzahl der Gebiete, in die  $S^n$  zerlegt würde, einmal = 1, das andere Mal = 2 sein müßte. Diesen Satz haben wir für Flächen in  $S^2$  bereits bewiesen, freilich nicht für beliebige topologische, sondern für simpliziale Einlagerung der Flächen (S. 222 und Anm. 36). Eine in  $S^n$  eingelagerte orientierbare  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M^{n-1}$  dagegen zerlegt  $S^n$  in genau zwei Gebiete, weil  $p^{n-1} = 1$  ist. Das den „unendlich fernen Punkt“ von  $S^n$  enthaltende Gebiet heißt das Äußere von  $M^{n-1}$ , das andere das Innere. Ein Sonderfall hiervon ist der Jordansche Kurvensatz, der aussagt, daß die Zahlenebene durch das topologische Bild einer Kreislinie in zwei Gebiete zerlegt wird.

2. Satz von der Invarianz des Gebietes: Bildet man ein Gebiet  $G$  (das ist eine offene Teilmenge) des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\mathbb{R}^n$  topologisch auf eine Teilmenge  $G'$  eines anderen  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\mathbb{R}'^n$  ab, so ist  $G'$  wieder ein Gebiet (Brouwer [12]). Wir beweisen zunächst den Hilfsatz: Es sei  $S^n$  die durch Schließung mit einem unendlich fernen Punkte  $P$  aus  $\mathbb{R}^n$  entstehende  $n$ -Sphäre und  $\mathfrak{G}^n$  ein in  $\mathbb{R}^n$  gelegenes topologisches  $n$ -Simplex mit der Randsphäre  $S^{n-1}$ ; sind dann  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{U}$  das Innen- und das Außengebiet, in das  $S^n$  nach 1. durch  $S^{n-1}$  zerlegt wird, so besteht  $\mathfrak{G}^n$  gerade aus der Punktmenge  $\mathfrak{J} + S^{n-1}$ . Beweis: Die Schnittzahl mod 2 von  $P$  mit  $\mathfrak{G}^n$  ist 0, denn  $P$  ist fremd zu  $\mathfrak{G}^n$ . Dann verschwindet aber die Schnittzahl mod 2 von  $\mathfrak{G}^n$  mit jedem beliebigem Punkte von  $\mathfrak{U}$ . Denn man kann je zwei Punkte von  $\mathfrak{U}$  durch einen  $S^{n-1}$  nicht treffenden Weg verbinden. Gäbe es nun in  $\mathfrak{J}$  einen zu  $\mathfrak{G}^n$  fremden Punkt, so müßte aus demselben Grunde die Schnittzahl mod 2 eines jeden Punktes von  $\mathfrak{J}$  mit  $\mathfrak{G}^n$  verschwinden. Es würde also für jede beliebige in  $S^n - S^{n-1}$  gelegene und in  $S^n$  nullhomologe 0-Kette mod 2  $u^0 \mathcal{D}(S^{n-1}, u^0) = o^0(\mathfrak{G}^n, u^0)$  verschwinden im Widerspruch zum Alexanderschen Dualitätssatz. Alle Punkte von  $\mathfrak{J}$  gehören also zu  $\mathfrak{G}^n$ . Ein Punkt von  $\mathfrak{U}$  kann dann offenbar nicht zu  $\mathfrak{G}^n$  gehören, da man in einem Simplexe je zwei mittlere Punkte durch eine den Rand nicht treffende Strecke verbinden kann. — Aus dem Hilfsatz folgt insbesondere, daß der Mittelpunkt von  $\mathfrak{G}^n$  ein innerer Punkt von  $\mathfrak{G}^n$  bezüglich  $\mathbb{R}^n$  ist. Der Satz von der Invarianz des Gebietes ergibt sich nun sofort, wenn man um einen beliebigen Punkt  $X$  von  $G$  ein kleines zu  $G$  gehöriges geradliniges  $n$ -Simplex mit dem Mittelpunkt  $X$  legt. Das Bild des  $n$ -Simplexes ist dann ein topologisches zu  $G'$  gehöriges Simplex, und  $X'$  ist innerer Punkt.

48. (S. 280.) Die Asymmetrie des Linsenraumes (3, 1) wurde von Kneser [8] bemerkt. Weitere Einzelheiten über die Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der Verschlingungszahlen findet man bei Alexander [10], de Rham [1], Reidemeister [9], Seifert [4].

49. (S. 283.) Der Abbildungsgrad wurde von Brouwer [8] eingeführt. — Die Aufgabe, eine stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $K^n$  mit vorgegebenem Abbildungsgrade zu konstruieren, hat nicht immer eine Lösung. Ist z. B.  $\mathbb{R}^n$  eine orientierbare Fläche vom Geschlechte  $p > 0$ ,  $K^n$  eine solche vom Geschlechte  $q$ , so ist der Abbildungsgrad  $\gamma$  an die Bedingung geknüpft:  $|\gamma| (q-1) \leq p-1$ . Insbesondere

kommen für eine stetige Selbstabbildung einer Fläche vom Geschlechte  $p > 1$  als Abbildungsgrade nur die Werte  $\gamma = 0, +1, -1$  in Frage (Kneser [9]). — Eine naheliegende Frage ist es, ob man eine Abbildung vom Grade  $\gamma$  immer so deformieren kann, daß ein (kleines) Gebiet von  $K^n$  genau  $|\gamma|$  mal überdeckt wird. Diese Frage ist in bejahendem Sinne von Hopf [19] (Teil II) und Kneser [9] beantwortet worden: Die Theorie des Abbildungsgrades ist nur ein Beispiel für die algebraisch-gruppentheoretischen Methoden, die zur Behandlung der stetigen Abbildungen dienen. Über diese Algebra der Abbildungen vergleiche man die Arbeiten von Hopf [12], [14], [19], wo man auch weitere Literatur findet.

50. (S. 289.) Fixpunktformel. Die im Texte gegebene Ableitung der Fixpunktformel schließt an die Arbeit von Hopf [9] an. Diese Fixpunktformel ist ein Sonderfall der Lefschetz-Hopfschen allgemeinen Fixpunktformel, die aussagt, daß für eine beliebige stetige Selbstabbildung  $f$  eines reinen Komplexes  $\mathfrak{K}^n$   $\sum (-1)^k \mathfrak{s}_P B^k$  gleich der negativen algebraischen Summe der Indizes aller Fixpunkte ist. Der Index eines isolierten Fixpunktes  $P$  ist, wenn  $P$  mittlerer Punkt eines  $n$ -Simplexes ist, folgendermaßen erklärt. Man schlage um  $P$  eine kleine Kugel  $S^{n-1}$ , ziehe von jedem Punkte  $Q$  dieser Kugel den Vektor  $v_Q$  nach dem Bildpunkte  $f(Q)$ . Der parallel zu  $v_Q$  durch  $P$  gezogene Strahl schneidet  $S^{n-1}$  in einem Punkte  $\varphi(Q)$ .  $\varphi$  ist eine stetige Selbstabbildung von  $S^{n-1}$ . Der Fixpunktindex ist nun der Abbildungsgrad dieser Abbildung. Der Begriff des Fixpunktindexes stammt im wesentlichen von Poincaré [1], 3. u. 4. Teil. Für die allgemeine Fixpunktformel hat Hopf [7], [11] durch Zurückführung auf die spezielle im Text abgeleitete einen Beweis gegeben. Der ursprüngliche Beweis von Lefschetz [6], [7] benutzt die „Methode der topologischen Produkte“, die wir kurz andeuten wollen.

Eine stetige Abbildung  $f$  eines Komplexes  $\mathfrak{K}^n$  in einen Komplex  $K^m$  kann man dadurch geben, daß man das topologische Produkt  $\mathfrak{K}^n \times K^m$  bildet und für jeden Punkt  $P$  aus  $\mathfrak{K}^n$  den Punkt  $P \times f(P)$  darin markiert. Diese Punkte machen eine mit  $\mathfrak{K}^n$  homöomorphe Teilmenge des Produktes aus, die der charakteristische Teilkomplex der Abbildung  $f$  in dem Produkt heiße. Ist nun außer  $f$  noch eine weitere stetige Abbildung  $g$  von  $\mathfrak{K}^n$  in  $K^m$  gegeben, so versteht man unter einem Koinzidenzpunkt der Abbildungen  $f$  und  $g$  einen solchen Punkt  $P$ , für den  $f(P) = g(P)$  ist. Die Koinzidenzpunkte entsprechen also den gemeinsamen Punkten der beiden charakteristischen Teilkomplexe von  $f$  und  $g$ . Sind insbesondere  $\mathfrak{K}^n$  und  $K^m$  Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, so kommt den beiden charakteristischen Teilkomplexen von  $f$  und  $g$  eine Schnittzahl zu, die die algebraische Anzahl der Koinzidenzpunkte heißt. Lefschetz hat eine Formel angegeben, die diese Anzahl zu berechnen gestattet, wenn man die von  $f$  und  $g$  bewirkten homomorphen Abbildungen der Homologiegruppen kennt. Die allgemeine Fixpunktformel ergibt sich hieraus in dem besonderen Falle, daß  $\mathfrak{K}^n$  und  $K^m$  zusammenfallen und  $g$  die identische Abbildung ist. Der Lefschetzsche Beweis gilt somit nur für Mannigfaltigkeiten (berandete und unberandete), dagegen umfaßt er auch mehrdeutige Abbildungen. Die Methode der topologischen Produkte hat sich übrigens auch für andere Abbildungsprobleme als fruchtbar erwiesen (vgl. z. B. Hopf [12] und [14]).

Die Fixpunktformel steht in engem Zusammenhang mit der Theorie der stetigen Vektorfelder. Eine „kleine Transformation“  $f$ , das ist eine stetige Selbstabbildung, die die Punkte nur wenig verschiebt, bestimmt ein Vektorfeld. Die Vektoren des Feldes laufen vom Originalpunkte zum Bildpunkte. Das Feld ist stetig bis auf die singulären Stellen, die den Fixpunkten von  $f$  entsprechen und die wir in endlicher Anzahl annehmen. Unter dem Index einer singulären Stelle des Vektorfeldes versteht man den Index des betreffenden Fixpunktes der kleinen Transformation. Da nun bei einer kleinen Transformation  $\mathfrak{s}_P B^i = p^i$  ist und die Wechselsumme über die Bettischen Zahlen gleich der negativen Eulerschen

Charakteristik ist, so ergibt sich der Satz von Hopf [5]: *Die Summe der Indizes der singulären Stellen eines Vektorfeldes ist gleich der negativen Eulerschen Charakteristik der Mannigfaltigkeit.*

Die Fixpunktformel dient unter Umständen dazu, die Existenz eines Fixpunktes festzustellen (§ 81). Von dieser Frage wohl zu unterscheiden ist die nach der *Mindestzahl von Fixpunkten* einer Abbildungsklasse, d. h. nach der kleinsten Anzahl von Fixpunkten, die durch Deformation einer gegebenen Abbildung erreicht werden kann. Abschätzungen der Mindestzahl gelingen nach J. Nielsen dadurch, daß man die Fixpunkte in *Fixpunktklassen* einteilt. Zwei Fixpunkte werden zur selben Fixpunktklasse gerechnet, wenn man sie durch einen Weg  $w$  derart verbinden kann, daß  $w$  zusammen mit seinem Bildweg einen nullhomotopen geschlossenen Weg ausmacht. Eine äquivalente Definition ergibt sich, wenn man die Abbildung des Grundkomplexes in den universellen Überlagerungskomplex durchdrückt, was im allgemeinen noch auf viele Weisen möglich ist. Die in den Grundkomplex durchgedrückten Fixpunkte einer solchen Überlagerungsabbildung gehören dann zur selben Klasse. Man vergleiche Nielsen [4], [6] und Hopf [6], woselbst man auch Literaturangaben über die zum Teil weiter zurückliegenden Arbeiten von Alexander, Brouwer, Birkhoff, Feigl und anderen findet.

51. (S. 291.) Der Satz, daß eine  $(2k+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit fixpunktfreie Deformationen zuläßt, gilt allgemein; vgl. Hopf [5].
52. (S. 310.) Daß die Topologie gruppentheoretische Ergebnisse liefert, die auf arithmetischem Wege nicht oder doch nicht so leicht zu gewinnen wären, dafür haben wir ein Beispiel bereits bei den Überlagerungskomplexen auf S. 203 kennen gelernt. Hierunter fällt ferner die Frage, aus gegebenen Erzeugenden und Relationen auf die Struktur der Gruppe zu schließen, insbesondere das Isomorphieproblem zu lösen: ob zwei durch Erzeugende und Relationen gegebene Gruppen 1-isomorph sind. Ein besonders schönes Beispiel enthält die Theorie der Zöpfe von Artin [2]; es wird dort gezeigt, daß die symmetrische Permutationengruppe von  $n$  Ziffern durch zwei Erzeugende  $\alpha$  und  $\sigma$  und durch die Relationen  $\alpha^n = (\alpha\sigma)^{n-1}$ ,  $\sigma^2 = 1$  und die Vertauschbarkeitsrelationen:  $\sigma$  vertauschbar mit  $\alpha^i \sigma \alpha^{-i}$  (für  $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ) gegeben ist. Ein anderes Beispiel findet sich bei Threlfall und Seifert [2] S. 577. Ein Verfahren, das grundsätzlich in allen und praktisch in vielen Fällen einen Einblick in die Gruppe ermöglicht, ist die Konstruktion eines Gruppenbildes, das ist ein topologischer Kanten- oder Flächenkomplex, der sich aus den Erzeugenden und Relationen gewinnen läßt (Dehn [4], Threlfall [1]). Schneidet man beispielsweise eine Mannigfaltigkeit irgendwie zu einem Polyeder (nach § 60) auf und bildet den universellen Überlagerungskomplex, so drückt sich das Polyeder in eine Zellteilung durch. Der Kantenkomplex der dualen Zellteilung ist ein Dehnsches Gruppenbild der Fundamentalgruppe. So läßt z. B. der spärische Dodekaederraum die Gruppe mit den Relationen  $A^5 = B^2 = C^3 = ABC$  als die binäre Ikosaedergruppe der Ordnung 120 erkennen. Die Schwierigkeit des Isomorphieproblems kann man ermessen, wenn man aus den unabsehbaren vielen Möglichkeiten, die Mannigfaltigkeit aufzuschneiden, zwei herausgreift und die nach § 62 zu ermittelnden Erzeugenden und Relationensysteme ineinander umzurechnen versucht.

## Literaturverzeichnis.

Das Literaturverzeichnis macht in keiner Weise Anspruch auf Vollständigkeit. Man findet Literatur bei M. Dehn [1] bis 1907, B. v. Kerékjártó [6] bis 1923, B. L. v. d. Waerden [1] bis 1930, S. Lefschetz [12] bis 1930, H. Tietze und L. Vietoris [8] bis 1930 (vollständig bis 1926), K. Reidemeister [6] Knotentheorie bis 1932.

### Alexander, J. W.

1. A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), S. 148—154.
2. Note on two threedimensional manifolds with the same group. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), S. 339—342.
3. Note on Riemann spaces. Amer. Math. Soc. Bull. 26 (1919), S. 370—372.
4. On transformations with invariant points. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 89—95.
5. A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 333—349.
6. On the deformation of an  $n$ -cell. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), S. 406—407.
7. Invariant points of a surface transformation of given class. Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), S. 173—184.
8. A lemma on a system of knotted curves. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), S. 93—95.
9. On the subdivision of 3-Space by a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 10 (1924), S. 6—8.
10. New topological invariants expressible as tensors. Ebenda S. 99—101.
11. On certain new topological invariants of a manifold. Ebenda. S. 101—103.
12. Topological invariants of a manifold. Proc. Nat. Akad. Sci. USA. 10 (1924), S. 493—494.
13. On the intersection invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 11 (1925), S. 143—146.
14. Note on a theorem of H. Kneser. Ebenda S. 250—251.
15. Combinatorial Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 301—329.
16. (und G. B. Briggs). On types of knotted curves. Ann. of Math. (2) 28 (1927), S. 562—586.
17. Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), S. 275—306.
18. The combinatorial theory of complexes. Ann. of Math. (2) 31 (1930), S. 294 bis 322.
19. (und L. W. Cohen). A classification of the homology groups of compact spaces Ann. of Math. (2) 33 (1932), S. 538—566.
20. Some problems in topology. Verh. internat. Math.-Kongr. 1 (1932), S. 249—257.
21. A matrix knot invariant. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 19 (1933), S. 272—275.
22. siehe Veblen.

### Alexandrov, P.

1. Zur Begründung der  $n$ -dimensionalen mengentheoretischen Topologie. Math. Ann. 94 (1925), S. 296—308.
2. Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie. Math. Ann. 96 (1927), S. 489—511.

- 3 Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven. Ebenda S. 512—554.
4. Über stetige Abbildungen kompakter Räume. Ebenda S. 555—571.
5. Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehung zur elementaren geometrischen Anschauung. Math. Ann. 98 (1928), S. 617—636.
6. Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1927, S. 323—329.
7. Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque. Comptes Rendus 184 (1927), S. 317—319.
8. Sur la décomposition de l'espace par des ensembles fermés. Comptes Rendus 184 (1927), S. 425—428.
9. Zum allgemeinen Dimensionsproblem. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, S. 25—44.
10. Untersuchungen über Gestalt und Lage beliebiger abgeschlossener Mengen. Ann. of Math. 30 (1928), S. 101—187.
11. (und P. Urysohn). Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam (1) 14 Nr. 1 (1929).
12. Sur la notion de dimension des ensembles fermés. Journ. Math. pures appl. (9) 11 (1932), S. 283—298.
13. Über einen Satz von Herrn Borsuk. Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), S. 127—128.
14. Über die Urysohnschen Konstanten. Fundam. Math. 20 (1933), S. 140—150.
15. Dimensionstheorie, ein Beitrag zur Theorie der abgeschlossenen Mengen. Math. Ann. 106 (1932), S. 161—238.
16. Einfachste Grundbegriffe der Topologie (Berlin 1932).

## Antoine, L.

1. Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. Journ. Math. pures appl. (8) 4 (1921), S. 221—325.
2. Sur les ensembles parfaits partout discontinus. Comptes Rendus 173 (1921), S. 284—285.

## Artin, E.

1. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im  $R_4$ . Abh. math. Semin. Hamburg Univ. 4 (1925), S. 174—177.
2. Theorie der Zöpfe. Ebenda S. 47—72.
3. Vgl. auch Klein [1], S. 346.

## Baer, R.

1. Kurventypen auf Flächen. Journ. reine angew. Math. 156 (1927) S. 231—246.
2. Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen. Journ. reine angew. Math. 159 (1928), S. 101—116.

## Bankwitz, C.

1. Über die Torsionszahlen der zyklischen Überlagerungsräume des Knotenraumes. Ann. of Math. 31 (1930), S. 131.
2. Über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. Ebenda S. 129.
3. Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten. Math. Ann. 103 (1930), S. 145 bis 162.

## Bergmann, G.

1. Zwei Bemerkungen zur abstrakten und kombinatorischen Topologie. Monatsh. f. Math. 38 (1931), S. 245—256.
2. Zur algebraisch-axiomatischen Begründung der Topologie. Math. Ztschr. 35 (1932), S. 502—511.

## Betti, E.

1. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Ann. Mat. pura appl. (2) 4 (1871), S. 140—158.

## Bilz, E.

1. Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis Situs. Math. Ztschr. 18 (1923), S. 1—41.
- Birkhoff, G. D.

  1. Proof of Poincaré's geometric theorem. Trans. Am. Math. Soc. 14 (1913), S. 14—22.
  2. Dynamical Systems with two degrees of freedom. Trans. Am. Math. Soc. 18 (1917), S. 199—300.
  3. Une généralisation à  $n$  dimensions du dernier théorème de géométrie de Poincaré. Comptes Rendus 192 (1931), S. 196—198.
  4. (und O. D. Kellogg). Invariant points in function space. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 96—115.
  5. Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. IX (New York 1927).
  6. (und P. A. Smith). Structure Analysis of surface transformations. Journ. Math. pures appl. (9) 7 (1928), S. 345—379.
  7. Einige Probleme der Dynamik. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 38 (1929), S. 1—16.
  - Borsuk, K.

    1. Über Schnitte der  $n$ -dimensionalen euklidischen Räume. Math. Ann. 106 (1932), S. 239—248.
    2. Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie. Fundam. Math. 20 (1933), S. 224—231.
    3. Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre. Ebenda S. 177—190.
    - Boley, W.

      1. Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Math. Ann. 57 (1903), S. 151—184.

    - Brauner, K.

      1. Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. II. Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), S. 1—55.
      - Briggs, G. B.

        1. siehe Alexander.

      - Brouwer, L. E. J.

        1. On one-one continuous transformations of surfaces into themselves. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 11 (1908), S. 788—798; 12 (1909), S. 286—297; 13 (1910), S. 767—777; 14 (1911), S. 300—310; 15 (1912), S. 352—360; 22 (1920), S. 811—814; 23 (1920), S. 232—234.
        2. On continuous vector distributions on surfaces. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 11 (1908), S. 850—858; 12 (1909), S. 716—734; 13 (1910), S. 171—186.
        3. Zur Analysis situs. Math. Ann. 68 (1910), S. 422—434.
        4. Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Math. Ann. 69 (1910), S. 169—175.
        5. Über eindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich. Ebenda S. 176 bis 180.
        6. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Ann. 70 (1911), S. 161—165.
        7. Sur le théorème de M. Jordan dans l'espace à  $n$  dimensions. Comptes Rendus 153 (1911), S. 542—544.
        8. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), S. 97—115 und S. 598.
        9. On looping coefficients. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 15 (1912), S. 113 bis 122.
        10. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), S. 320—327.
        11. Beweis des Jordanschen Satzes für den  $n$ -dimensionalen Raum. Math. Ann. 71 (1912), S. 314—319.
        12. Beweis der Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebietes. Math. Ann. 71 (1912), S. 305 bis 313 und 72 (1912), S. 55—56.

13. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. Jahrb. f. Math. 142 (1913), S. 146—152; Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 26 (1923), S. 795—800; Math. Ztschr. 21 (1924), S. 312—314.
14. Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen. Math. Ann. 82 (1921), S. 280—286.
15. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. Math. Ann. 82 (1921), S. 94—96.
16. On transformations of Projective Spaces. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), S. 864—865.

Brown, A. B.

1. An extension of the Alexander duality theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), S. 407—408.
2. On the join of two complexes. Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), S. 417—420.
3. Group invariants and torsion coefficients. Ann. of Math. (2) 33 (1932), S. 373—376.
4. (siehe Koopman).
5. Topological invariance of subcomplexes of singularities. Amer. Journ. Math. 54 (1932), S. 117—122.

Bureau, W.

1. Über Zopfinvarianten. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9 (1932), S. 117—124.
2. Kennzeichnung der Schlauchknoten. Ebd. S. 125—133.

Carathéodory, C.

1. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. 73 (1913), S. 323—370.
2. Reelle Funktionen. 2. Aufl. (Leipzig 1927).

Čech, E.

1. Trois théorèmes sur l'homologie. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 144 (1931), S. 1—21.
2. Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. Fundam. math. 19 (1932), S. 149—183.
3. Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes. Erg. math. Kolloqu. H. 5 (1933), S. 29—31.
4. Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité. Ann. of Math. (2) (1933) 34, S. 621—730.
5. Introduction à la théorie de l'homologie. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk No. 184 (1933). S. 1—34 (Tschechisch, franz. Zusammenfassung S. 35—36).

Chuard, J.

1. Questions d'analysis situs. Rend. Circ. mat. Palermo 46 (1922), S. 185—224.

Cohen, L. W.

1. siehe Alexander.

Cohn-Vossen

1. siehe D. Hilbert.

Dehn, M.

1. (und P. Heegaard). Analysis Situs. Enz. Math. Wiss. III A B 3 (Leipzig 1907).
2. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. 69 (1910), S. 137—168.
3. Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. 72 (1912), S. 413—421.
4. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. 71 (1912), S. 116—144.
5. Die beiden Kleeballschlingen. Math. Ann. 75 (1914), S. 402—413.

Dyck, W. v.

1. Beiträge zur Analysis Situs. I. Math. Ann. 32 (1888), S. 457—512; II. Math. Ann. 37 (1890), S. 273—316.
2. Beiträge zur Analysis Situs. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 37 (1885), S. 314—325 (I); 38 (1886), S. 53—69 (II); 39 (1887), S. 40—52 (III).

Ehresmann, C.

1. Sur la topologie de certaines variétés algébriques. Comptes Rendus 196 (1933), S. 152—154.

Ephraimowitsch, W.

1. Zur Theorie der nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten. Math. Ztschr. 29 (1928), S. 55—59.

Errera, A.

1. L'origine et les problèmes de l'analysis situs. Revue de l'Univ. de Bruxelles 7—8 (1921), S. 1—15.
2. Sur les polyèdres réguliers de l'analysis situs. Mém. Acad. Belgique (2) 7 (1922).

Feigl, G.

1. Fixpunktsätze für spezielle  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 98 (1927), S. 355—398.
2. Geschichtliche Entwicklung der Topologie. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 37 (1928), S. 273—286.

Fenchel, W.

1. Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidskr. B H. 3/4 (1932), S. 66—87.

Fischer, A.

1. Gruppen und Verkettungen. Comment. math. helv. 2 (1930) S. 253—268.

Flexner, W. W.

1. (und S. Lefschetz). On the duality theorem for the Betti numbers of topological manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), S. 530—533.
2. The Poincaré duality theorem for topological manifolds. Ann. of Math. II. s. 32 (1931), S. 539—548.
3. On topological manifolds. Ann. of Math. (2) 32 (1931), S. 393—406.

Frankl, F.

1. Topologische Beziehungen in sich kompakten Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen usw. S.-B. Akad. Wiss. Wien 136 (1927), S. 689—699.
2. (und L. Pontrjagin). Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. Math. Ann. 102 (1930), S. 785—789.
3. Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes. Monatsh. f. Math. Phys. 38 (1931), S. 357—364.

Furch, R.

1. Orientierung von Hyperflächen im projektiven Raum. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 1 (1922), S. 210—212.
2. Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), S. 69—88.
3. Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes. Ebd. S. 237 bis 245.
4. Über den Schnitt zweier Sphären im  $R^3$ . Math. Ztschr. 28 (1928), S. 556—566.
5. Polyedrale Gebilde verschiedener Metrik. Math. Ztschr. 32 (1930), S. 512—544

Gawehn, J.

1. Über unberandete zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 98 (1927), S. 321—354.

Giesecking, H.

1. Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen (Hilchenbach 1912).

Goeritz, L.

1. Die Heegaard-Diagramme des Torus. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1932), S. 187—188.
2. Knoten und quadratische Formen. Math. Ztschr. 36 (1933), S. 647—654.
3. Normalformen der Systeme einfacher Kurven auf orientierbaren Flächen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), S. 223—243.

4. Die Abbildungen der Brezelfläche und der Vollbrezel vom Geschlecht 2. Ebenda, S. 244—259.
- Hadamard, J.**
1. La géometrie de situation et son rôle en mathématiques. Rev. du mois 8 (1909), S. 38—60.
  2. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker. Appendice à J. Tannery, Théorie des Fonctions (Paris 1910).
- Hausdorff, F.**
1. Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914).
  2. Dasselbe Buch. 2. Aufl. (Berlin 1927).
- Heegaard, P.**
1. siehe Dehn.
  2. Sur l'Analysis Situs. Bull. Soc. Math. France. 44 (1916), S. 161—242.
- Heesch, H.**
1. Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I. N. 27 (1932), S. 268—273.
- Hilbert, D.**
1. (und S. Cohn-Vossen). Anschauliche Geometrie (Berlin 1932).
- Hopf, H.**
1. Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, S. 131—141.
  2. Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. Math. Ann. 95 (1925), S. 313—339.
  3. Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen. Ebenda, S. 340—367.
  4. Abbildungsklassen  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 96 (1927), S. 209—224.
  5. Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Ebenda, S. 225—250.
  6. Über Mindestzahlen von Fixpunkten. Math. Ztschr. 26 (1927), S. 726—774.
  7. A new proof of the Lefschetz formula on invariant points. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 14 (1928), S. 149—153.
  8. On some properties of one-valued transformations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 14 (1928), S. 206—214.
  9. Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, S. 127—136.
  10. Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. I. Neue Darstellung der Theorie des Abbildungsgrades für topologische Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 100 (1928), S. 579—608; II. Klasseninvarianten von Abbildungen. Math. Ann. 102 (1929), S. 562—623.
  11. Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Ztschr. 29 (1929), S. 493 bis 524.
  12. Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Journ. reine angew. Math. 163 (1930), S. 71—88.
  13. Über wesentliche und unwesentliche Abbildung von Komplexen. Moskau Math. Samml. (1930), S. 53—62.
  14. Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen. Journ. reine angew. Math. 165 (1931), S. 225—236.
  15. Géométrie infinitésimale et Topologie. L'Enseignement math. 30 (1931), S. 233—240.
  16. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. 104 (1931), S. 637—665.
  17. (und W. Rinow). Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. math. helv. 3 (1931), S. 209—225.
  18. Differentialgeometrie und topologische Gestalt. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41 (1932), S. 209—229.
  19. Die Klassen der Abbildungen der  $n$ -dimensionalen Polyeder auf die  $n$ -dimensionale Sphäre. Comment. math. helv. 5 (1933), S. 39—54.

20. (und Erika Pannwitz). Über stetige Deformationen von Komplexen in sich. Math. Ann. 108 (1933), S. 433—465.
- Hotelling, H.**
1. Threedimensional manifolds of states of motions. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), S. 329—344.
  2. Multiple-sheeted spaces and manifolds of states of motions. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 479—490.
- Johansson, J.**
1. Topologische Untersuchungen über unverzweigte Überlagerungsflächen. Skr. norske Vid. Akad. Oslo Math.-naturv. Kl. Nr. 1 (1931), S. 1—69.
  2. Zu den zweidimensionalen Homotopiegruppen. Norsk Mat. Forenings Skr., (2) Nr. 1/12 (1933), S. 55—59.
- Kähler, E.**
1. Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle. Math. Ztschr. 29 (1929), S. 188—204.
- Kampen, E. R. van.**
1. Eine Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 31 (1928), S. 899—905.
  2. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im  $R_4$ . Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ. 6 (1928), S. 216.
  3. Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze. (Den Haag 1929).
  4. Komplexe in euklidischen Räumen. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9 (1932), S. 72—78 und S. 152—153.
  5. Some remarks on the join of two complexes and on invariant subsets of a complex. Amer. J. Math. 54 (1932), S. 543—550.
  6. On the Fundamental Group of an algebraic curve. Amer. Journ. Math. 55 (1933), S. 255—260.
  7. On the connection between the fundamental groups of some related spaces. Ebenda, S. 261—267.
  8. On somme lemmas in the theory of groups. Ebenda, S. 268—273.
- Kellogg, O. D.**
1. siehe Birkhoff.
- Kérékjártó, B. v.**
1. Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Ber. Ungar. Akad. Wiss. 38 (1919), S. 194—198.
  2. Über die Brouwerschen Fixpunktsätze. Math. Ann. 80 (1919), S. 29—32.
  3. Über Transformationen des ebenen Kreisringes. Ebenda, S. 33—35.
  4. Zur Gebietsinvarianz. Ber. Ung. Akad. Wiss. 39 (1921), S. 220—221.
  5. Kurvenscharen auf Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1922), S. 71—79.
  6. Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923).
- Kiang, Tsai-Han.**
1. On the groups of orientable two-manifolds Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 17 (1931), S. 142—144.
- Klein, F.**
1. Höhere Geometrie (Berlin 1926).
- Kneser, H.**
1. Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 30 (1921), S. 83—85.
  2. Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. Math. Ann. 91 (1924), S. 135—154.
  3. Ein topologischer Zerlegungssatz. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 27 (1924), S. 601—616.
  4. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 34 (1925), S. 1—14.

5. Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, S. 128—130.
6. Die Deformationssätze der einfachzusammenhängenden Flächen. Math. Ztschr. 25 (1926), S. 362—372.
7. Glättung von Flächenabbildungen. Math. Ann. 100 (1928), S. 609—617.
8. Geschlossene Flächen in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 38 (1929), S. 248—260.
9. Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. Math. Ann. 103 (1930), S. 347—358.

Koebe, P.

1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuclidische Raumformen. I. S. Ber. Preuß. Akad. Wiss. (1927) S. 164—196; II. (1928) S. 345—348; III. (1928) S. 385—442; IV. (1929) S. 414—457; V. (1930) S. 304—364; VI. (1930) S. 505—541; VII. (1931) S. 506—534; VIII. (1932) S. 249—284.

Koopman, B. O.

1. (und Brown, A. B.). On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), S. 231—251.

Kreines, M.

1. Zur Konstruktion der Poincaré-Räume. Rend. Circ. mat. Palermo 56 (1932), S. 277—280.

Kronecker, L.

1. Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen. Monatsberichte Berl. Akad. (1869), S. 159—198 und S. 688—698.

Künneth, H.

1. Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Produktmannigfaltigkeit. S.-Ber. physik-med. Soz. Erlangen 54/55 (1922/23), S. 190—196.
2. Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit. Math. Ann. 90 (1923), S. 65—85.
3. Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten. Math. Ann. 91 (1924), S. 125—134.

Kuratowski, C.

1. Topologie I. Espaces métrisables, espaces complets (Warschau 1933).

Landesberg, G.

1. Beträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kneskerschen Charakteristikentheorie. Math. Ann. 70 (1911), S. 563—579.

Lefschetz, S.

1. Algebraic Surfaces, their cycles and integrals. Ann. of Math. 21 (1920), S. 225 bis 258.
2. On certain numerical invariants of algebraic varieties, with application to Abelian varieties. Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), S. 327—482.
3. Continuous transformations of manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), S. 90—93.
4. L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique (Paris 1924).
5. Intersections of complexes and manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 11 (1925), S. 287—289.
6. Intersections and transformations of complexes and manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 1—49.
7. Manifolds with a boundary and their transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), S. 429—462.
8. The residual set of a complex on a manifold and related questions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 13 (1927), S. 614—622; S. 805—807.
9. Closed point sets on a manifold. Ann. of Math. 29 (1928), S. 232—254.
10. Duality relation in topology. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 15 (1929), S. 367—369.
11. On transformations of closed sets. Ann. of Math. (2) 32 (1930), S. 273—282.

12. Topology (New York 1930).
13. On compact spaces. Ann. of Math. II s. 32 (1931), S. 521—538.
14. On singular chains and cycles. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), S. 124—129.
15. On generalized manifolds. Amer. Journ. Math. 55 (1933), S. 469—504.
16. siehe Flexner.

Lennes, N. J.

1. Theorems on the simple finite polygon and polyhedron. Amer. Journ. Math. 33 (1911), S. 37—62.
2. Curves and surfaces in analysis situs. Bull. Amer. Math. Soc. (2) 17 (1911), S. 525.

Lense, J.

1. Über die Indikatrix der projektiven Räume. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 34 (1926), S. 243—244.

Levi, F.

1. Geometrische Konfigurationen (Leipzig 1929).

Listing, J. B.

1. Vorstudien zur Topologie. Gött. Studien 1847, S. 811—875.
2. Der Census räumlicher Komplexe. Abh. Ges. Wiss. Göttingen 10 (1861), S. 97 bis 180 und Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1861), S. 352—358.

Löbell, F.

1. Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen. Math. Ztschr. 30 (1929), S. 572—607.
2. Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich. Journ. reine angew. Math. 162 (1930), S. 114—125.
3. Zur Frage der Struktur der geschlossenen geodätischen Linien in den offenen Clifford-Kleinschen Flächen mit positiver Charakteristik. Journ. reine angew. Math. 162 (1930), S. 125—131.
4. Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), S. 168—174.

Mayer, W.

1. Über abstrakte Topologie. Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), S. 1—42 und S. 219 bis 258.

Menger, K.

1. Dimensionstheorie (Leipzig 1928).

Morse, H. M.

1. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), S. 84—100.
2. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. Trans. Amer. Math. Soc. 26 (1924), S. 25—60.
3. Singular points of vector fields under general boundary conditions. Amer. Journ. Math. 51 (1929), S. 165—178.

Newman, M. H. A.

1. On the foundations of Combinatory Analysis Situs. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), S. 611—641; 30 (1927), S. 670—678.
2. A property of 2-dimensional elements. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), S. 1401—1405.
3. On the superposition of  $n$ -dimensional manifolds. Journ. London. Math. Soc. 2 (1927), S. 56—64.
4. Topological equivalence of complexes. Math. Ann. 99 (1928), S. 399—412.
5. Combinatory topology of convex regions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), S. 240—242.
6. Combinatory topology and Euclidean  $n$ -space. Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1930), S. 339—346.
7. Intersection-complexes. I. Combinatory theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 27 (1931), S. 491—501.

Seifert-Threlfall, Topologie

8. A theorem in combinatorial topology. Journ. Lond. Math. Soc. 6 (1931), S. 186—192.
9. A theorem on periodic transformations of spaces. Quart. Journ. Math. Oxford. ser. 2 (1931), S. 1—8.
10. On the products  $C_h C_k$  and  $C_h \times C_k$  in topology. Journ. London Math. Soc. 7 (1932), S. 143—147.

Nielsen, J.

1. Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. Math. Ann. 78 (1918), S. 385—397.
2. Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen. Math. Ann. 81 (1920), S. 94—96.
3. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen. Math. Ann. 82 (1920), S. 83—93.
4. Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), S. 246—260.
5. Zur Topologie der geschlossenen Flächen. Vorträge 6. skand. Math.-Kongr. Kopenhagen (1925).
6. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. Acta math. 50 (1927), S. 189—358. II. 53 (1929), S. 1—76; III. 58 (1932), S. 87—167.
7. Über reguläre Riemannsche Flächen (dänisch). Mat. Tidsskr. BH. 1 (1932), S. 1—18.

Nöbeling, G.

1. Die neuesten Ergebnisse der Dimensionstheorie. Jhber. Deutscher Math.-Vereinig. 41 (1931), S. 1—17.

Pannwitz, E.

1. Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten. Math. Ann. 108 (1933), S. 629—672.

2. siehe Hopf.

Poincaré, H.

1. Sur les courbes définies par une équation différentielle. Journ. Math. pures appl. (3) 7 (1881), S. 375—424; (3) 8 (1882), S. 251—296; (4) 1 (1885), S. 167 bis 244; (4) 2 (1886), S. 151—217.
2. Analysis situs. Journ. Ecole polytechn. (2) 1 (1895), S. 1—121.
3. 1<sup>e</sup> Complément à l'analysis situs. Rend. circ. mat. Palermo 13 (1899), S. 285—343.
4. 2<sup>d</sup> Complément. Proc. London Math. Soc. 32 (1900), S. 277—308.
5. 3<sup>e</sup> Complément. Bull. Soc. Math. France 30 (1902), S. 49—70.
6. 4<sup>f</sup> Complément. Journ. Math. pures appl. (5) 8 (1902), S. 169—214.
7. 5<sup>e</sup> Complément. Rend. circ. mat. Palermo 18 (1904), S. 45—110.
8. Sur un théorème de Géométrie. Rend. circ. mat. Palermo 33 (1912), S. 375—407.

Pontrjagin, L.

1. Zum Alexanderschen Dualitätssatz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1927), S. 315 bis 322 und S. 446—456.
2. Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension. Comptes Rendus 190 (1930), S. 1105—1107.
3. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. Math. Ann. 105, (1931), S. 165—205.
4. s. Frankl.

Radó, T.

1. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Litt. Sci. Szeged, 2 (1925) S. 101—121.

Reidemeister, K.

1. Knoten und Gruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1926), S. 7—23.
2. Elementare Begründung der Knotentheorie. Ebd. S. 24—32.
3. Über Knotengruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), S. 56—64.
4. Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1928), S. 69—76.

5. Knoten und Verkettungen. Math. Ztschr. 29 (1929), S. 713—729.
6. Knotentheorie (Berlin 1932).
7. Einführung in die kombinatorische Topologie (Braunschweig 1932).
8. Zur dreidimensionalen Topologie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), S. 189—194.
9. Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10 (1934).
10. Homotopiegruppen von Komplexen. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. (1934).
- Rey Pastor, J.
1. Sulla topologia dei domini di uno spazio ad  $n$  dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI s. 15 (1932), S. 524—527.
- Rham, G. de.
1. Sur l'analysis situs des variétés à  $n$  dimensions. Journ. math. pures appl. IX s. 10 (1931), S. 115—120.
2. Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples. Comment. math. helv. 4 (1932), S. 151—154.
- Riemann, B.
1. Fragment aus der Analysis Situs. Werke 2. Aufl., S. 474.
2. Abelsche Funktionen § 19. Werke S. 84.
- Rinow, W.
1. siehe Hopf.
- Rybarz, J.
1. Über drei Fragen der abstrakten Topologie. Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), S. 215—244.
- Scherrer, W.
1. Geometrische Deutung des Gaußschen Verschlingungsintegrals. Comment. math. helv. 5 (1933), S. 25—27.
- Schilling, F.
1. Projektive und nichteuklidische Geometrie (Leipzig 1931).
- Schreier, O.
1. Über die Gruppen  $A^a B^b = 1$ . Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), S. 167—169.
2. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1927), S. 233—244.
- Seifert, H.
1. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), S. 26—66.
2. Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ztschr. 35 (1932), S. 609—611.
3. Topologie dreidimensionaler gefaselter Räume. Acta math. 60 (1932), S. 147—238.
4. Verschlingungsintervarianten. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. 16 (1933), S. 811—828.
5. siehe Threlfall.
6. siehe Weber.
- Severi, F.
1. Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), S. 335—364.
2. Sulla topologia e sui fondamenti dell'analisi generale. Rend. Semin. mat. Roma (2) 7 (1931), S. 5—37.
- Singer, C.
1. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), S. 88—111.
- Smith, P. A.
1. siehe Birkhoff.

Sperner, E.

1. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* 6 (1928), S. 265—272.
2. Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene (Hamburg. math. Einzelschr. H. 14, Leipzig 1933).

Steinitz, E.

1. Beiträge zur Analysis situs. *Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges.* 7 (1908), S. 29—49.
2. Polyeder und Raumeinteilungen. *Encyklopädie Math. Wiss.* III AB 12, S. 139 (Leipzig 1916).

Tait, P. G.

1. On Knots. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* 28 (1879), S. 145—190; 32 (1887), S. 327 bis 339 und 493—506.

Threlfall, W.

1. Gruppenbilder. *Abh. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss.* 41 Nr. 6 (1932), S. 1—59.
2. (und H. Seifert). Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. *Math. Ann.* 104 (1930), S. 1—70. II. *Math. Ann.* 107 (1932), S. 543—586.
3. Räume aus Linienelementen. *Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 42 (1932) S. 88—110.

Tietze, H.

1. Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Monatsh. Math. Phys.* 19 (1908), S. 1—118.
2. Sur les représentations continues des surfaces sur elles-mêmes. *Comptes Rendus* 157 (1913), S. 509—512.
3. Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst. *Rend. circ. mat. Palermo* 38 (1914), S. 247—304.
4. Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung. *Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 29 (1920), S. 95—123.
5. Über Analysis Situs. *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* 2 (1923), S. 37—68.
6. Zur Topologie berandeter Mannigfaltigkeiten. *Monatsh. Math. Phys.* 35 (1928), S. 25—44.
7. Beiträge zur allgemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungs begriffs. *Math. Ann.* 88 (1923), S. 290—312. II. Über die Einführung uneigentlicher Elemente. *Math. Ann.* 91 (1924), S. 210—224. III. Über die Komponenten offener Mengen. *Monatsh. Math. Phys.* 33 (1923), S. 15—17.
8. (und L. Vietoris). Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. *Encyklopädie Math. Wiss.* III AB 18 (Leipzig 1930).

Tucker, A. W.

1. On combinatorial topology. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 18 (1932), S. 86—89.
2. Modular homology characters. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 18 (1932), S. 467—471.
3. An abstract approach to manifolds. *Ann. of Math.* 34 (1933), S. 191—243.

Ursell, H. D.

1. Intersections of complexes. *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), S. 37—48.

Urysohn, P.

1. siehe Alexandroff.

Veblen, O.

1. Theory of plane curves in non-metrical analysis situs. *Trans. Amer. Math. Soc.* 6 (1905), S. 83—98.
2. (und J. W. Alexander). Manifolds of  $n$  dimensions. *Ann. of Math.* 14 (1913), S. 163—178.
3. On the deformation of an  $n$ -cell. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 3 (1917), S. 654—656.
4. The intersection numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.* 25 (1923), S. 540—550.
5. Analysis situs. 2. edit. Amer. Math. Soc. Colloquium publ. 5 Pt. II New York Amer. Math. Soc. (1931).

Vietoris, L.

1. Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 29 (1926), S. 443—453.
2. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. *Math. Ann.* 97 (1927), S. 454—472.
3. Über die Symmetrie der Zusammenhangszahlen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten. *Monatsh. f. Math.* 35 (1928), S. 165—174.
4. Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume. *Math. Ann.* 101 (1929), S. 219—225.
5. Erzeugung der regulären Unterteilung von simplizialen Komplexen durch wiederholte Zweiseitteilung. *Monatsh. f. Math. u. Phys.* 37 (1930), S. 97—102.
6. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe. *Monatsh. Math. Phys.* 37 (1930), S. 159—162.
7. siehe Tietze.
8. Über den höheren Zusammenhang von Vereinigungsmengen und Durchschnitten. *Fundam. math.* 19 (1932), S. 265—273.

Waerden, B. L. van der

1. Kombinatorische Topologie. *Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 39 (1930), S. 121 bis 139.
2. Topologische Begründung des Kalkuls der abzählenden Geometrie. *Math. Ann.* 102 (1929), S. 337—362.
3. Zur algebraischen Geometrie. IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen der Liniengeometrie. *Math. Ann.* 109 (1933), S. 7—12.

Weber, C.

1. (und H. Seifert). Die beiden Dodekaederräume. *Math. Ztschr.* 37 (1933), S. 237—253.

Weyl, H.

1. Über die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913).
2. Analysis Situs Combinatorio. *Rev. mat. hisp.-amer.* 5 (1923), S. 209—218; 241 bis 248; 273—279; 6 (1924), S. 33—41.

Wildner, R. L.

1. Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs. *Bull. Amer. Math. Soc.* 38 (1932), S. 649—692.

Wilson, W. A.

1. Representation of a simplicial manifold on a locally simplicial manifold. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 29 (1926), S. 1129—1133.
2. Representation of manifolds. *Math. Ann.* 100 (1928), S. 552—578.

Wirtinger, W.

1. Über die Verzweigungen bei Funktionen von zwei Veränderlichen. *Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 14 (1905), S. 517.

Zariski, O.

1. On the topology of algebroid singularities. *Amer. Journ. Math.* 54 (1932), S. 453—465.

## Sachverzeichnis.

Die Zahlen verweisen auf Seiten, hochgestellte eingeklammerte Zahlen auf die Anmerkungen S. 315 ff.

### A

Abbildung § 6; eineindeutige 24; in und auf eine Menge 24; reziproke  $T^{-1}$  24; Stetigkeit der reziproken 35; durch reziproke Radien 16.  
Abbildung, homomorphe, von Gruppen § 83; der Homologiegruppen 98; der Fundamentalgruppe 156.  
Abbildung, lineare (=affine), eines  $n$ -Simplexes 39, 41; eines Prismas 100.  
Abbildung, Produkt  $UT$  (erst  $T$ , dann  $U$ ) 24, 34.  
Abbildung, simpliziale 114.  
Abbildung, stetige 24, XI. Kap.; der  $n$ -Sphäre 117; Verhalten der Homologiegruppen bei — — 98; Verhalten der Fundamentalgruppe bei — — 155; simpliziale Approximation einer — — § 31.  
Abbildung, topologische 1, 26; mit und ohne Erhaltung der Orientierung 129, 285; Abbildungsgrad einer — — 285.  
Abbildungsgrad § 78, (<sup>49</sup>); einer Deformation 284.  
Abbildungsklasse 114; Invarianten der — 117, 176, 283.  
abelsche Gruppe § 86; additiv geschrieben 304.  
Abelsch machen von Gruppen § 84.  
abgeschlossene Hülle 23; — — von Punktmengen eines Zahlenraumes 31.  
abgeschlossene Teilmenge eines Umgebungsraumes 23.  
abhängig; homolog — 64, 84; linear — 66, 84.  
Achse eines Prismas 100.  
achsenparallele Strecke eines Prismas 100.  
Additionszeichen bei abelschen Gruppen 304.  
additive Schreibung abelscher Gruppen 304.  
affine Abbildung eines Simplexes (= lineare) 39.  
Alexanderscher Dualitätssatz (<sup>47</sup>).

algebraische Geometrie (<sup>46</sup>).  
algebraischer Wert einer 0-Kette 65.  
amphidrome Kurve (<sup>23</sup>), (<sup>28</sup>).  
Anfangsseite einer Strecke 41.  
Anfangspunkt eines Weges 149.  
Antiquaschrift für orientierte Gebilde 40.  
Anwendung gruppentheoretischer Relationen 294.  
 $\mathcal{C}_p$  = Zeichen für Approximation 255.  
Approximation, simpliziale IV. Kap., insbes. 104, 107; — — einer singulären Kette 108; — — des Randes 110; — — der Normalunterteilung 111; — — von Abbildungen § 31.  
Approximation, zellenmäßige § 72; — — eines singulären Komplexes 254; — — simultane 257.  
Approximationssatz 99; Beweis des — § 30; Folgerungen aus dem — 112.  
approximierende Ecke 107.  
äquivalente Punkte eines Umgebungsraumes (Identifizieren) 32.  
äquivalente Knoten 224, (<sup>29</sup>).  
Art s. Zuordnung 8.  
Asymmetrie orientierbarer Mannigfaltigkeiten 280, (<sup>48</sup>).  
Ausbohrung eines Knotens 224.  
ausgeartete Abbildung eines Simplexes  $\mathbb{E}^n$  auf  $\mathbb{E}^r$  39.  
ausgeartetes singuläres Simplex 93; in einer Summe formal mitgeschrieben 95; Rand eines — — 97.  
ausgezeichnete Umgebung 181.  
Außenrand eines Simplexsternes 53.  
Außenraum eines Knotens 225; — eines Torusknotens 179.  
Automorphismus der Fundamentalgruppe bei Deformation 176; bei Wechsel des Anfangspunktes 155; — — von Flächen (<sup>23</sup>); — der ersten Homologiegruppe der Ringfläche 98 Aufg. 1.  
Axiome A und B des Umgebungsraumes 21.

### B

Band, tordiertes 2, 7.  
baryzentrische Koordinaten 36.  
Basis eines Gitters 304; des Gitters  $\mathbb{T}^k$  aller  $k$ -Ketten 59, 73; Bettische — s.d.; duale Zellen- 259; duale Bettische — 252.  
Bedingung (E) für singuläre Ketten 257.  
Begrenzung 23; — einer Punktmenge eines Zahlenraumes 31.  
Begrenzungspunkt einer Teilmenge 23; topologische Invarianz des — 27.  
Beziehen von Polygonseiten 136.  
benachbarte  $\mathbb{S}$ -Klassen 190; — transversale 1-Zellen 274.  
berandeter reiner Komplex 48; berandete Pseudomanigfaltigkeit 90; — Flächen § 40; — dreidimensionale Mannigfaltigkeiten § 64; —  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten (<sup>41</sup>).  
Berandungsrelationen 71, 73.  
beschränkte Punktmenge eines Zahlenraumes 29.  
Bettische Basis der Dimension  $k$  70, 77; — — auf einer Fläche 147; duale — — 252.  
Bettische Gruppe der Dimension  $k$  70, (<sup>13</sup>).  
Bettische Zahl  $p^k$  der Dimension  $k$  eines simplizialen Komplexes  $\mathbb{E}^n$  64; topologische Invarianz 112; — — der Dimension  $n$  66; aus Inzidenzmatrizen berechnet 77; aus Blockinidenzmatrizen berechnet 80;  $n$ -te — — einer Pseudomanigfaltigkeit 91; — — einer Fläche 144; — —  $p^k$  des topologischen Produktes zweier Kugelflächen 157; — —  $p^1$  einer orientierbaren berandeten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit 223; — — mod  $m$  (<sup>15</sup>).  
Bettische Zahl einer abstrakten Gruppe 309; — — der Oktaedergruppe 310.  
Richtigkeitsbedingungen (<sup>5</sup>), (<sup>88</sup>).  
Bézoutsches Theorem (<sup>46</sup>).  
Bildmenge 24.  
Bildpunkt 24.  
binäre Ikosaedergruppe 218, (<sup>52</sup>).  
Bindfaden, Deformation 151.  
Blätterzahl  $g$  eines Überlagerungskomplexes 185, 188.  
Blöcke einer simplizialen Zerlegung 78; s. auch Blocksystem.  
Blockinidenzmatrizen 79; — der Flächen 146; — der Linsenräume 213.  
Bockketten § 22; — mod 2 86.  
Blocksystem 79; — einer Fläche 145; — einer dreidimensionalen Mannig-

faltigkeit 211; — eines Zellenkomplexes 235.  
Breitenkreis der Ringfläche 3.  
Brezelfläche (= Doppelringfläche) 6.

### C

Charakter einer Matrix, soviel wie Spur 286.  
Charakteristik, Eulersche eines simplizialen Komplexes 87; — der  $n$ -Sphäre und des  $\mathbb{E}^n$  87 Aufg. 2; ihre topologische Invarianz 112; als Wechselsumme der Bettischen Zahlen 87; — einer Polyederfläche 134; — von Ringfläche und Würfel 134; — der geschlossenen Flächen 140; — der berandeten Flächen 142; — eines Kan tenkomplexes 169; — einer  $g$ -blättrigen Überlagerung 193; — einer geschlos senen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit 205; — eines Simplexsternes 209; — einer berandeten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit 223; — einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit 246.

### D

Dachseiten eines Prismas 100.  
Darstellung einer Gruppe 199; transitive — 199.  
Deckbewegung eines Überlagerungskomplexes 196.  
Deckbewegungsgruppe 196.  
definierende Relationen einer Gruppe 294; — — einer Untergruppe 203; — — einer Faktorgruppe 298; — — der Fundamentalgruppe 167.  
Deformation einer Abbildung § 31; homotope 113; isotope 114; — — in eine simpliziale Abbildung 115; — — und singuläre Ketten 115; — — und Homologiegruppen 117; — — und Fundamentalgruppe 176.  
Deformation eines Komplexes in sich 114; Abbildungsgrad einer — 284; fixpunktlose — 290, (<sup>51</sup>); bei Flächen 291.  
Deformation (homotope) eines Weges 150; stetige 158; kombinatorische 158; freie 174; gebundene 174; mit Zerreißung (<sup>29</sup>); Zusammenfassung (<sup>29</sup>).  
Deformationskomplex  $\mathbb{E}^n \times t$  113.  
Deformationsparameter 113.  
Deformationsrechteck eines Weges 150; singuläres — 214.  
Deformationssatz 115.  
Deutsche Schrift für nichtorientierte Gebilde 40, 81.  
Diagonalf orm einer Matrix 307.  
Diametralpunkte der Kugelfläche 35.

Dimension eines konvexen Bereiches 38; eines Simplexes 36; eines simplizialen Komplexes 42, 48; topologische Invarianz § 33, (21); eines Gitters 305; einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit (19).

Dimensionsindex wird stets hochgestellt 42, 48.

Dimensionstheorie 20.

direktes Produkt  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$  von Gruppen 302; in abelschen Gruppen direkte Summe genannt 304.

Diskontinuitätsbereiche als Raumformen (28).

divisionshomolog ( $\approx$ ) 69.

Dodekaeder, massives 206.

Dodekaederfläche 131.

Dodekaederraum, sphärischer 216, 220, 221, 227, 241; hyperbolischer 218.

Doppelpendel 16.

Doppelringfläche (= Brezelfläche) 6, 174, 198; dreifache Überlagerungen 183, 196; zweifache Überlagerungen 208; duale Bettische Basen auf der — 269; konjugierte Rückkehrsschnitte auf der — 270; Einwickeln der — (3).

dreidimensionale Mannigfaltigkeiten IX. Kap., s. Mannigfaltigkeiten.

Dreieck = 2-Simplex 37; zerknülltes — = singuläres 2-Simplex 93; tütenartiges 96.

duale Basen § 71; —, Bettische 252. duale Sterne 231.

duale Zellenbasen 250.

duale Zellteilungen einer Mannigfaltigkeit 241.

Dualitätssatz, Poincaréscher § 69; — mod 2 246; Veblensche Erweiterung 252; Alexanderscher — (47).

Durchdrücken in Grund- und Überlagerungskomplex 184.

Durchmesser einer Punktmenge in einem Zahlenraume 31.

Durchschnitt 22.

## E

Ebene, projektive s. d. 9, 10, 11; Zahlen- s. d.

Ecke eines Simplexes 36; eines Polygons 130; einer Polyederfläche 131; eines Vollpolyeders 206.

Eigenschaften im Punkte V. Kap.

Eigenverschlingungszahl 279.

Einbettung nichtorientierbarer Flächen (3); siehe Einlagerung.

eineindeutige Abbildung 24.

einfach zusammenhängender Komplex 157; — Überlagerungskomplex 193; — Raumformen (= Grundformen) (38).

Einheitsbilinearform 249. Einheits- $n$ -Sphäre 52.

Einlagerung einer Figur in den dreidimensionalen Raum 2; einer  $M^n$  in eine  $M^m$  273; Unmöglichkeit der — einer nichtorientierbaren Fläche in den  $R^3$  222, (36); einseitige und zweiseitige Einlagerung 8, § 76; simpliziale und topologische — (36).

einseitige Fläche 8, 273; Mannigfaltigkeit § 76; einseitiger Schlauch 12.

Einselement einer Gruppe 293; in abelschen Gruppen Nullelement genannt 304.

Einspannen eines Flächenstückes 163.

Einwickeln der Flächen 6, (2).

einufriger Rückkehrsschnitt 148.

Element,  $n$ -dimensionales 50; s. auch Simplex und Vollkugel.

Elementarflächenstück (= topologisches Bild der Kreisscheibe = 2-dimensionales Element) 50; singuläres — (= stetiges Bild der Kreisscheibe) 153.

elementare kombinatorische Deformationen 158.

elementare Matrizenumformungen 74, 307.

elementare Transformation einer Basis aller  $k$ -Ketten 73; — von Polygonsystemen 134.

Elementarteiler (rationale) einer ganzzahligen Matrix, soviel wie invariante Faktoren, s. d.

Elementarverwandtschaft 46; — von Polyederflächen 134, 140.

Endecke einer Strecke 41.

endlichblättrige Überlagerungen 198.

endlicher Komplex 46; seine topologische Invarianz 47.

Endpunkt eines Weges 149.

Entfernung zweier Punkte eines Zahlenraumes 22; zweier Punktmengen 31.

entgegengesetzt orientierte singuläre Simplexe 93.

Erhaltung der Orientierung bei einer topologischen Abbildung 129.

Ersatzbogen 274.

Erzeugende einer Gruppe § 82; der Fundamentalgruppe § 46.

euklidische Raumformen (28).

Eulersche Charakteristik siehe Charakteristik.

Eulersche Polyederfläche 135.

Eulersche Polyederformel 87; verallgemeinert 288.

## F

Faktoren, invariante einer ganzzahligen Matrix 74, 308.

Faktorgruppe 297.

Fasern gefasster Räume (38).

Figur, geometrische 1, 18.

Fixpunkte, Mindestzahl (50).

Fixpunktformel § 80, 289; allgemeine (50).

Fixpunktindex (50).

Fixpunktklassen (50).

fixpunktlose Selbstabbildung der  $n$ -Sphäre 290; — Deformationen 290, (51).

Fläche, geschlossene § 2, § 37; berandete § 40; unendliche (4); aus Polygone zusammengesetzt 5, 130; polygonal zerlegte — (= Polyederfläche) 131; — als homogener Komplex 141; Geschlecht einer — 141; Homologiegruppen § 41; Fundamentalgruppe 170; duale Basen auf einer — 269; konjugierte Rückkehrsschnitte 270; orientierbare — zweiseitig im  $R^3$  276; fixpunktlose Deformation einer — 291.

Flächenkomplex 162; Bestimmung der Fundamentalgruppe einer  $M^3$  aus dem — ihres Polyeders 214. Flächenorientierung 275. Flächenstücke einer Polyederfläche 131. Flächentopologie VI. Kap., (10); Hauptsatz 141, (22); Probleme der — (23). Fliege auf Möbiusband 8. Folge von Punkten eines Umgebungsraumes 23. Folgerelation 294. Fortsetzung der Orientierung längs eines Weges 271. Frakturschrift für nichtorientierte Gebilde 40, 81. freie Deformation eines Weges 174, (29). freies Produkt  $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$  von Gruppen 300. freie abelsche Gruppe von  $h$  Erzeugenden 303. freie Gruppe von  $h$  Erzeugenden 301. freie zyklische Gruppe = freie Gruppe von einer Erzeugenden 295. frei homotope Wege 174, 176. Fundamentalpolygon von Flächen 5 ff.; (0), (1), (2) 139; der Kugel 7 (Fig. 11); der projektiven Ebene 11 (Fig. 18); der Ringflächen 3 (Fig. 5), 12 (Fig. 19); der Doppelringfläche 6 (Fig. 10). Fundamentalgruppe 4, VII. Kap., (25); des  $n$ -Simplexes 157; des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes 157; der Kreislinie, des Kreisringes, des Vollringes 168; eines topologischen Produktes

156; der projektiven Ebene 197; der geschlossenen Flächen 170; eines zusammengesetzten Komplexes § 52; des Außenraumes eines Torusknotens 179; einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit § 62, 279; einer nichtorientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit 206; eines homogenen vierdimensionalen Komplexes 180; homomorphe Abbildung der — 156; — und Deformation von Abbildungen § 50; — und Homologiegruppe § 48; — als Deckbewegungsgruppe 197; — in einem Punkte § 51. Funktion, stetige 25.

## G

Gebiet = offene Teilmenge des  $R^n$  125; Invarianz des — (47).

gebundene Deformation eines Weges 174, (29).

gefaserter Raum (38).

geradliniges Simplex (eines Zahlenraumes) 41; — Verbindungsstrecke zweier Punkte eines topologischen Simplexes 41; — Komplex 46.

Gerüstkomplex, zweidimensionaler 162.

Geschlecht einer geschlossenen Fläche 141.

geschlossene Fläche § 37, § 2.

geschlossene Kette (= Zykel) 60; — mod 2 83; in einem Punkte (20).

geschlossene Mannigfaltigkeit 204, 236.

geschlossener Weg 150.

Gitter (= freie abelsche Gruppe) 303;  $\mathbb{Z}^k$  aller  $k$ -Ketten eines simplizialen Komplexes 59; —  $\mathbb{G}^k$  aller geschlossenen  $k$ -Ketten 60; —  $\mathcal{N}^k$  aller nullhomologen  $k$ -Ketten 61; —  $\mathcal{D}^k$  aller divisionsnullhomologen  $k$ -Ketten 69; — Zusammenstellung der Gitter  $\mathbb{Z}^k$ ,  $\mathbb{G}^k$  usw. 71.

glatt durchsetzen (von singulären Ketten) 268.

gleichgerichtete transversale 1-Zellen 274.

Gleichheit topologischer Simplexe 41; — singulärer Simplexe 92; — von Wegen 149, (24); — von Überlagerungskomplexen 182; — von Wörtern aus Gruppenelementen 293.

gleichmäßige Stetigkeit, Satz von der — 29, 30.

gleich orientierte Simplexe des Zahlenraumes 100; — simpliziale Zerlegungen einer Pseudomannigfaltigkeit 129.

Grenzpunkt einer Folge 23.

Grundformen, metrische (38).

Grundpunkt 181.  
Grundseiten eines Prismas 100.  
Grundweg 184.  
Gruppe XII. Kap.; abelsche — § 86; zyklische — 295; freie — 301; freie abelsche — 303; freie zyklische — 295; Faktor — 297; Kommutator — 300; s. auch Gitter, Homologie-, Torsions-, Bettische —, Fundamental-, Deckbewegungs-, Monodromie-, Knoten-, Wortproblem, Isomorphieproblem.  
Gruppenaxiome 153.  
Gruppenbild (52).  
Gruppeneins 293.

## H

Häufungspunkt einer Teilmenge 23, 28; seine topologische Invarianz 27.  
Häufungsstellensatz 29.  
Hauptsatz der Flächentopologie § 39, (22).  
Hausdorffsche Umgebungsaxiome (8).  
Heegaard-Diagramm § 63, (34).  
Henkel 5, 139.  
Henkelnormierung 138.  
Henkelform der orientierbaren Flächen 139.  
Henkelkörper vom Geschlecht  $h$  219; nichtorientierbarer — 221.  
Henkelzahl  $h$  = Geschlecht einer orientierbaren Fläche 140.  
Hilfsweg der Kantenwegegruppe 165.  
 $\mathfrak{H}$ -Klassen von Verbindungs wegen 189.  
Hohlkugel 222; Fixpunktsatz für die — 292.

homogener Komplex 48; zweidimensionaler 141; dreidimensionaler 204;  $n$ -dimensionaler 228.

Homogenität des Zahlenraumes (9); metrische — (38).

homologe Ketten § 17; — Ketten mod 2 83; — Wege (= Kurven) § 3, 171.

Homologie (Zeichen  $\sim$ ) 61; — mit Division (Zeichen  $\approx$ ) 69.

Homologiebasis der Dimension  $k$  eines Komplexes 64, 65, 77; — einer Fläche 147.

Homologiegruppe  $\mathfrak{H}^k$  der Dimension  $k$  § 18; S. 4, 15; singuläre § 27;  $k=0$  65;  $k>n$  65; — von speziellen Komplexen: Kreisring, projektive Ebene, Ringfläche 66, Möbiusband 91,  $n$ -Simplex,  $n$ -Sphäre, Simplexstern 68, geschlossene Flächen § 41, dreidimensionale Mannigfaltigkeiten 211, 219 Aufg. 4, Pseudomannigfaltigkeiten 88, zusammengesetzte Komplexe 179, unendliche Komplexe 66; Berechnung der — aus den Inzidenzmatrizen § 21;

topologische Invarianz der — § 28, 112; verschiedene Invarianzbeweise der — (17); homomorphe Abbildung der — 98; — und Fundamentalgruppe 171; — in allgemeinen Umgebungsräumen (18); modulo einer Teilmenge (20).

Homologiegruppen in einem Punkte § 32, S. 125 Aufg. 1; ihre topologische Invarianz 123, (20).

Homologieklassen 62, 14, 97, (20). homolog unabhängige  $k$ -Ketten 64; — — mod 2 84.

homomorphe Abbildung von Gruppen § 83; — — der Homologiegruppen 98; — — der Fundamentalgruppe 156; invariant gegen Deformation 117, 176.

Homomorphiesatz der Gruppentheorie 297.

homöomorph 26, 1.

Homöomorphieproblem als Hauptproblem der Topologie § 1; — der Linsenräume 210, 215, 221.

homotope Deformation einer Abbildung 113; — — eines Komplexes in sich 114; — — eines Weges 150.

homotope Wege 150, (20); — Kurven (soviel wie Wege) auf Flächen § 3.

Hülle, abgeschlossene 23; — — von Punktmenigen eines Zahlenraumes 31; konvexe — 39.

hyperbolischer Dodekaederraum 218.

hyperbolische Raumformen (38).

Hypersphäre soviel wie Einheits-3-Sphäre, s. d.

## I

Identifizieren von Punkten eines Umgebungsraumes 31; — zum Aufbau eines Komplexes benutzt 43; — in Überlagerungskomplexen 182.

identische Wörter aus Gruppenelementen 293.

Ikosaedergruppe, binäre 218, (52).

Index, hochgestellter, bezeichnet die Dimension 42, 48.

Index eines Fixpunktes (50).

induzierte Orientierung eines Seitencomplexes 59; — — einer Zelle 234.

innerer Punkt einer Teilmenge 23; seine topologische Invarianz 27.

innere topologische Eigenschaften 3.

invariante Faktoren einer ganzzahligen Matrix 74, 308; — Untergruppe, soviel wie Normalteiler.

Invarianten im Großen und Kleinen 120; numerische — (= Bettische Zahlen und Torsionskoeffizienten) 78.

Invarianz, topologische 26, 92, 112, 125; der Umgebung 26; des Häufungs-

punktes 27; der offenen Teilmenge 27; des endlichen Komplexes 47; des zusammenhängenden Komplexes 48; der Dimension § 33, S. 48, (21); der Homologiegruppen 112, 58, (17); der Orientierbarkeit § 36, S. 91; der Bettischen Zahlen und Torsionskoeffizienten 112; der Eulerschen Charakteristik 112; im Kleinen 120; im Großen (19); der Reinheit 127; des Randes 127; der Pseudomannigfaltigkeit 128; des Gebietes (47); der Schnittzahlen § 74.

inzidente Simplexe 42; — singuläre Simplexe 93; — Sterne eines Sternkomplexes 229.

Inzidenzmatrix, simpliziale  $E^k$  § 21; Block- 79; Zellen- 235; — mod 2  $\tilde{E}^k$  84; — einer Pseudomannigfaltigkeit 89; Normalform  $H^k$  75.

Jordanscher Kurvensatz (47).

isolierter Teilkomplex 47.

isomorphe Gruppen 297; Sternkomplexe 231.

isotope Kurven auf Flächen § 3; — Deformation des Raumes 151; — Deformation von Abbildungen 114.

## K

Kante eines Simplices 37; eines Polyeders 131; eines Vollpolyeders 206; einer Mannigfaltigkeit  $M^{n-1}$  274.

Kantenkomplex 87 Aufg. 3, 162; Fundamentalgruppe eines — 169.

Kantenweg in einem simplizialen Komplex 150; in einem Flächenkomplexe 162.

Kantenwegegruppe eines simplizialen Komplexes § 44; eines Kanten- und Flächenkomplexes 162.

Kantenwegeklasse  $[w]$  159.

Kästchenform einer schiefsymmetrischen Matrix 270.

Kautschuktopologie 4.

Kette, simpliziale § 15;  $k$ -dimensionale (=  $k$ -Kette) 58; geschlossene (= Zykel) 60; — — mod 2 (soviel wie Kette ohne Orientierung) § 23; — — mod  $m$  (15); Zellenkette 234.

Kette singuläre § 26; — — mod 2 (17).

Kleeblattschlinge 2; Überlagerungen des Außenraumes einer — 201, 226; — als Torusknoten 180; Rechts- und Linkss. (31).

Knoten, Definition 224; Äquivalenz von 224, (34); Torusknoten 179; Verschlingungszahlen 281; Außenraum eines — 225; Ausbohrung eines — 224; Komplementärraum 282; — im  $\mathbb{R}^4$  (1).

Kreisscheibe, Selbstabbildung der — 28; Identifizieren aller Randpunkte der — 35; Verdoppelung der — 129.

Kreuzhaube 12, 138.  
Kreuzhaubenform der nichtorientierbaren Flächen 138.  
Kreuzhaubennormierung 137.  
Kreuzhaubenzahl  $k$  (= Geschlecht) einer nichtorientierbaren Fläche 140.  
Kugelfläche 7; mit  $h$  angesetzten Henkeln 6; punktierte s. d.; tetraedral zerlegt 52; oktaedral zerlegt 52, 80; ihre Charakteristik ist  $N = -2$  140, 142 Aufg. 1; — ist einfach zusammenhängend 157; Raum der Linienelemente der — 198, 56; Abbildungsgrad 284; Fixpunkte stetiger Selbstabbildungen der — 292; — als metrische Fläche (38).

## L

Lagerraum 17, (6).  
lateinische Schrift für orientierte Geometrie 40.  
leeres Wort, stellt Einselement einer Gruppe dar 293; — Menge (= Menge ohne Elemente im Sinne der Mengenlehre) 23.  
Lie-Helmholzsche Beweglichkeitsbedingungen (6), (38).  
lineare Abbildung (= affine) eines Simplexes 39, 41; — — eines Prismas 100.  
linear abhängige  $k$ -Ketten 66; — — für  $k = n$  gleichbedeutend mit homolog abhängig 66; — —  $k$ -Ketten mod 2 84.  
Linienelemente, Räume aus — 198, (12).  
Linsenräume, Definition 210; Blockinzipienzmatrizen 213; Homöomorphieproblem der — 210, 215; Zerlegung in zwei Vollringe 216; Eigenverschlingungszahlen 279; asymmetrische — 280, (43).

## M

Mannigfaltigkeiten, Anschauungsmaterial 15.  
Mannigfaltigkeiten, zweidimensionale (= geschlossene Flächen) 131.  
Mannigfaltigkeiten, dreidimensionale IX. Kap., geschlossene 204; Homologiegruppen § 61, 219; Fundamentalgruppe von — — § 62; Konstruktion aus Heegaarddiagrammen und durch verzweigte Überlagerung 221; aus Knoten § 65; berandete — — § 64, (20); Summenbildung 218, 280; symmetrische 280.  
Mannigfaltigkeiten,  $n$ -dimensionale X. Kap., § 68, (40); Definition 236; — — und homogene Komplexe 240; — — berandete (41).

Matrizenkalkül 72.  
Matrizenumformungen 74, 307.  
Maximum, Satz vom — 29.  
Meridiankreis der Ringfläche 3.  
Metrik (38).  
Mittelpunkt eines  $n$ -Simplexes 39, 41; — eines Simplexsternes 53; — eines Prismas 100.  
mittlerer Punkt eines konvexen Bereiches 38; — — eines topologischen Simplexes 41; — — einer berandeten Pseudomanigfaltigkeit 90.  
mittlere Simplexe einer berandeten Pseudomanigfaltigkeit 90.  
Möbiusband 7; geschlossenes — (= projektive Ebene) 9; als berandete Pseudomanigfaltigkeit 90, 91.  
mod 2 (bedeutet soviel wie nichtorientiert), Kette — 28; singuläre Kette — (17); Schnitzzahlen — 248, 270.  
mod  $m$ , Ketten — (15).  
modulo einer Teilmenge, Ketten (20), (41).  
Monodromiegruppe § 58.

## N

$N$  = Eulersche Charakteristik 87.  
negatives Gruppenelement, in abelschen Gruppen soviel wie reziprokes 304.  
Netz einer Polyederfläche 135.  
nichtorientierbare Fläche 8, 135; — Pseudomanigfaltigkeit 88; — Mannigfaltigkeit 246, § 76; — Ringfläche 12; — dreidimensionale Mannigfaltigkeit 206; Einbettung nichtorientierbarer Flächen (3).  
Normalform  $H^k$  der Inzidenzmatrizen 73; ganzzahliger Matrizen § 87, S. 74; — von Polyederflächen 135; — — symmetrische 140; — von berandeten Flächen 142.

Normalisator einer Untergruppe der Fundamentalgruppe (soviel wie Zwischengruppe) 198.  
Normalisierungsprozeß der Inzidenzmatrizen 74; — — mod 2 85.  
Normalunterteilung eines simplizialen Komplexes § 13; einer singulären Kette 105; eines Vollpolyeders 206; eines Sternkomplexes 229; Orientierung der — eines orientierten  $n$ -Simplexes 100.  
 $n$ -Simplex (=  $n$ -dimensionales Simplex) § 9; s. Simplex.  
 $n$ -Sphäre 52; s. Sphäre.  
Nullelement (Bezeichnung für das Einselement einer abelschen Gruppe) 304.  
nullhomologe Ketten 61; — — mod 2 83; — Wege 173.

nullhomotoper Weg 152.  
numerische Invarianten (= Bettische Zahlen und Torsionskoeffizienten) 78.

## O

oberer Index = Dimensionsindex 42, 48.  
Oberteilungen eines Polygonsystems 134.  
offene Teilmenge eines Umgebungsraumes 23; — — eines Zahlenraumes ist ein unendlicher Komplex 57; ihre topologische Invarianz 27.  
Oktaeder als Sternkomplex 233.  
Oktaedergruppe 310.  
Oktaederraum 213; seine Fundamentalgruppe 218.  
oktaedrale Zerlegung der  $n$ -Sphäre 52, 80.  
Orientierbarkeit einer Pseudomanigfaltigkeit 88; einer Fläche 8, 135; einer berandeten Fläche 142; einer Mannigfaltigkeit 205, 212, 238; — und Zweiseitigkeit 272; topologische Invarianz der — § 36; Orientierbarmachender Rückkehrsschnitt 148; Orientierbare zweiblättrige Überlagerung 272.  
orientierende  $n$ -Kette auf einer Pseudomanigfaltigkeit 129.  
Orientierung eines Simplexes 40; eines 0-Simplexes 41; eines singulären Simplexes 93; einer Zelle 234; eines Polygons 133, 6; des Zahlenraumes  $R^n$  100; induzierte — 59, 133, 234; gleiche — von  $n$ -Simplexen im  $R^n$  100; gleiche — von  $n$ -Ketten auf einer Pseudomanigfaltigkeit 129; Abbildung mit Erhöhung bzw. Umkehrung der — 129, 285; Fortsetzung der — längs eines Weges 271.

## P

$\mathbb{P}^n$ ,  $n$ -dimensionaler projektiver Raum 54 s. d.  
Parallelkoordinaten 36, (9).  
Peano-Kurve 93, 127.  
periodische Bewegung 17.  
Permutation der Ecken eines  $n$ -Simplexes 40.  
Permutationengruppen, reguläre 201; transitive 200.  
Pfeil, orientierender einer Strecke 41; durch Fläche gesteckter — 272; Kreispfeil 41, 133.  
Phasenraum 18.  
Pluszeichen, verknüpft Elemente abelscher Gruppen 304.  
Poincaréscher Dualitätssatz § 69; Veblensche Erweiterung 252.  
Poincarésche Räume, Definition 218; Beispiele 226, (33).

Poincarésche Vermutung 157, 218.  
Polyeder, dreidimensionales 206.  
Polyederecken, -seiten, -flächenstücke 131.  
Polyederfläche 131; Eulersche 135; elementarverwandte 140.  
Polyederformel, Eulersche 87; der geschlossenen Flächen 140.  
Polygon 130.  
polygonal zerlegte Fläche (= Polyederfläche) 131.  
Polygonsystem 130.  
Prismen des Zahlenraumes § 29.  
Produkt  $UT$  zweier Abbildungen (erst  $T$ , dann  $U$ ) 24; Stetigkeit dieses Produktes 34; — von Gruppenelementen (in abelschen Gruppen Summe genannt) 304; freies und direktes — von Gruppen § 85; — zweier Wege  $w = uv$  (erst  $u$  dann  $v$ ) 150; — von Wegen und Summe von Ketten 171; von Homologieklassen (44); topologisches s. d.  
Projektion, stereographische 27; zentrische 28; parallele 31; einer Punktmenge 38.  
Projektionskegel 38.  
projektive Ebene, als geschlossenes Möbiusband 9; als Geradenbüschel 10, 35; Fundamentalpolygon der — 11; — durch Identifizieren von Diametralpunkten der Kugelfläche entstanden 35; — Homologieklassen der 1-Ketten einer simplizialen Zerlegung der — 62; Homologiegruppen und Torsionskoeffizienten der — 66; geschlossene Kette mod 2 auf der — 83; Zusammenhangszahlen der — 86; Fundamentalgruppe der — 197; Linienelemente der — 198; — nicht in den dreidimensionalen Zahlenraum einbettbar 222; (3); — einseitig im projektiven Raum 273; topologisches Produkt der — mit Kreislinie 273; — als algebraische Fläche des  $\mathbb{R}^4$  (3); komplexe — (46).  
projektiver Raum 15; als Phasenraum 18, 56;  $n$ -dimensionaler,  $\mathbb{P}^n$  54; 3-dimensionaler, durch einschaliges Hyperboloid in zwei Vollringe zerlegt 57; als Linsenraum 210; Blocksystem und Homologiegruppen 80; Charakteristik 87 Aufg. 2; Homologiegruppen und Orientierbarkeit 118; Fixpunkte einer Selbstabbildung des — — 292; amphidrome Kurven (38); komplexer — (48).  
Pseudomanigfaltigkeit, Definition § 24; orientierbare 88; berandete 90; Verdoppelung 129; topologische Invarianz § 36; Dimension 88, (19).  
punkt fremd 22.

Punktmengen im Zahlenraume § 7. punktierte Kugelfläche 1; der Zahlenebene homöomorph 27; ist ein unendlicher Komplex 47; —  $n$ -Sphäre 53.

## Q

Quaternionenraum 198. Quotientengruppe, soviel wie Faktorgruppe, s. d.

## R

Rand eines konvexen Bereiches 38, 52; eines Simplexes 39, 41; eines  $n$ -dimensionalen Elementes 51; eines reinen Komplexes 48; einer berandeten Mannigfaltigkeit 222; topologische Invarianz des — § 35; — eines orientierten Simplexes (Zeichen  $\partial$ ) 59; einer Kette § 16, (42); einer 0-Kette 60; einer Kette mod 2 83; eines singulären Simplexes 96; einer singulären Kette 97; eines ausgearteten Simplexes 97; der Normalunterteilung eines singulären Simplexes 106.

Randkette 59; — mod 2 83.

Randseite einer berandeten Fläche 142. Randteiler (= divisions-nullhomologe Kette) 69.

randtreue Abbildung 285.

Randweg eines 2-Simplexes 158; — eines Flächenstückes 163.

rationale Zahlen, Gruppe der — 295.

Raum, projektiver 15, 18, 54, 56, (28), (18); sphärischer 16, 52; aller projektiven Geraden 17; Lagen- 17; Phasen- 18; Umgebungs- 20, § 5; topologischer 20, (8); Zahlen- 21; — aus Linienelementen 198, (12); vierdimensionaler — s. d.; gefasster (38); metrisch sphärischer, elliptischer, euklidischer, hyperbolischer — (38).

Raumformenproblem (38).

Raumschließung durch Gruppen (5). „räumliche“ Zellen 275.

$\partial$  = Zeichen für Rand 59.

reduzierte Bettische Gruppe (18). reguläre Permutationengruppe 201; — Überlagerung 195.

reiner Komplex 48; seine topologische Invarianz 127; Sternkomplex 229.

Relationen, definierende, einer Gruppe § 82; einer Untergruppe 203; einer Faktorgruppe 298; — der Fundamentalgruppe § 46; triviale — 294.

Restklassen 0 und 1 der ganzen Zahlen mod 2 82.

reziproke Abbildung  $T^{-1}$  24, 35; — Radien 16; — Weg 150; — Gruppenelement, in abelschen Gruppen negatives genannt 304.

Ring der Homologieklassen (44). Ringfläche 3; gelochte (= Henkel) 5; zum Quadrat aufgeschnitten 3; mit  $h=1$  angesetzten Henkeln 6; nicht orientierbare 12, 132, 140 Aufg. 2; als Diskontinuitätsbereich einer Translationengruppe 32; als Lagenraum des Doppelpendels 16; Linienelemente auf der — 56; Homologiegruppen der — 66; Blockinzidenzmatrizen 80; stetige Selbstabbildung 98; Eulersche Charakteristik 134; Fundamentalgruppe 170; 4-blättrige Überlagerungen 182; universell überlagert 194, 197; regulär überlagert 195; Heegaarddiagramm auf der — 220; — mit dualen Zellteilungen versehen 248; fixpunktlose Deformationen der — 291.

Rückkehrschnitt auf einer Fläche 147, (45); orientierbar machender — 148; einufiger und zweifriger — 148; — höherdimensionales Analogon 270.

## S

$S^n$   $n$ -dimensionale Sphäre 52.

Schema eines simplizialen Komplexes 44, 190; eines Polygonsystems 133; eines Vollpolyeders 208.

Schlangenlinien (für Seitenfolgen) 136.

Schlauch, verknoteter 5; einseitiger 12.

Schnittzahl  $\delta$  dualer Zellen 242; — von Zellenketten dualer Zellteilungen 247; — mod 2 248, 270; — singulärer Ketten § 73; derentopologische Invarianz § 74; Willkür in der Definition (42).

Schraubssinn eines orientierten Tetraeders 41.

schrittweises Identifizieren 33.

Seite eines Simplexes 37; eines singulären Simplexes 93; eines Polygons 130; Seitenfläche eines Vollpolyeders 206.

Simplex,  $n$ -dimensionales (=  $n$ -Simplex) § 9; geradliniges — des Zahnenraumes 36; topologisches 41; singuläres § 25; ausgeartetes 93; seine Konvexität 38; durch Projektion entstanden 38; Ecken, Kanten, Seiten 36, 37; Rand, mittlerer Punkt, Mittelpunkt 39; Homologiegruppen 68; Fundamentalgruppe 157; Inzidenzmatrizen eines 2-Simplexes 72; s. auch Vollkugel.

Simplexstern 53, Homologiegruppen 68; Charakteristik 209; als berandete Pseudomanigfaltigkeit 91; singulärer — 107.

simpliziale Abbildung 114; — Approximation s. d.; — Homologiegrup-

pen 97; — Umgebung 120; — Zerlegung eines Komplexes 42, eines Prismas 101.

simplizialer Komplex § 10; durch Identifizieren gewonnen 43; geradlinig im Zahnenraume liegender — 46; durch Inzidenzmatrizen bestimmt 72. simultane Approximation von Ketten 257.

singulär wird im allgemeinen das stetige Bild eines Simplexes, einer Kette usw. genannt; singuläre Homologiegruppen § 27; — Kette § 26; — Kette mod 2 (17); — Komplex 254; — Kreisring 14; — Simplexstern 107; — Deformationsrechteck 214; — Elementarflächenstück 153.

singuläres Simplex § 25; Gleichheit zweier — — 92; ausgeartetes — — 93.

Sphäre,  $n$ -dimensionale 52; tetraedrale und oktaedrale Zerlegung 52; aus Vollkugel gewonnen 56 Aufg. 1; Homologiegruppen 68; Charakteristik 87 Aufg. 2; Selbstabbildung 117; Fundamentalgruppe 157; als universeller Überlagerungskomplex 198; Abbildungsgrad einer Selbstabbildung 290; Fixpunktsatz für die — 292.

Sphäre, 3-dimensionale, in zwei Vollringe zerlegt 57; einfach zusammenhängend 157.

Sphäre, 4-dimensionale, ausgebohrt 180.

Sphärenproblem 236.

sphärischer Dodekaederraum 216, 220, 221, 227, 241.

sphärischer Raum 15; metrischer — (38); s. auch Sphäre.

sphärische Raumformen (38).

Spiegelung der  $n$ -Sphäre 117, 118; kehrt Orientierung um 129; Abbildungsgrad der — 284.

Spur  $\sigma_p$  einer Matrix 286.

Spurformel § 79, 288.

stereographische Projektion 27; in  $n$  Dimensionen 53.

Stern = Simplexstern s. d.; duale Sterne 231.

Sternkomplex § 66; reiner 229.

Sternteilung einer Mannigfaltigkeit 241.

stetige Abbildung 24; Funktion 25; Deformation eines Weges 158, (27).

Stetigkeit, Wesen der — 19; klassische Definition 24; gleichmäßige 29, 30.

Strecke = 1-Simplex 37; nichthomöomorph der Kreisscheibe 1.

Streckenkomplex = Kantenkomplex s. d.; — von Fläche umhüllt 142 Aufg. 2.

Summe zweier Ketten 58; zweier Ketten mod 2 82; zweier singulärer Ketten 95; zweier dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten 218, 280; von Elementen einer abelschen Gruppe 304; direkte — 304.

Summenbildung dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten 218, 280.

symmetrische Normalform geschlossener Flächen 140; — dreidimensionale Mannigfaltigkeiten 280.

## T

Taillenschnitt der Doppelringfläche 174.

Teilgitter 306.

Teilkomplex eines Komplexes 47, 254; reiner — (= Kette mod 2) 81.

Teilmenge eines Umgebungsraumes 22.

Tetraeder = 3-Simplex 37; Orientierung 41; Eckenpermutationen 40. tetraedrale Zerlegung der  $n$ -Sphäre 52.

Topologie, rein kombinatorische (19). topologische Abbildung 26, 1. topologische Einlagerung einer Fläche (36).

topologische Invarianz s. Invarianz.

topologisches Produkt 55; Fundamentalgruppe des — 156; — zweier Kugelflächen 157; — von  $n$  Kreislinien 194; von 3 Kreislinien 211; von Kreislinie und Kugelfläche 220; Methode des — (50).

topologischer Raum (8).

topologisches Simplex 41.

tordiertes Band 2, 7.

Torsionsbasis der Dimension  $k$  70, 77; in dualen Zellteilungen 258.

Torsionsgruppe der Dimension  $k$  70.

Torsionskoeffizienten  $c_k^p$  der Dimension  $k$  eines simplizialen Komplexes  $K^n$  64; topologische Invarianz der — 112; — der Dimension 0 65; der Dimension  $k > n$  65; der Dimension  $n$  66; der projektiven Ebene 66; aus Inzidenzmatrizen berechnet 77; aus Blockinzidenzmatrizen berechnet 80; — einer Pseudomanigfaltigkeit 90; der Flächen 145; ihre geometrische Bedeutung bei Linsenräumen 213; — von Knotenüberlagerungen 282; — einer abstrakten Gruppe 309; — der Oktaedergruppe 310; — mod  $m$  (15).

Torus (= Ringfläche) 3.

Torusknoten 179; Verschiedenheit von — (31).

Transformation von Gruppenelementen 155.

Transformation, elementare einer Basis aller  $k$ -Ketten 73; — von Matrizen 74, 307; — von Polygonsystemen 134.  
 Transformationen, ganzzahlige unimodulare 74, 305.  
 Transformation, kontragrediente und kogradienten 249.  
 Transformationsdeterminante einer linearen Abbildung 40, 100.  
 transitive Darstellung einer Gruppe 199.  
 Translationengruppe der euklidischen Ebene 31.  
 Transponieren einer Matrix 244.  
 transversale 1-Zellen von  $\mathbb{M}^{n-1}$  274.  
 triangulierbar (= simpizial zerlegbar) 4.  
 triviale Relationen 167, 294.

## U

Überdeckungszahl eines Punktes durch eine Zelle 243.  
 Überlagerungskomplexe VIII. Kap.  
 Überlagerung, universelle 194; reguläre 195; zweiblättrige 195; endlichblättrige 198; — des Kreisringes 181, 182; — der Ringfläche 182, 194, 195; — der Doppelringfläche 183, 195; — verzweigte der 3-Sphäre 221; — und Untergruppe der Fundamentalgruppe § 55; des Außenraumes eines Knotens 281; insbesondere der Kleeblattschlinge 201.  
 Überlagerungskomplex, unverzweigter § 53; Gleichheit von — 182.  
 Überlagerungsweg 184.  
 Umformungen, elementare einer Matrix 307.

Umgebung  $U(P|\mathfrak{M})$  21; ihre Invarianz bei topologischer Abbildung 26; simpliziale — 120; im Zahlenraume 21; auf Kurven, Flächen usw. 22; punktfremde im Zahlenraume 28; — Umgebung 22; — in einer Teilmenge eines Zahlenraumes 28; — eines Simplexpunktes 37; — in einem Komplex 42 ( $k_4$ ); — im Geradenbündel 35; ausgezeichnete 181.

Umgebungsaxiome A, B 21; Hausdorffsche (8).  
 Umgebungskomplex 120.  
 Umgebungskugel 22.  
 Umgebungsraum 20, § 5.  
 Umgebungswürfel 21.  
 Umkehrung der Orientierung bei einer topol. Abbildung 129.  
 Umlaufsinn eines Dreiecks 41; eines Polygons 133, 6.  
 unabhängig, homolog unabhängige

$k$ -Ketten 64; linear unabhängige  $k$ -Ketten 66; — Gruppenrelationen 294.  
 Unbegrenztheitsbedingung eines Überlagerungskomplexes 182.  
 uneigentliche Gerade 9.  
 unendliche Flächen 13, (\*).  
 unendliche Punktmenge eines Zahlenraumes 29.  
 unendlicher Komplex 46; seine Homologiegruppen 66; seine topologische Invarianz 47; offene Teilmenge des Zahlenraumes ist ein — 57; Zahlenebene (26).  
 Unendlichkeitsbedingung für Raumformen (38).  
 unfaserbare Räume (38).  
 unmittelbar inzidente Sterne 229.  
 universelle Überlagerung § 56.  
 Unterteilungen eines Polygonsystems 134; eines Flächenkomplexes 164.  
 unverzweigter Überlagerungskomplex § 53.  
 Unverzweigtheitsbedingung einer Pseudomanigfaltigkeit 88; eines Überlagerungskomplexes 181.  
 Urbild eines topologischen Simplexes 41; eines singulären Simplexes 93; eines Weges 149.

## V

Variablenreihen, kontragrediente 249.  
 Veblensche Erweiterung des Poincaréschen Dualitätssatzes 252.  
 Vektor, ganzzahlig 59; — mod 2 82.  
 Vektorfeld, stetiges (50); auf der Kugelfläche 292.  
 Verk = Zeichen für Verbindungskette 255.  
 Verbindbarkeitsbedingung einer Pseudomanigfaltigkeit 88.  
 Verbindungsformeln in einem Prisma 102; in einem singulären Prisma 104; — mit der Normalunterteilung 106; mit der Approximation 109; — bei Deformationen 115.  
 Verbindungskette mit der Normalunterteilung 105; mit der Approximation 109; bei zellenmäßiger Approximation 255.  
 verbundene Paare singulärer Ketten 259.  
 Verdoppelung eines berandeten reinen Komplexes 129; einer Fläche mit  $r$  Löchern 144 Aufg.  
 Vereinigungsmenge  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  22.  
 Verschlingungszahlen 277, (42), (47), (48).

Vielfachheit eines Simplexes in einer Kette 58; — einer Überlagerung (= Blätterzahl) 186.  
 vierdimensionaler Raum 180, (1), (3).  
 Vollkugel des Zahlenraumes 50; Identifizieren aller Randpunkte einer — 56; als Vollpolyeder 206; als berandete Mannigfaltigkeit 222; Fixpunkte einer Selbstabbildung der — 290; ausgebohrte — 291; s. auch Simplex.  
 Vollpolyeder 206.  
 Vollring (= topologisches Produkt aus Kreisscheibe und Kreislinie) 57; Fundamentalgruppe des — 168; — und Linsenräume 216; als berandete Mannigfaltigkeit 222; ausgebohrter — 280; gefaselter (38).

## W

Wandseiten eines Prismas 100.  
 Wechselsequenz der Bettischen Zahlen 87.  
 Weg 149; Kanten- und stetiger — 158; nullhomotoper — 152; nullhomologer 173; Einteilung der — in Klassen 176, (29); Gleichheit von — (24).  
 Wegegruppe 153; = Fundamentalgruppe s. d.  
 Wegeklassen  $\{w\}$  153.  
 Wert, algebraischer einer 0-Kette 65.  
 Wort aus Gruppenelementen 293; leeres — = Einselement 293.  
 Wortproblem der Gruppentheorie 295.  
 Würfelfläche 131; ihre Eulersche Charakteristik 135; als dualer Sternkomplex des Oktaeders 233.  
 Würfel und topologisches Produkt dreier Kreise 211.

## Z

Zahlengerade, einfach zusammenhängend 157.  
 Zahlenebene, der punktierten Kugelfläche homöomorph 27; dem Kreisflächen homöomorph 28; — ist ein Komplex 43; — ist einfach zusammenhängend 157, (26).

## Berichtigung.

S. 57 Aufgabe 7: Statt „Teilmenge“ lies „offene Teilmenge“.

Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$  21; Punktmengen im — 28; Orientierung des — 100; Prismen im — 100; Homologiegruppen in einem Punkte eines — 125; Knoten im vierdimensionalen — (2); Homogenität des — (8).

Zelle,  $k$ -dimensionale 233; orientierte 234; — mod 2 oder nichtorientierte 236.

Zellenkette 234; — mod 2 236.

Zellenmäßige Approximation § 72; — für Zellenketten mod 2 257.

Zellenteilkomplex 254.

Zellteilung einer Mannigfaltigkeit 241.

Zerlegung, simpliziale eines Komplexes 42; eines Prismas 101.

Zerreibung, Deformation mit — (29).

Zuordnung der Seiten nach der ersten (zweiten) Art in einem Polygone 8; in einem Polyeder 212.

zusammengefaltete Strecke als singuläres 1-Simplex 94.

zusammengesetzter Komplex, Fundamentalgruppe eines — § 52; Homologiegruppen (30).

zusammenhängender Komplex 47.

Zusammenhangsbasis 84; der Flächen 147; duale — 253.

Zusammenhangsbedingung eines Polygonsystems 130.

Zusammenhangsgruppe  $\check{S}^k$  83, (17).

Zusammenhangszahl  $q^k$  der Dimension  $k$  84; der projektiven Ebene 86; —  $n$ -te einer Pseudomanigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$  88; topologische Invarianz der — 112; — der Flächen 147; geometrische Bedeutung der — 147.

zweiblättrige Überlagerungen 195.

zweiblättrige orientierbare Überlagerung 272.

zweiseitig 8, § 76.

zweiufiger Rückkehrsnitt 148.

Zwischengruppe = Normalisator s. d.

Zykel (= geschlossene Kette) 60.

zyklische Gruppe 295.

zyklische Überlagerung eines Knotens im Großen 203, 281; — im Kleinen 202.