Eduardo Garcia-Herreros Mantilla

Semitriviale Erweiterungen und generalisierte Matrizenringe

Verlag Reinhard Fischer München

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Garcia-Herretos Mantilla, Eduardo

Semitriviale Erweiterungen und generalisierte
Matrizenringe/
Eduardo Garcia-Herreros Mantilla. -München: Fischer 1986
(Algebra-Berichte Nr. 54)
ISBN 3-88927-026-3
NE: GT
27

ISBN 3-88927-026-3

Druck und Bindung: Novotny, Söcking
Printed in West Germany 1986

INHALT

EINLEITUNG

Eine triviale Erweiterung $R \ltimes M$ eines Ringes R durch einen R-Bimodul M ist das kartesische Produkt von R und M mit komponentenweiser Addition und der Multiplikation $(r,m)(r',m') = (rr',rm'+mr')$. Die Konstruktion von trivialen Erweiterungen von Ringen durch Bimoduln spielt in verschiedenen Gebieten der Algebra eine wichtige Rolle (siehe Fossum, Griffith, Reiten [6]). Sie stellt auch eine reiche Quelle an Gegenbeispielen. Die trivialen Erweiterungen enthalten auch die Klasse der Dreiecksmatrizenringe der Form $\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & S \end{pmatrix}$ für Ringe R, S und einen Bimodul ${}_SM_R$.

Zentrales Thema dieser Arbeit ist die Untersuchung von semitrivialen Erweiterungen und im Spezialfall von generalisierten Matrizenringen. Sie stellen eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Konstruktionen dar. Solche Ringe sind zunächst von I. Reiten [35] erwähnt, und von I. Palmer [33], neulich auch von K. Sakano [37], untersucht worden.

Eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ von R durch einen R-Bimodul bzgl. eines Bimodulhomomorphismus $\phi\colon M\otimes_R M \to R$ ist das kartesische Produkt von R und M mit der komponentenweisen Addition und ϕ derart, daß die Multiplikation $(r,m)(r',m') = (rr'+\phi(m\otimes m'),rm'+mr')$ assoziativ ist. $R\times_\phi M$ hat ein Ideal $Bi(\phi)\oplus M$. Weiter gibt es einen Ringhomomorphismus $R \to R\times_\phi M$ und eine Augmentation $R\times_\phi M \to R/Bi(\phi)$. Es werden hier im wesentlichen Beziehungen zwischen den Objekten R, M und $R\times_\phi M$, sowie zwischen Mod-R und Mod-$R\times_\phi M$ untersucht. Insbesondere werden projektive und injektive Moduln sowie homologische Eigenschaften über Mod-$R\times_\phi M$ in Ausdrücken über Mod-R charakterisiert sowie weitere Ringwechseleigenschaften untersucht.

Solche Untersuchungen gründen auf der Betrachtung eines Moduls A über $R\times_\phi M$ als einem R-Modul zusammen mit einer Abbildung $f\colon A\otimes_R M \to A$ derart, daß gilt $f(f\otimes 1) = 1\otimes\phi$ $(A\otimes_R R = A)$. Es ist also naheliegend diese Konstruktion bei Betrachtung analoger Objekte für eine Kategorie C zusammen mit einem Endofunktor $F\colon C \to C$ und einem funktoriellen Homomorphismus

ϕ: $F^2 \to 1_C$ zu verallgemeinern. Kategorien dieser Art verallgemeinern die in [6] betrachteten trivialen Erweiterungen von abelschen Kategorien.

Ein Spezialfall von semitrivialen Erweiterungen sind die im 6. Kapitel eingeführten generalisierten Matrizenringe [36] $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ für Ringe R, S und Bimoduln ${}_SM_R$, ${}_RN_S$. Diese Konstruktion wird in der Literatur meist als Morita-Kontext bezeichnet, ist jedoch selten als Ring untersucht worden. Die Existenz von Morita-Kontexten ist eng verknüpft mit der Existenz von Äquivalenzen für Moduln über R und S. Diese Äquivalenzen können in Mod-Λ als 'innere' Eigenschaften interpretiert werden. Mod-R und Mod-S können nämlich in verschiedener Weise als Unterkategorien von Mod-Λ aufgefaßt werden. So sind in vielen Fällen zwei Unterkategorien $C \subset$ Mod-R und $D \subset$ Mod-S äquivalent, wenn sie in Mod-Λ gleich sind. Daraus ergeben sich eine Reihe bekannter Aussagen über Korrespondenzen und Äquivalenzen von Unterkategorien, insbesondere solche von B. Müller [28], T. Kato, K. Ohtake [21], D.R. Turnidge [42], und R.S. Cunningham, E.A. Rutter, D.R. Turnidge [4]. Besondere Anwendung findet dies für die Untersuchung von endlich erzeugten projektiven Moduln und Generatoren und deren Endomorphismenringe, sowie für solche Ringe, die eine Matrixdarstellung besitzen, z.B. semiperfekte Ringe. Für solche Ringe R lassen sich die Ergebnisse über semitriviale Erweiterungen und generalisierte Matrizenringe auf die Untersuchung der Beziehungen zwischen R und den Diagonalkomponenten leicht übertragen.

Im ersten Kapitel führen wir zunächst semitriviale Ringerweiterungen ein (diese sind graduierte Ringe zweiter Ordnung) und stellen allgemeine Hilfsmittel zusammen. Wichtige Representanten von Beispielen für semitriviale Erweiterungen sind Ringe der Form $R[X,\sigma]/(X^2-a)$ für einen schiefen Polynomring $R[X,\sigma]$ und ein Element $a \in R$ mit $\sigma(a) = a$ und $ra = a\sigma^2(r)$, $r \in R$, sowie Ringe der Form $\mathrm{End}_R(R\oplus M)$ für einen R-Rechtsmodul M. Diese letzten sind eine semitriviale Erweiterung von $R\oplus\mathrm{End}_R(M)$. Weitere Beispiele hierzu sind Ringe mit einer Zerlegung $1 = e_1+\ldots+e_n$ in orthogonale Idempotente. Im allgemeinen bedeutet die Betrachtung von $n = 2$ keine wesentliche Einschränkung (vgl. auch 6.5). 1.2 8) gibt weiter eine Verallgemeinerung von semitrivialen Erweiterungen in der Klasse der graduierten Ringe n-ter Ordnung. Diese Verallgemeinerung enthält als Spezialfall den von Miyashita [27] behandelten Tensorring. Wir beschreiben wie oben erwähnt die Moduln über $R\times_\phi M$ und verallgemeinern diese Konstruktion auf semitriviale Erweiterungen von Kategorien. In der obigen Bezeichnung ist diese für eine Kategorie C, einen Endofunktor F und einen funktoriellen Homomorphismus ϕ die Klasse $C\times_\phi F$ der Objekten (A,f), $A \in C$, $f\colon FA \to A$ mit $fFf = \phi(A)$. Ähnlich wie bei trivialen Erweiterungen (Fossum, Griffith, Reiten [6]) gilt, daß $C\times_\phi F$ abelsch ist, falls C abelsch und F rechtsexakt ist. Ist $G\times_\psi C$ für einen Endofunktor $G\colon C \to C$ und einen funktoriellen Homomorphismus $\psi\colon 1_C \to G^2$ die zu $C\times_\phi F$ duale Konstruktion, so sind beide isomorph, falls (F,G) ein Adjunktionspaar ist. Diese doppelte Beschreibung der Objekte in einer semitrivialen Erweiterung ist sehr hilfreich, da zueinander duale Eigenschaften sich jeweils in $C\times_\phi F$ bzw. in $G\times_\psi C$ leichter behandeln lassen. Dies ist grundlegend für die Beschreibung projektiver und injektiver Eigenschaften von Moduln im 3. Kapitel. Abschließend behandeln wir einige Beziehungen zwischen Rechtsidealen von $R\times_\phi M$ und von R sowie Untermoduln von M. Weiter fassen wir die Rechtsideale als subdirekte Summen in $R\oplus M$ (in Mod-R) auf und untersuchen die zugehörigen Isomorphismen. Diese Überlegungen lassen sich auf eine wichtige Klasse von $R\times_\phi M$-Moduln der Form $(A\oplus B, \begin{pmatrix} 0 & f \\ g & 0 \end{pmatrix})$ übertragen.

Im 2. Kapitel behandeln wir Ringwechseleigenschaften, insbesondere die durch $R \to R\times_\phi M$ induzierten Funktoren (Adjuktionstripel) T, P, H und die zugehörigen natürlichen Transformationen. Ist A_R ein Rechtsmodul, so sind $\mathrm{End}_{R\times_\phi M}(T(A))$ und $\mathrm{End}_{R\times_\phi M}(H(A))$ wieder semitriviale Erweiterungen von $\mathrm{End}_R(A)$. Im dritten Abschnitt dieses Kapitel behandeln wir die durch die Augmentation $R\times_\phi M \to R/I$, $I = \mathrm{Bi}(\phi) \subset R$ induzierten Funktoren und beschreiben spezielle Klassen von Moduln über $R\times_\phi M$. Mit 2.8 ist für einen $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) f bijektiv (surjektiv) genau dann, wenn die natürliche Abbildung $(A,f)\otimes(I\oplus M) \to (A,f)$ bijektiv (surjektiv) ist, in Zeichen $(A,f) \in \mathbb{C}$ ($(A,f) \in \mathbb{T}$). Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die natürliche Abbildung $A\otimes_R I \to A$ bijektiv (surjektiv) ist, in Zeichen $A \in \mathbb{C}_I$ ($A \in \mathbb{T}_I$). Wir stellen fest, daß $\mathbb{C}$ ($\mathbb{T}$) eine semitriviale Erweiterung von $\mathbb{C}_I$ ($\mathbb{T}_I$) ist. Die Klasse der Objekte in $\mathbb{T}$ spielt eine besondere Rolle, da man hier die projektiven Moduln weitgehend in Ausdrücken über R charakterisieren kann. Es gilt $\mathbb{C} =$ Mod-$R\times_\phi M$ genau dann, wenn ϕ surjektiv ist. Auch duale Aussagen werden gegeben. Im letzten Abschnitt des Kapitels beschreiben wir allgemeiner die entsprechenden Funktoren für semitriviale Erweiterungen von Kategorien. Weiter spezialisieren wir diese

Beschreibungen auf semitriviale Erweiterungen von vollständigen Verbänden. Wir stellen fest, daß der Untermodulverband $V(A,f)$ von einem $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul (A,f) gerade eine semitriviale Erweiterung vom Untermodulverband $V_R(A)$ von A_R ist.

Im 3. Kapitel behandeln wir die Frage nach der Charakterisierung von projektiven und injektiven Moduln über $R\times_\Phi M$ in Ausdrücken über R. Wesentlich in der Behandlung dieser Frage ist die Unterteilung in zwei Fälle, nämlich den Fall, daß $\mathrm{Bi}\Phi$ 'klein genug' ist in R, und den Fall, daß $\mathrm{Bi}\Phi = R$ ist. Wir untersuchen zunächst Verhaltenseigenschaften bei den Ringwechselfunktoren. Wir stellen insbesondere fest, daß T ein perfekter Projektor und H ein perfekter Injektor ist, d.h. T erhält und reflektiert projektive Hüllen und H injektive Hüllen. Dies läßt sich in 3.8 und 3.2 anwenden für die Charakterisierung von projektiven und injektiven Moduln in gewissen Klassen von Objekten. Dies findet weitere Anwendung im 6. Kapitel für die Untersuchung dieser Eigenschaften für Moduln über generalisierten Matrizenringen, insbesondere über Ringen mit einer Matrixdarstellung. Auch lassen sich diese Sätze für die Charakterisierung von Injektivität und Kogeneratoreigenschaften von $R\times_\Phi M$ anwenden. Die obere Unterteilung des Problems verallgemeinernd untersuchen wir solche Objekte (A,f) in Mod-$R\times_\Phi M$, für die $\mathrm{Bi}(f) \subset A_R$ klein ist, in Zeichen $(A,f) \in C^\circ$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $AI \subset A$ $(I = \mathrm{Bi}\Phi)$ klein ist, in Zeichen $A \in C_I^\circ$. Hier ist die volle Unterkategorie $C^\circ \subset$ Mod-$R\times_\Phi M$ eine semitriviale Erweiterung von C_I°. Es gilt $C^\circ =$ Mod-$R\times_\Phi M$ genau dann, wenn I links-t-nilpotent ist. Wir können dann mit 3.18 und den nachfolgenden Sätzen teilweise (vollständig, falls jeder projektiver R/I-Rechtsmodul eine projektive Hülle in Mod-R besitzt) die projektiven Moduln in C° und in dualer Weise alle injektiven Moduln in den entsprechenden Klassen als Bilder von den Funtoren T und H von projektiven und injektiven Moduln in Mod-R charakterisieren. Dies verallgemeinert solche in der Literatur bekannte Charakterisierungen für den Fall von trivialen Erweiterungen, und von semitrivialen Erweiterungen [33] mit $\mathrm{Bi}\Phi$ nilpotent. Auch verallgemeinert dies die Injektivitätsaussagen von Sakano [37]. Anschließend behandeln wir analog flache Moduln (A,f) über $R\times_\Phi M$. Diese werden in 3.30 und 3.32 für verschiedene Fälle charakterisiert. Im letzten Abschnitt des Kapitels geben wir in Anlehnung an [33] einige Charakterisierungen von rechts hereditären semitrivialen Erweiterungen.

Im 4. Kapitel behandeln wir Fragen über die homologische und die relative homologische (im Sinne der relativen homologischen Algebra) Dimension. Wir geben hierzu zunächst die relativen Standard-Auflösungen und beschreiben die relativen Funktoren Tor und Ext mittels Komplexen in Mod-R. 4.7 enthält Aussagen für den Fall, daß ${}_R M$ flach bzw. M_R projektiv ist, sowie eine Aussage über die finitistische Dimension von $R\times_\Phi M$. Dies verallgemeinert einen Satz von Palmer [33] und Theorem 1.3.2 von Reiten [35]. Wir geben einige hinreichende Bedingungen dafür, daß die homologischen und relativen Ext- und Tor-Gruppen übereinstimmen.

Im 5. Kapitel setzen wir die Untersuchung von homologischen Eigenschaften fort. Wir betrachten dabei insbesondere die oben beschriebenen Klassen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{T}$ von Moduln (A,f), für die f bijektiv bzw. surjektiv ist. Ist Φ surjektiv, dann ist $\mathbb{C} =$ Mod-$R\times_\Phi M$. In diesem Fall nennen wir $R\times_\Phi M$ eine F(Frobenius)-semitriviale Erweiterung. Ist dies der Fall, dann ist M_R ein Progenerator und $R\times_\Phi M/R$ eine Frobenius-Erweiterung im Sinne von Kasch [18]. Wir haben also die bekannten Aussagen über die homologischen Eigenschaften bei Frobenius-Erweiterungen zur Verfügung. Ist zusätzlich $R\times_\Phi M/R$ eine halbeinfache Erweiterung im Sinne von Hirata, Sugano [14], dann lassen sich bekanntlich projektive und injektive Objekte vollständig über R charakterisieren. Bei der Betrachtung von beliebigen semitrivialen Erweiterungen ist die Frage naheliegend, wie sich dieses Verhalten auf Objekte in den Klassen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{T}$ (und in den dualen Klassen) übertragen läßt. Wir stellen fest, daß viele Aussagen für die homologischen Eigenschaften von Frobenius-Erweiterungen auch in $\mathbb{C}$ und in der dualen Klasse $\mathbb{D}$ noch gelten. Im ersten Teil des Kapitels behandeln wir einige solcher Eigenschaften. 5.8 gibt hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Modul (A,f) relativ projektiv ist. Dies erläutert, warum gerade diese Bedingungen eine entscheidende Rolle in den Aussagen in [33] für den Fall Φ surjektiv spielen. Ähnlich wie bei Frobenius-Erweiterungen lassen sich Spurabbildungen definieren. Ist Φ surjektiv, so stimmen diese Abbildungen mit der bekannten Definition der Spur bei Frobenius-Erweiterungen überein. 5.12 gibt dann für Moduln in $\mathbb{C}$ die Maschke-Ikeda-Kasch-Charakterisierung von relativ projektiven Moduln. Weiter gilt insbesondere rh-dim $R\times_\Phi M =$ rh-dim R, falls Φ surjektiv ist und $R\times_\Phi M/R$ eine halbeinfache Erweiterung ist. In dem Folgenden antworten wir auf die Frage, wann eine F-semitriviale Erweiterung eine separable Erweiterung im Sinne von

Hirata, Sugano [14] ist. In allgemeinen ist die Bedingung ϕ surjektiv nicht notwendig dafür, daß $R\times_\phi M/R$ eine Frobenius-Erweiterung ist. Dies wurde von Kitamura [22] gezeigt. Dort wurden solche trivialen Erweiterungen charakterisiert, die Frobenius-Erweiterung sind. Ist aber $R\times_\phi M/R$ eine halbeinfache Erweiterung, so kann $R\times_\phi M$ nicht trivial sein. Es gilt nämlich $M^3 = M$. Abschließend geben wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ϕ surjektiv ist, falls R lokal ist. Es gilt in diesem Fall $R\times_\phi M \cong R[X,\sigma]/(X^2-a)$ für geeignetes $a \in R$ und σ. Dies verallgemeinert Aussagen von Sugano [40].

Im 6. Kapitel konzentrieren wir uns auf generalisierte Matrizenringe $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S\end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ (Roos [36]). Dabei fassen wir diese Konstruktion als einen Spezialfall von semitrivialen Erweiterungen des Diagonalrings $R\times S$ auf. Wir können dann die Beschreibung von Mod-Λ auf jene im ersten Kapitel zurückführen. So sind Moduln über Λ Paare $(A,B) \in$ Mod-R×Mod-S zusammen mit geeigneten Abbildungen. Hierdurch lassen sich viele Eigenschaften von Morita-Kontexten als innere Eigenschaften über Λ interpretieren. So lassen sich Äquivalenzen zwischen Unterkategorien von Mod-R und Mod-S durch die Existenz von Unterkategorien in Mod-Λ beschreiben. Entsprechende Untersuchungen von Ringen mit einer Matrixdarstellung (Harada [13]), d.h. solche mit $R_1\times\ldots\times R_n$ in der Diagonale für Ringe R_i, lassen sich induktiv bzw. bei Betrachtung einzelner Idempotente auf den oberen Fall zurückführen. Wir können in diesem Fall die Moduln als n-Tupel $(A_1,\ldots,A_n)$ mit $A_i \in$ Mod-R_i auffassen. Ist im oberen Fall (A,B) ein Λ-Rechtsmodul, so bestehen zwischen A und B enge Beziehungen, die durch die Eigenschaften der zugehörigen Abbildungen charakterisiert werden. Wir geben als Beispiel einige Korrespondenzaussagen zwischen Untermodulnverbänden. Insbesondere sind Paare der Form $(A, A\otimes_R N)$, $(A, \mathrm{Hom}_R(M,A))$ Λ-Rechtsmoduln. So enthalten diese Korrespondenzen viele bekannte Korrespondenzaussagen (z.B Sandomierski [38], Zimmermann [43], Miller [28], Faith [5]). Im Prinzip lassen sich durch leichte Verallgemeinerung (z.B Zulassung von Ringen ohne 1) die Korrespondenzaussagen von Nobusawa [29,30] über Gamma-Ringe erhalten. Im folgenden Abschnitt spezialisieren wir die Ringwechselfunktoren vo 2. Kapitel auf generalisierte Matrizenringe. So zerfallen T und H bei Einschränkung auf Mod-R und Mod-S (analog auch bei Matrixdarstellungen über $R_1\times\ldots\times R_n$) in voll treue auf Objekte injektive Funktoren. Dies wenden wir in 6.14 an, um zu zeigen, daß Mod-R und Mod-S, durch die

Einschränkung von H, zu Quotientenkategorien von Mod-Λ isomorph sind. Eine duale Aussage für T ist möglich. Wir zeigen in 6.15, daß gerade die zu diesen strikten Quotientenkategorien zugeörigen hereditären Torsionstheorien von zueinander komaximalen Idealen $I, J \subset \Lambda$ (d.h. von Λ/I und Λ/J) in Mod-Λ erzeugt werden (im Sinne von Stenström [41]). Wir stellen, wie oben erwähnt, die Existenz von Äquivalenzen zwischen Unterkategorien von Mod-R und Mod-S fest. Diese Äquivalenzen sind natürlich gegeben durch die Tatsache, daß sie, betrachtet als Unterkategorien von Mod-Λ, gleich sind. Zum Beispiel enthalten diese Äquivalenzen unter anderem die von Müller [28] und Kato, Ohtake [21] beschriebenen, sowie die von Kashu [20] beschriebenen Korrespondenzen zwischen hereditären Torsionstheorien. Weitere Aussagen sind implizit vorhanden. In 6.19 geben wir einen Ansatz für eine allgemeinere Betrachtung dieser Zusammenhänge bei Anwendung dieser Konstruktion auf beliebige Kategorien. Wir beschränken uns dabei auf Modulkategorien. Eine besondere Anwendung finden die obigen Ergebnisse für den Fall, daß σ surjektiv ist. Dann ist Mod-R $\cong$ Mod-Λ. Weiter verallgemeinern wir einige Ergebnisse aus [23]. In 6.25 geben wir eine Existenzaussage für generalisierte Matrizenringe im Zusammenhang mit Adjunktionstripeln. Im allgemeinen erweist sich die Untersuchung von generalisierten Matrizenringen als ein effektives Werkzeug zur Verallgemeinerung von Aussagen über Endomorphismenringe von endlich erzeugten projektiven Moduln und Generatoren. Im folgenden Abschnitt spezialisieren und ergänzen wir einige Ergebnisse über projektive und injektive Moduln über semitrivialen Erweiterungen auf generalisierte Matrizenringe. Als Anwendungsbeispiel geben wir einige Aussagen von [23] ohne die Bedingung $R/Ra(R)$ halbeinfach. Ist Λ semiperfekt, dann lassen sich alle projektiven Moduln in Ausdrücken über R und S beschreiben. Zum Schluß des Kapitels betrachten wir eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ als einen Unterring von einem generalisierten Matrizenring Λ. Wir stellen fest, daß $\Lambda/R\times_\phi M$ eine Galois-Erweiterung zweiter Ordnung ist. Wir können in diesem Zusammenhang auf eine Frage von Palmer [33, Problem 4] antworten. Dies erläutert, warum die Invertierbarkeit von $2 \in R$ bzw. die 2-Torsionsfreiheit von Moduln eine besondere Rolle bei der Charakterisierung von homologischen Eigenschaften spielt.

Im 7. Kapitel charakterisieren wir einige Ring- und Moduleigenschaften von semitrivialen Erweiterungen und generalisierten Matrizenringen. Insbesondere behandeln wir Kettenbedingungen und halbeinfache Moduln und Ringe.

Wir charakterisieren in 7.12 injektive und projektive Hüllen von einfachen Moduln über Λ (Λ beliebig), sowie minimale (injektive) Kogeneratoren in Mod-L. Dies verallgemeinert eine Aussage in [23] (dort unter der Voraussetzung, daß Λ semiperfekt ist). Dies findet Anwendung bei der Charakterisierung von injektiven Moduln, falls Λ rechts artinsch ist. Weiter werden einige Aussagen über einfache Ringe zusammengestellt.

Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Beziehung zwischen (Jacobson) Radikal und Sockel von Moduln über semitrivialen Erweiterungen $R\times_{\phi}M$ und R. Wir stellen unter anderem fest, $Ra(A_R) \subset Ra(A,f)$, $So(A,f) \subset So(A_R)$ für einen $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul (A,f) und $Ra(R\times_{\phi}M)\cap R = Ra(R)$. Nähere Aussagen sind möglich, falls $Bi\phi \subset Ra(A_R)$, bzw. falls duale Eigenschaften gegeben sind. Dies verallgemeinert Aussagen über das Radikal von generalisierten Matrizenringen von Sands [39]. Ist $Bi\phi \subset Ra(R)$, so gilt insbesondere $Ra(R\times_{\phi}M) = Ra(R)\oplus M$. Duale Aussagen gelten für den Sockel z.B., falls $Bi\phi$ rechts-t-nilpotent ist. Nähere Aussagen sind auch möglich, falls $2 \in R$ invertierbar ist, bzw. falls jeder einfache R-Rechtsmodul 2-torsionsfrei ist, und für den Fall von generalisierten Matrizenringen. Im Fall σ surjektiv erhalten wir implizit eine Reihe von bekannten Eigenschaften bei Anwendung auf Moduln der Form $(A,A\otimes_R N)$ bzw. $(A,Hom_R(M,A))$. Zum Schluß behandeln wir weitere Ringeigenschaften in diesem Zusammenhang, und geben eine Aussage über das Primradikal. Es gilt z.B. für semitriviale Erweiterungen $P(R\times_{\phi}M)\cap R = P(R)$.

Nachtrag:

Unabhängig von dieser Arbeit wurden neulich einige Ergebnisse von Sakano [44] über Radikal und Sockel von semitrivialen Erweiterungen veröffentlicht. Diese sind im wesentlichen als Spezialfälle in den Ergebnissen des letzten Kapitels dieser Arbeit enthalten. 8.14 berichtigt Theorem 2.2 von [44].

*

Herrn Prof. Dr. Kasch möchte ich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und sein in mich gesetztes Vertrauen sowie dem Institut für Begabtenförderung der Konrad-Adenauer-Stiftung für die Förderung während der Durchführung dieser Arbeit.

In dieser Arbeit seien alle Ringe assoziativ mit einem Einselement 1. R sei ein solcher Ring. Der Ausdruck 'Ideal' bedeutet ein zweiseitiges Ideal, wenn nicht ausdrücklich auf die Einseitigkeit hingewiesen wird. Alle Moduln sind unitär. Die Kategorie der R-Rechtsmoduln wird mit Mod-R bezeichnet. Analog bezeichnet R-Mod die Kategorie der R-Linksmoduln. Modulhomomorphismen werden auf der, der Ringoperation entgegengesetzten Seite geschrieben. Für die Komposition von Rechtshomomorphismen $f: A \to B$, $g: B \to C$ schreiben wir dann gf und analog fg für Linkshomomorphismen. Alle anderen Abbildungen werden links geschrieben.

Sind A, B, C, D Objekte in einer Kategorie mit Produkten und Koprodukten, so wird ein Morphismus $h: A\oplus B \to C\times D$ geschrieben in der Matrixdarstellung

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: A\oplus B \to C\times D$$

mit den Morphismen $a: A \to C$, $b: B \to C$, $c: A \to D$, $d: B \to D$. Abbildungen $h: A\oplus B \to C$ bzw. $h: A \to C\times D$ schreiben wir in der Form (a,b) bzw. (a,c). Für die von a und d induzierten Abbildungen $A\oplus B \to C\oplus D$ und $A\times B \to C\times D$ schreiben wir $a\oplus d$ bzw. $a\times d$. Modulklassen in Mod-R werden im allgemeinen als volle Unterkategorien in Mod-R, abgeschlossen bzgl. Isomorphismen, betrachtet. Ist $F: K \to L$ ein Funktor, so bezeichne Bi(F) die Klasse $Bi(F) = \{A \in L \mid A \cong F(B) \text{ für ein } B \in K\}$.

1 SEMITRIVIALE RINGERWEITERUNGEN

In diesem Abschnitt führen wir semitriviale Erweiterungen $R\times_\phi M$ eines Ringes R durch einen Bimodul M im Sinne von Palmer [33] ein und charakterisieren die Moduln über $R\times_\phi M$ mittels R-Moduln und R-Homomorphismen. Wie bei trivialen Erweiterungen (Fossum, Reiten, Griffith [6]) lassen sich dann allgemeiner semitriviale Erweiterungen von abelschen Kategorien definieren. Wir fassen dann die Rechtsideale und eine gewisse Klasse von Moduln in Mod-$R\times_\phi M$ als subdirekte Summen über R auf und untersuchen die induzierten Isomorphismen [7].

DEFINITION

1.1 Definition Sei R ein Ring, M ein R-Bimodul, $\phi\colon M\otimes_R M\to R$ ein Bimodulhomomorphismus, so daß die additive abelsche Gruppe $R\oplus M$ mittels der Operation

$$(r,m)(r',m') = (rr'+\phi(m\otimes m'),rm'+mr')$$

zu einem Ring wird. Dies ist wegen der Assoziativität genau dann der Fall, wenn das Diagramm

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} M\otimes_R M\otimes_R M & \xrightarrow{\phi\otimes 1} & R\otimes_R M \\ {\scriptstyle 1\otimes\phi}\downarrow & & \downarrow\cong \\ M\otimes_R R & \xrightarrow{\cong} & M \end{array}$$

kommutiert. Ein solcher Ring heißt eine **semitriviale Erweiterung** von R durch M und wird hier mit $R\times_\phi M$ bezeichnet. Wir identifizieren $R\subset R\times_\phi M$, $M\subset R\times_\phi M$.

1.2 Beispiele und Bemerkungen

1) Jede **triviale Erweiterung** $R\ltimes M$ von einem Ring R durch einen R-Bimodul M ist mit $\phi = 0$ eine semitriviale Erweiterung. Insbesondere ist jeder Dreiecksmatrizenring durch den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & S \end{pmatrix} \cong (R\times S) \ltimes M$$

für Ringe R, S und einen S-R-Bimodul ${}_SM_R$ eine semitriviale Erweiterung. Triviale Erweiterungen und Dreiecksmatrizenringe sind in der Literatur ausführlich behandelt worden, siehe z.B. [35,32,31].

2) Sei R ein Ring, $\sigma: R \to R$ ein Automorphismus. Dann bezeichne $R[X,\sigma]$ den **schiefen Polynomring** über R bzgl. des Automorphismus σ, dessen Multiplikation gegeben ist durch $rX = X\sigma(r)$, $r \in R$. Gibt es ein Element $a \in R$ mit $\sigma(a) = a$ und $ra = a\sigma^2(r)$, dann gilt $R[X,\sigma](X^2-a) = (X^2-a)R[X,\sigma]$. Setze $x = X+(X^2-a) \in R[X,\sigma]/(X^2-a)$. Dann haben wir $R[X,\sigma]/(X^2-a) = R+xR$, $x^2 = a$, $rx = x\sigma(r)$ für alle $r \in R$. So gilt

$$R[X,\sigma]/(X^2-a) \cong R\times_\phi M$$

mit $M = xR$ und ϕ für die gewöhnliche Multiplikation. Außerdem ist x eine Einheit, falls a eine Einheit ist. In diese, Fall ist ϕ surjektiv. Ist $M = R$ und ϕ die gewöhnliche Multiplikation in R, dann gilt

$$R[X]/(X^2-1) \cong R\times_\phi M$$

3) Sei R ein Ring, $\sigma: R \to R$ ein Automorphismus mit $\sigma^2 = 1$, und $G = \langle\sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}(R)$ die von σ erzeugte Untergruppe. Weiter bezeichne $R*G$ den **schiefen Gruppenring**, d.h. den freien R-Modul mit Basis $\{u_g \mid g \in G\}$ und der Multiplikation $(u_gr)(u_hs) = u_{gh}h(r)s$ für $g,h \in G$, $r,s \in R$. Identifiziere $u_1 = 1 \in R*G$, $Ru_1 = R \subset R*G$. Dann ist $R\times_\phi M$ mit $M = u_\sigma R$ und $\phi: M\otimes_R M \to R$, $\phi(u_\sigma r\otimes u_\sigma s) = \sigma(r)s$ eine semitriviale Erweiterung und es gilt

$$R*G \cong R\times_\phi M \cong R[X,\sigma]/(X^2-1).$$

4) Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul, $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$, $S = \mathrm{End}(M_R)$. Dann sind auf die übliche Weise M ein S-R-Bimodul und M^* ein R-S-Bimodul. So bildet

$$\begin{pmatrix} R & M^* \\ M & S \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} r & f \\ m & g \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in R,\ m \in M,\ f \in M^*,\ g \in S\right\}$$

mittels der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} r & f \\ m & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & f' \\ m' & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr'+f(m') & rf'+fg' \\ mr'+g(m') & mf'+gg' \end{pmatrix}$$

mit $(mf')(n) = mf'(n)$ und den üblichen induzierten Operationen einen Ring, in Zeichen $\Lambda(M_R)$. Die Auswertungsabbildung $\rho: M^*\otimes_R M \to R$, $\rho(f\otimes m) = f(m)$ und die Abbildung $\sigma: M\otimes_R M^* \to S$, $\sigma(m\otimes f)(n) = mf(n)$ sind Bimodulhomomorphismen, und $M\times M^*$ ist ein $R\times S$-Bimodul. Dann ist $\Lambda(M_R)$ mit

$$\mathrm{End}_R(R\oplus M) \cong \begin{pmatrix} R & M^* \\ M & S \end{pmatrix} \cong (R\times S)\times_{\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}}(M\times M^*)$$

eine semitriviale Erweiterung. Allgemeiner ist jeder **generalisierte Matrizenring** (vgl 6.3) eine semitriviale Erweiterung.

5) Ist zum Beispiel R ein Ring, $1_R = \Sigma_{i=1}^n e_i$ eine Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente, dann setze $f_0 = 0$, $f_i = \Sigma_{j=1}^i e_j$, $i = 1,\dots,n$. Dann ist

$$R_{i+1} = (f_iRf_i\oplus e_{i+1}Re_{i+1}) \times_{\phi_{i+1}} (e_{i+1}Rf_i\oplus f_iRe_{i+1}) \qquad i = 1,\dots,n-1$$

eine semitriviale Erweiterung, wobei ϕ_{i+1} von der Multiplikation in R induziert wird. Insbesondere ist dann $R = R_n$. Bezeichne $S = \oplus_{i=1}^n e_iRe_i$ den **Diagonalring** von R in der gegebenen Zerlegung. Zweck dieser Betrachtungsweise ist die Untersuchung von Mod-R in Ausdrücken über Mod-S bzw. über e_iRe_i, $i = 1,\dots,n$. Da man die Idempotente beliebig zusammenfassen kann, bedeutet die Reduktion auf $n = 2$ für die allgemeine Untersuchung keine wesentliche Einschränkung (vgl. 6.5).

6) Sind $R\times_\phi M$ und $S\times_\psi N$ semitriviale Erweiterungen, $\alpha: R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $f: M \to N$ ein additiver Gruppenhomomorphismus derart, daß $f(smr) = \alpha(s)f(m)\alpha(r)$ (d.h. f ist R-R-Homorphismus) und $\alpha\phi(m\otimes n) = \psi(f(m)\otimes f(n))$ für alle $r,s \in R$ und $m,n \in M$, dann definiert das Paar (α,f) einen Ringhomomorphismus $R\times_\phi M \to S\times_\psi N$, $(r,m) \mapsto (\alpha(r),f(m))$. Jedes solches Paar nennen wir einen **semitrivialen Ringhomomorphismus**. Umgekehrt ist jeder Ringhomomorphismus $g: R\times_\phi M \to S\times_\psi N$ mit $g(R) \subset S$ und $g(M) \subset N$ ein semitrivialer Ringhomorphismus. Auf diese Weise bildet die Klasse der semitrivialen Erweiterungen eine Kategorie.

7) Ist $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung und N ein Untermodul von ${}_RM_R$, dann definiert $\psi = \phi(\iota\otimes\iota)$ mit der Inklusion $\iota: N \to M$ eine semitriviale Erweiterung $R\times_\psi N$. Die Inklusion $(1,\iota): R\times_\psi N \to R\times_\phi M$ ist ein semitrivialer Monomorphismus. Wir definieren nun den **Linksannullator** von M in M

$$l_M(M) = \{n \in M \mid \phi(n\otimes m) = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

und analog den **Rechtsannullator** $r_M(M)$. Gilt $\phi(n\otimes m) = 0$ für alle $n, m \in N$, z.B. ist $N \subset l_M(M)$ bzw. $N \subset r_M(M)$ ein Untermodul, dann ist $R\times_\phi N = R\ltimes N$ eine triviale Erweiterung. Ist $N \subset r_M(M)\cap l_M(M)$, dann induziert ϕ eine semitriviale Erweiterung $R\times_{\bar\phi}(M/N)$ und $(1,\nu)\colon R\times_\phi M \to R\times_{\bar\phi}(M/N)$ ist ein surjektiver semitrivialer Epimorphismus, wobei $\nu\colon M \to M/N$ der kanonische Epimorphismus ist.

8) Ähnlich wie bei trivialen Erweiterungen (vgl. Miyashita [27]) lassen sich semitriviale Erweiterungen folgendermaßen verallgemeinern. Sei R ein Ring und M ein R-Bimodul. Für jede natürliche Zahl $i \ge 1$ bezeichne $M^{\otimes i}$ den R-Bimodul $M\otimes_R\cdots\otimes_R M$ (i Faktoren). Setze $M^{\otimes 0} = R$. Weiter sei $\phi\colon M^{\otimes n} \to R$, $n \in \mathbb{N}$, ein R-R-Homomorphismus derart, daß für alle $i \le n$ die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
M^{\otimes n+i} \arrow[r, "\phi\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\phi"'] & R\otimes_R M^{\otimes i} \arrow[d, "\cong"] \\
M^{\otimes i}\otimes_R R \arrow[r, "\cong"] & M^{\otimes i}
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Setze

$$S = R \oplus M \oplus M\otimes_R M \oplus \dots \oplus M^{\otimes n-1}.$$

Dann ist S mit der naheliegenden Operation ein Ring. Für $n = 2$ gilt dann $S = R\times_\phi M$. Für $\phi = 0$ ist S der in [27] eingeführte Tensorring. Beispiele solcher Ringe sind wie in 2) Ringe der Form $R[X,\sigma]/(X^n-a)$ für einen Automorphismus $\sigma\colon R \to R$ und ein Element $a \in R$ mit $\sigma(a) = a$ und $ra = a\sigma^n(r)$ für alle $r \in R$. □

Ist S/R eine Ringerweiterung und A ein S-Rechtsmodul, so ist A ein R-Rechtsmodul durch die Inklusion $i\colon R \to S$. Dann ist die S-Modulstruktur eindeutig gegeben mit $as = \rho(a\otimes s)$ durch die R-Modulstruktur und einen R-Homomorphismus $\rho\colon A\otimes_R S \to A$ derart, daß die Diagramme

(2)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1\otimes i"] \arrow[dr, "1_A"'] & A\otimes_R S \arrow[d, "\rho"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\otimes_R S\otimes_R S \arrow[r, "1\otimes m"] \arrow[d, "\rho\otimes 1"'] & A\otimes_R S \arrow[d, "\rho"] \\
A\otimes_R S \arrow[r, "\rho"] & A
\end{tikzcd}$$

kommutieren, wobei m die Multiplikation in S bezeichnet. Die S-Homomorphismen sind dann genau die R-Homomorphismen $h\colon A \to A'$, für die das

Diagramm

(3)
$$\begin{tikzcd}
A\otimes_R S \arrow[r, "h\otimes 1"] \arrow[d, "\rho"'] & A'\otimes_R S \arrow[d, "\rho'"] \\
A \arrow[r, "h"] & A'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ist S/R eine **ausgezeichnete Ringerweiterung** (Kasch [18]), d.h. besitzt S als zweiseitiger R-Modul einen zu R isomorphen direkten Summanden M (identifiziere $S = R\oplus M$), dann ist wegen $A\otimes_R S \cong A\oplus A\otimes_R M$ und der Kommutativität des ersten Diagrammes in (2) $\rho = (1_A, f)$ mit einem R-Homomorphismus $f\colon A\otimes_R M \to A$, $f(a\otimes m) = a(0,m)$. Also gilt $a(r,m) = ar + f(a\otimes m)$ und f ist eindeutig bestimmt. Für A_S schreiben wir dann auch (A,f). Ist $S = R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, dann ist S/R insbesondere eine ausgezeichnete Ringerweiterung $S = R\oplus M$ mit $M^2 \subset R$. Umgekehrt definiert jede solche ausgezeichnete Erweiterung $R\oplus M$ mit $\phi\colon M\otimes_R M \to R$, $\phi(m\otimes n) = mn$, eine semitriviale Erweiterung (d.i. ein graduierter Ring vom Grad 2). Es gilt insbesondere $R\times_\phi M \cong (R\oplus M, \begin{pmatrix}0 & \phi\\ 1 & 0\end{pmatrix})$ als Modul, wobei 1 die Linksmultiplikation bezeichnet. Oft lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit auf ausgezeichnete Erweiterungen verallgemeinern.

Wir beschreiben dann die Rechtsmoduln über einer semitrivialen Erweiterung $R\times_\phi M$ mittels einer Kategorie $M(\phi)$ bestehend aus Paaren (A,f) und Morphismen $h\colon (A,f) \to (A',f')$, wobei A ein R-Rechtsmodul und $f\colon A\otimes_R M \to A$, $h\colon A \to A'$ R-Homorphismen sind, derart, daß die Diagramme

(4)
$$\begin{tikzcd}
A\otimes_R M\otimes_R M \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\phi"'] & A\otimes_R M \arrow[d, "f"] \\
A\otimes_R R \arrow[r, "\cong"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\otimes_R M \arrow[r, "h\otimes 1"] \arrow[d, "f"'] & A'\otimes_R M \arrow[d, "f'"] \\
A \arrow[r, "h"] & A'
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Dazu zeigen wir, daß $M(\phi)$ und Mod-$R\times_\phi M$ isomorphe Kategorien sind. Wir bezeichnen dann die $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln durch ihre Bilder in $M(\phi)$. Eine solche Darstellung nennen wir **Standard-Darstellung**. Also

1.3 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung von R. Für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul A gibt es genau einen R-Homomorphismus $f\colon A\otimes_R M \to A$, so daß $(A,f) \in M(\phi)$ und es gilt

Umgekehrt wird auf diese Weise A_R für jedes Objekt $(A,f) \in M(\Phi)$ zu einem $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul.
Für jeden $R\times_\Phi M$-Homorphismus $h: A \to A'$ ist dann h ein Morphismus für die entsprechenden Objekte in $M(\Phi)$ und umgekehrt.

Beweis: Setze $S = R\times_\Phi M$. Für jeden S-Rechtsmodul $A = (A,f)$, wie oben, kommutiert das Assoziativitätsdiagramm in (2). Hieraus folgt $(1\otimes\Phi) = f(f\otimes 1)$. Also $(A,f) \in M(\Phi)$ und f ist eindeutig bestimmt.
Ist umgekehrt $(A,f) \in M(\Phi)$, dann setze $\rho = (1,f): A\otimes_R S \to A$. Wegen der Kommutativität von (4) und $\rho(a\otimes 1) = a$ kommutieren dann die Diagramme in (2). Also ist A auf diese Weise ein S-Rechtsmodul. Der zweite Teil der Behauptung ist klar. □

Aufgrund des Adjunktionsisomorphismus

$$\bar{\ }: \mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M,A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R(M,A))$$

mit $\bar{f}(a)(m) = f(a\otimes m)$, definiert die Zuordnung $(A,f) \mapsto (A,\bar{f})$ eine Isomorphie zwischen $M(\Phi)$ und der Kategorie $\bar{M}(\Phi)$ bestehend aus den Paaren (A,p) und den Morphismen $h: (A,p) \to (A',p')$, wobei A ein R-Rechtsmodul und $p: A \to \mathrm{Hom}_R(M,A)$, $h: A \to A'$ R-Homomorphismen sind, derart, daß die Diagramme

$$(5)\quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "p"] & & \mathrm{Hom}_R(R,A) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\Phi,A)"] \\ \mathrm{Hom}_R(M,A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(M,p)"] & \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(M,A)) \cong & \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R M,A) \end{tikzcd}$$

$$(6)\quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & A' \arrow[d, "p'"] \\ \mathrm{Hom}_R(M,A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(M,h)"] & \mathrm{Hom}_R(M,A') \end{tikzcd}$$

kommutieren. Wir gewinnen dadurch eine zweite Beschreibung der Moduln über $R\times_\Phi M$.
Ist (A,f) ein $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul (in der Standard-Darstellung), so nennen wir $(A,\bar{f})$ die **adjungierte Darstellung.** Wir erhalten dann für die Multiplikation

$$a(r,m) = ar + \bar{f}(a)(m).$$

Wir benutzen beide Darstellungen. Welche Darstellung jeweils gemeint ist, folgt aus dem Zusammenhang.

Ähnlich beschreiben wir die Linksmoduln über $R\times_\Phi M$ durch die Kategorie der Paare (A,f) und der Morphismen $h: A \to A'$, wobei A ein R-Linksmodul, $f: M\otimes_R A \to A$ bzw. $\bar{f}: A \to \mathrm{Hom}_R(M,A)$ und $h: A \to A'$ R-Linkshomomorphismen sind, derart, daß die entsprechenden Diagramme kommutieren.

1.4 Bemerkung

1) Für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\Phi M$ definiert $\alpha: R\times_\Phi M \to R\times_\Phi M$, $(r,m) \mapsto (r,-m)$ einen Ringautomorphismus der Ordnung 2. So definiert die Zuordnung

$$(A,f) \mapsto (A,-f) \text{ bzw. } (A,\bar{f}) \mapsto (A,-\bar{f})$$

einen Funktor $G: \text{Mod-}R\times_\Phi M \to \text{Mod-}R\times_\Phi M$ mit $G^2 = 1_{\text{Mod-}R\times_\Phi M}$.

2) Weitere Funktoren in $\text{Mod-}R\times_\Phi M$ induzieren die Zuordnungen

$$(A,f) \mapsto (A\otimes_R M, f\otimes 1),\quad (A,f) \mapsto (\mathrm{Hom}_R(M,A),\mathrm{Hom}(M,\bar{f}))$$

mit $(\mathrm{Hom}_R(M,A),\mathrm{Hom}(M,\bar{f}))$ in der adjungierten Darstellung. □

SEMITRIVIALE ERWEITERUNGEN VON (ABELSCHEN) KATEGORIEN

1.5 Definition und Bemerkungen Die Beschreibung von $M(\Phi)$ bzw. $\bar{M}(\Phi)$ legt die Verallgemeinerung von semitrivialen Ringerweiterungen auf **semitriviale Erweiterungen von (abelschen) Kategorien** nahe. Diese enthalten als Spezialfall die in [6] behandelten trivialen Erweiterungen. Dazu ersetzen wir die Kategorie der R-Moduln durch eine beliebige (abelsche) Kategorie C und die Funktoren $\_\otimes_R M$ bzw. $\mathrm{Hom}_R(M,\_)$ durch einen (rechts- bzw. linksexakten) Funktor $F: C \to C$ bzw. $G: C \to C$ und funktorielle Morphismen $\Phi: F^2 \to 1_C$ bzw. $\psi: 1_C \to G^2$. Ähnlich wie $M(\Phi)$ bzw. $\bar{M}(\Phi)$ definieren wir neue Kategorien $C\times_\Phi F$ bzw. $G\times_\psi C$, die wir als **semitriviale Erweiterung von** C **unter** F bzw. **über** G bezeichnen. Genauer besteht $C\times_\Phi F$ aus den Paaren (A,f) und den Morphismen $h: (A,f) \to (A',f')$, wobei $A \in C$, $f \in \mathrm{Mor}_C(F(A),A)$, $h \in \mathrm{Mor}_C(A,A')$ Objekte und Morphismen derart sind, daß folgende Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd} F^2(A) \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "\Phi"'] & F(A) \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "Fh"] \arrow[d, "f"] & F(A') \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, "h"] & A' \end{tikzcd}.$$

Analog besteht $G\times_\psi C$ aus den Paaren (A,p) und den Morphismen $h: (A,p) \to$

(A',p'), wobei $A \in C$, $p \in Mor_C(A,G(A))$, $h \in Mor_C(A,A')$ Elemente sind derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\psi"'] & G(A) \arrow[d, "Gp"] \\ & G^2(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & A' \arrow[d, "p'"] \\ G(A) \arrow[r, "Gh"] & G(A') \end{tikzcd}$$

kommutieren. Gilt $F(B) \subset B$ für eine volle Unterkategorie $B \subset C$, so ist $B\times_\phi F \subset C\times_\phi F$ eine semitriviale Erweiterung von B. Analog gilt die für den dualen Fall.

Es lassen sich folgende Aussagen zeigen [9], die wir zunächst hier ohne Beweis bringen.

1.6 Satz Sei C eine abelsche Kategorie und $C\times_\phi F$, $G\times_\psi C$ wie oben.

1) Ist F rechts exakt, dann ist $C\times_\phi F$ abelsch.

2) Ist G links exakt, dann ist $G\times_\psi C$ abelsch □

Ist $C\times_\phi F$ eine semitriviale Erweiterung unter $F: C \to C$ und ist (F,G) ein Adjunktionspaar (F ist zu G links adjungiert) mit dem Adjunktionsisomorphismus ω, dann ist $G\times_{\omega^2(\phi)} C$ eine semitriviale Erweiterung über G. Genauer gilt

1.7 Satz Sei C eine beliebige Kategorie und seien $C\times_\phi F$, $G\times_\psi G$ semitriviale Erweiterungen. Ist F zu G linksadjungiert mit $\omega(FA,A)\omega(A,GA)(\phi(A)) = \psi(A)$ für den Adjunktionsisomorphismus

$$\omega = \omega(A,B): Mor_C(FA,B) \to Mor_C(A,GB),$$

dann definieren $S: C\times_\phi F \to G\times_\psi C$ und $T: G\times_\psi C \to C\times_\phi F$ mit $S(A,f) = (\omega(f),A)$, $S(h) = h$ und $T(g,B) = (B,\omega^{-1}(g))$, $T(k) = k$ für Objekte (A,f), (g,B) und Morphismen h, k einen Isomorphismus

$$C\times_\phi F \cong G\times_\psi C.$$

Beweis Ist $f: FA \to A$ ein Morphismus in C mit $fF(f) = \phi(A)$, dann gilt $\omega^2(\phi(A)) = \omega(\omega(f)f) = G(\omega(f))\omega(f) = \psi(A)$. Ist weiter $h: (A,f) \to (B,g)$ ein Morphismus in $C\times_\phi F$, d.h. $gF(h) = hf$, dann $\omega(g)h = \omega(gF(h)) = \omega(hf) = G(h)\omega(f)$. Also ist S wohldefiniert und analog auch T. Mit $ST = 1$ und $TS = 1$ folgt die Behauptung. □

1.8 Definition Erfüllen $C\times_\phi F$ und $G\times_\psi C$ die Voraussetzungen von 1.7, dann sind sie **verträglich**.

1.9 Bemerkung Ist $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, dann bezeichnen $\alpha(A)$, $\alpha'(A)$ für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) die natürlichen Abbildungen

$$\alpha(A): A\otimes_R M\otimes_R M \xrightarrow{1\otimes\phi} A\otimes_R R \cong A$$

$$\alpha'(A): A \cong Hom_R(R,A) \xrightarrow{Hom(\phi,A)} Hom_R(M\otimes_R M,A) \cong Hom_R(M,Hom_R(M,A)).$$

Es gilt dann nach Definition von $M(\phi)$ und $\bar{M}(\phi)$

$$M(\phi) = (Mod\text{-}R)\times_\alpha(\_\otimes_R M) \qquad \bar{M}(\phi) = Hom_R(M,\_)\times_{\alpha'}(Mod\text{-}R).$$

Obwohl viele der Ergebnisse dieser Arbeit auch für diesen allgemeineren Fall gelten, beschränken wir uns auf semitriviale Erweiterungen von Ringen.

UNTERMODULN UND IDEALE

1.10 Notation Seien R, S, T Ringe und ${}_TA_S$, ${}_SB_R$, ${}_TC_R$ Bimoduln. Weiter sei $\phi: A\otimes_S B \to C$ ein Bimodulhomomorphismus. Für $a \in A$, $b \in B$ bezeichne ab das Bild $\phi(a\otimes b)$. Für Untermoduln $U \subset {}_TA$, $V \subset B_R$ bezeichne aV den R-Untermodul $\{ab \mid b \in V\} \subset C_R$ und Ub den T-Untermodul $\{ab \mid a \in U\} \subset {}_TC$. Entsprechend bezeichne UV die Menge aller endlichen Summen $\Sigma\, ab$ mit $a \in U$, $b \in V$. Weiter definieren wir für Teilmengen $U \subset A$, $V \subset B$ die Annullatoren

$$l_A(V) = \{a\in A \mid aV = 0\} \qquad r_B(U) = \{b\in B \mid Ub = 0\}.$$

Insbesondere seien $l_A(b) = l_A(\{b\})$ und $r_B(a) = r_B(\{a\})$. Allgemeiner seien für einen Untermodul $W \subset {}_TC_R$

$$l_A(W:V) = \{a\in A \mid aV \subset W\} \qquad r_B(W:U) = \{b\in B \mid Ub \subset W\}.$$

Falls es aus dem Zusammenhang hervorgeht, schreiben wir für $l_A(W:V)$ auch kurz $(W:V)$ und für $r_B(W:U)$ kurz $(W:U)$. Die Abbildung ϕ heißt **rechts nicht entartet**, wenn $l_A(B) = 0$ gilt. ϕ heißt **nicht entartet**, wenn ϕ rechts und links nicht entartet ist.

Für die durch $\phi: A\otimes_S B \to C$ induzierten Homomorphismen

$$A \to \mathrm{Hom}_R(B,C), \quad B \to \mathrm{Hom}_T(A,C)$$

schreiben wir jeweils Φ oder Φ^l bzw. Φ^r. So ist ϕ genau dann rechts nicht entartet, wenn Φ^l injektiv ist. Weiter schreiben wir $a^l = \Phi^l(a)$ und $b^r = \Phi^r(b)$, $a \in A$, $b \in B$.

1.11 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul

1) Die Untermoduln von (A,f) sind genau die R-Untermoduln $U \subset A$ derart, daß gilt $UM \subset U$, d.h. $U \subset (U:M)$. Wir schreiben kurz $U \subset (A,f)$. Ist $U \subset A_R$ ein Untermodul, so sind insbesondere $U + UM$ und $U + (U:M)$, sowie $U \cap UM$ und $U \cap (U:M)$ $R\times_\phi M$-Untermoduln von (A,f).

2) Ist $U \subset (A,f)$ $R\times_\phi M$-Untermodul, dann ist $(A,f)/U \cong (A/U,\bar{f})$, wobei $\bar{f}: A/U \otimes_R M \to A/U$ von f induziert wird.

3) Eine Folge $(A',f) \to (A,f) \to (A'',f'')$ in Mod-$R\times_\phi M$ ist genau dann exakt, wenn die Folge $A' \to A \to A''$ in Mod-R exakt ist. □

Insbesondere gilt für die Beschreibung der Ideale

1.12 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) Die Rechtsideale von $R\times_\phi M$ sind genau die R-Untermoduln A von $(R\oplus M)_R$ mit $AM \subset A$.

2) Die Linksideale von $R\times_\phi M$ sind genau die R-Untermoduln A von ${}_R(R\oplus M)$ mit $MA \subset A$.

3) Die zweiseitigen Ideale von $R\times_\phi M$ sind genau solche R-R-Untermoduln von ${}_R(R\oplus M)_R$ mit $AM+MA \subset A$. □

Die Ideale von $R\times_\phi M$ lassen sich in zwei wichtige Klassen unterscheiden, die wir im folgenden beschreiben. Im allgemeinen lassen semitriviale Erweiterungen näher charakterisieren, für die alle Ideale (zweiseitige) sich wie in 1.13 schreiben lassen. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind generalisierte Matrizenringe (6. Kapitel).

1.13 Bemerkungen Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) Ist $I \subset R$ ein Rechtsideal bzw. ein zweiseitiges Ideal und $U \subset M$ ein Untermodul von M_R bzw. ${}_RM_R$, so ist $I\oplus U$ genau dann ein Rechtsideal bzw. ein Ideal in $R\times_\phi M$, wenn gilt $UM \subset I$ und $IM \subset U$ bzw. $MU+UM \subset I$ und $MI+IM \subset U$.

2) Die Abbildungen (Liftungsabbildungen)

$$I \mapsto I\oplus IM \quad \text{und} \quad I \mapsto I\oplus(I:M)$$

definieren für Rechtsideale $I \subset R$ injektive zerfallende Ordnungshomomorphismen zwischen den Rechtsidealverbänden von R und $R\times_\phi M$. Analog definieren für Untermoduln $U \subset M_R$ die Abbildungen

$$U \mapsto UM\oplus U \quad \text{und} \quad U \mapsto (U:M)\oplus U$$

injektive zerfallende Ordnungshomorphismen zwischen den Verbänden von Untermoduln von M_R und von Rechtsidealen von $R\times_\phi M$.

3) Ist $I\oplus U$ ein Ideal in $R\times_\phi M$ mit $I \subset R$, $U \subset M$, dann ist M/U ein R/I-Bimodul. Weiter induziert ϕ eine Abbildung $\bar{\Phi}: M/U \otimes_{R/I} M/U \to R/I$ derart, daß $R/I \times_{\bar{\Phi}} M/U$ eine semitriviale Erweiterung ist und es gilt

$$R\times_\phi M/(I\oplus U) \cong (R/I)\times_{\bar{\Phi}}(M/U)$$

als Ringe. □

Es ist für die allgemeine Untersuchung von semitrivialen Erweiterungen nützlich, solche Ideale in den Griff zu bekommen, die sich nicht in der Art von 1.13 zerlegen lassen.
Für ein Rechtsideal $A \subset R\times_\phi M$ bezeichne dazu jeweils $I\oplus U$ und $I_\circ\oplus U_\circ$ die eindeutige minimale und maximale direkte Summe in $R\times_\phi M$ mit $I_\circ \subset I \subset R_R$, $U_\circ \subset U \subset M_R$, so daß gilt $I_\circ\oplus U_\circ \subset A \subset I\oplus U$ als R-Moduln. Man prüft dann leicht

1.14 Lemma Ist $A \subset R\times_\phi M$ ein Rechtsideal, so sind $I_\circ\oplus U_\circ$ und $I\oplus U$ gleichfalls Rechtsideale in $R\times_\phi M$. □

Es gilt offensichtlich $I_\circ = R\cap A$ und $U_\circ = M\cap A$ durch die Identifikation $R \subset R\times_\phi M$ und $M \subset R\times_\phi M$. Abbildungen der Form $A \mapsto I_\circ$, $A \mapsto U_\circ$ (Durchschnittsabbildungen) und $A \mapsto I$, $A \mapsto U$ (Projektionsabbildungen) definieren für Rechtsideale $A \subset R\times_\phi M$ Retraktionen zu den Abbildungen in 1.13 2). Wir bezeichnen $I_\circ\oplus U_\circ$ als den **Kern** und $I\oplus U$ als die **Hülle** von A in $R\times_\phi M$. Bekanntlich ist A als R-Modul eine subdirekte Summe von I und U mit den Kernen $I_\circ$ und $U_\circ$ (im üblichen Sprachgebrauch [8]). Weiter gibt es einen R-Isomorphismus $\phi: I/I_\circ \to U/U_\circ$ so, daß gilt

$$A = I +_{\phi} U = \{(r,m) \mid \phi\alpha(r) = \beta(m)\},$$

wobei $\alpha: I \to I/I_{\circ}$ und $\beta: U \to U/U_{\circ}$ die kanonischen Epimorphismen sind. Für den $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul $B = I/I_{\circ}\oplus U/U_{\circ}$ seien $\bar{\bar{m}}$ und $\bar{\Phi}$ die zugehörigen Abbildungen $\bar{\bar{m}}: I/I_{\circ}\otimes_R M \to U/U_{\circ}$, $\bar{\Phi}: U/U_{\circ}\otimes_R M \to I/I_{\circ}$. Durch die Idealstruktur von A erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I/I_{\circ}\otimes_R M & \xrightarrow{\phi\otimes 1} & U/U_{\circ}\otimes_R M \\ {\scriptstyle \bar{\bar{m}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\Phi}} \\ U/U_{\circ} & \xrightarrow{\phi^{-1}} & I/I_{\circ} \end{array}$$

d.h. $\begin{pmatrix}0 & \phi^{-1}\\ \phi & 0\end{pmatrix}: I/I_{\circ}\oplus U/U_{\circ} \to I/I_{\circ}\oplus U/U_{\circ}$ ist ein $R\times_{\phi}M$-Isomorphismus. Setze dann $f = \phi^{-1}\bar{\bar{m}}: I/I_{\circ}\otimes_R M \to I/I_{\circ}$, $g = \phi\bar{\Phi}: U/U_{\circ}\otimes_R M \to U/U_{\circ}$. Es gilt dann

1.15 Lemma Ist $A \subset R\times_{\phi}M$ ein Rechtsideal, so sind mit den obigen Bezeichnungen $(I/I_{\circ},f)$ und $(U/U_{\circ},g)$ $R\times_{\phi}M$-Rechtsmoduln und es gibt Isomorphismen von $R\times_{\phi}M$-Rechtsmoduln

$$A/(I_{\circ}\oplus U_{\circ}) \cong (I/I_{\circ},f), \quad A/(I_{\circ}\oplus U_{\circ}) \cong (U/U_{\circ},g),$$

mit $\overline{(r,m)} \mapsto \bar{r}$ und $\overline{(r,m)} \mapsto \bar{m}$. □

Weiter sind $(\alpha,\phi^{-1}\beta): I\oplus U \to (I/I_{\circ},f)$, $(\phi\alpha,\beta): I\oplus U \to (U/U_{\circ},g)$ $R\times_{\phi}M$-Homorphismen. So sind auch $(\alpha,-\phi^{-1}\beta): I\oplus U \to (I/I_{\circ},-f)$, $(\phi\alpha,-\beta): I\oplus U \to (U/U_{\circ},-g)$ $R\times_{\phi}M$-Homomorphismen mit $Ke(\alpha,-\phi^{-1}\beta) = A = Ke(\phi\alpha,-\beta)$. Wir haben dann

1.16 Lemma Sei $A \subset R\times_{\phi}M$ ein Rechtsideal und die übrigen Bezeichnungen wie oben. Dann gelten

$$(I\oplus U)/A \cong (I/I_{\circ},-f), \quad (I\oplus U)/A \cong (U/U_{\circ},-g)$$

als $R\times_{\phi}M$-Rechtsmoduln und es gibt eine exakte Folge (vgl. hierzu 6.32)

$$0 \to (I/I_{\circ},f) \to (I/I_{\circ}\oplus U/U_{\circ},\begin{pmatrix}0 & \bar{\Phi}\\ \bar{\bar{m}} & 0\end{pmatrix}) \to (I/I_{\circ},-f) \to 0. \quad □$$

Es gilt dann zusammenfassend

1.17 Satz Ist $A \subset R\times_{\phi}M$ ein Rechtsideal, so gibt es ein Rechtsideal $I\oplus U \subset R\times_{\phi}M$ mit $I \subset R$, $U \subset M$, einen $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul (F,f) und einen $R\times_{\phi}M$-Homorphismus $(\alpha,\beta): I\oplus U \to (F,f)$ mit α, β surjektiv, so daß A_R

genau das Faserprodukt von α und β ist. Umgekehrt definiert jeder Homomorphismus dieser Art ein Rechtsideal in $R\times_{\phi}M$. Insbesondere ist dann $A = Ke(\alpha,-\beta)$ für den $R\times_{\phi}M$-Homomorphismus $(\alpha,-\beta): I\oplus U \to (F,-f)$. □

Man prüft leicht

1.18 Lemma Sei $(A_i \mid i\in I)$ eine Familie von Rechtsidealen in $R\times_{\phi}M$ mit den Kernen $(I_{i\circ}\oplus U_{i\circ} \mid i\in I)$ und den Hüllen $(I_i\oplus U_i \mid i\in I)$. Dann ist $\cap_I (I_{i\circ}\oplus U_{i\circ})$ der Kern von $\cap_I A_i$ und $\Sigma_I (I_i\oplus U_i)$ die Hülle von $\Sigma_I A_i$. □

1.19 Bemerkung

1) Ähnliche Überlegungen gelten für $R\times_{\phi}M$-Rechtsmoduln (A,f) derart, daß gilt $A = B\oplus C$ als R-Moduln und $BM \subset C$, $CM \subset B$, d.h. $(A,f) = (B\oplus C,\begin{pmatrix}0 & h\\ g & 0\end{pmatrix})$, wobei $g: B\otimes_R M \to C$ und $h: C\otimes_R M \to B$ von f induziert werden. Dann zerfällt das Diagramm (4) in zwei kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_R M\otimes_R M & \xrightarrow{g\otimes 1} & C\otimes_R M \\ {\scriptstyle 1\otimes\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B\otimes_R R & \xrightarrow{\cong} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C\otimes_R M\otimes_R M & \xrightarrow{h\otimes 1} & B\otimes_R M \\ {\scriptstyle 1\otimes\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C\otimes_R R & \xrightarrow{\cong} & C\ . \end{array}$$

Insbesondere sind Moduln der Form $(A,0)$ in dieser Klase enthalten. Ist $A' \subset (A,f)$ ein Untermodul, so setzen wir für $I_{\circ}\oplus U_{\circ}$ und $I\oplus U$ jeweils die maximale und minimale direkte Summe in A mit $I_{\circ} \subset I \subset B$, $U_{\circ} \subset U \subset C$ und $I_{\circ}\oplus U_{\circ} \subset A' \subset I\oplus U \subset A$. Wir bezeichnen $I_{\circ}\oplus U_{\circ}$ und $I\oplus U$ als den **Kern** und die **Hülle** von A in der Zerlegung $A = B\oplus C$. Es gelten dann die entsprechenden Ausssagen von 1.13 bis 1.18.
Diese Objekte in Mod-$R\times_{\phi}M$ spielen eine besondere Rolle, da sich viele Eigenschaften von B_R und C_R auf (A,f) liften, bzw. solche von (A,f) auf B_R und C_R reflektieren lassen. Im folgenden behandeln wir weitere Spezialfälle solcher Objekte. So lassen sich die Moduln über generalisierten Matrizenringen in dieser Form schreiben.

2) Ist (A,f) ein beliebiger $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul, so ist $D(A) = (A\oplus A,\begin{pmatrix}0 & f\\ f & 0\end{pmatrix})$ ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul, und es gibt eine kurze $(R\times_{\phi}M,R)$-exakte Folge (d.h. zerfallend in Mod-R)

$$0 \to (A,-f) \xrightarrow{\bar{n}} (A\oplus A,\begin{pmatrix}0 & f\\ f & 0\end{pmatrix}) \xrightarrow{e'} (A,f) \to 0$$

mit $\bar{n} = (1_A,-1_A)$ und der Faltungsabbildung $e' = (1_A,1_A)$ (vgl. 6.32). Ein besonderer Fall für die Charakterisierung von Moduln über einer semitrivialen Erweiterung liegt vor, wenn diese Folge in $\text{Mod-}R\times_{\Phi}M$ zerfällt. Dies ist z.B. der Fall, wenn $2 \in R$ invertierbar ist, bzw. falls $A = U\oplus UM$ gilt (vgl. 5.8, 6.32ff). Zerfällt diese Folge für jeden $R\times_{\Phi}M$-Rechtsmodul, so läßt sich z.B. die Untersuchung von projektiven und injektiven Moduln auf die Untersuchung von Moduln der Form von 1) beschränken.

2 INDUZIERTE FUNKTOREN

Im folgenden werden die von der Inklusion $R \subset R\times_{\Phi}M$ induzierten Funktoren untersucht und einige nützliche Eigenschaften für die Adjunktionsabbildungen zusammengestellt. Sind T, H: $\text{Mod-}R \to \text{Mod-}R\times_{\Phi}M$ die Ringwechselfunktoren, so sind $\text{End}_{R\times_{\Phi}M}(T(A))$ und $\text{End}_{R\times_{\Phi}M}(H(A))$ für jeden R-Rechtsmodul A wieder semitriviale Erweiterungen von $\text{End}_R(A)$. Für die Untersuchung der Beziehungen zwischen $\text{Mod-}R$ und $\text{Mod-}R\times_{\Phi}M$ spielt das Spurideal $I = \text{Bi}(\Phi) \subset R$ eine besondere Rolle. Es gibt nämlich einen natürlichen Epimorphismus $R\times_{\Phi}M \to R/I$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "i"'] \arrow[dr] & \\ R\times_{\Phi}M \arrow[r] & R/I \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei ist I das kleinste Ideal mit dieser Eigenschaft.

RINGWECHSEL

Sei $R\times_{\Phi}M$ eine semitriviale Erweiterung. Für jeden R-Rechtsmodul A seien $\alpha(A)$: $A\otimes_R M\otimes_R M \to A$ und $\alpha'(A)$: $A \to \text{Hom}_R(M,\text{Hom}_R(M,A))$ die von $1\otimes\Phi$ und $\text{Hom}(\Phi,A)$ induzierten funktoriellen Isomorphismen mit $\alpha(A)(a\otimes m\otimes n) = amn$ und $\alpha'(A)(a)(m)(n) = amn$. Dann sind

$$T(A) = \left(A\oplus A\otimes_R M, \begin{pmatrix} 0 & \alpha(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad H(A) = \left(A\oplus \text{Hom}_R(M,A), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha'(A) & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$R\times_{\Phi}M$-Rechtsmoduln und für jeden R-Homomorphismus $h: A \to A'$ sind

$$T(h) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h\otimes 1 \end{pmatrix}: T(A) \to T(A'), \quad H(h) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & \text{Hom}(M,h) \end{pmatrix}: H(A) \to H(A')$$

$R\times_{\Phi}M$-Homomorphismen. Dann definieren T und H treue Funktoren

$$\text{Mod-}R \overset{T}{\underset{H}{\rightrightarrows}} \text{Mod-}R\times_{\Phi}M.$$

Weiter sei $P(A,f) = A$ für jeden $R\times_{\Phi}M$-Rechtsmodul (A,f) und $P(h) = h$ für jeden Homomorphismus $h: (A,f) \to (A',f')$ in $\text{Mod-}R\times_{\Phi}M$. Dann definiert P den zu $R \subset R\times_{\Phi}M$ gehörigen Vergißfunktor

$$P: \text{Mod-}R\times_{\Phi}M \to \text{Mod-}R.$$

2.1 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) T und H sind jeweils zu P links- bzw. rechtsadjungiert.

$$u: \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(T(A),(B,g)) \cong \mathrm{Hom}_R(A,B)$$
$$v: \mathrm{Hom}_R(A,B) \cong \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),H(B))$$

mit $u(h,k) = h$, $u^{-1}(h) = (h,g(h\otimes 1))$ und $v(h) = (h,\mathrm{Hom}(M,h)\bar{f})$, $v^{-1}(h,k) = h$ für jeweils geeignete Abbildungen h, k.

2) Ist (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul, dann sind $(1,f): TP(A,f) \to (A,f)$ und $(1,\bar{f}): (A,\bar{f}) \to HP(A)$ Adjunktionsabbildungen. Weiter sind

$$0 \to (A\otimes_R M,-f\otimes 1) \xrightarrow{(-f,1)} T(A) \xrightarrow{(1,f)} (A,f) \to 0$$

und (in der adjungierten Darstellung)

$$0 \to (A,\bar{f}) \xrightarrow{(1,\bar{f})} H(A) \xrightarrow{(-\bar{f},1)} (\mathrm{Hom}_R(M,A),\mathrm{Hom}(M,-\bar{f})) \to 0$$

exakte Folgen.

Beweis 1) Man prüft leicht $T \cong \_\otimes_R R\times_\phi M$, $H \cong \mathrm{Hom}_R(R\times_\phi M,\_)$ mit $T(A) \to A\otimes R\times_\phi M$, $(a,a'\otimes m) \to a\otimes(1,0)+a'\otimes(0,m)$, $H(A) \to \mathrm{Hom}_R(R\times_\phi M,A)$, $(a,g) \mapsto (a^l,g)$ bzw. sind u und v wegen (4) und (6) im 1. Kapitel wohldefiniert.
2) $\mathrm{Ke}(1,f) = \{\Sigma\, (-a_i m_i, a_i\otimes m_i) \mid \Sigma\, a_i\otimes m_i \in A\otimes_R M\} = \mathrm{Bi}(-f,1)$. So ist die erste Folge exakt. Für die zweite Folge gilt dies analog. □

Ein Homomorphismus $f: A \to B$ über einem Ring S heißt **groß**, falls $\mathrm{Bi}f \subset B$ groß ist, bzw. **klein**, falls $\mathrm{Ke}f \subset A$ klein ist.

2.2 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $(A\oplus B,\binom{0f}{g0})$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. So induzieren die Adjunktionen $R\times_\phi M$-Homomorphismen

$$\binom{10}{0g}: T(A) \to (A\oplus B,\binom{0f}{g0}), \quad \binom{10}{0\bar{f}}: (A\oplus B,\binom{0\bar{f}}{g0}) \to H(A).$$

Dabei ist $\binom{10}{0g}$ ein kleiner und $\binom{10}{0\bar{f}}$ ein großer Homomorphismus. Entsprechend gelten die symmetrischen Aussagen für $T(B)$, $H(B)$ und die zugehörigen Abbildungen $\binom{0f}{10}$ und $\binom{01}{g0}$.

Beweis Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus dem Lemma wegen $T(A\oplus B) \cong T(A)\oplus T(B)$ und $H(A\oplus B) \cong H(A)\oplus H(B)$. Gilt $\mathrm{Ke}g+B' = T(A)$ für einen Untermodul $B' \subset T(A)$, so gilt $B'M = AMM\oplus(A\otimes_R M)$ wegen $(\mathrm{Ke}g)M = 0$ nach 1.11 3). Also $\mathrm{Ke}g \subset B'M \subset B'$. Dann ist $\mathrm{Ke}g = \mathrm{Ke}\binom{10}{0g}$ klein in $T(A)$.

Weiter ist $(B/\mathrm{Bi}f)M \subset (A\oplus B/A\oplus \mathrm{Bi}f)M = 0$ nach 1.11 3). Gilt $C\cap(A\oplus\mathrm{Bi}\bar{f}) = 0$ für einen Untermodul $C \subset H(A)$, dann $CM \subset (A\oplus\mathrm{Bi}\bar{f})\cap C = 0$. Hieraus $C \subset A$. Also $C = 0$. Analog folgt die letzte Behauptung. □

Bezeichnen T', H': R-Mod $\to R\times_\phi M$-Mod, P': $R\times_\phi M$-Mod $\to R$-Mod die entsprechenden Funktoren für die Kategorien der Linksmoduln. Es gilt offenbar $T(M) \cong T'(M)$, $T(R) \cong T'(R)$ als R-Bimoduln. Insbesondere sind also $T(M)$ und $T(R)$ $R\times_\phi M$-Bimoduln und es gilt $T(R) \cong R\times_\phi M$. Analog gilt (als $R\times_\phi M$-Bimoduln)

$$T(M\otimes_R\ldots\otimes_R M) \cong T'(M\otimes_R\ldots\otimes_R M).$$

Für $M\otimes_R\ldots\otimes_R M$ (n Faktoren) schreiben wir kurz $M^{\otimes n}$.

2.3 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann induziert die oben induzierte Linksmodulstruktur für $T(M^{\otimes n})$ natürliche Isomorphismen (vgl. 1.4)

$$(A,f)\otimes_{R\times_\phi M} T(M^{\otimes n}) \cong (A\otimes_R M^{\otimes n}, f\otimes 1)$$
$$\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(T(M^{\otimes n}),(A,f)) \cong (\mathrm{Hom}_R(M^{\otimes n},A),\mathrm{Hom}(M^{\otimes n},\bar{f})).$$

Beweis Es gilt nach 2.1 und Vorbemerkung $(A,f)\otimes_{R\times_\phi M} T(M^{\otimes n}) \cong (A,f)\otimes_{R\times_\phi M}(R\times_\phi M)\otimes_R M^{\otimes n} \cong A\otimes_R M^{\otimes n}$ als R-Moduln und analog $\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(T(M^{\otimes n}),(A,f)) \cong \mathrm{Hom}_R(M^{\otimes n},A)$. Diese Isomorphismen induzieren auf die übliche Weise die angegebene Modulstruktur. Hieraus folgt die Behauptung. □

ENDOMORPHISMENRINGE

2.4 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, A ein R-Rechtsmodul. Dann sind

$$\mathrm{End}_{R\times_\phi M}(T(A)) \cong \mathrm{End}(A_R)\times_{\phi_1}\mathrm{Hom}_R(A,A\otimes_R M)$$
$$\mathrm{End}_{R\times_\phi M}(H(A)) \cong \mathrm{End}(A_R)\times_{\phi_2}\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,A),A)$$

semitriviale Erweiterungen bezüglich $\phi_1(g\otimes h) = \alpha(g\otimes 1)h$ und $\phi_2(g\otimes h) = g\mathrm{Hom}(M,h)\alpha'$.

Beweis Wegen der Adjunktion gibt es Gruppenisomorphismen

$$\mathrm{End}_{R\times_\Phi M}(T(A)) \cong \mathrm{Hom}_R(A, A\oplus A\otimes_R M) \cong \mathrm{End}_R(A)\times \mathrm{Hom}_R(A, A\otimes_R M).$$

Jedes Element $h \in \mathrm{End}_{R\times_\Phi M}(T(A))$ läßt sich außerdem in der Form $h = \begin{pmatrix} f & \alpha(g\otimes 1)\\ g & f\otimes 1\end{pmatrix}$ mit $f \in \mathrm{End}_R(A)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(A, A\otimes_R M)$ darstellen, wobei h das Element (f,g) als Bild in $\mathrm{End}_R(A)\times\mathrm{Hom}_R(A,A\otimes_R M)$ hat. Weiter hat die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix} f & \alpha(g\otimes 1)\\ g & f\otimes 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f' & \alpha(g'\otimes 1)\\ g' & f'\otimes 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ff'+\alpha(g\otimes 1)g' & f\alpha(g'\otimes 1)+\alpha(g\otimes 1)f'\otimes 1\\ gf'+(f\otimes 1)g' & g\alpha(g'\otimes 1)+ff'\otimes 1\end{pmatrix}$$

das Element $(ff'+\alpha(g\otimes 1)g', gf'+(f\otimes 1)g')$ als Bild. Nun hat $\mathrm{Hom}_R(A,A\otimes_R M)$ rechts durch die Komposition und links durch $f.g = (f\otimes 1)g$ eine $\mathrm{End}_R(A)$-Bimodulstruktur. Mit $\Phi_1\colon \mathrm{Hom}_R(A,A\otimes_R M)\otimes\mathrm{Hom}_R(A,A\otimes_R M) \to \mathrm{End}_R(A)$, $\Phi_1(g\otimes g') = \alpha(g\otimes 1)g'$ folgt dann die Behauptung für $T(A)$. Dual gilt dies für $H(A)$. □

Sind A, B R-Rechtsmoduln, dann gilt allgemeiner

$$\mathrm{Hom}_{R\times_\Phi M}(T(A),T(B)) \cong \mathrm{Hom}_R(A,B)\oplus\mathrm{Hom}_R(A,B\otimes_R M)$$

$$\mathrm{Hom}_{R\times_\Phi M}(H(A),H(B)) \cong \mathrm{Hom}_R(A,B)\oplus\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,A),B).$$

Die semitriviale Struktur als Rechtsmoduln über den Endomorphismenringen ist dann ähnlich wie im Beweis von 2.4 gegeben. Diese sind dann Moduln der Form von 1.19.

Setze $S = \mathrm{End}_R(A)$, $M_1 = \mathrm{Hom}_R(A,A\otimes_R M)$, $M_2 = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,A),A)$. Die semitriviale Struktur von $T(A)$ und $H(A)$ als Linksmoduln über den Endomorphismenringen $S\times_{\Phi_1}M_1$ und $S\times_{\Phi_2}M_2$ ist dann gegeben durch die übliche Linksoperation von S auf $T(A)$ und $H(A)$ und die Abbildungen

$$M_1\otimes_S T(A) \to T(A),\quad g\otimes(a,b\otimes m) \mapsto (\alpha(g(b)\otimes m), g(a))$$
$$M_2\otimes_S H(A) \to H(A),\quad g\otimes(a,h) \mapsto (g(h), \mathrm{Hom}(M,g)\alpha'(a)).$$

2.5 Folgerung Sei $R\times_\Phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt
1) Für den Bimodul $T(M)$ definieren die Abbildungen

$$R\times_\Phi M \to \mathrm{End}(M_R)\times_{\Phi_1}\mathrm{Hom}_R(M_R, M\otimes_R M_R)$$
$$R\times_\Phi M \to \mathrm{End}({}_RM)\times_{\Phi_1}\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RM\otimes_R M)$$

durch $(r,m) \mapsto (r^l, (n \mapsto m\otimes n))$ und $(r,m)\mapsto (r^r, (n\mapsto n\otimes m))$ semitriviale

Ringhomomorphismen.

2) Ist $e \in R$ Idempotent, dann ist $eRe\times_{\Phi_e} eMe$ eine semitriviale Erweiterung, wobei $\Phi_e\colon eMe\otimes_{eRe}eMe \to eRe$ von Φ induziert wird und es gilt

$$e(R\times_\Phi M)e \cong eRe\times_{\Phi_e} eMe$$

als Ringe. Ist $e' = 1-e$, dann gilt auch

$$e(R\times_\Phi M)e' \cong eRe'\oplus eMe'.$$

Beweis 1) Die Abbildungen werden durch die Links- und Rechtsmultiplikation induziert. 2) folgt aus $e(R\times_\Phi M)e \cong \mathrm{End}_{R\times_\Phi M}(e(R\times_\Phi M)) \cong \mathrm{End}_{R\times_\Phi M}(T(eR))$ und dem Satz 2.4. Der zweite Isomorphismus folgt aus der Vorbemerkung zu 2.5. □

SPURIDEAL

Sei I ein beliebiges Ideal in R. Dann bezeichne $(C_I,V_I,K_I)\colon$ Mod-$R/I \to$ Mod-R das induzierte Adjunktionstripel

$$C_I \cong \_\otimes_R R/I\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R/I$$
$$V_I \cong \_\otimes_{R/I} R/I\colon \text{Mod-}R/I \to \text{Mod-}R$$
$$K_I \cong \mathrm{Hom}_R(R/I,\_)\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R/I.$$

Sei nun für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\Phi M$ $J = MM\oplus M \subset R\times_\Phi M$, $I = MM$. Für jeden $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul (A,f) gilt $(A,f)J = AM$, $\iota_{(A,f)}(J) = \iota_A(M) = \mathrm{Ke}(\bar f)$ und es ist nach 1.13 3) $R\times_\Phi M/J \cong R/I$. So sind A/AM und $\mathrm{Ke}\bar f$ R/I-Rechtsmoduln und die Folge

$$0 \to J \to R\times_\Phi M \to R/I \to 0$$

ist exakt. Insbesondere ist $(A,0)$ genau dann ein $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul, wenn A ein R/I-Rechtsmodul ist. Weiter gibt es in Mod-$R\times_\Phi M$ nach 2.2 eine exakte Folge von $R\times_\Phi M$-Bimoduln

$$0 \to \mathrm{Ke}(\Phi) \to T(M) \to J \to 0.$$

Dabei ist $T(M) \to J$ ein kleiner Epimorphismus. Insbesondere ist $\mathrm{Ke}\Phi$ ein R/I-Bimodul (z.B. nach 1.11 3)). Es gilt dann

2.6 Lemma Sei $R\times_\Phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $J = MM\oplus M$, $I = MM$. Dann gibt es natürliche Transformationen

$C_J(A,f) \cong Cok(f),\quad V_J \cong (B,0),\quad K_J(A,f) \cong Ke(\bar{f})$

und exakte Folgen von natürlichen Abbildungen in Mod-$R\times_\phi M$

$$0 \to (Kef,0) \longrightarrow (A\otimes_R M, f\otimes 1) \xrightarrow{f} (A,f) \longrightarrow (A/AM,0) \to 0$$

$$0 \to (Ke\bar{f},0) \longrightarrow (A,\bar{f}) \xrightarrow{\bar{f}} (Hom_R(M,A), Hom(M,\bar{f})) \longrightarrow (Cok\bar{f},0) \to 0. \quad \square$$

Für den Adjunktionstripel (C_J,V_J,K_J), $J = MM\otimes M$, schreiben wir kurz (C,V,K). Es gelten die Beziehungen

$$CT = C_I \quad PV = V_I \quad KH = K_I.$$

2.7 Bemerkung Nach 2.1 gibt es ein kommutatives Diagramm in Mod-$R\times_\phi M$

$$\begin{array}{ccccccccc} T(Ke\phi) & \to & T(T(M)) & \to & T(R\times_\phi M) & \to & T(R/I) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to Ke\phi & \to & T(M) & \to & R\times_\phi M & \to & R/I & \to & 0. \end{array}$$

mit exakten Zeilen und surjektiven Spalten. Analog gilt dies in $R\times_\phi M$-Mod mit dem Funktor T' in der oberen Zeile. Ähnlich wie in 2.3 gilt für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f)

$$(A,f)\otimes_{R\times_\phi M} T'(Ke\phi) \cong (A\otimes_R Ke\phi,0)$$

$$Hom_{R\times_\phi M}(T(Ke\phi),(A,f)) \cong (Hom_R(Ke\phi,A),0),$$

so ergeben sich mit 2.3 bei Anwendung von $(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}-$ und $Hom_{R\times_\phi M}(\_,(A,f))$ die Komplexe

$$(A\otimes_R Ke\phi,0) \xrightarrow{f_1} (A\otimes_R M, f\otimes 1) \xrightarrow{f} (A,f)$$

$$(A,f) \xrightarrow{\bar{f}} (Hom_R(M,A), Hom(M,\bar{f})) \xrightarrow{f^1} (Hom_R(Ke\phi,A),0),$$

und es gibt kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R Ke\phi \arrow[r, "1\otimes i"] \arrow[dr, "f_1"'] & A\otimes_R M\otimes_R M \arrow[d, "f\otimes 1"] \\ & A\otimes_R M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Hom_R(M,A) \arrow[r, "Hom(M{,}\bar{f})"] \arrow[dr, "f^1"'] & Hom_R(M,Hom_R(M,A)) \arrow[d, "Hom(i{,}A)"] \\ & Hom_R(Ke\phi,A) \end{tikzcd} .$$

Dabei identifizieren wir $Hom_R(M\otimes_R M,A) = Hom_R(M,Hom_R(M,A))$ durch den natürlichen Isomorphismus.

In diesem Zusammenhang beschreiben wir zwei wichtige Klassen von Moduln die eine Verallgemeinerung auf Kategorien nahelegen.

2.8 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, und sei (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann sind die Aussagen in 1) und 2) für die natürlichen Abbildungen jeweils äquivalent

1) a) f ist ein Isomorphismus (Epimorphismus).
   b) $(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}(I\otimes M) \to (A,f)$ ist ein Isomorphismus (Epimorphismus).
   c) $A\otimes_R I \to A$ ist ein Isomorphismus (Epimorphismus).

2) a) $\bar{f}$ ist ein Isomorphismus (Monomorphismus).
   b) $(A,f) \to Hom_{R\times_\phi M}(I\otimes M,(A,f))$ ist ein Isomorphismus (Monomorphismus).
   c) $A \to Hom_R(I,A)$ ist ein Isomorphismus (Monomorphismus).

Beweis 1) Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A\otimes_{R\times_\phi M} T(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & A\otimes_{R\times_\phi M}(I\otimes M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ A\otimes_R M \arrow[r, "f"] & A . \end{tikzcd}$$

So gilt a) <=> b) wegen der Exaktheit der ersten Zeile. Ist $AM = A$ bzw. $AI = A$, so ist wegen $A\otimes_R Ke\phi = 0$ die Abbildung $1\otimes\phi\colon A\otimes_R M\otimes_R M \to A\otimes_R I$ bijektiv. So gilt a) <=> c) aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R M\otimes_R M \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d] & A\otimes_R M \arrow[d] \\ A\otimes_R I \arrow[r] & A . \end{tikzcd}$$

2) folgt in dualer Weise. $\square$

Für einen Ring R und ein beliebiges Ideal $I \subset R$ bezeichne $\mathbb{T}_I$ bzw. $\mathbb{C}_I$ die Klasse der R-Rechtsmoduln A, für die die natürliche Abbildung $A\otimes_R I \to A$ surjektiv bzw. bijektiv ist. Analog bezeichne $\mathbb{F}_I$ bzw. $\mathbb{D}_I$ solche Klassen von R-Rechtsmoduln A, für die die natürliche Abbildung $A \to Hom_R(I,A)$ injektiv bzw. bijektiv ist. Man zeigt leicht (vgl. auch Müller [28], Kato, Ohtake [21])

2.9 Lemma Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein beliebiges Ideal. Dann gilt
1) $\mathbb{T}_I$ ist abgeschlossen bzgl. Faktoren, direkter Summen, Erweite-

rungen und kleiner Epimorphismen.

2) $\mathbb{F}_I$ ist abgeschlossen bzgl. Untermoduln, direkter Produkte, Erweiterungen und großer Monomorphismen. □

Für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$, $J = MM\oplus M$ bezeichnen wir solche Klassen kurz durch $\mathbb{T}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{D}$.

2.10 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, und seien $F = \_\otimes_R M$, $G = \mathrm{Hom}_R(M,\_)$ und α, α' wie in 1.9

1) So sind $\mathbb{T}_I\times_\alpha F$, $\mathbb{C}_I\times_\alpha F$ semitriviale Erweiterungen und es gilt $\mathbb{T} = \mathbb{T}_I\times_\alpha F$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}_I\times_\alpha F$.

2) In ähnlicher Weise sind $G\times_{\alpha'}\mathbb{F}$ und $G\times_{\alpha'}\mathbb{D}$ semitriviale Erweiterungen und es gilt $\mathbb{F} = G\times_{\alpha'}\mathbb{F}_I$, $\mathbb{D} = G\times_{\alpha'}\mathbb{D}_I$.

3) F und $\_\otimes_{R\times_\phi M}T(M)$ definieren jeweils Selbstäquivalenzen auf $\mathbb{C}_I$ und $\mathbb{C}$.

4) G und $\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(T(M),\_)$ definieren jeweils Selbstäquivalenzen auf $\mathbb{D}_I$ und $\mathbb{D}$.

Beweis 1) Es ist wegen 2.8 nur zu zeigen, daß F auf $\mathbb{T}_I$ und $\mathbb{C}_I$ invariant ist. Ist aber $A\in\mathbb{T}_I$, dann ist $A\otimes_R M\otimes_R M\to A$ surjektiv. So gilt $T(A)\in\mathbb{T}$. Nach 2.8 ist $A\otimes_R M\in\mathbb{T}_I$. Analog ist F auf $\mathbb{C}_I$ wohldefiniert und $F^2\cong 1$. 2) folgt analog. Außerdem gilt auf $\mathbb{D}_I$ $G^2\cong 1$. Damit folgen 3) und 4) mit 2.3 und 2.6. □

BEMERKUNG ÜBER KATEGORIEN UND UNTERMODULNVERBÄNDE

2.11 Bemerkung

1) Für eine beliebige Kategorie C und semitriviale Erweiterungen $C\times_\phi F$ und $G\times_\psi C$ existieren immer Vergißfunktoren

$$P: C\times_\phi F\to C,\quad P: G\times_\psi C\to C.$$

Außerdem induzieren F und G Funktoren $F': C\times_\phi F\to C\times_\phi F$, $G': G\times_\psi C\to G\times_\psi C$ mit $F'(A,f) = (FA,Ff)$, $G'(f,A) = (Gf,GA)$ und natürliche Transformationen $\alpha: F'\to 1$, $\alpha': 1\to G'$. Ähnlich wie oben induzieren F' und G' Selbstäquivalenzen auf die zu $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ entsprechend definierten Kategorien sowie F und G auf $P(\mathbb{C})$ und $P(\mathbb{D})$ (vgl. auch 6.9).

2) Sei außerdem C eine Kategorie mit endlichen Produkten und

Koprodukten. Erhält F endliche Koprodukte, so definiert

$$T: C\to C\times_\phi F \quad\text{mit}\quad T(A) = (A\oplus FA, f),\quad T(h) = h\oplus Fh,$$

einen Funktor, wobei $f: FA\oplus F^2A\to A\oplus FA$ von 1_{FA} und $\phi(A)$ induziert wird. Erhält analog G endliche Produkte, so definiert

$$H: C\to G\times_\psi C \quad\text{mit}\quad H(A) = (f, A\times FA),\quad H(h) = h\times Gh,$$

einen Funktor. Dabei wird $f: A\times GA\to GA\times G^2A$ von 1_{GA} und $\psi(A)$ induziert. Weiter gilt für jeweils geeignete Objekte

$$\mathrm{Mor}_{C\times_\phi F}(T(A),(B,g))\cong \mathrm{Mor}_C(A,B),\quad \mathrm{Mor}_C(A,B)\cong\mathrm{Mor}_{G\times_\psi C}((f,A),H(B)).$$

3) Ist C eine Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten, und sind $C\times_\phi F$ und $G\times_\psi C$ verträglich, also ist (F,G) ein Adjunktionspaar und $C\times_\phi F\cong G\times_\psi C$, dann erhält F Koprodukte und G Produkte und es gibt zusätzliche Funktoren

$$T_1: C\to G\times_\psi C,\quad H_1: C\to C\times_\psi F.$$

Dabei wird T_1 durch $T_1(A) = (f, A\times FA)$ und $T_1(h) = h\oplus Fh$ definiert, wobei $f: A\times FA\to GA\times GFA$ von der Adjunktionsabbildung $\beta: A\to GFA$ und der Abbildung $\omega^{-1}(\psi): FA\to GA$ induziert wird. Dabei bezeichne ω den Adjunktionsisomorphismus. Man vergewissert sich leicht, daß das zugehörige Diagramm kommutiert. Analog wird H_1 definiert durch $H_1(A) = (A\oplus GA, f)$ und $H_1(h) = h\oplus Gh$, wobei $f: FA\oplus FGA\to A\oplus GA$ von $\beta': FGA\to A$ und $\omega(\phi): FA\to GA$ induziert wird. Man prüft leicht, daß der funktorielle Homomorphismus $\omega(\phi): F\to G$ funktorielle Homomorphismen $T_1\to H$ und $T\to H_1$ induziert.

4) Sei L ein vollständiger Verband. Dann definiert jede ordnungserhaltende Abbildung $\phi: L\to L$ mit $\iota: \phi^2(x)\le x$ für jedes $x\in L$ eine semitriviale Erweiterung $L\times_\iota\phi$. Ist $\psi: L\to L$ eine weitere ordnungserhaltende Abbildung mit $\iota: x\le\psi^2(x)$, so ist $\psi\times_\iota L$ eine semitriviale Erweiterung. Ist ϕ zu ψ linksadjungiert, d.h. gilt '$\phi(x)\le y \iff x\le\psi(x)$', so sind offensichtlich $L\times_\iota\phi$ und $\psi\times_\iota L$ verträglich.

5) Sei nun $R\times_\phi M$ eine semitriviale Ringerweiterung, und sei (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Für einen beliebigen Modul B_S über einem Ring S sei $V_S(B)$ der Untermodulverband. Dann definieren die Abbildungen

$$\phi: U\mapsto UM,\quad \psi: U\mapsto (U:M)\quad\text{mit}\quad U\subset A_R$$

ordnungserhaltende zueinander adjungierte Abbildungen (Funktoren). Mit 1.7 gilt dann

$$V_{R\times_\phi M}(A,f) \cong V_R(A)\times_\iota \phi \cong \phi\times_\iota V_R(A).$$

Die oben beschriebenen Funktoren $V_R(A) \to V_{R\times_\phi M}(A,f)$ sind gegeben durch

$$T\colon\ U \mapsto U+UM, \qquad H\colon\ U \mapsto U\cap(U:M)$$
$$T_1\colon\ U \mapsto U\cap UM, \qquad H_1\colon\ U \mapsto U+(U:M).$$

Ähnlich zu 2.10 gelten entsprechende Äquivalenzen. □

3 PROJEKTIVE UND INJEKTIVE MODULN

Für triviale Erweiterungen $R\ltimes M$ ($\phi = 0$) zeigten Reiten [35] und Fossum, Griffith, Reiten [6], daß alle projektiven bzw. injektiven $R\times M$-Rechtsmoduln sich als Bilder $T(P)$ bzw. $H(Q)$ von projektiven bzw. injektiven R-Rechtsmoduln darstellen lassen. Dies folgt leicht aus den Eigenschaften der Funktoren. So erhalten nämlich allgemein (ϕ beliebig) die rechtsexakten Funktoren T und C nach 2.1 und 2.6 projektive Objekte, sowie die linksexakten Funktoren H und K injektive Objekte. Weiter sind für $\phi = 0$ die Adjunktionsabbildungen $1_{\text{Mod-}R\times M} \to VC$ kleine Epimorphismen und $VK \to 1_{\text{Mod-}R\times M}$ große Monomorphismen, wegen $J^2 = 0$ für das Ideal $J = M$ in $R\times M$ und 2.6. Es gibt dann nach 2.2 Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & TC \arrow[d] & VK \arrow[r] \arrow[d] & 1_{\text{Mod-}R\times M} \\
1_{\text{Mod-}R\times M} \arrow[r] & VC & HK &
\end{tikzcd}$$

von jeweils kleinen Epimorphismen bzw. großen Monomorphismen. So gilt für projektive Moduln $(A,f) \cong T(A/AM)$ und für injektive Moduln $(A,\bar{f}) \cong H(\mathrm{Ke}(\bar{f}))$.

Falls $\phi \neq 0$ ist allgemein eine solche Darstellung nicht möglich. Hierzu gab Reiten [35] ein Beispiel.

3.1 Beispiel Ist $R = M = K$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $\phi\colon M\otimes_R M \to R$ die gewöhnliche Multiplikation in K, dann ist $e = (1/2,1/2) \in R\times_\phi M$ idempotent. Es gilt aber $e(R\times_\phi M) \cong K$ als R-Moduln und so $e(R\times_\phi M) \notin \mathrm{Bi}(T)$ aus Dimensionsgründen. □

Aus diesen Gründen ist eine allgemeine Charakterisierung der projektiven und injektiven Moduln über $R\times_\phi M$ in Ausdrücken über Mod-R schwierig. Hier wird zunächst gezeigt, daß unter Einschränkung der Modulklassen sich die oberen Betrachtungen für triviale Ringerweiterungen weitgehend verallgemeinern lassen. Z.B. geschieht dies für Klassen, in denen die Kleinheit der Adjunktion $1 \to VC$ bzw. die Größe von $VK \to 1$ zur Verfügung steht. Außerdem zeigen wir, daß die Funktoren T und H jeweils projektive und injektive Hüllen erhalten und reflektieren. So lassen sich auch die Ergebnisse von Palmer [33] verallgemeinern. Sie zeigte

3.2 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Ist (A,f) projektiv, dann ist A/AM R/I-projektiv und die Folge

$$A\otimes_R Ke(\phi) \xrightarrow{f_1} A\otimes_R M \xrightarrow{f} A$$

ist exakt (vgl. 2.7).

2) Ist (A,f) injektiv, dann ist $Ke(\bar{f})$ R/I-injektiv und die Folge

$$A \xrightarrow{\bar{f}} Hom_R(M,A) \xrightarrow{\bar{f}^1} Hom_R(Ke(\bar{f}),A)$$

ist exakt.

Ist außerdem $Bi(\phi)$ nilpotent, so gelten auch die Umkehrungen. □

1) und 2) von 3.2 folgen unmittelbar aus dem schärferen Lemma 3.22 und 2.6. Die letzte Behauptung folgt wiederum aus 3.22 und 3.28. Wir zeigen auch, daß in allgemeineren Fällen die injektiven Moduln und zum Teil auch die projektiven Moduln sich sogar wie oben in der Form $T(P)$ und $H(Q)$ für projektive Moduln P und injektive Moduln Q darstellen lassen.

VERHALTEN BEI DEN FUNKTOREN T UND H

3.3 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) T erhält und reflektiert zerfallende Epimorphismen.

2) H erhält und reflektiert zerfallende Monomorphismen.

Beweis 1) Gilt allgemeiner für ausgezeichnete Erweiterungen. Dabei ist die erste Behauptung klar. Sei $T(f)$ ein zerfallender Epimorphismus für einen Homomorphismus $f: A \to B$ und $g: T(B) \to T(A)$ ein $R\times_\phi M$-Homomorphismus mit $T(f)g = 1$. Wegen 2.1 hat g die Form $g = \begin{pmatrix} g' & \alpha(g''\otimes 1) \\ g'' & g'\otimes 1 \end{pmatrix}$. So gilt $fg' = 1_A$. 2) folgt dual. □

3.4 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, A ein R-Rechtsmodul. Dann gilt

1) $T(A)$ ist genau dann endlich erzeugt in Mod-$R\times_\phi M$, wenn A_R endlich

erzeugt ist.

2) $H(A)$ ist genau dann endlich koerzeugt in Mod-$R\times_\phi M$, wenn A_R endlich koerzeugt ist.

Beweis 1) T erhält und reflektiert Epimorphismen und erhält direkte Summen. Ist also $R^n \to A$ ein Epimorphismus, so auch $(R\times_\phi M)^n \cong T(R)^n \to T(A)$. Ist umgekehrt $T(A)$ endlich erzeugt und $\oplus_I A_i \to A$ ein Epimorphismus, so auch $\oplus_I T(A_i) \to T(A)$. Es gibt dann eine endliche Teilmenge $I_\circ \subset I$ mit $\oplus_{I_\circ} A_i \to A$ surjektiv.

2) '=>' folgt auf ähnliche Weise. Ist umgekehrt A_R endlich koerzeugt und $H(A) \to \prod_I(B_i,g_i)$ ein Monomorphismus, so auch $A \to H(A) \to \prod_I B_i$. Es gibt dann eine endliche Teilmenge $I_\circ \subset I$ derart, daß $A \to H(A) \to \prod_{I_\circ} B_i$ injektiv ist. Man prüft dann leicht durch die Kommutativität in (6) im 1. Kapitel und $KH(A) \subset A$, daß $H(A) \to \prod_{I_\circ}(B_i,g_i)$ injektiv ist. □

3.5 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $(A,f) = (U\oplus V, \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix})$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul.

1) Ist f_1 surjektiv, so ist (A,f) genau dann endlich erzeugt, wenn U_R endlich erzeugt ist.

2) Ist f_2 injektiv, so ist (A,f) genau dann endlich koerzeugt, wenn U_R endlich koerzeugt ist.

Beweis 1) '<=' folgt aus dem Lemma 3.5, da $T(U) \to (A,f)$ wegen 2.2 surjektiv ist. '=>' folgt leicht aus 3.4 und 2.2 wegen der Kleinheit. 2) folgt ähnlich. □

3.6 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, A ein R-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Ist A_R ein Generator, so auch $T(A)$ in Mod-$R\times_\phi M$. Die Umkehrung gilt genau dann, wenn $A\otimes_R M$ von A_R generiert wird.

2) Ist A_R ein Kogenerator, so auch $H(A)$ in Mod-$R\times_\phi M$. Die Umkehrung gilt genau dann, wenn $Hom_R(M,A)$ von A_R kogeneriert wird.

Beweis 1) Da P und H treu sind, erhalten T und P Generatoren. 2) folgt dual. □

3.7 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, A ein R-Rechtsmodul. Dann gilt

1) $T(A)$ ist genau dann projektiv in Mod-$R\times_\phi M$, wenn A_R projektiv ist.

2) $H(A)$ ist genau dann injektiv in Mod-$R\times_\phi M$, wenn A_R injektiv ist.

Beweis 1) Ist A_R projektiv, dann auch $T(A)$ wegen 2.1. Die Umkehrung folgt mit dem Lemma 3.3. 2) folgt dual. □

3.8 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $(A,f) = (U\oplus V,\begin{pmatrix}0 & h\\ g & 0\end{pmatrix})$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Ist $g\colon U\otimes_R M \to V$ surjektiv, dann sind äquivalent
   a) (A,f) ist projektiv,
   b) U_R ist projektiv und g bijektiv,
   c) U_R ist projektiv und es gilt $(A,f) \cong T(U)$.

2) Ist $\tilde{h}\colon V \to \mathrm{Hom}_R(M,U)$ injektiv, dann sind äquivalent
   a) (A,f) ist injektiv,
   b) U_R ist injektiv und $\tilde{h}$ ein Isomorphismus,
   c) U_R ist injektiv und es gilt $(A,f) \cong H(U)$.

Entsprechend gelten die symmetrischen Aussagen (vgl. 2.2).

Beweis Folgt aus 3.7 und 2.2. □

Satz 3.8 1) wurde von Palmer [33] für den Fall ϕ surjektiv gezeigt. In diesem Fall ist nach 3.8 ϕ bijektiv. Außerdem sind M_R und $_RM$ nach 3.5 und 3.6 Progeneratoren.

3.9 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, A ein R/I-Rechtsmodul. Dann ist $(A,0)$ genau dann projektiv in Mod-$R\times_\phi M$, wenn A_R projektiv ist und $A\otimes_R M = 0$. □

3.10 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) T erhält und reflektiert projektive Hüllen (kleine Epimorphismen).

2) H erhält und reflektiert injektive Hüllen (große Monomorphismen).

Beweis 1) Wir zeigen, daß T kleine Epimorphismen erhält und reflektiert. Sei $f\colon A \to B$ ein R-Homomorphismus. Ist f ein kleiner Epimorphismus und $f' = (h,d)\colon (C,g) \to T(A)$ ein $R\times_\phi M$-Homomorphismus mit $H(f)f'$ surjektiv, so betrachte folgendes kommutatives Diagramm in Mod-R

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{(h,d)} & A\oplus A\otimes_R M & \xrightarrow{(f,f\otimes 1)} & B\oplus B\otimes_R M \\ & & {\scriptstyle p_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_B} \\ & & A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \end{array} .$$

Dabei sind p_A, p_B die Projektionen. Nach Voraussetzung ist dann h surjektiv. Wegen (4) im 1. Kapitel gilt $\mathrm{Bi}(dg) = \mathrm{Bi}(h\otimes 1) = A\otimes_R M$. Also ist (h,d) surjektiv. Ist umgekehrt $T(f)$ ein kleiner Epimorphismus und $g\colon C \to A$ ein R-Homomorphismus derart, daß fg surjektiv ist, so gilt dies auch für $T(f)T(g)$ und wegen der Kleinheit auch für $T(g)$. Wegen der Treuheit von T ist dann g surjektiv. 2) folgt dual. □

3.11 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $(A,f) = (U\oplus V,\begin{pmatrix}0 & f_2\\ f_1 & 0\end{pmatrix})$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul, sei $U'\oplus V' \subset (A,f)$ ein Untermodul mit $U' \subset U$, $V' \subset V$. Dann gilt

1) Ist f_1 surjektiv, dann ist $U'\oplus V' \subset (A,f)$ genau dann klein, wenn $U' \subset U_R$ klein ist.

2) Ist f_2 injektiv, dann ist $U'\oplus V' \subset (A,f)$ genau dann groß, wenn $U' \subset U_R$ groß ist.

Beweis 1) Es gibt ein kommutatives Diagramm in Mod-$R\times_\phi M$

$$\begin{array}{ccc} T(U) & \xrightarrow{g} & (A,f) \\ {\scriptstyle T(p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ T(U/U') & \xrightarrow{g'} & (\bar{A},\bar{f}), \end{array}$$

wobei gilt $(\bar{A},\bar{f}) = (U/U'\oplus V/V',\begin{pmatrix}0 & \bar{f}_2\\ \bar{f}_1 & 0\end{pmatrix}) \cong (A,f)/U'\oplus V'$, und g, g' nach 2.2 von der Adjunktion induziert werden. Außerdem bezeichnen p und p' die kanonischen Epimorphismen.

'=>': Nach 2.2 ist $p'g$ klein, so ist auch $T(p)$ klein. Die Behauptung folgt nach 3.10. '<=': Nach Voraussetzung, 2.2 und 3.10 sind $T(p)$ und g' klein. Mit $\mathrm{Ke}(p'g) \subset T(U)$ klein ist dann auch $\mathrm{Ke}(p') \subset (A,f)$ klein. □

3.12 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $(A,f) = (U\oplus V,\begin{pmatrix}0 & h\\ g & 0\end{pmatrix})$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Ist $g\colon U\otimes_R M \to V$ surjektiv und P eine projektive Hülle von U_R, dann ist $T(P)$ eine projektive Hülle von (A,f).

2) Ist $\tilde{h}\colon V \to \mathrm{Hom}_R(M,U)$ injektiv und Q eine injektive Hülle von U_R, dann ist $H(Q)$ eine injektive Hülle von (A,f).

Beweis Folgt aus 3.10 und 3.2. □

SELBSTINJEKTIVE RINGE

Insbesondere gelten folgende Aussagen in 3.13, die zum Teil von Sakano [37] unabhängig neulich auf andere Weise gezeigt wurden und Spezialfälle der oberen Ergebnisse darstellen. Vergleiche auch 3.19 und 3.25 für weitere Ergebnisse über selbstinjektive Ringe.

3.13 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I(R)$ und $I(M)$ eine injektive Hülle von R_R und M_R. Dann gilt

1) Ist ϕ rechts nicht entartet (vgl. 1.10), so ist $H(I(R)) = I(R)\oplus \mathrm{Hom}_R(M,I(R))$ eine injektive Hülle von $R\times_\phi M$.

2) Ist ϕ rechts nicht entartet, so ist $R\times_\phi M$ genau dann rechts selbstinjektiv, wenn R rechts selbstinjektiv ist und $M \cong \mathrm{Hom}_R(M_R,R_R)$ auf natürliche Weise.

3) Ist ϕ rechts nicht entartet, so ist $R\times_\phi M$ genau dann ein rechts PF-Ring, wenn R ein rechts PF-Ring ist und $M \cong \mathrm{Hom}_R(M_R,R_R)$ auf natürliche Weise.

4) Ist $_RM$ treu, so ist $H(I(M)) = I(M)\oplus \mathrm{Hom}_R(M,I(M))$ eine injektive Hülle von $R\times_\phi M$.

5) Ist $_RM$ treu, so ist $R\times_\phi M$ genau dann rechts selbstinjektiv, wenn M_R injektiv ist und $R \cong \mathrm{End}(M_R)$ durch die Linksmultiplikation.

6) Ist $_RM$ treu, so ist $R\times_\phi M$ genau dann ein rechts PF-Ring, wenn M_R injektiv und endlich koerzeugt ist und $R \cong \mathrm{End}(M_R)$ durch die Linksmultiplikation.

Beweis Folgt aus 3.12 und aus 3.8 (bzw. 3.12) und 3.4, da ein Ring genau dann ein rechts PF-Ring ist, wenn er rechts selbstinjektiv und rechts endlich koerzeugt ist. □

3.13 charakterisiert Ringe $R\times_\phi M$ mit vollkommener Dualität für den Fall, daß ϕ nicht entartet bzw. M beidseitig treu ist. Auch charakterisiert 3.13 zusammen mit 7.2 Quasifrobeniusringe. 3.14 gibt weitere Charakterisierungen für PF-Ringe.

Ein Ring R heißt ein **rechts Kasch-Ring**, wenn $I(R_R)$ ein Kogenerator in Mod-R ist, d.h. wenn für jeden zyklischen Rechtsmodul $C \neq 0$ gilt $\mathrm{Hom}_R(C,R) \neq 0$. Ist $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung und ist ϕ rechts nicht entartet bzw. $_RM$ treu, dann ist $R\times_\phi M$ nach 3.13 und 3.6 ein rechts Kasch-Ring, falls ebenfalls auch R ein rechts Kasch-Ring ist bzw. falls $I(M_R)$ ein Kogenerator ist. Die Umkehrung gilt genau dann, wenn $\mathrm{Hom}_R(M,I(R))$ von $I(R)$ bzw. $\mathrm{Hom}_R(M,I(M))$ von $I(M)$ kogeneriert wird. Es gilt weiter

3.14 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) Ist ϕ nicht entartet, dann ist $R\times_\phi M$ genau dann ein rechts Kasch-Ring, wenn R ein rechts Kasch-Ring ist.

2) Sind $_RM$ und M_R treue Moduln, dann ist $R\times_\phi M$ genau dann ein rechts Kasch-Ring, wenn $I(M_R)$ ein Kogenerator ist.

Beweis 1) ' => ' folgt aus 3.6 und 3.13. ' <= ': Ist $C = aR \neq 0$ ein zyklischer Rechtsmodul, so auch $T(aR)$. Also wegen 2.1 gilt $\mathrm{Hom}_R(C,R\times_\phi M) \neq 0$. Ist $0 \neq \phi: C \to M$ ein R-Homomorphismus, dann existiert $m \in M$ mit $m\phi(a) \neq 0$. Es gilt dann also $\mathrm{Hom}_R(C,R) \neq 0$. Hieraus folgt die Behauptung. 2) folgt analog. □

Aus 3.13 und 3.14 bzw. aus 3.8 und 3.14 folgen auch unmittelbar die Sätze 3.3 und 3.4 von [37] über rechts injektive Kogenerator-Ringe. Vergleiche Kasch [19] Übung 12.11 für analoge Aussagen über triviale Erweiterungen von kommutativen Ringen.

UNTERKATEGORIEN C° UND C^*

Für einen beliebigen Ring R und ein Ideal $I \subset R$ sei

$$C_I^\circ = \{A \in \text{Mod-R} \mid AI \subset A \ \text{ klein}\}$$
$$C_I^* = \{A \in \text{Mod-R} \mid l_A(I) \subset A \ \text{ groß}\}.$$

Man prüft leicht

3.15 Lemma Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt

1) C_I° ist bzgl. Faktoren, Erweiterungen, projektiven Hüllen und endlichen direkten Summen abgeschlossen.

2) C_I^* ist bzgl. Untermoduln, Erweiterungen, injektiven Hüllen und

endlichen direkten Produkten abgeschlossen.

3) Ist C_I° bzgl. Untermoduln abgeschlossen und $(\mathbb{T}_I, \mathbb{F}')$ die Torsionstheorie zu $\mathbb{T}_I$, dann gilt $C_I^\circ \subset \mathbb{F}'$.

4) Ist $C_I^\star$ bzgl. Faktoren abgeschlossen und $(\mathbb{T}', \mathbb{F}_I)$ die Torsionstheorie zu $\mathbb{F}_I$, dann gilt $C_I^\star = \mathbb{T}'$. □

Bekanntlich gilt $C_I^\circ = \text{Mod-}R$ genau dann, wenn I links-t-nilpotent ist (im Sinne der Definition von Kasch [19]), und $C_I^\star = \text{Mod-}R$ genau dann, wenn I rechts-t-nilpotent ist.
Ist für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ $I = MM$, $J = I\oplus M$, dann schreiben wir für $C_J^\circ \subset \text{Mod-}R\times_\phi M$ und $C_J^\star \subset \text{Mod-}R\times_\phi M$ jeweils kurz C° und $C^\star$. Also ist $(A,f) \in C^\circ$ genau dann, wenn $AM \subset (A,f)$ klein ist, und $(A,f) \in C^\star$ genau dann wenn $\mathrm{Ke}\bar{f} \subset (A,f)$ groß ist.

3.16 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, A ein R-Rechtsmodul.

1) Es gilt $A \in C_I^\circ$ genau dann, wenn $T(A) \in C^\circ$.

2) Es gilt $A \in C_I^\star$ genau dann, wenn $H(A) \in C^\star$.

Ist außerdem (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul, so ist $(A,f) \in C^\circ$, falls die Bedingungen in 1) gelten, und $(A,f) \in C^\star$, falls solche in 2) gelten.

Beweis Nach 3.11 ist $AI \subset A$ genau dann klein, wenn $AI\oplus A\otimes_R M \subset T(A)$ klein ist als $R\times_\phi M$-Untermodul, und $l_A(I) \subset A_R$ genau dann groß, wenn $l_A(I) \subset H(A)$ groß ist als $R\times_\phi M$-Untermodul. Damit gilt 1) und 2). Ist (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul und $A \in C_I^\circ$ bzw. $A \in C_I^\star$, so ist (A,f) als Faktor von $T(A)$ nach 3.15 in C° enthalten, bzw. ist (A,f) zu einem Untermodul von $H(A) \in C^\star$ isomorph. □

3.17 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Ist C° bezüglich Untermoduln abgeschlossen, so auch C_I° und es gilt $(A,f) \in C^\circ$ genau dann, wenn $A \in C_I^\circ$.
Dann ist $C^\circ = C_I^\circ \times_\alpha F$ eine semitriviale Erweiterung von C_I° im Sinne von 1.5 mit $F = \_\otimes_R M$ und $\alpha: F^2 \to 1$ kanonisch.

2) Ist $C^\star$ bezüglich Faktoren abgeschlossen, so auch $C_I^\star$ und es gilt $(A,f) \in C^\star$ genau dann, wenn $A \in C_I^\star$.
Dann ist $C^\star = G\times_{\alpha'} C_I^\star$ eine adjungierte semitriviale Erweiterung von $C_I^\star$

mit $G = \mathrm{Hom}_R(M,\_)$ und $\alpha': 1 \to G^2$ im Sinne von 1.5.

Beweis 1) Aus 3.16, 3.11 und Voraussetzung folgt, daß C_I° bzgl. Untermoduln abgeschlossen ist. Ist $A \in C_I^\circ$, dann $(A,f) \in C^\circ$ nach 3.16. Ist $(A,f) \in C^\circ$ so auch $AM \in C^\circ$. Wegen der Exaktheit von

$$0 \to (\mathrm{Ke}\phi, 0) \to (A\otimes_R M, f\otimes 1) \to (AM, f') \to 0$$

und $(\mathrm{Ke}\phi, 0) \in C^\circ$ gilt dann $(A\otimes_R M, f\otimes 1) \in C^\circ$. Wegen der Exaktheit von

$$0 \to (A\otimes_R M, -f\otimes 1) \to T(A) \to (A,f) \to 0$$

gilt dann $T(A) \in C^\circ$. Nach 3.16 gilt dann $A \in C_I^\circ$. Außerdem ist dann auch $A\otimes_R M \in C_I^\circ$. So induziert F einen Funktor $F: C_I^\circ \to C_I^\circ$. Damit ist die Behauptung gezeigt. 2) folgt analog. □

Ist also für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ das Ideal $I = MM$ links-t-nilpotent bzw. rechts-t-nilpotent, so gilt nach 3.16 $C^\circ = \text{Mod-}R\times_\phi M$ bzw. $C^\star = \text{Mod-}R\times_\phi M$. Mit 3.16 gilt dann auch die Umkehrung. Insbesondere ist I genau dann links-t-nilpotent, wenn $I\oplus M \subset R\times_\phi M$ links-t-nilpotent ist (vgl. 8.10). Folgende Charakterisierungen der projektiven und injektiven Moduln und der projektiven und injektiven Hüllen stellen dann eine Verallgemeinerung der bekannten Ergebnisse für triviale Erweiterungen und Dreiecksmatrizenringe [6,35] und für die entsprechenden Ergebnisse für semitriviale Erweiterungen in [33] sowie in [37] dar.

3.18 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul.

1) Ist $(A,f) \in C^\circ$, dann sind äquivalent

a) $P \to A/AM$ ist projektive Hülle in Mod-R.

b) $T(P) \to (A,f)$ ist projektive Hülle in Mod-$R\times_\phi M$.

2) Ist $(A,f) \in C^\star$, dann sind äquivalent

a) $\mathrm{Ke}\bar{f} \to Q$ ist injektive Hülle in Mod-$R\times_\phi M$.

b) $(A,\bar{f}) \to H(Q)$ ist injektive Hülle in Mod-R.

Beweis 1) Nach Voraussetzung ist $(A,f) \to (A/AM, 0)$ ein kleiner Epimorphismus. Ist dann zunächst $T(P) \to (A,f)$ eine projektive Hülle, so auch $T(P) \to (A/AM, 0)$. Nach 3.7 und 3.11 ist dann $P \to A/AM$ eine projektive Hülle in Mod-R. Ist nun umgekehrt $P \to A/AM$ eine projektive

Hülle in Mod-$R\times_\phi M$, dann ist wiederum nach 3.12 bzw. nach 3.10, wegen der Kleinheit von $T(A/AM) \to (A/AM,0)$, $T(P) \to (A/AM,0)$ eine projektive Hülle. Es gibt aber einen Homomorphismus $g\colon T(P) \to (A,f)$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & T(P) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d] \\ (A,f) \arrow[r] & (A/AM,0) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann ist Keg klein in $T(P)$, und wegen der Kleinheit von $(A,f) \to (A/AM,0)$ ist g surjektiv. 2) folgt dual. □

3.19 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, $R\times_\phi M \in C^*$ (z.B. I rechts-t-nilpotent). Dann ist

$$I(1_R(M))\oplus I(1_M(M)) \oplus \mathrm{Hom}_R(M, I(1_R(M))\oplus I(1_M(M)))$$

eine injektive Hülle von $R\times_\phi M$. □

Folgerung 3.19 wurde von Sakano [37,Theorem 2.4] für den Fall I nilpotent gezeigt.

3.20 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$ links-t-nilpotent. Dann ist $R\times_\phi M$ genau dann rechtsperfekt, wenn R rechtsperfekt ist (Vgl. 8.11). □

3.21 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, A ein R-Rechtsmodul. Dann gilt

$$\mathrm{Tor}^{R\times_\phi M}(T(A),R/I) \cong \mathrm{Tor}^R(A,R/I)$$
$$\mathrm{Ext}_{R\times_\phi M}(R/I,H(A)) \cong \mathrm{Ext}_R(R/I,A).$$

Beweis Wegen $T(A)\otimes_{R\times_\phi M}(I\oplus M) \cong A\otimes_R(I\oplus M)$ und der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} (A\otimes_R I)\oplus(A\otimes_R M) \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} 1\otimes i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \\ T(A)\otimes_{R\times_\phi M}(I\oplus M) \arrow[r] & T(A) \end{tikzcd}$$

gilt $\mathrm{Tor}^{R\times_\phi M}(T(A),R/I) \cong \mathrm{Ke}(T(A)\otimes_{R\times_\phi M}(I\oplus M) \to T(A)) \cong \mathrm{Ke}(A\otimes_R I \to A) \cong \mathrm{Tor}^R(A,R/I)$. Der zweite Isomorphismus folgt dual. □

3.22 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann sind die Aussagen in 1) bzw. die Aussagen in 2) äquivalent

1) a) $\mathrm{Tor}^{R\times_\phi M}((A,f),R/I) = 0$

b) Die Folge $A\otimes Ke\phi \xrightarrow{f_1} A\otimes_R M \xrightarrow{f} A$ ist exakt.

Ist außerdem $(A,f) = (U\oplus V, \binom{0h}{g0})$ und g surjektiv, dann auch

c) $\mathrm{Tor}^R(U,R/I) = 0$ und $g\colon U\otimes_R M \to v$ ist bijektiv.

2) a) $\mathrm{Ext}_{R\times_\phi M}(R/I,(A,f)) = 0$

b) Die Folge $A \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{f^1} \mathrm{Hom}_R(Ke\Phi,A)$ ist exakt

Ist außerdem $(A,f) = (U\oplus V, \binom{0h}{g0})$ und $\bar h$ injektiv, dann auch

c) $\mathrm{Ext}_R(R/I,U) = 0$ und $\bar h\colon V \to \mathrm{Hom}_R(M,U)$ ist bijektiv.

Beweis 1) Wir zeigen etwas mehr, nämlich $Kef/Bif_1 \cong \mathrm{Tor}_{R\times_\phi M}((A,f),R/I)$. Dazu betrachte man nach 2.7 die exakte Folge in Mod-$R\times_\phi M$

$$(A\otimes_R Ke\phi,0) \xrightarrow{f_1} (A\otimes_R M, f\otimes 1) \longrightarrow (A,f)\otimes_{R\times_\phi M} J \to 0$$

mit $J = I\oplus M$ und das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} (A\otimes_R M, f\otimes 1) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & (A,f)\otimes J \arrow[dl, "1\otimes i"] \\ (A,f) & \end{tikzcd}$$

Dann gilt $\mathrm{Tor}_{R\times_\phi M}((A,f),R/I) \cong \mathrm{Ke}(1\otimes i) \cong Kef/Bif_1$. Also gilt 'a)<=>b)'. Gilt b) und $(A,f) = (U\oplus V, \binom{0h}{g0})$, so sind die induzierten Folgen

$$U\otimes_R Ke\phi \xrightarrow{g_1} V\otimes_R M \xrightarrow{h} U$$
$$V\otimes_R Ke\phi \xrightarrow{h_1} U\otimes_R M \xrightarrow{g} V$$

exakt. Dabei werden g_1 und h_1 von f_1 induziert. Man prüft leicht mit 1.19 $h_1 = 0$. So ist g bijektiv. Insbesondere gilt $(A,f) \cong T(U)$. Mit 3.21 folgt dann die Äquivalenz c) <=> a), b). 2) folgt dual. □

3.23 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$. Ist $(A,f) \in C^*$, dann sind äquivalent

1) (A,f) ist injektiv in Mod-$R\times_\phi M$.

2) $(A,\bar f) \cong H(Q)$ für einen injektiven R-Rechtsmodul Q. In diesem Fall ist Q_R eine injektive Hülle von $Ke\bar f$.

Ist außerdem C^* bzgl. Faktoren abgeschlossen, dann auch

3) $Ke\bar{f}$ 'ist injektiver R/I-Rechtsmodul und die Folge (vgl. 2.7)

$$A \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{f^1} \mathrm{Hom}_R(Ke\phi,A)$$

ist exakt.

Beweis Die Äquivalenz 1) <=> 2) sowie die letzte Aussage in 2) folgen unmittelbar aus 3.18. Mit 1) bzw. 2) folgt 3) aus 2.6 und 3.22. Gilt nun 3), dann sei ι: $Ke\bar{f} \to Q$ eine injektive Hülle in Mod-R und ι': $Ke\bar{f} \to \mathfrak{I}_Q(I)$ die induzierte Abbildung. So ist h: $(A,f) \to H(Q)$ nach 3.18 eine injektive Hülle in Mod-$R\times_\phi M$, wobei h von $(\iota,0)$: $Ke\bar{f} \to H(Q)$ induziert wird. Setze (C,g) für den Kokern von h. Dann induziert die exakte Folge

$$0 \to (A,f) \xrightarrow{h} H(Q) \longrightarrow (C,g) \to 0$$

nach 3.22 eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}(R/I,(A,f)) \to \mathrm{Hom}(R/I,H(Q)) \to \mathrm{Hom}(R/I,(C,g)) \to 0.$$

Also ist

$$0 \to Ke\bar{f} \xrightarrow{\iota'} \mathfrak{I}_Q(I) \longrightarrow Ke\bar{g} \to 0$$

nach 2.6 auch exakt. Nun ist ι' groß. Außerdem sind $Ke\bar{f}$ und $\mathfrak{I}_Q(I)$ injektive R/I-Moduln. So ist ι' ein Isomorphismus. Also gilt $Ke\bar{g} = 0$. Nach Voraussetzung ist aber $Ke\bar{g} \subset (C,g)$ groß. So gilt $C = 0$. Damit ist 2) gezeigt. □

Man erhält hierzu dual

3.24 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$. Ist $(A,f) \in C^\circ$ und besitzt A/AM eine projektive Hülle in Mod-R, dann sind äquivalent

1) (A,f) ist projektiv in Mod-$R\times_\phi M$.

2) $(A,f) \cong T(P)$ für einen projektiven R-Rechtsmodul P. In diesem Fall ist P eine projektive Hülle von A/AM.

Ist außerdem C° bzgl. Untermoduln abgeschlossen, dann auch

3) A/AM ist projektiver R/I-Rechtsmodul und die Folge

$$A\otimes_R Ke\phi \xrightarrow{f_1} A\otimes_R M \xrightarrow{f} A$$

ist exakt. □

3.25 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$ rechts-t-nilpotent. Dann ist $R\times_\phi M$ genau dann rechts selbstinjektiv, wenn gilt

1) $\mathfrak{I}_R(M)$ und $\mathfrak{I}_M(M)$ sind injektive R/I-Rechtsmoduln.

2) Die Folgen

$$R \xrightarrow{\bar{m}} \mathrm{End}(M_R) \xrightarrow{\phi(\_\otimes 1)i} \mathrm{Hom}_R(Ke\phi,R)$$
$$M \xrightarrow{\bar{\Phi}} \mathrm{Hom}_R(M_R,R_R) \xrightarrow{m(\_\otimes 1)i} \mathrm{Hom}_R(Ke\phi,M)$$

sind exakt. □

Dies verallgemeinert Satz 1.4.1 von [35]. Denn für $\phi = 0$ ist $\mathfrak{I}_M(M) = M$. Außerdem ist $\bar{m}$ surjektiv und $Ke(m(\_\otimes 1)i) = \mathrm{Hom}_R(M,\mathfrak{I}_R(M)) = Bi\bar{\Phi} = 0$.

3.26 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) Ist I links-t-nilpotent, so gilt $(A,f) \cong T(A/AM)$ für jeden projektiven $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) genau dann, wenn $(R/I)_R$ projektiv ist.

2) Ist I rechts-t-nilpotent, so gilt $(A,f) \cong H(Ke\bar{f})$ für jeden injektiven $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) genau dann, wenn ${}_R(R/I)$ flach ist.

Beweis 1) '=>' ist klar und '<=' gilt nach 3.24, da mit (A,f) auch $(A/AM)_R$ projektiv ist.
2) '<=' folgt dual. Für '=>' ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R\times_\phi M_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) \cong (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R\times_\phi M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),f)$ ein injektiver $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. So ist $Ke\bar{f} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R/I_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})_R$ injektiv. Also ist ${}_R(R/I)$ flach. □

Aus 3.22 und den Adjunktionsrelationen folgt unmittelbar

3.27 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul.

1) Ist die Folge $A\otimes_R Ke\phi \xrightarrow{f_1} A\otimes_R M \xrightarrow{f} A$ exakt, dann gilt

$$\mathrm{Tor}^{R\times_\phi M}((A,f),(C,0)) \cong \mathrm{Tor}^{R/I}(A/AM,C)$$
$$\mathrm{Ext}_{R\times_\phi M}((A,f),(B,0)) \cong \mathrm{Ext}_{R/I}(A/AM,B)$$

für jeden R/I-Rechtsmodul B und jeden R/I-Linksmodul C.

2) Ist die Folge $A \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{f^1} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ke}\phi,A)$ exakt, dann gilt

$$\mathrm{Ext}_{R\times_\phi M}((B,0),(A,f)) \cong \mathrm{Ext}_{R/I}(B,\mathrm{ke}\bar f)$$

für jeden R/I-Rechtsmodul B. □

Bezeichne im folgenden p-dim die projektive Dimension und rh-dim die rechts globale homologische Dimension.

3.28 Bemerkung Ist $I \subset R$ ein beliebiges nilpotentes Ideal, so sind trivialerweise für jeden R-Rechtsmodul A äquivalent

1) $\text{p-dim}_R A \le n$
2) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B) = 0$ für jeden R/I-Rechtsmodul B.

Insbesondere gilt $\text{rh-dim}_R R = \sup\{\text{p-dim}_R A \mid A\ R/I\text{-Rechtsmodul}\}$. □

Ist $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$ nilpotent, so ist $J = I\oplus M$ nilpotent. Mit 3.22 und 3.27 folgt dann unmittelbar 3.2.

FLACHE MODULN

In analoger Weise untersuchen wir flache Moduln über einer semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$.

Für jeden beliebigen Ring S bezeichne $^\circ$ den Funktor

$$^\circ : \text{Mod-}S \to S\text{-Mod}$$

definiert durch $B^\circ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}B, {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ und $f^\circ = \mathrm{Hom}(f,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ für Moduln B und Homomorphismen f in Mod-S.
Ist (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul, dann kommutiert wegen (4) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^\circ & \xrightarrow{f^\circ} & (A\otimes_R M)^\circ \\ \cong\downarrow & & \downarrow (f\otimes 1)^\circ \\ (A\otimes_R R)^\circ & \xrightarrow{\phi^\circ} & (A\otimes_R M\otimes_R M)^\circ \end{array} .$$

Es gibt aber funktorielle Isomorphismen $(A\otimes_R M)^\circ \cong \mathrm{Hom}_R(M,A^\circ)$, $(A\otimes_R M\otimes_R M)^\circ \cong \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(M,A^\circ))$. Identifiziere $f^\circ\colon A^\circ \to (A\otimes_R M)^\circ \cong \mathrm{Hom}_R(M,A^\circ)$. So ist (A°,f°) ein $R\times_\phi M$-Linksmodul (in der adjungierten Darstellung), und es gilt auf natürliche Weise

$$(A,f)^\circ \cong (A^\circ,f^\circ), \quad (\mathrm{Ke}\bar f,0)^\circ \cong (\mathrm{cok}(f)^\circ,0)$$

als $R\times_\phi M$-Linksmoduln. Weiter bezeichne $H'\colon R\text{-Mod} \to R\times_\phi M\text{-Mod}$ den entsprechenden Hom-Funktor für die Kategorie der Linksmoduln. So gibt es natürliche Isomorphismen

$$T(A)^\circ \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes_R(R\times_\phi M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H'(A^\circ)$$

für $A \in$ Mod-R.

3.29 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, A ein R-Rechtsmodul. Dann ist A_R flach genau dann, wenn $T(A)$ flach ist in Mod-$R\times_\phi M$. □

3.30 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $(A',f') = (A\oplus B,\begin{pmatrix}0&f\\g&0\end{pmatrix})$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul mit g surjektiv. Dann sind äquivalent

1) (A',f') ist flach.
2) A_R ist flach und g bijektiv.
3) A_R ist flach und $(A',f') \cong T(A)$.

Beweis $(A\oplus B,\begin{pmatrix}0&f\\g&0\end{pmatrix})$ ist nach der Vorbemerkung zu 3.29 genau dann flach, wenn $(A^\circ\oplus B^\circ,\begin{pmatrix}0&f^\circ\\g^\circ&0\end{pmatrix})$ ein injektiver $R\times_\phi M$-Linksmodul ist. Dies ist, da g° injektiv ist, nach 3.8 genau dann der Fall, wenn A° injektiv ist und g° bijektiv. Hieraus folgt die Behauptung. □

Insbesondere gilt

3.31 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann ist $(A,0) \in$ Mod-$R\times_\phi M$ genau dann flach, wenn A_R flach ist und $A\otimes_R M = 0$. Ist also $R\times_\phi M$ von Neumann regulär, dann (nach 3.29) auch R und $MI = M$ für $I = MM$. □

3.32 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Ist (A,f) flach, dann ist A/AM ein flacher R/I-Rechtsmodul und die Folge

$$A\otimes_R \mathrm{Ke}\phi \xrightarrow{f_1} A\otimes_R M \xrightarrow{f} A$$

ist exakt. Ist I links-t-nilpotent, dann gilt auch die Umkehrung.

Beweis Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus 3.22 und den

Eigenschaften des Funktors C: Mod-$R\times_\phi M \to$ Mod-R/I. Weiter ist (A,f) flach, genau dann wenn (A°, f°) ein injektiver $R\times_\phi M$-Linksmodul ist. Dies ist, falls I links-t-nilpotent ist, nach 3.23 genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Kef}^\circ \cong \mathrm{Cok}(f)^\circ$ injektiver R/I-Linksmodul ist, und die Folge von Linksmoduln

$$A^\circ \to \mathrm{Hom}_R(M,A^\circ) \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ke}\phi, A^\circ)$$

exakt ist. Also genau dann, wenn $(A/AM)_{R/I}$ flach ist, und die Folge

$$A\otimes_R \mathrm{Ke}\phi \to A\otimes_R M \to A$$

exakt ist. □

Satz 3.32 wurde von Palmer [33] für den Fall, daß I nilpotent ist, gezeigt.

HEREDITÄRE RINGE

Wir untersuchen nun einige Beziehungen zwischen der homologischen Dimension (in Zeichen rh-dim) von R und $R\times_\phi M$ für den Fall rh-dim $R\times_\phi M \leq 1$. Folgender Satz wurde in [33] für den rechts hereditären Fall gezeigt. Wir bringen den Beweis hierfür wegen der Unmittelbarkeit dieser Aussagen aus den Ergebnissen in diesem Abschnitt. Weiter lassen sich diese Aussagen für rechts semihereditäre Ringe verallgemeinern.

3.33 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$. Ist $R\times_\phi M$ rechts hereditär (semihereditär), dann gilt

1) R ist rechts hereditär (semihereditär).

2) Jeder (endlich erzeugte) Untermodul $U \subset M_R$ ist projektiv, d.h. M_R ist rechts hereditär (semihereditär).

3) Es gilt (in beiden Fällen) $\mathrm{Ke}\phi = 0$.

4) ${}_R M$ ist flach (in beiden Fällen).

Im rechts hereditären Fall gilt

5) R/I ist rechts hereditär

6) Kef ist R/I-projektiv für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f).

7) $\mathrm{Cok}\bar{f}$ ist R/I-injektiv für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f).

Beweis 1) Ist $J \subset R$ ein beliebiges (endlich erzeugtes) Rechtsideal, so

ist auch $J\oplus JM \subset R\times_\phi M$ (nach 3.5 endlich erzeugtes) Rechtsideal, als projektiv nach Voraussetzung. Nach 3.8 ist J_R projektiv. Analog gelte 2) und 5).

3) Im hereditären Fall ist dies klar nach 3.8, da $I\oplus M$ projektiv ist. Se nun $U \subset M_R$ endlich erzeugt. Wegen 3.8 ist die von ϕ induzierte Folg $0 \to U\otimes_R M \to R$ exakt. Da jeder Modul ein direkter Limes (mit gerichtete Indexmenge) von endlich erzeugten Untermoduln ist, ist wegen der Exakthei von $\varinjlim$ die Folge $0 \to M\otimes_R M \to R$ exakt. Also $\mathrm{Ke}\phi = 0$.

4) Ähnlich ist für jedes endlich erzeugte Rechtsideal $J \subset R$ da Rechtsideal $J\oplus JM \subset R\times_\phi M$ projektiv. Wegen 3.22 c) bzw. 3.8 ist di Komposition $J\otimes_R M \to JM \to M$ injektiv. Hieraus folgt die Behauptung.

6) Sei (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul und die Folge

$$0 \to (K,h) \to (P,g) \to (A,f) \to 0$$

exakt in Mod-$R\times_\phi M$ mit (P,g) $R\times_\phi M$-projektiv. Betrachte dann das kommuta tive Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & K\otimes_R M & \longrightarrow & P\otimes_R M & \longrightarrow & A\otimes_R M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Wegen $\mathrm{Ke}\phi = 0$ und 3.22 ist $\mathrm{Keg} = 0$. Es gibt dann eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Kef} \to K/KM \to P/PM \to A/AM \to 0$$

und K/KM ist R/I-projektiv. So ist Kef nach 5) R/I-projektiv.

7) Folgt durch Dualisieren von 6) und aus der Eigenschaft für einen recht hereditären Ring, daß jeder Faktor eines injektiven Rechtsmoduls injekti ist. □

In [33] zeigte Palmer, daß im rechts hereditären Fall auch di Umkehrung des Satzes (ohne 7)) gilt, falls $I = MM$ nilpotent ist. In folgenden verallgemeinern wir dieses Resultat für den Fall, daß I rechts-t-nilpotent ist. Wir zeigen auch in 3.35, daß die Bedingungen rh-dim $R \leq$ 1 und M_R projektiv überflüssig sind.

3.34 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$ rechts-t-nilpotent. Dann sind äquivalent

1) $R\times_\phi M$ ist rechts hereditär.

2) a) R/I ist rechts hereditär.
   b) M_R ist projektiv.
   c) $Ke\Phi = 0$.
   d) $Cok\bar{f}$ ist R/I-injektiv für jeden $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul (A,f).

Beweis Wegen 3.33 ist nur '1) <= 2)' zu zeigen. Sei (A,f) ein $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul und sei die Folge

$$0 \to (A,\bar{f}) \to (Q,\bar{g}) \to (C,\bar{h}) \to 0$$

exakt in Mod-$R\times_\Phi M$ (in der adjungierten Darstellung) mit $(Q,\bar{g})$ $R\times_\Phi M$-injektiv. Wegen 3.22 und c) ist $\bar{g}$ surjektiv. Betrachte dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Hom_R(M,A) \arrow[r] & Hom_R(M,Q) \arrow[r] & Hom_R(M,C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen wegen b). Dann gibt es eine exakte Folge

$$0 \to Ke\bar{f} \to Ke\bar{g} \to Ke\bar{h} \to cok\bar{f} \to 0.$$

Wegen a) ist $Ke\bar{h} \cong Cok\bar{f} \oplus B$ mit B R/I-injektiv. Also ist $Ke\bar{h}$ wegen d) R/I-injektiv. Wegen der Exaktheit der unteren Zeile im Diagramm ist $\bar{h}$ surjektiv. Damit sind die Voraussetzungen von 3.23 3) erfüllt. Also ist (C,g) $R\times_\Phi M$-injektiv. □

Dual hierzu erhält man

3.35 Satz Sei $R\times_\Phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM \subset R$ links-t-nilpotent und sei jedes Ideal von R semiperfekt. Dann sind äquivalent

1) $R\times_\Phi M$ ist rechts hereditär.
2) a) R/I ist rechts hereditär.
   b) ${}_RM$ ist flach.
   c) $Ke\Phi = 0$.
   d) Kef ist R/I-projektiv für jeden $R\times_\Phi M$-Rechtsmodul (A,f).

Beweis Betrachte dual zu 3.34 eine exakte Folge

$$0 \to (C,h) \to R\times_\Phi M \to (A,f) \to 0$$

für ein Rechtsideal $(C,h) \subset R\times_\Phi M$. □

Ist $I = MM$ nilpotent, so kann nach 3.28 und 3.2 die Voraussetzun[g] der Semiperfektheit weggelassen werden. In diesem Fall sind die Aussag[en] von 3.34 und 3.35 äquivalent.

4 HOMOLOGISCHE DIMENSION

Wir geben zunächst die relative Standard-Auflösungen für einen Modul über einer semitriviale Erweiterung (im Sinne der relativen homologischen Algebra [15]) und beschreiben die relativen Funktoren Tor und Ext. Weiter untersuchen wir einige Zusammenhänge zwischen der homologischen und der relativen homologischen Dimension. Dies stellt Ergebnisse des dritten Kapitels in einen allgemeineren Zusammenhang.

Für die projektive, injektive, schwache und rechts globale homologische Dimension schreiben wir jeweils p-dim, i-dim, s-dim und rh-dim. Für die relativen Begriffe schreiben wir auf die übliche Weise für eine Ringerweiterung S/R jeweils $\text{p-dim}_{(S,R)}$, $\text{i-dim}_{(S,R)}$ für die relative projektive und relative injektive Dimension. Entsprechendes gilt für die Funktoren Ext und Tor.

RELATIVE STANDARDAUFLÖSUNGEN

Man erhält zu einem $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) durch iterative Anwendung von 2.1 2) die **$(R\times_\phi M,R)$-projektive Standard-Auflösung** (im Sinne von [15]) in der Form

$$\ldots \to (A_2,f_2) \xrightarrow{\alpha_2} (A_1,f_1) \xrightarrow{\alpha_1} (A_0,f_0) \xrightarrow{\alpha_0} (A,f) \to 0$$

mit

$$(A_i,f_i) = T(F^i(A)), \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} (-1)^i F^{i-1}(f) & F^{i-1}(\alpha) \\ 1 & (-1)^i F^i(f) \end{pmatrix}$$

wobei F^i die Funktoren

$$F^0 = 1_{\text{Mod-}R}, \quad F^{-1} = 0, \quad F^i(A) = A\otimes_R M^{\otimes i} = A\otimes_R M\otimes\ldots\otimes_R M$$

bezeichnen. In dualer Weise erhält man die **$(R\times_\phi M,R)$-injektive Standard-Auflösung** in der Form (adjungierte Darstellung)

$$0 \to (A,f) \xrightarrow{\alpha^0} (A^0,f^0) \xrightarrow{\alpha^1} (A^1,f^1) \xrightarrow{\alpha^2} (A^2,f^2) \to \ldots$$

mit

$$(A^i,f^i) = H(G^i(A)), \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} (-1)^i G^{i-1}(\bar f) & 1 \\ G^{i-1}(\alpha') & (-1)^i G^i(\bar f) \end{pmatrix}$$

wobei G^i die Funktoren $G^{-1} = 0$, $G^0 = 1_{\text{Mod-}R}$ und

$$G^i(A) = \text{Hom}^i_R(M,A) = \text{Hom}_R(M,\text{Hom}_R(M,\ldots,\text{Hom}_R(M,A)\ldots)),$$

bezeichnen. Für diese Auflösungen (für den reduzierten Anteil) setzen wi jeweils $\underline{F}(A,f)$ und $\underline{G}(A,f)$. Insbesondere definieren $\underline{F}$ und $\underline{G}$ kovarian te Funktoren. Entsprechend setzen wir $\underline{F}'(A,f)$ und $\underline{G}'(A,\bar f)$ für Linksmo duln. Für $(A,f) = R\times_\phi M \cong T(R)$ hat die relative Standard-Auflösung $F(R\times_\phi M \to R\times_\phi M$ die Form

$$\ldots \to T^2(M\otimes_R M) \to T^2(M) \to T^2(R) \to R\times_\phi M \to 0.$$

Wir können nun die relativen Funktoren $\text{Tor}^{(R\times_\phi M,R)}$ und $\text{Ext}_{(R\times_\phi M,R)}$ mittels der Adjunktionsrelationen in 2.1 beschreiben. Sei (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul und (B,g) ein $R\times_\phi M$-Linksmodul. Dann bezeichne $A\otimes_R M^*\otimes_R B$ den Komplex von abelschen Gruppen

$$\ldots \to A\otimes_R M^{\otimes 2}\otimes_R B \to A\otimes_R M\otimes_R B \to A\otimes_R B \to 0$$

mit dem Differential $d_i = f\otimes 1+(-1)^i\otimes g$, $i \geq 1$. Ist zugleich (B,h) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul, so ist $(A\otimes_R M^{\otimes q}\otimes_R B, 1\otimes h)$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dies ist der Fall für $(B,g) = (\text{Ke}\phi,0)$ bzw. $(B,g) = (R/MM,0)$.

In [33] wurden die speziellen Komplexe für $(B,g) = (\text{Ke}\phi,0)$ und $(B,g) = (R/MM,0)$ eingeführt. Hierdurch werden diese Komplexe verallgemeinert. Ist außerdem $MM = 0$, so ist $\text{Ke}\phi = M\otimes_R M$. Damit stimmt dieser Komplex mit dem von Palmer, Roos [32,31] und Fossum, Griffith, Reiten [6, S. 56] eingeführten F-Komplex überein.

Im folgenden bezeichne C^+ für einen Komplex C mit dem Differential d den Komplex definiert durch

$$C^+_n = C_n \quad\text{und}\quad d^+_n = (-1)^n d_n.$$

4.1 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul und (B,g) ein $R\times_\phi M$-Linksmodul. Es gibt dann natürliche Isomorphismen von Komplexen

$$(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}\underline{F}'(B,g) \cong A\otimes_R M^*\otimes_R B \cong \underline{F}(A,f)^+\otimes_{R\times_\phi M}(B,g).$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Tor}_n^{(R\times_\phi M,R)}((A,f),(B,g)) \cong H_n(A\otimes_R M^*\otimes_R B)$$
$$(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}(B,g) \cong H_0F(A,B) \cong A\otimes_R B/\mathrm{Bi}(f\otimes 1-1\otimes g).$$

Weiter gibt es natürliche Komplexisomorphismen

$$(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}\underline{E}'(R\times_\phi M)^+ \cong \underline{E}(A,f), \quad \underline{E}'(B,g) \cong F(R\times_\phi M)^+\otimes_{R\times_\phi M}(B,g).$$

Beweis Es gilt auf natürliche Weise $(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}T'(C) \cong A\otimes_R C$ mit $a\otimes(c,m\otimes c') \mapsto a\otimes c+am\otimes c'$ für jeden R-Linksmodul C. So gilt

$$(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}T'(M^{\otimes n}\otimes_R B) \cong A\otimes_R M^{\otimes n}\otimes_R B$$
$$T(A\otimes_R M^{\otimes n})\otimes_{R\times_\phi M}(B,g) \cong A\otimes_R M^{\otimes n}\otimes_R B.$$

Man stellt leicht fest, daß die Differentiale kommutieren bei dem ersten und zweiten Isomorphismus. □

In dualer Weise definieren wir für $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln (A,f), (B,g) den Komplex $\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^*,B)$ durch

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M,B) \to \mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^{\otimes 2},B) \to \cdots$$

mit dem Differential $d^i = (-1)^i\mathrm{Hom}(f\otimes 1,B)+g(\_\otimes 1)$, $i \geq 0$ und durch die Adjunktionsrelation $\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M,B) \cong \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R(M,B))$ den Komplex $\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R^*(M,B))$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R(M,B)) \to \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R^2(M,B)) \to \cdots$$

mit dem Differential $d^i = \mathrm{Hom}(M,\_)\bar{f}+(-1)^i\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}^{i-1}(M,\bar{g})$, $i \geq 0$. Wegen der Adjunktionsrelation gibt es dann einen Komplexisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^*,B) \cong \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R^*(M,A))^+.$$

Weiter gilt

4.2 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, und seien (A,f) und (B,g) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln. Dann gibt es natürliche Komplexisomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),\underline{G}(B,g)) \cong \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R^*(M,B))$$
$$\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(\underline{E}(A,f),(B,g)) \cong \mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^*,B)$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Ext}^n_{(R\times_\phi M,R)}((A,f),(B,g)) \cong H^n\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R^*(M,B)) \cong H^n\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^*,(B,g)).$$

Die Beschreibung $\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)) = \mathrm{Ke}(d^1)$ für beide Differenti stimmt dann mit der Kommutativität der entsprechenden Diagramme in (4) (6) im 1. Kapitel überein.

Beweis Gilt dual zu 4.1. □

4.3 Bemerkung

1) Sind (A,f), (C,h) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln und (B,g) ein $R\times_\phi M$-Linksm dul, so sind bekanntlich $(A,f)\otimes_{R\times_\phi M}\underline{E}(B,g)$ und $\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),\underline{G}(C,h$ exakte Komplexe, falls (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv ist. Analog i $\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(\underline{E}(A,f),(C,h))$ ein exakter Komplex, falls (C,h) $(R\times_\phi M,R)$-injekt ist.

2) Sind f, g, h die Nullabbildungen, so gilt für die Homologiegrupp

$$H_n(A\otimes_R M^*\otimes_R B) = A\otimes_R M^{\otimes n}\otimes_R B, \quad H^n\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^*,C) = \mathrm{Hom}_R(A\otimes_R M^{\otimes n},C).$$

Es gilt unmittelbar bei Betrachtung der relativen Standard-Auflösunger

4.4 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, und sei (A,f) ei $R\times_\phi M$-Rechtsmodul.

1) Es gilt $\text{p-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,f) \leq n$ genau dann, wenn $(A\otimes_R M^{\otimes n},f\otimes 1$ $(R\times_\phi M,R)$-projektiv ist.

2) Es gilt $\text{i-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,f) \leq n$ genau dann, wen $(\mathrm{Hom}_R^n(M,A),\mathrm{Hom}^n(M,\bar{f}))$ $(R\times_\phi M,R)$-injektiv ist. □

Insbesondere gilt

4.5 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ei $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann gilt

1) $\text{p-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,f) \leq n$ falls $A\otimes_R M^{\otimes n+1} = 0$.

2) $\text{i-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,f) \leq n$ falls $\mathrm{Hom}_R^{n+1}(M,A) = 0$.

Ist außerdem $f = 0$ dann

3) Es gilt $\text{p-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,0) \leq n$ genau dann, wenn $A\otimes_R M^{\otimes n+1} = 0$.

4) Es gilt $\text{i-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,0) \leq n$ genau dann, wenn $\mathrm{Hom}_R^{n+1}(M,A) = 0$.

Beweis Mit $A\otimes_R M^{\otimes n+1} = 0$ gilt $T(A\otimes_R M^{\otimes n}) = (A\otimes_R M^{\otimes n},0)$. So gilt die

Behauptung nach 4.4. Analog gilt 2). 3) und 4) gelten wegen 1) und 2) und Lemma 2.2. Danach hat jedes Differential in der projektiven Standard-Auflösung einen kleinen Kern, bzw. ist das Bild jedes Differentials in der injektiven Standard-Auflösung groß im Ziel. □

Weiter gilt unmmittelbar aus 3.7

4.6 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann sind äquivalent

1) R ist halbeinfach
2) Jeder $(R\times_\phi M,R)$-projektive Rechtsmodul ist projektiv
3) Jeder $(R\times_\phi M,R)$-injektive Rechtsmodul ist injektiv.

Insbesondere ist R halbeinfach, falls $R\times_\phi M$ halbeinfach ist (vgl. 7.7).

Beweis Für jeden R-Rechtsmodul A ist T(A) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv und H(A) $(R\times_\phi M,R)$-injektiv. □

FLACHHEITS- UND PROJEKTIVITÄTSBEDINGUNGEN

4.7 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, A ein R-Rechtsmodul.

1) Ist $\mathrm{Tor}_n^R(A,M) = 0$ für $n \geq 1$, dann gilt

$$\text{p-dim}_R A = \text{p-dim}_{R\times_\phi M} T(A)$$
$$\text{s-dim}_R A = \text{s-dim}_{R\times_\phi M} T(A).$$

2) Ist $\mathrm{Ext}_R^n(M,A) = 0$ für $n \geq 1$, dann gilt

$$\text{i-dim}_R A = \text{i-dim}_{R\times_\phi M} H(A).$$

Insbesondere gilt, falls $_RM$ flach bzw. M_R projektiv ist (vgl. Kasch [18]),

$$\text{rh-dim } R \leq \text{rh-dim } R\times_\phi M.$$

Ist $_RM$ flach, dann gilt auch

$$\text{rf-dim } R \leq \text{rf-dim } R\times_\phi M,$$

wobei rf-dim die finitistische projektive Dimension bezeichnet. Die letzten beiden Abschätzungen gelten auch bei Einschränkung auf endlich

erzeugten Moduln.

Beweis Gerade durch die Voraussetzung ist es bekanntlich möglic projektive, bzw. flache, bzw. injektive Auflösungen von A mittels und H zu liften. Wegen 3.7, 3.4 und 3.29 gilt dann die Behauptung. □

In [35] zeigte Reiten für triviale Erweiterungen ($\phi = 0$), daß fall $_RM$ flach ist und $M^{\otimes n+1} = 0$, dann gilt $\text{rh-dim } R\times_\phi M \leq n+\text{rhdim}R$. Palme [33, Theorem 5] zeigte dies für den Fall $\phi \neq 0$. Wir zeigen im folgenden daß dies ein Spezialfall eines allgemeineren Zusammenhanges ist. Es gil bekanntlich (Hochschild [16]) für eine beliebige flache Ringerweiterung S/ ($_RS$ flach) und einen S-Rechtsmodul A

$$\text{p-dim}_S A \leq \text{p-dim}_{(S,R)} A + \text{rh-dim } R.$$

Ist außerdem S_R projektiv, dann kann man statt rh-dim R die projektiv Dimension $\text{p-dim}_R A$ setzen. Nun erhält man durch duale Argumente zu Theorem 1 in [16] die duale Aussage für den Fall, daß S_R projektiv ist

$$\text{i-dim}_S A \leq \text{i-dim}_{(S,R)} A + \text{rh-dim } R.$$

Falls zusätzlich $_RS$ flach ist, können wir $\text{i-dim}_R A$ statt rh-dim [illegible] setzen. Wir können dann das Theorem 5 von [33] erweitern.

4.8 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Ist $M^{\otimes n+1} =$ [illegible] oder $\text{rh-dim}(R\times_\phi M,R) \leq n$ für eine natürliche Zahl n und $_RM$ flach bzw. M_R projektiv, dann gilt

$$\text{rh-dim } R \leq \text{rh-dim } R\times_\phi M \leq n + \text{rh-dim}R.$$

Sind außerdem $_RM$ flach und M_R projektiv, dann gilt auch

$$\text{rf-dim } R \leq \text{rf-dim } R\times_\phi M \leq n + \text{rf-dim}R.$$

Beweis Die erste Ungleichung im ersten Teil folgt aus 4.7, die zweite aus 4.5 und der Vorbemerkungzu 4.8. Analog folgt der zweite Teil wegen $\text{p-dim}_R A \leq \text{p-dim}(A,f)$ für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f). □

Es gilt also mit $_RM$ flach $\text{rh-dim } R\times_\phi M \leq \infty$, falls auch $\text{rh-dim } R \leq \infty$ und $M^{\otimes n} = 0$ für eine natürliche Zahl n. In [32, S.399] wurde hierfür auch die Umkehrung für triviale Erweiterungen ($\phi = 0$) gezeigt. Dies gilt im allgemeinen nicht für semitriviale Erweiterungen ($\phi \neq 0$). Betrachte z.B $R\times_{\phi}M \cong K[X]/(X^2-1)$ für einen Körper K (1.2). In [33, Proposition 4] wurde aber für den Fall ${}_R(\mathrm{Ke}\phi)$ und ${}_RM$ flach gezeigt, daß $M^{\otimes n-1}\otimes_R\mathrm{Ke}\phi = 0$ gilt, falls auch rh-dim $R\times_{\phi}M \le n$. Dies enthält das obere Ergebnis für triviale Erweiterungen ($\mathrm{Ke}\phi = M\otimes_R M$). Es läßt sich leicht allgemeiner zeigen

4.9 Lemma Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul.

1) Ist $A\otimes_R M^{\otimes r}$ flach bzw. projektiv in Mod-R für jedes $r \ge 0$, dann

$$\text{s-dim}_{R\times_{\phi}M}(A,f) \le n \iff (A\otimes_R M^{\otimes n}, f\otimes 1) \text{ flach}$$

bzw.

$$\text{p-dim}_{R\times_{\phi}M}(A,f) \le n \iff \text{p-dim}_{(R\times_{\phi}M,R)}(A,f) \le n$$

2) Ist $\mathrm{Hom}_R^r(M,A)$ injektiv in Mod-R für jedes $r \ge 0$, dann

$$\text{i-dim}_{R\times_{\phi}M}(A,f) \le n \iff \text{i-dim}_{(R\times_{\phi}M,R)}(A,f) \le n.$$

Beweis 1) Nach Voraussetzung und 3.29 bzw. 3.7 ist $\mathbb{F}(A,f)$ eine flache bzw. projektive Auflösung von (A,f). Hieraus folgt die Behauptung. 2) folgt dual. □

4.10 Bemerkung

1) Ist im Lemma $f = 0$, dann läßt sich die rechte Seite der Äquivalenzen in 1) bzw. 2) wegen 4.5 und 3.31 durch $A\otimes_R M^{\otimes n+1} = 0$ bzw. $\mathrm{Hom}_R^{n+1}(M,A) = 0$ ersetzen.

2) Ist s-dim $R\times_{\phi}M \le n$ (schwache globale Dimension) und sind ${}_R(\mathrm{Ke}\phi)$ und ${}_RM$ flache Moduln, so gilt wegen der exakten Folge

$$0 \to \mathrm{Ke}\phi \to T(M) \to R\times_{\phi}M \to R/I \to 0$$

$\text{s-dim}_{R\times_{\phi}M}(\mathrm{Ke}\phi,0) \le n-2$ als Linksmodul. Nach 4.10 1) mit $A = \mathrm{Ke}\phi$ gilt dann $M^{\otimes n-1}\otimes_R\mathrm{Ke}\phi = 0$. Dies verallgemeinert Proposition 4 von [33]. □

PROJEKTIVE UND INJEKTIVE AUFLÖSUNGEN

Für einen $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul (A,f) konstruieren wir auf folgende Weise eine projektive Auflösung. Man nehme einen surjektiven R-Homomorphismus $g: P_0 \to A$, wobei P_0 R-projektiv ist. So ist durch den Adjunktionsisomorphismus $\mathrm{Hom}_R(P_0,A) \cong \mathrm{Hom}_{R\times_{\phi}M}(T(P_0),(A,f))$ der $R\times_{\phi}M$-Homomorphismus

$(g,f(g\otimes 1)): T(P_0) \to (A,f)$ surjektiv. Wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \to (A_0,f_0) \to (K_0,g_0) \to (A,f) \to 0$$

in Mod-$R\times_{\phi}M$, wobei $(K_0,g_0) = T(P_0)$ projektiv ist. Durch iterative Anwendung desselben Verfahrens erhalten wir eine projektive Auflösung $(K_*,g_*) \to (A,f) \to 0$ und einen Komplex P_* über A (d.i $P_* \to A \to 0$) von projektiven R-Moduln. Wegen des Isomorphismus (nach 2.4)

$$\mathrm{Hom}_{R\times_{\phi}M}(T(P_n),T(P_{n-1})) \cong \mathrm{Hom}_R(P_n,P_{n-1})\oplus\mathrm{Hom}_R(P_n,P_{n-1}\otimes_R M)$$

ist das Differential von (K_*,g_*) gegeben durch

$$k_n = \begin{pmatrix} d_n & \alpha(h_n\otimes 1) \\ h_n & d_n\otimes 1 \end{pmatrix},$$

wobei d_n das Differential von P_* ist, und $h_n: P_n \to P_{n-1}\otimes_R M$ wegen $k^2 = 0$ Abbildungen sind mit $h_n d_{n+1}+(d_n\otimes 1)h_{n+1} = 0$.

Dual hierzu konstruieren wir eine injektive Auflösung

$$0 \to (L^0,g^0) \to (L^1,g^1) \to (L^2,g^2) \to \dots$$

von (A,f) mit dem Differential k derart, daß gilt $(L^n,g^n) = H(Q^n)$ für einen injektiven Komplex Q^* über A $(0 \to A \to Q^*)$ in Mod-R, wobei k durch

$$k^n = \begin{pmatrix} d^n & h^n \\ \mathrm{Hom}(M,h^n)\alpha' & \mathrm{Hom}(M,d^n) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dabei ist d^n das Differential von Q^* und $h^n: \mathrm{Hom}_R(M,Q^n) \to Q^{n+1}$ sind Abbildungen mit $d^{n+1}h^n+h^{n+1}\mathrm{Hom}(M,d^n) = 0$ wegen $k^2 = 0$.

Wir untersuchen nun weitere Zusammenhänge zwischen der homologischen und der relativen Dimension. Sei nun (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul und (B,g) ein $R\times_{\phi}M$-Linksmodul. Weiter sei $(K_*,g_*) \to (A,f) \to 0$ wie oben konstruiert eine projektive Auflösung und $\mathbb{F}'(B,g) \to (B,g) \to 0$ die $(R\times_{\phi}M,R)$-projektive Standard-Auflösung von (B,g). Wir erhalten dann einen Bikomplex von abelschen Gruppen

$$L_{**} = K_*\otimes_R M^*\otimes_R B \cong (K_*,g_*)\otimes\mathbb{F}'(B,g)$$

d.h. das Digramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\to & & T(P_1)\otimes_{R\times_\phi M}(B,g) & \to & T(P_0)\otimes_{R\times_\phi M}(B,g) & \to & (A,f)\otimes_{R\times_\phi M}(B,g) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\to & & T(P_1)\otimes_R B & \to & T(P_0)\otimes_R B & \to & A\otimes_R B & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\to & & T(P_1)\otimes_R M\otimes_R B & \to & T(P_0)\otimes_R M\otimes_R B & \to & A\otimes_R M\otimes_R B & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & &
\end{array}$$

definiert einen Bikomplex mit folgenden Eigenschaften

1) Die Spalten sind die exakten Komplexe $K_p\otimes_R M^*\otimes_R B$, $p \geq 0$. Und es gilt nach 4.1

$$K_p\otimes_R M^*\otimes_R B \cong (K_p,g_p)\otimes_{R\times_\phi M}E'(B,g), \quad 0 \leq p.$$

2) Die Abbildungen $L_{pq} \to L_{p-1,q}$ in den Zeilen werden von dem Differential von (K_*,g_*) induziert. So gibt es Komplexisomorphismen

$$L_{*q} \cong (K_*,g_*)\otimes_{R\times_\phi M}E'(B,g)_q.$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Tor}_p^{R\times_\phi M}((A,f),E'(B,g)_q) \cong H_p(K_*\otimes_R M^{\otimes q}\otimes_R B)) \quad q \geq 0.$$

3) Weiter ist dann die Null-Homologie-Zeile $(K_*,g_*)\otimes_{R\times_\phi M}(B,g)$ mit p-te Homologie $\mathrm{Tor}_p^{R\times_\phi M}((A,f),(B,g))$. Die Null-Homologie-Spalte ist der Komplex $A\otimes_R M^*\otimes_R B$, dessen q-te Homologie $\mathrm{Tor}_p^{(R\times_\phi M,R)}((A,f),(B,g))$ ist. Wir erhalten dann

4.11 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul und (B,g) ein $R\times_\phi M$-Linksmodul. So gibt es eine Spektralfolge

$$E^2_{pq} = H_q\mathrm{Tor}_p^{R\times_\phi M}((A,f),E'(B,g)) \overset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Tor}_n^{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)).$$

Weiter gibt es natürliche Abbildungen

$$j_n\colon \mathrm{Tor}_n^{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)) \to \mathrm{Tor}_n^{(R\times_\phi M,R)}((A,f),(B,g)), \quad n \geq 0.$$

Ist dann $\mathrm{Tor}_n^R(M,M^{\otimes r}\otimes_R B) = 0$ und $\mathrm{Tor}_n^R(A,M^{\otimes r}\otimes_R B) = 0$ für jedes $n \geq 1$, $r \geq 0$, dann ist j_n für jedes $n \geq 0$ ein Isomorphismus.

Beweis Der erste Teil der Behauptung ist klar aus dem Vorhergehenden

und aus der Theorie der Spektralsequenzen. Insbesondere sind die Abbildungen j_n durch die Eck-Homomorphismen gegeben. Ist $\mathrm{Tor}_n^R(M,M^{\otimes r}\otimes_R B) =$ (
d.h. $\mathrm{Tor}_n^R(R\times_\phi M,M^{\otimes r}\otimes_R B) = 0$ für jedes $n \geq 1$, $r \geq 0$, dann gilt bekanntlic
für $r \geq 0$

$$\mathrm{Tor}_p^{R\times_\phi M}((A,f),T'(M^{\otimes r}\otimes_R B)) \cong \mathrm{Tor}_p^R(A,M^{\otimes r}\otimes_R B), \quad p \geq 0.$$

Falls zusätzlich $\mathrm{Tor}_n^R(A,M^{\otimes r}\otimes_R B) = 0$ für $n \geq 1$, $r \geq 0$, dann entartet die Spektralsequenz. So sind die Eck-Homomorphismen bijektiv. Hieraus folgt die Behauptung. □

4.12 Bemerkung Sind zum Beispiel ${}_RM$, ${}_R(\mathrm{Ke}\phi)$ flache Moduln, so gilt

$$H_i(A\otimes_R M^*\otimes_R \mathrm{Ke}\phi) = 0, \quad i \geq r-1, \quad \text{falls} \quad \mathrm{pdim}_{R\times_\phi M}(A,f) \leq r,$$

wegen 4.11 und die Isomorphismen

$$\mathrm{Tor}_{r+1}^{R\times_\phi M}((A,f),(R/I,0)) \cong \mathrm{Tor}_r^{R\times_\phi M}((A,f),J) \cong \mathrm{Tor}_{r-1}^{R\times_\phi M}((A,f),(\mathrm{Ke}\phi,0))$$

mit $J = MM\oplus M \subset R\times_\phi M$. Dies wurde bereits in [33, S.250] gezeigt. Hieraus folgt auch die entsprechende Aussage in 4.10. □

Sind (A,f), (B,g) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln, so erhalten wir in ähnlicher Weise Spektralsequenzen

$$E_2^{pq} = H^p\mathrm{Ext}^q_{R\times_\phi M}((A,f),G(B,g)) \overset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^n_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g))$$

$$E_2^{pq} = H^p\mathrm{Ext}^q_{R\times_\phi M}(F(A,f),(B,g)) \overset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^n_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g))$$

für die oben gegebene projektive Auflösung $(K_*,g_*) \to (A,f)$ und die injektive Auflösung $(B,g) \to (L^*,g^*)$. Insbesondere

4.13 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f), (B,g) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln. Dann gilt

1) Ist $\mathrm{Ext}^n_R(M,\mathrm{Hom}^r_R(M,B) = 0$, $\mathrm{Ext}^n_R(A,\mathrm{Hom}^r_R(M,B) = 0$ für $n \geq 1$ und $r \geq 0$, so gilt

$$\mathrm{Ext}^n_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)) \cong \mathrm{Ext}^n_{(R\times_\phi M,R)}((A,f),(B,g)).$$

2) Ist $\mathrm{Tor}_n^R(A\otimes M^{\otimes r},M) = 0$, $\mathrm{Ext}^n_R(A\otimes_R M^{\otimes r},B) = 0$ für $n \geq 1$, $r \geq 0$, dann gilt

$$\mathrm{Ext}^n_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)) \cong \mathrm{Ext}^n_{(R\times_\phi M,R)}((A,f),(B,g)). \quad □$$

5 F-SEMITRIVIALE ERWEITERUNGEN

In [33] charakterisierte Palmer die projektiven Moduln für den Fall ϕ bijektiv (surjektiv) unter jeweils einer der folgenden Bedingungen
1) Für jeden Modul (A,f) gibt es einen R-Untermodul $U \subset A$ mit $A = U \oplus UM$.
2) $2 \in R$ ist invertierbar.
Gilt 1) bzw. 2) dann zerfällt für jeden Modul die Folge in 1.19. Hierdurch ist es uns möglich beide Bedingungen für eine allgemeinere Charakterisierung von homologischen Eigenschaften zusammenzufassen. In [33] wurde gezeigt

5.1 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, ϕ bijektiv, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Genügt (A,f) der Bedingung 1) bzw. 2), dann ist (A,f) genau dann projektiv, wenn A_R projektiv ist. $\square$

Im allgemeinen, falls ϕ bijektiv ist, reflektiert der Funktor P: Mod-$R\times_\phi M \to$ Mod-R die homologischen Eigenschaften nicht. Es gilt nämlich [33]

5.2 Beispiel Sei $R = M = \mathbb{Z}$ und ϕ die Multiplikation in $\mathbb{Z}$, dann ist $R\times_\phi M \cong R[X]/(X^2-1)$ und $\overline{(X-1)} \cong (R,-\phi)$. Aber $\overline{(X-1)}$ ist nicht projektiv als $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. $\square$

Genügt aber allgemeiner eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ (ϕ beliebig) der Bedingung 1), dann sind allgemeiner nach 3.8 die projektiven Moduln vollständig charakterisiert. Dann ist nämlich (A,f) genau dann projektiv, wenn U_R projektiv ist und $(A,f) \cong T(U)$. Analog gilt dies für den injektiven Fall. Ist zusätzlich f surjektiv, also $U = UMM$, dann folgt 5.1 wegen der Symmetrie in 3.8.

Wir zeigen nun zunächst, daß unter Einschränkung der Klassen der betrachteten Moduln sich die Charakterisierung im Fall 2) verallgemeinern läßt. Solche Klassen stimmen dann mit Mod-$R\times_\phi M$ überein, falls ϕ surjektiv ist. Ist dies der Fall, dann nennen wir $R\times_\phi M$ eine **F-semitriviale Erweiterung**. Palmer [33] vermutete, daß in 5.1 die Bedingung 2) eine

entscheidende Rolle spielt. Wir zeigen, daß der Grund darin liegt, daß eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß jeder $R\times_\phi M$-Modul $(R\times_\phi M,R)$-pr jektiv ist, d.h. $R\times_\phi M/R$ ist eine **halbeinfache Ringerweiterung** im Sinne v Hirata, Sugano [14].

Sei also (A,f) ein beliebiger $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Nach 1.19 2) ist d Folge

$$0 \to (A,-f) \xrightarrow{\bar{n}} (A\oplus A,\left(\begin{smallmatrix}0 & f\\ f & 0\end{smallmatrix}\right)) \xrightarrow{e'} (A,f) \to 0$$

exakt. Ist (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv bzw. -injektiv, dann ist die Folg exakt zerfallend. Weiter gibt es eine $(R\times_\phi M,R)$-exakte Folge

$$\cdots \to D(A) \xrightarrow{d_{i+1}} D(A) \xrightarrow{d_i} D(A) \to \cdots$$

mit

$$d_i = \begin{pmatrix} 1_A & (-1)^i 1_A \\ (-1)^i 1_A & 1_A \end{pmatrix}$$

und $Bi(d_i) \cong (A,(-1)^i f)$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$. Also definiert die Abbildun $h_i\colon D(A) \to D(A)$ (in Mod-R) mit $h_i = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^i 1_A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ zu dieser Folge ein kontrahierende Homotopie, d.h.

$$1_{D(A)} = h_{i-1}d_i + d_{i+1}h_i.$$

Ist f bijektiv, so ist diese Folge wegen $T(A) \cong D(A)$ eine vollständig $(R\times_\phi M,R)$-projektive Auflösung. Ist außerdem A_R (endlich erzeugt) projektiv, dann ist $D(A)$ (endlich erzeugt) projektiv. Also ist die Folge eine vollständige projektive Auflösung. Analog ist die Folge wegen $H(A) \cong D(A)$ eine vollständige $(R\times_\phi M,R)$-injektive Auflösung, falls $\bar{f}$ bijektiv ist.

5.3 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. So gilt

1) Ist f bijektiv, dann ist $\text{p-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,f)$ entweder gleich 0 oder ∞.

2) Ist $\bar{f}$ bijektiv, dann ist $\text{i-dim}_{(R\times_\phi M,R)}(A,f)$ entweder gleich 0 oder ∞.

Beweis 1) Wegen der Vorbemerkung zu 5.3 erhält man für (A,f) eine konstante $(R\times_\phi M,R)$-projektive Auflösung

$$\cdots \to T(A) \xrightarrow{d_1} T(A) \xrightarrow{d_0} (A,f) \to 0$$

mit $Ke(d_i) \cong (A,-f)$ bzw. $Ke(d_i) \cong (A,f)$. Hieraus folgt die Behauptung. 2) folgt analog. □

5.4 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. So gilt

1) Ist f bijektiv, dann gilt

$$\text{p-dim}_{R\times_\phi M}T(A) \le \text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,f),$$

$$\text{s-dim}_{R\times_\phi M}T(A) \le \text{s-dim}_{R\times_\phi M}(A,f).$$

2) Ist $\bar{f}$ bijektiv, dann gilt

$$\text{i-dim}_{R\times_\phi M}H(A) \le \text{i-dim}_{R\times_\phi M}(A,f).$$

Beweis Wir zeigen die Behauptung allgemeiner. Wegen 1.4 ist $\text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) = \text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,-f)$. Hieraus folgt $\text{p-dim}_{R\times_\phi M}D(A) \le \text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,f)$ und $\text{s-dim}_{R\times_\phi M}D(A) \le \text{s-dim}_{R\times_\phi M}(A,f)$. Wegen $D(A) \cong T(A)$ nach der Voraussetzung gilt 1). Die letzte Behauptung folgt hierzu dual. □

5.5 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. So gilt

1) Ist f bijektiv und hat (A,f) endliche projektive bzw. schwache Dimension, dann gilt Gleichheit in der ersten bzw. zweiten Ungleichung von 5.4 1).
Ist f bijektiv und ist (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv, dann gilt Gleichheit in beiden.

2) Ist $\bar{f}$ bijektiv und hat (A,f) endliche injektive Dimension bzw. ist (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-injektiv, dann gilt Gleichheit in 5.4 2).

Beweis Wir zeigen wiederum die Behauptung etwas allgemeiner. Bezeichne dabei dim eine beliebige Dimension und man betrachte wieder die kurze exakte Folge $0 \to (A,-f) \to D(A) \to (A,f) \to 0$. Ist zunächst $\dim_{R\times_\phi M}(A,f) \le \infty$, dann $\dim_{R\times_\phi M}D(A) = \dim_{R\times_\phi M}(A,f)$, sonst $\dim_{R\times_\phi M}(A,f) = \dim_{R\times_\phi M}(A,f)+1$. Ist die Folge zerfallend, dann gilt $\dim_{R\times_\phi M}(A,f) = \dim_{R\times_\phi M}D(A)$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

5.6 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein

$R\times_\phi M$-Rechtsmodul. So gilt

1) Ist f surjektiv, dann gilt

a) Ist (A,f) projektiv in Mod-$R\times_\phi M$, dann ist A_R projektiv. Falls außerdem $\text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) \le \infty$, dann gilt auch die Umkehrung.

b) Ist (A,f) flach in Mod-$R\times_\phi M$, dann ist A_R flach. Falls außerdem $\text{s-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) \le \infty$, dann gilt auch die Umkehrung.
Ist (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv, dann gilt die Umkehrung in a) und b).

2) Sei $\bar{f}$ injektiv. Ist (A,f) injektiv in Mod-$R\times_\phi M$, dann ist A_R injektiv. Falls gilt $\text{i-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) \le \infty$ bzw. falls (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-injektiv ist, gilt auch die Umkehrung.

Beweis Wir zeigen a). Ist f surjektiv, so gilt $AI = A$ mit $I = MM$. Dann ist $f\colon A\otimes_R M \to A$ wegen $(A\otimes_R M)I = A\otimes_R M$ ein kleiner Epimorphismus in Mod-R und Mod-$R\times_\phi M$. Insbesondere ist $Kef = 0$, falls (A,f) $R\times_\phi M$-projektiv ist, bzw. A_R projektiv ist. Die Behauptung folgt dann nach 5.4, 5.5 und 3.7 bzw. auch nach 3.8 denn mit (A,f) ist auch $D(A)$ projektiv. Für b) und 2) gilt dies analog. □

Wir haben dann unmittelbar nach 4.7 und 5.5

5.7 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul.

1) Sei $_RM$ flach und f bijektiv. Ist außerdem (A,f) endlicher schwacher bzw. projektiver Dimension, so gilt

$$\text{s-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) = \text{s-dim}_R A,$$

bzw.

$$\text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) = \text{p-dim}_R A.$$

Ist (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv, so gelten beide Gleichungen.

2) Sei M_R projektiv. Ist (A,f) endlicher injektiver Dimension bzw. $(R\times_\phi M,R)$-injektiv, so gilt

$$\text{i-dim}_{R\times_\phi M}(A,f) = \text{i-dim}_R A.$$

□

5.8 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Ist 2 invertierbar in R, bzw. $(A,f) = (B\oplus C, \left(\begin{smallmatrix}0 & f_2\\ f_1 & 0\end{smallmatrix}\right))$, dann gilt

1) (A,f) ist $(R\times_\phi M,R)$-projektiv, falls f bijektiv ist.

2) (A,f) ist $(R\times_\phi M,R)$-injektiv, falls $\bar{f}$ bijektiv ist.

Beweis Ist $(A,f) = (B\oplus C,\begin{pmatrix}0 & f_2\\ f_1 & 0\end{pmatrix})$, so gilt $(A,f) \cong T(B) \cong T(C)$, falls f bijektiv ist, bzw. $(A,\bar{f}) \cong H(A) \cong H(C)$, falls $\bar{f}$ bijektiv ist. So folgt für diesen Fall die Behauptung. Ist r das Inverse von 2 in R, dann liegt r im Zentrum von $R\times_\phi M$. So definiert $(A,f) \to T(A)$, $a \mapsto (a,f^{-1}(a))r$ ein Rechtsinverses zur Adjunktionsabbildung $(1,f)\colon T(A) \to (A,f)$, falls f bijektiv ist. Analog hat $(1,\bar{f})$ ein Linksinverses. □

SPURABBILDUNGEN

Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Für $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln (A,f), (B,g) mit f bijektiv und für jeden R-Homomorphismus $h\colon A \to B$ definieren wir eine Abbildung $\mathrm{spur}(h) = h+g(h\otimes 1)f^{-1} : A \to B$. Wegen (4) (im ersten Kapitel) definiert spur einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{spur}\colon \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)).$$

Es gilt dann außerdem für Moduln (A',f'), (B',g') mit f' bijektiv und $h_1 \in \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A',f'),(A,f))$, $h_2 \in \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((B,g),(B',g'))$

$$\mathrm{spur}(h_2hh_1) = h_2\mathrm{spur}(h)h_1.$$

Analog definieren wir für $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln (A,f), (B,g) mit $\bar{f}$ bijektiv und für jeden R-Homomorphismus $h\colon B \to A$ eine Abbildung $\mathrm{sp\bar{u}r}(h) = h+\bar{f}^{-1}\mathrm{Hom}(M,h)\bar{g} \in \mathrm{Hom}_R(B,A)$. Wegen (6) (im 1. Kapitel) definiert $\mathrm{sp\bar{u}r}$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{sp\bar{u}r}\colon \mathrm{Hom}_R(B,A) \to \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((B,\bar{g}),(A,\bar{f})).$$

Man prüft leicht, daß für Moduln (A',f'), (B',g') mit $\bar{f}'$ bijektiv und $h_1 \in \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),(A',f'))$, $h_2 \in \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((B',g'),(B,g))$ gilt

$$\mathrm{sp\bar{u}r}(h_1hh_2) = h_1\mathrm{sp\bar{u}r}(h)h_2.$$

Sind (A,f), (B,g) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln mit f, $\bar{f}$ und g, $\bar{g}$ bijektiv und $h\colon A \to B$ ein R-Homomorphismus, dann gilt

$$\mathrm{spur}(h) = \mathrm{sp\bar{u}r}(h).$$

5.9 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_\phi M$ Rechtsmodul und B ein R-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Ist f bijektiv, dann ist

$$\mathrm{spur}\colon \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),T(B))$$

ein natürlicher Isomorphismus.

2) Ist $\bar{f}$ bijektiv, dann ist

$$\mathrm{sp\bar{u}r}\colon \mathrm{Hom}_R(B,A) \to \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(H(B),(A,f))$$

ein natürlicher Isomorphismus.

Beweis 1) Ist $(f_1,f_2)\colon (A,f) \to T(B)$ ein $R\times_\phi M$-Homomorphismus, dann gilt wegen (4) (im ersten Kapitel) $f_2f = f_1\otimes 1$. Also $(f_1,f_2) = (f_1,(f_1\otimes 1)f^{-1}) = \mathrm{spur}(f_1)$. Die Injektivität ist klar. 2) folgt analog. □

5.10 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f), (B,g) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln. Ist f bzw. $\bar{f}$ bijektiv, dann gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{(R\times_\phi M,R)}((A,f),T(B)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ext}^i_{(R\times_\phi M,R)}(H(B),(A,f)) = 0.$$

Beweis Wähle wie oben die konstanten $(R\times_\phi M,R)$-projektiven Auflösungen $\mathcal{E}(A,f)$ von (A,f) und $\mathcal{E}(T(A))$ von $T(A)$. Nach dem Satz 5.9 und der Adjunktionsrelation induziert

$$\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(T(A),T(B)) \cong \mathrm{Hom}_R(T(A),B) \cong \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(T^2(A),(B,g))$$

einen Komplexisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(\mathcal{E}(A,f),T(B)) \cong \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}(\mathcal{E}(T(A)),(B,g)).$$

Da $T(A)$ $(R\times_\phi M,R)$-projektiv ist, ist aber der Komplex auf der rechten Seite azyklisch. Daraus folgt die erste Gleichung. Die zweite folgt analog. □

Auf dieselbe Weise wie im Beweis von Satz 4 in Kasch [18] bei der oberen Wahl der relativ projektiven bzw. injektiven Auflösung und bei Betrachtung der kontrahierenden Homotopie erhalten wir folgenden Satz. Dieser ergibt sich aber auch folgendermaßen leicht aus 5.10.

5.11 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) Für $R\times_{\phi}M$-Rechtsmoduln (A,f), (V,p), (W,q) mit p, f bijektiv und für $h \in \mathrm{Hom}_R(V,W)$ gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{(R\times_{\phi}M,R)}(1_A,\mathrm{spur}(h)) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots$$

2) Sind (A,f), (B,g), (W,q) $R\times_{\phi}M$-Rechtsmoduln mit $\bar{f}$, $\bar{q}$ bijektiv und für $h \in \mathrm{Hom}_R(B,A)$, dann gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{(R\times_{\phi}M,R)}(\mathrm{sp\bar{u}r}(h),1_V)) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots$$

Beweis 1) Es gibt folgendes kommutatives Diagramm in Mod-$R\times_{\phi}M$

$$\begin{tikzcd}
 & (V,p) \arrow[dl, "{(h,(h\otimes 1)p^{-1})}"'] \arrow[d, "\mathrm{spur}(h)"] \\
T(W) \arrow[r, "{(1,q)}"'] & (W,q)
\end{tikzcd}$$

Also folgt aus 5.10 $\mathrm{Ext}^i_{(R\times_{\phi}M,R)}(1_A,\mathrm{spur}(h)) = 0$. 2) folgt analog. □

Bezüglich der Maschke-Ikeda-Kasch Charakterisierung (Kasch [18], Pareigis [34]) der relativ projektiven bzw. injektiven Moduln bei Frobeniuserweiterungen erhalten wir

5.12 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul.

1) Ist f bijektiv, dann sind äquivalent
   a) (A,f) ist $(R\times_{\phi}M,R)$-projektiv
   b) Es gibt ein $h \in \mathrm{End}(A_R)$ mit $\mathrm{spur}(h) = 1_A$.
2) Ist $\bar{f}$ bijektiv, dann sind äquivalent
   a) $(A,\bar{f})$ ist $(R\times_{\phi}M,R)$-injektiv
   b) Es gibt ein $h \in \mathrm{End}(A_R)$ mit $\mathrm{sp\bar{u}r}(h) = 1_A$.
3) Sind f und $\bar{f}$ bijektiv, so ist insbesondere (A,f) genau dann $(R\times_{\phi}M,R)$-projektiv, wenn (A,f) $(R\times_{\phi}M,R)$-injektiv ist.

Beweis 1) Ist (f_1,f_2): $(A,f) \to T(A)$ ein Rechtsinversen zur Adjunktionsabbildung $(1,f)$, so gilt wegen (4) $f_2 f = f_1\otimes 1$ und

$$1_A = (1,f)(f_1,f_2) = f_1+ff_2 = f_1+f(f_1\otimes 1)f^{-1} = \mathrm{spur}(f_1).$$

Also folgt b) aus a). Die Umkehrung folgt aus dem Satz 5.11. Wir geben aber einen direkten Beweis. Ist nämlich $\mathrm{spur}(f_1) = 1_A$, dann definiert

$(f_1,(f_1\otimes 1)f^{-1})$: $(A,f) \to T(A)$ das Rechtsinverse zu $(1,f)$: $T(A) \to (A,f)$.
2) folgt entsprechend. □

SEMITRIVIALE FROBENIUSERWEITERUNGEN

Wir untersuchen nun F-semitriviale Erweiterungen $R\times_{\phi}M$, d.h. sei ϕ: $M\otimes_R M \to R$ surjektiv ($I = MM = R$). Für jeden $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul (A,f) sind nach 2.6 bzw. nach 2.8. f: $A\otimes_R M \to A$ und $\bar{f}$: $A \to \mathrm{Hom}_R(M,A)$ Isomorphismen. Es gilt Mod-$R\times_{\phi}M$ = $\mathbb{C}$ = $\mathbb{D}$, Mod-R = $\mathbb{C}_I$ = $\mathbb{D}_I$. Ähnlich gilt dies für Linksmoduln und insbesondere für $R\times_{\phi}M$ und $T(A)$ bzw. $H(A)$ für jeden R-Rechtsmodul A. So ist ϕ bijektiv, sowie die natürlichen Abbildungen

$$\bar{\alpha}: A\otimes_R M \to \mathrm{Hom}_R(M,A), \qquad \bar{\alpha}(a\otimes m)(n) = amn$$
$$\bar{\Gamma}: A \to \mathrm{Hom}_R(M,A\otimes_R M), \qquad \bar{\Gamma}(a)(m) = a\otimes m$$
$$\beta: \mathrm{Hom}_R(M,A)\otimes_R M \to A, \qquad \beta(h\otimes m) = h(m) .$$

$1\otimes\bar{\alpha}$: $T(A) \to H(A)$ definiert dann einen funktoriellen Isomorphismus, und für $A = R$ sind die induzierten Abbildungen, $R \to \mathrm{End}(M_R)$, $R \to \mathrm{End}({}_RM)$, $M \to \mathrm{Hom}_R(M_R,R_R)$, $M \to \mathrm{Hom}_R({}_RM,{}_RR)$, Bimodulisomorphismen. Wegen der Bemerkung nach 3.8 sind M_R und ${}_RM$ Progeneratoren. Außerdem ist dann auch $R\times_{\phi}M/R$ eine Frobeniuserweiterung im Sinne von Kasch [18]. Zum Teil kann man diese Ergebnisse auch aus dem bekannten Satz Morita I folgern, bzw. läßt sich Morita I aus den oberen Betrachtungen folgern.

Wir haben dann zusammenfassend

5.13 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, ϕ surjektiv. Dann gilt

1) Für jeden $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul (A,f) sind f, $\bar{f}$ Isomorphismen. Insbesondere ist ϕ bijektiv.
2) Setze $F(A) = A\otimes_R M$, $G(A) = \mathrm{Hom}_R(M,A)$. Dann ist $\bar{\alpha}$: $F \to G$ ein funktorieller Isomorphismus. Weiter definiert das Paar (F,G) eine Äquivalenz von Kategorien Mod-R $\to$ Mod-R (vgl. 2.10).
3) M_R, ${}_RM$ sind Progeneratoren.
4) Die induzierten Abbildungen $\bar{\phi}^l$: $M \to \mathrm{Hom}_R(M_R,R_R)$, $m \mapsto m^l = \phi(m\otimes\_)$, und $\bar{\phi}^r$: $M \to \mathrm{Hom}_R({}_RM,{}_RR)$, $m \mapsto m^r = \phi(\_\otimes m)$ sind Bimodulisomorphismen. Weiter sind analog die Multiplikationsabbildungen $R \to \mathrm{End}(M_R)$ und $R \to \mathrm{End}({}_RM)$ Ringisomorphismen.

5) $R\times_\phi M/R$ ist eine Frobeniuserweiterung, wobei der Frobeniusisomorphismus bzw. -homomorphismus durch $\binom{1\ 0}{0\ \Phi}: R\times_\phi M \to R\oplus \mathrm{Hom}(M,R)$ bzw. durch $h = (1,0): R\times_\phi M \to R$ gegeben ist. □

5.14 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, ϕ surjektiv. Ist $R\times_\phi M/R$ eine halbeinfache Ringerweiterung, d.h. ist jeder $R\times_\phi M$-Rechtsmodul $(R\times_\phi M,R)$-projektiv bzw. $(R\times_\phi M,R)$-injektiv, oder hat $R\times_\phi M$ endliche homologische Dimension, dann gilt

$$\text{rh-dim } R\times_\phi M = \text{rh-dim } R.$$

Dies ist der Fall, wenn die Bedingungen von 5.1 gelten.

Beweis Es folgt aus der allgemeinen Theorie der Frobeniuserweiterungen bzw. aus 5.7 und 4.7. □

Für einen Ring R und einen R-Bimodul M bezeichne $Ze(R)$ das Zentrum von R und $M^R = \{m \in M \mid mr = rm \text{ für alle } r \in R\}$ den Zentralisator von R in M. Dann ist M^R ein $Ze(R)$-Bimodul. Man prüft leicht

5.15 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $Z = Ze(R)$. Dann gilt für den Zentralisator $(R\times_\phi M)^R$ von R in $R\times_\phi M$

$$(R\times_\phi M)^R = Z \times_{\phi'} M^R,$$

wobei $Z\times_{\phi'} M^R$ eine semitriviale Erweiterung von Z durch M^R ist, und ϕ' von ϕ induziert wird. □

5.16 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, ϕ surjektiv, $1 = \Sigma_{i=1}^n m_i n_i$ für $\Sigma_i m_i\otimes n_i \in M\otimes_R M$, $Z = Ze(R)$. Dann ist

$$\sigma: Z\times_{\phi'} M^R \to Z\times_{\phi'} M^R, \quad \sigma(r,m) = (r, \Sigma\, m_i m n_i)$$

ein semitrivialer Ringhomomorphismus und beschreibt den zugehörigen Nakayama -Automorphismus.

Beweis Sei $h: R\times_\phi M \to R$ der Frobenius-Homomorphismus. Wegen $n^1(m) = nm = \Sigma\, nmm_i n_i = \Sigma\, mm_i nn_i = (m)(\Sigma\, m_i nn_i)^r$ für jedes $n \in M^R$, $m \in M$ ist $hn = (\Sigma\, m_i nn_i)h$. So definiert σ den Nakayama-Automorphismus. Wegen $\sigma(M) \subset M$, $\sigma(R) \subset R$ ist dieser verträglich mit der semitrivialen Struktur. □

Wir beschreiben nun die Spurabbildung. Sei $R\times_\phi M$ eine F-semitrivial Erweiterung und $1 = \Sigma_{i=1}^n m_i n_i$ für $\Sigma\, m_i\otimes n_i \in M\otimes_R M$. Mit dem bekannten Isomorphismus

$$\alpha: \mathrm{Hom}_R({}_R\mathrm{Hom}_R(R\times_\phi M,R), {}_R(R\times_\phi M)) \cong (R\times_\phi M)\otimes_R(R\times_\phi M)$$

gilt für den Frobenius-Isomorphismus $\psi = (1,\bar\Phi): R\times_\phi M \to \mathrm{Hom}_R(R\times_\phi M,R)$

$$\alpha(\psi^{-1}) = (1,0)\otimes(1,0)+\Sigma\,(0,m_i)\otimes(0,n_i).$$

Sind (A,f), (B,g) $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln, so definiert

$$\mathrm{spur}: \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_{R\times_\phi M}((A,f),(B,g)), \quad \mathrm{spur}(h)(a) = h(a)+h(am_i)n_i$$

für jedes $h \in \mathrm{Hom}_R(M,A)$ die übliche Spurabbildung für Frobeniuserweiterungen [18,34]. Wegen

$$f^{-1}(a) = am_i\otimes n_i, \quad h\bar f(a)(n) = h(an) = h(am_i)n_i n, \quad \bar g^{-1}(h\bar f(a)) = h(am_i)n_i$$

stimmt diese Definition mit den oben definierten Abbildungen spur und $\overline{\mathrm{spur}}$ überein.

Eine Ringerweiterung S/R ist eine **separable Erweiterung** im Sinne von Hirata, Sugano [14], wenn die exakte Folge $S\otimes_R S \to S \to 0$, $s\otimes t \mapsto st$ von S-S-Moduln zerfällt. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein Element $\Sigma\, s_i\otimes t_i$ in $S\otimes_R S$ gibt, so daß $\Sigma\, s_i t_i = 1$ und $\Sigma\, ss_i\otimes t_i = \Sigma\, s_i\otimes t_i s$ für jedes $s \in S$ gilt. Für jeden S-Rechtsmodul A definiert $A \to A\otimes_R S$, $a \mapsto \Sigma\, as_i\otimes t_i$, ein Rechtsinverses zur natürlichen Abbildung $A\otimes_R S \to A$, $a\otimes s \mapsto as$. Dann ist jeder S-Modul (S,R)-projektiv. Also ist S/R eine halbeinfache Ringerweiterung. Ist $s \in S^R$, so definiert die Rechtsmultiplikation mit s einen R-Homomorphismus $S \to S$. Es läßt sich weiter leicht zeigen (vgl. [14, prop. 2.18]), daß eine Frobeniuserweiterung S/R genau dann eine separable Erweiterung ist, wenn es ein Element $s \in S^R$ gibt mit $\mathrm{spur}(s) = 1$.

5.17 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, ϕ surjektiv. Dann sind äquivalent

1) $R\times_\phi M/R$ ist eine separable Erweiterung.

2) Es gibt ein Element $r \in Ze(R)$ mit $m = mr+rm$ für jedes $m \in M$. Gilt $mr = rm$ für jedes $r \in Z = Ze(R)$, $m \in M$, dann auch

3) $2 \in R$ ist invertierbar.

Beweis Gilt 2) für $r \in Z$, so definiert die Rechtsmultiplikation einen R-R-Homomorphismus $r\colon R\times_\phi M \to R\times_\phi M$. Wegen

$$m = rm+mr = rm+\Sigma\, m_i r n_i m = (r+mm_i r n_i)m$$

für jedes $m \in M$ und $R \cong \mathrm{End}(M_R)$ durch die Linksmultiplikation ist $\mathrm{spur}(r) = r+\Sigma\, m_i r n_i = 1$. Nach der Vorbemerkung ist dann $R\times_\phi M/R$ eine separable Erweiterung. Ist umgekehrt $R\times_\phi M/R$ eine separable Erweiterung, so folgt 2) aus der Vorbemerkung zum Satz 5.17 und aus 5.15. Die Äquivalenz mit 3) unter der zusätzlichen Voraussetzung ist klar. □

5.18 Bemerkung Im allgemeinen ist die Bedingung ϕ surjektiv nicht notwendig dafür, daß $R\times_\phi M/R$ eine Frobeniuserweiterung ist. Dies wurde von Kitamura [22] gezeigt. Eine triviale Erweiterung $R\ltimes M$ ist nämlich genau dann eine Frobeniuserweiterung von R, wenn es ein zentrales Idempotent $e \in R$ gibt mit $M \cong eR$ als Bimoduln. Eine triviale Erweiterung kann aber keine separable Erweiterung sein (Sugano [40]). Dies folgt aus dem folgenden allgemeineren Satz.

5.19 Satz Sei $R\times_\phi M/R$ eine halbeinfache semitriviale Ringerweiterung, $I = MM$. Dann gilt $MI = M$ und $I \subset R$ ist ein idempotentes Ideal. Insbesondere ist keine echte $(M \neq 0)$ triviale Erweiterung $R\ltimes M$ und allgemeiner keine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ mit $I \subset \mathrm{Ra}(R)$ eine halbeinfache Ringerweiterung.

Beweis Nach Voraussetzung ist $(R/I,0)$ $(R\times_\phi M,R)$-projektiv und wegen 2.2 ist die Adjunktion $T(R/I) \to (R/I,0)$ ein kleiner Epimorphismus. Also gilt $M/IM \cong R/I\otimes_R M = 0$. Dies folgt auch aus 4.5. □

5.20 Beispiel Wir charakterisieren im folgenden solche semitrivialen Erweiterungen $R\times_\phi M$ über lokalen Ringen. Dies verallgemeinert einen Satz von Sugano [40].

5.21 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, R lokal und ϕ surjektiv. Dann gibt es eine Einheit $m \in M$ und einen Ringautomorphismus $\sigma\colon R \to R$, so daß $M = mR$ und $rm = m\sigma(r)$ für jedes $r \in R$.
In diesem Fall gilt $R\times_\phi M \cong R[X,\sigma]/(X^2-a)$ mit $a = m^2$ und $\mathrm{spur}(r) = r+\sigma(r)$ für jedes $r \in \mathrm{Ze}(R)$.

Beweis Da R lokal und ϕ surjektiv ist (also ist M_R endlic erzeugt projektiv nach 5.13), ist M_R frei und wegen $R \cong \mathrm{End}(M_R)$ direk unzerlegbar. So gilt $M = mR \cong R$, und es gibt ein $n \in M$ mit $nm = 1$ Hieraus folgt $mn = 1$, da $mn = mnmn$ und R lokal ist. Also definiert $\mapsto mrn$ einen Automorphismus $\sigma\colon R \to R$ und es gilt $rm = mnrm = m\sigma(r)$. Fü $a = m^2$ ist dann $\sigma(a) = a$ und $ra = a\sigma^2(r)$. So ist $(X^2-a)R[X,\sigma]$ $R[X,\sigma](X^2-a)$. Man prüft dann leicht $R\times_\phi M \cong R[X,\sigma]/(X^2-a)$. Nach Definitio der Spur gilt auch $\mathrm{spur}(r) = r+\sigma(r)$ für jedes $r \in \mathrm{Ze}(R)$. □

5.22 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine echte $(M\neq 0)$ semitriviale Erweiterung und lokal. Weiter sei M_R endlich erzeugt bzw. R rechtsperfekt bzw. rechts noethersch. Ist dann $R\times_\phi M/R$ eine halbeinfache Erweiterung, so is ϕ surjektiv.

Beweis Setze $I = MM$. Wegen $MI = M \neq 0$, $I^2 = I \neq 0$ nach 5.19 und d M_R bzw. I_R endlich erzeugt bzw. $\mathrm{Ra}(R)$ links-t-nilpotent ist, ist $I \subset$ nicht klein. Also $I = R$ nach Voraussetzung. □

5.23 Folgerung Sei S/R eine Ringerweiterung, R lokal. Dann sind äquivalent

1) $S = R\times_\phi M$ ist eine F-semitriviale Erweiterung.

2) $S \cong R[X,\sigma]/(X^2-a)$ für einen Automorphismus $\sigma\colon R \to R$ und eine Einheit $a \in R$ mit $\sigma(a) = a$ und $ra = a\sigma^2(r)$ für alle $r \in R$.

Es gilt in diesem Fall $\mathrm{spur}(r) = r+\sigma(r)$ für jedes $r \in \mathrm{Ze}(R)$.

Beweis Folgt wegen 5.21 und 1.2 2). □

5.24 Folgerung (vgl. Sugano [40]) Sei S/R eine Ringerweiterung, R lokal. Dann sind äquivalent

1) $S = R\times_\phi M$ ist eine separable Erweiterung von R mit ϕ surjektiv.

2) $S \cong R[X,\sigma]/(X^2-a)$ für einen Automorphismus $\sigma\colon R \to R$ und eine Einheit $a \in R$ mit $\sigma(a) = a$ und $ra = a\sigma^2(r)$ für alle $r \in R$, und es gibt ein Element $r \in \mathrm{Ze}(R)$ mit $X = Xr+rX$.

Beweis Folgt aus 5.23 und 5.17. □

6 GENERALISIERTE MATRIZENRINGE

Wir betrachten nun einen Spezialfall für semitriviale Erweiterungen, nämlich den generalisierten Matrizenring. Gilt für eine semitriviale Erweiterung $R\times_{\phi}M$ $\phi = 0$, dann ist $R\times_{\phi}M = R\ltimes M$ eine triviale Erweiterung. Ein Spezialfall von trivialen Erweiterungen sind Ringe der Form

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & S \end{pmatrix},$$

wobei R, S Ringe sind und M ein S-R-Bimodul ist. Es gilt nämlich $\Lambda' \cong (R\times S)\ltimes M$ (vgl. 1.2). Analog zu diesem Zusammenhang führen wir generalisierte Matrizenringe als einen Sonderfall von semitrivialen Erweiterungen ein, und spezialisieren die Charakterisierung der Modulkategorie und der induzierten Funktoren auf diesem Fall. Andererseits stellen wir fest, daß Mod-R und Mod-S in verschiedener Weise als Unterkategorien von Mod-Λ ($\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring) betrachtet werden können. Wir untersuchen Äquivalenzaussagen zwischen Unterkategorien von Mod-R und Mod-S. Aus der Betrachtung von dem Untermodulverband von einem Λ-Rechtsmodul gewinnen wir Korrespondenzaussagen z.B. zwischen Moduln der Form A_R und $A\otimes_R N$ sowie $\mathrm{Hom}_R(M,A)$. Wir spezialisieren und ergänzen Resultate von den früheren Abschnitten über projektive und injektive Moduln. Weiter stellen wir fest, daß eine semitriviale Erweiterung $R\times_{\phi}M$ in einen gewissen generalisierten Matrizenring Λ eingebettet werden kann. Dabei ist dieser Matrizenring eine Galois-Erweiterung von $R\times_{\phi}M$.

DEFINITION

6.1 Definition Seien R, S Ringe, ${}_SM_R$, ${}_RN_S$ Bimoduln und $\rho: N\otimes_S M \to R$, $\sigma: M\otimes_R N \to S$ Bimodulhomomorphismen derart, daß die Menge

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma} = \{\begin{pmatrix} r & n \\ m & s \end{pmatrix} \mid r\in R,\ s\in S,\ m\in M,\ n\in N\}$$

mit komponentenweiser Addition und der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} r & n \\ m & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & n' \\ m' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr'+\rho(n\otimes m') & rn'+ns' \\ mr'+sm' & \sigma(m\otimes n')+ss' \end{pmatrix}$$

zu einem Ring wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_R N\otimes_S M & \xrightarrow{1\otimes\rho} & M\otimes_R R \\ {\scriptstyle\sigma\otimes 1}\downarrow & & \downarrow\cong \\ S\otimes_S M & \xrightarrow{\cong} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N\otimes_S M\otimes_R N & \xrightarrow{1\otimes\sigma} & N\otimes_S S \\ {\scriptstyle\rho\otimes 1}\downarrow & & \downarrow\cong \\ R\otimes_R N & \xrightarrow{\cong} & N \end{array}$$

kommutieren. Man nennt Λ einen **generalisierten Matrizenring** (vgl. Roos [36]).

6.2 Bemerkungen und Beispiele

1) Ein Tupel (R,S,M,N,ρ,σ) derart, daß $\begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring ist, ist ein sogenannter **Morita Context** bzw. eine **Preäquivalenz-Data**. Dieser wurde von Bass [1,2] eingeführt (vgl. Cohn [3]) und in der Literatur oft behandelt worden.

2) Wir können die Klasse der generalisierten Matrizenringe als eine Kategorie betrachten. Dabei ist ein Morphismus $\omega: \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma} \to \begin{pmatrix} R' & N' \\ M' & S' \end{pmatrix}_{\rho'\sigma'}$ eine Matrix $\omega = \begin{pmatrix} \alpha & g \\ f & \beta \end{pmatrix}$ mit Ringhomomorphismen $\alpha: R \to R'$, $\beta: S \to S'$ und Bimodulhomomorphismen $f: M \to M'$, $g: N \to N'$ derart, daß ω einen Ringhomomorphismus definiert, d.h. es gilt $\alpha(\rho(n\otimes m)) = \rho'(g(n)\otimes f(m))$ und $\beta(\sigma(m\otimes n)) = \sigma'(f(m)\otimes g(n))$. Dann ist ω ein Isomorphismus, wenn dies für die Komponenten auch gilt. In diesem Fall schreiben wir $\Lambda \sim \Lambda'$.

3) Sind $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ und $\Lambda' = \begin{pmatrix} S & V \\ U & T \end{pmatrix}_{st}$ generalisierte Matrizenringe, dann ist die **Zusammensetzung von generalisierten Matrizenringen**

$$\Lambda\circ\Lambda' = \begin{pmatrix} R & N\otimes_S V \\ U\otimes_S M & T \end{pmatrix}_{\rho' t'}$$

mit

$$\rho': (N\otimes_S V)\otimes_T(U\otimes_S M) \to R, \quad (n\otimes v)\otimes(u\otimes m) \mapsto n(vu)m$$
$$t': (U\otimes_S M)\otimes_R(N\otimes_S V) \to T, \quad (u\otimes m)\otimes(n\otimes v) \mapsto u(mn)v$$

ein generalisierter Matrizenring. Diese Zusammensetzung ist assoziativ.

4) Offensichtlich ist mit $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ auch $\Lambda_o = \begin{pmatrix} S & M \\ N & R \end{pmatrix}_{\sigma\rho}$ ein generalisierter Matrizenring und $\Lambda \to \Lambda_o$, $\begin{pmatrix} r & n \\ m & s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s & m \\ n & r \end{pmatrix}$ ein Ringisomorphismus. Sind außerdem $\alpha: R \to R'$, $\beta: S \to S'$ Ringisomorphismen und $f: U \to M$, $g: V \to N$ Bimodulisomorphismen für Ringe R', S' und Bimoduln ${}_SU_R$, ${}_RV_S$, so sind $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} R' & N \\ M & S' \end{pmatrix}_{\rho'\sigma'}$ mit $\rho' = \alpha\rho$, $\sigma' = \beta\sigma$ und $\Lambda_2 = \begin{pmatrix} R & V \\ U & S \end{pmatrix}_{\rho'\sigma'}$ mit $\rho' = \rho(g\otimes f)$, $\sigma' = \sigma(f\otimes g)$ generalisierte Matrizenringe. Man vergewissert sich leicht, daß die entsprechenden Diagramme kommutativ sind. Zum

Beispiel gilt in U $f(u)g(v)u' = f^{-1}(f(u)g(v)f(u')) = ug(v)f(u')$ für $u, u' \in U$, $v \in V$. Weiter gilt $\Lambda_1 \sim \Lambda$ und $\Lambda_2 \sim \Lambda$.

5) Ein wohlbekanntes Beispiel für generalisierte Matrizenringe ist gegeben für jedes Paar von Objekten X, Y in Mod-R (bzw. in einer additiven Kategorie). Sei hier $R = \mathrm{End}(X_R)$, $S = \mathrm{End}(Y_R)$, $M = \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ und $N = \mathrm{Hom}_R(Y,X)$, und seien die Abbildungen ρ: $N \otimes_S M \to R$, σ: $M \otimes_R N \to S$ gegeben durch $\rho(f \otimes g)(x) = (fg)(x)$, $\sigma(g \otimes f)(y) = (gf)(y)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma} \cong \mathrm{End}_R(X \oplus Y).$$

6) Speziell für jeden Ring R und jeden R-Rechtsmodul M erhalten wir mit $X = R$, $Y = M$ in 5), also $N = M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$, $S = \mathrm{End}(M_R)$ den **Dualitätsring von M_R** (vgl. 1.2 4). Hierfür schreiben wir $\Lambda(M_R)$. Analog schreiben wir $\Lambda({}_RN)$ für den Fall $M = \mathrm{Hom}_R({}_RN, {}_RR)$, $S = \mathrm{End}({}_RN)$ und N_R beliebig.

7) Einen Spezialfall von 5) gibt es, falls $M_R \cong R^{(I)}$ frei ist. So ist $M^* \cong R^I$ und $S = \mathrm{End}(M_R) \cong \mathrm{RFM}_I(R)$ der spalten-endliche Matrizenring über R. ρ und σ werden von der Multiplikation induziert. $\mathrm{Bi}(\sigma) = MM^*$ besteht aus den Matrizen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Zeilen. Für $M_R \cong R^n$ gilt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma} \cong M_{n+1}(R).$$

8) Für einen Ring R und beliebige Idempotente e, $f \in R$ ist $\begin{pmatrix} eRe & eRf \\ fRe & fRf \end{pmatrix}$ mit den üblichen Operationen ein generalisierter Matrizenring. Insbesondere gilt für einen beliebigen generalisierten Matrizenring $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$

$$\Lambda \sim \begin{pmatrix} e\Lambda e & e\Lambda f \\ f\Lambda e & f\Lambda f \end{pmatrix}$$

mit $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und den üblichen Abbildungen.

9) Ist $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein beliebiger generalisierter Matrizenring, dann induzieren die Abbildungen $S \to \mathrm{End}(M_R)$ (Linksmultiplikation) und $\bar{\rho}^1$: $N \to \mathrm{Hom}_R(M,R)$, $\bar{\rho}^1(n)(m) = nm$, bzw. die Abbildungen $R \to \mathrm{End}(N_S)$ und $\bar{\sigma}^1$: $M \to \mathrm{Hom}_S(N,S)$, $\bar{\sigma}^1(m)(n) = mn$, Ringhomomorphismen $\Lambda \to \Lambda(M_R)$ bzw. $\Lambda \to \Lambda(N_S)$.

Analog gibt es vier weitere Abbildungen definiert durch die Rechtsmultiplikation, $\bar{\rho}^r$: $M \to \mathrm{Hom}_R(N,R)$ und $\bar{\sigma}^r$: $N \to \mathrm{Hom}_S(M,S)$. Diese induzieren weitere zwei Ringhomomorphismen $\Lambda \to \Lambda({}_SM)$, $\Lambda \to \Lambda({}_RN)$. □

Sei nun $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring. Wenn wir nun $R' = R \times S$ und $M' = M \times N$ setzen, können wir M' auf die übliche Weise als einen R'-Bimodul betrachten

$$(m,n)(r,s) = (mr, ns), \quad (r,s)(m,n) = (sm, rn).$$

Es gilt dann $M' \otimes_{R'} M' \cong N \otimes_S M \times M \otimes_R N$. Setze dann $\Phi = (\rho,\sigma)$: $M' \otimes_{R'} M' \to R'$. Dann ist $R' \times_\Phi M'$ eine semitriviale Erweiterung von R' durch M'. Weiter definiert die Zuordnung $((r,s),(m,n)) \mapsto \begin{pmatrix} r & n \\ m & s \end{pmatrix}$ einen Ringhomomorphismus

$$R' \times_\Phi M' \cong \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}.$$

So gilt (vgl. Palmer [33])

6.3 Lemma

1) Jeder generalisierte Matrizenring $\begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ist eine semitriviale Erweiterung von dem Diagonalring $R' = R \times S$ durch $M' = M \times N$ bzgl. $\Phi = (\rho,\sigma)$.

2) Hat umgekehrt eine semitriviale Erweiterung $R \times_\Phi M$ zentrale Idempotente e_1, $e_2 \in R$ derart, daß gilt $1 = e_1 + e_2$ und $e_1Me_1 = 0$, $e_2Me_2 = 0$, dann hat $R \times_\Phi M$ eine Darstellung als generalisierter Matrizenring mit R in der Diagonale, d.h.

$$R \times_\Phi M \cong \begin{pmatrix} e_1Re_1 & e_1Me_2 \\ e_2Me_1 & e_2Re_2 \end{pmatrix}_{\rho\sigma},$$

wobei ρ und σ von Φ induziert werden. □

Mittels der Kategorieäquivalenz Mod-$R \times S \cong$ Mod-$R \times$Mod-S für Ringe R, S können wir die $R \times S$-Moduln als Paare (A,B) mit $A \in$ Mod-R und $B \in$ Mod-S schreiben. Analog gilt dies für Homomorphismen. Man erhält dann unmittelbar aus 1.3 (vgl. auch 1.19)

6.4 Lemma Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring.

1) Seien A ein R- und B ein S-Rechtsmodul und g: $A \otimes_R N \to B$, f: $B \otimes_S M \to A$ Homomorphismen derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R N\otimes_S M \arrow[r, "g\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\rho"'] & M\otimes_R R \arrow[d, "f"] \\ A\otimes_R R \arrow[r, "\cong"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B\otimes_S M\otimes_R N \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\sigma"'] & N\otimes_S S \arrow[d, "g"] \\ B\otimes_S S \arrow[r, "\cong"] & B \end{tikzcd}$$

kommutieren. Dann ist $(A,B) \in$ Mod-$R\times S$ mittels der Multiplikation

$$(a,b)\binom{r\ n}{m\ s} = (ar+f(b\otimes m),g(a\otimes n)+bs)$$

ein Λ-Rechtsmodul. Hierfür schreiben wir $(A,B)^{fg}$. Umgekehrt hat jeder Λ-Rechtsmodul diese Gestalt.

2) Seien $(A,B)^{fg}$, $(A',B')^{f'g'}$ Λ-Rechtsmoduln, $h: A \to A'$, $k: B \to B'$ lineare Abbildungen derart, daß folgende Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd} B\otimes_S M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k\otimes 1"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B'\otimes_S M \arrow[r, "f'"] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes_R N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h\otimes 1"'] & B \arrow[d, "k"] \\ A'\otimes_R N \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd} .$$

Dann ist (h,k) ein Λ-Homomorphismus. Umgekehrt hat jeder Λ-Homomorphismus diese Darstellung. □

Analog dem allgemeineren Fall für semitriviale Erweiterungen können wir einen Λ-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$ auch durch die adjungierte Darstellung $(A,B)^{\bar f\bar g}$ beschreiben, wobei $\bar f: B \to \mathrm{Hom}_R(M,A)$, $\bar g: A \to \mathrm{Hom}_S(N,B)$ mittels $\bar f(b)(m) = f(b\otimes m)$ und $\bar g(a)(n) = g(a\otimes n)$ definiert sind und die Modulstruktur durch

$$(a,b)\binom{r\ n}{m\ s} = (ar+\bar f(b)(m),\bar g(a)(n)+bs)$$

gegeben ist. Mit (5) (im 1. Kapitel) sind dann die entsprechenden Diagramme kommutativ.

In analoger Weise ist ein Λ-Linksmodul ein Vektor $\binom{A}{B}^{fg}$ mit $A \in$ R-Mod, $B \in$ S-Mod und linearen Abbildungen $f: N\otimes_S B \to A$, $g: M\otimes_R A \to B$ derart, daß die entsprechenden Diagramme kommutieren und es gilt

$$\binom{r\ n}{m\ s}\binom{a}{b} = \binom{ra+f(n\otimes b)}{g(m\otimes a)+sb}.$$

6.5 Bemerkung Seien $R_1,\dots,R_n$ Ringe und M_{ij}, $1 \le i,j \le n$, R_i-R_j-Bimoduln mit $M_{ii} = R_i$. Weiter seien gegeben R_i-R_j-Bimodulhomomorphismen

$$\phi^k_{ij}: M_{ik}\otimes_{R_k} M_{kj} \to M_{ij}$$

derart, daß die Abbildungen ϕ^j_{ij} und ϕ^i_{ij} die kanonischen Isomorphismen sind, und die Diagramme

$$\begin{tikzcd} M_{ij}\otimes_{R_j} M_{jl}\otimes_{R_l} M_{lk} \arrow[r, "1\otimes\phi^l_{jk}"] \arrow[d, "\phi^j_{il}\otimes 1"'] & M_{ij}\otimes_{R_j} M_{jk} \arrow[d, "\phi^j_{ik}"] \\ M_{il}\otimes_{R_l} M_{lk} \arrow[r, "\phi^l_{ik}"] & M_{ik} \end{tikzcd}$$

kommutieren. Dann bildet bekanntlich die Menge der Matrizen

$$\Lambda_n = \{(m_{ij}) \mid m_{ij} \in M_{ij},\ 1 \le i,j \le n\}$$

mit der gewöhnlichen komponentenweiser Addition und der Multiplikation

$$(m_{ij})(n_{ij}) = (\Sigma^n_{l=1}\ \phi^l_{ij}(m_{il}\otimes n_{lj}))$$

einen Ring. Solche Ringe sind zum Beispiel von Harada [22] eingeführt worden.

Da man bestrebt ist Λ_n in Ausdrücken über R_i, $1 \le i \le n$, zu charakterisieren, läßt sich dies im wesentlichen auf den Fall $n = 2$ bzw. auf semitriviale Erweiterungen zurückführen. Es gilt zum Beispiel mit $\Lambda_1 = R_1$,

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} \Lambda_{r-1} & N_r \\ M_r & R_r \end{pmatrix}, \qquad 2 \le r \le n,$$

mit $M_r = (M_{r1},\dots,M_{r,r-1})$, $N_r = (M_{1r},\dots,M_{r-1,r})^t$. Die Λ_n-Moduln lassen sich dann als Zeilen- und Spaltenvektoren auffassen. So ist ein Λ_n-Rechtsmodul ein Tupel $(A_1,\dots A_n)$, $A_i \in$ Mod-R_i, zusammen mit Abbildungen f_{ij}: $A_i\otimes_{R_i} M_{ij} \to A_j$, $1 \le i,j \le n$, derart, daß f_{ii} der kanonische Isomorphismus ist und die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A_i\otimes_{R_i} M_{ij}\otimes_{R_j} M_{jk} \arrow[r, "f_{ij}\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\phi^j_{ik}"'] & A_j\otimes_{R_j} M_{jk} \arrow[d, "f_{jk}"] \\ A_i\otimes_{R_i} M_{ik} \arrow[r, "f_{ik}"] & A_k \end{tikzcd}$$

kommutieren. Die Ergebnisse über semitriviale Erweiterungen und generalisierte Matrizenringe $(n = 2)$ lassen sich dann leicht übertragen. So sind diese Untersuchungen insbesondere auf semiperfekte Ringe anwendbar. □

UNTERMODULN UND KORRESPONDENZAUSSAGEN

Sei nun $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring. Ist $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul, so sind die Λ-Untermoduln von $(A,B)^{fg}$ die $R\times S$-Untermoduln (U,V) von (A,B) derart, daß gilt $UN \subset V$ und $VM \subset U$. Für einen Untermodul $(U,V) \subset (A,B)^{fg}$ gibt es dann Untermoduln

$$(U,UN) \subset (U,V) \subset (U,(U:M)), \quad (VM,V) \subset (U,V) \subset ((V:N),V).$$

Dabei sind also (U,UN) bzw. (VM,V) jeweils für U und V die kleinsten und $(U,(U:M))$ bzw. $((V:N),V)$ die größten Untermoduln dieser Form. Analoges gilt für Linksmoduln. Ist also $MN = S$, so ist $UN = V = (U:M)$ für jeden Untermodul (U,V) wegen $(U:M) = (U:M)MN \subset UN$. Durch Identifizieren $\Lambda = (R\oplus M, N\oplus S)$ haben wir insbesondere

6.6 Lemma Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring. Dann gilt

1) Die Rechtsideale von Λ sind genau solche der Form (U,V) mit $U \subset (R\oplus M)_R$, $V \subset (N\oplus S)_S$ und $UN \subset V$, $VM \subset U$.

2) Die Linksideale von Λ sind genau solche der Form $\binom{V}{U}$ mit $U \subset {}_R(R\oplus N)$, $V \subset {}_S(M\oplus S)$ und $MU \subset V$, $NV \subset U$.

3) Ist K ein Ideal in Λ, dann muß K von der Form $K = \binom{I\ V}{U\ J}$ sein, wobei $I \subset R$ und $J \subset S$ Ideale sind, und $U \subset {}_SM_R$, $V \subset {}_RN_S$ Untermoduln sind mit $NU+VM \subset I$, $MI+JM \subset M$, $NJ+IN \subset V$, $MV+UN \subset J$. □

Wir untersuchen nun einige Korrespondenzaussagen zwischen Untermoduln von A_R und B_S für einen Λ-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$. Zugleich erläutert dies einen Grundgedanken, der der Untersuchung von Mod-Λ bzw. von Konstruktionen dieser Art zugrunde liegt. So läßt sich diese Konstruktion analog zu 2.11 (vgl. 6.19) auf 'Kontext-Kategorien' [10] verallgemeinern. Die allgemeinen Äquivalenzaussagen bleiben dennoch bestehen.

6.7 Definition Sei A ein R-Rechtsmodul, und $I \subset R$ ein beliebiges Ideal. Ein Untermodul $U \subset A$ heißt

1) **I-zulässig** (Sandomierski [38]), falls gilt $UI = U$, und

2) **I-kozulässig**, falls $(U:I) = U$, d.h. $1_{A/U}(I) = 0$.

Die Mengen solcher Untermoduln sind jeweils bzgl. Summen bzw. Durchschnitte abgeschlossen. So bilden sie auf die übliche Weise vollständige

Verbände, in Zeichen $V_I(A)$ bzw. $V(A:I)$.

Betrachte nun die von R und S in $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ erzeugten Ideale $J' = \binom{R\ M}{M\ MN}$, $I' = \binom{NM\ R}{M\ S}$. Für einen Λ-Rechtsmodul $C = (A,B)^{fg}$ und einen Untermodul $W = (U,V) \subset C$ gilt $CJ' = (U,UN)$, $CI' = (VM,V)$, $1_C(W:J') = (U,(U:M))$, $1_C(W:I') = ((V:N),V)$. Es gilt außerdem $I'+J' = \Lambda$ und

$$\Lambda/(I'\cap J') \cong R/NM \times S/MN$$

(d.i. I' und J' sind komaximal). So sind $(A,0)$, $(0,B)$ genau dann Λ-Rechtsmoduln, wenn A ein R/NM- und B ein S/MN-Rechtsmodul ist. Wir erhalten unmittelbar einige Korrespondenzaussagen.

6.8 Satz Seien $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $I = NM$, $J = MN$ die **Spurideale**, und seien I', J' wie oben. Weiter sei $C = (A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Es gibt Verbandisomorphismen $\phi: V(A_R) \to V_{J'}(C)$, $\psi: V(A_R) \to V(C:J')$ definiert durch $U \mapsto (U,UN)$, $U \mapsto (U,(U:M))$.

2) Es gibt Verbandisomorphismen $\phi': V(B_S) \to V_{I'}(C)$, $\psi': V(B_S) \to V(C:I')$ definiert durch $V \mapsto (V,VM)$, $V \mapsto (V,(V:N))$. □

Insgesamt folgen hieraus eine Reihe von Korrespondenzaussagen zwischen Untermoduln von A_R und B_S. So definieren beispielsweise die Durchschnitte $Bi(\phi)\cap Bi(\phi')$, $Bi(\psi)\cap Bi(\psi')$, $Bi(\phi)\cap Bi(\psi')$, $Bi(\psi)\cap Bi(\phi')$ Ordnungsisomorphismen zwischen den entsprechenden Urbildmengen in $V_R(A)$ und $V_S(B)$. Diese Isomorphismen enthalten allgemeiner die in der Literatur behandelten Fälle, z.B für $\Lambda = \Lambda(M_R)$ und M_R endlich erzeugt projektiv, d.h. $MN = S$, (Faith [5]), sowie für $\Lambda = \Lambda(M_R)$, M_R endlich erzeugt projektiv und Λ-Rechtsmoduln der Form $(A,\mathrm{Hom}_R(M,A))$ (Sandomierski [38], man identifiziere dort $(A':M) = \mathrm{Hom}_R(M,A')$ für $A' \subset A_R$), und für Λ-Rechtsmoduln der Form $(A,A\otimes_R M)$ (B. Zimmermann [43]). Vergleiche auch Müller [28] und Miller [25]. Wir betrachten explizit den ersten und zweiten Durchschnitt. Beachte für ein beliebiges Ideal $K \subset R$ $r_S(1_N(K:M):N) = 1_S(r_M(K:N):M)$. So schreiben wir hierfür kurz $(N:K:M)$.

6.9 Folgerung Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $I = NM$, $J = MN$, und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul.

1) Es gibt jeweils Verbandsisomorphismen zwischen folgenden Paaren von

Verbänden ,

a) I-zulässigen Untermoduln von A_R und J-zulässigen Untermoduln von B_S durch $\phi\colon U \mapsto UN$ und das Inverse $\psi\colon V \mapsto VM$.

b) I-kozulässigen Untermoduln von A_R und J-kozulässigen Untermoduln von B_S durch $\phi\colon U \mapsto (U{:}M)$ und das Inverse $\psi\colon V \mapsto (V{:}N)$.

c) Beidseitig I-zulässigen Idealen von R und beidseitig J-zulässigen Idealen von S durch $K \mapsto MKN$ und das Inverse $L \mapsto NLM$

d) Beidseitig I-kozulässigen Idealen von R und beidseitig J-kozulässigen Idealen von S durch $K \mapsto (N{:}K{:}M)$ und das Inverse $L \mapsto (M{:}L{:}N)$.

2) Ist $MI = M$ bzw. $NJ = N$, so gibt es ein kommutatives Diagramm von Verbandsisomorphismen

$$\begin{tikzcd} V_I(A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & V_J(B) \arrow[d] \\ V(A{:}I) \arrow[r, "\psi"] & V(B{:}J) \end{tikzcd}$$

mit Spalten der Form $U \mapsto (U{:}I)$, $V \mapsto (V{:}J)$ und den Inversen $U \mapsto UI$, $V \mapsto VJ$. Entsprechend gibt es ein kommutatives Diagramm zwischen den beidseitig zulässigen und kozulässigen Idealen.

Beweis 1) Ist klar. Wir zeigen 2). Wegen $U \subset (UI{:}I)$ gilt $UI = (UI{:}I)I$. Wegen $(U{:}I)I \subset U$ gilt auch $((U{:}I)I{:}I) = (U{:}I)$ für ein beliebiges Ideal $I \subset R$. Es ist also nur zu zeigen, daß die Abbildungen in den Spalten wohldefiniert sind. Ist aber I idempotent (dies gilt nach Voraussetzung), so gilt $((U{:}I){:}I) = (U{:}I^2) = (U{:}I)$ und $UI^2 = UI$. Wegen $((U{:}I){:}M) = (U{:}MI) = (UI{:}JM) = (UN{:}J^2) = (UN{:}J)$ für $UI = U$ ist das Diagramm kommutativ. □

INDUZIERTE FUNKTOREN UND ÄQUIVALENZ

Durch die Projektions- und Injektionsfunktoren in der Beziehung $\text{Mod-}R{\times}S \cong \text{Mod-}R{\times}\text{Mod-}S$ erhalten wir für

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma} \cong (R{\times}S){\times}_\phi(M{\times}N)$$

aus dem zugehörigen Adjunktionstripel (T,P,H) des zweiten Kapitels Unterfunktoren (Betrachte Mod-R, Mod-S $\subset$ Mod-R×S)

$$\begin{tikzcd} \text{Mod-}R \arrow[r, shift left=3, "T_R"] \arrow[r, shift right=3, "H_R"'] & \text{Mod-}\Lambda \arrow[l, "P_R"'] \arrow[r, "P_S"] & \text{Mod-}S \arrow[l, shift right=3, "T_S"'] \arrow[l, shift left=3, "H_S"] \end{tikzcd}$$

mit $P \cong (P_R,P_S)$, $T \cong (T_R,T_S)$, $H \cong (H_R,H_S)$ (identifiziere!). Explizit gilt

$$\begin{aligned} T_R(A) &= (A, A\otimes_R N)^{\alpha 1} & T_S(B) &= (B\otimes_S M, B)^{1\alpha} \\ P_R((A,B)^{fg}) &= A & P_S((A,B)^{fg}) &= B \\ H_R(A) &= (A, \mathrm{Hom}_R(M,A))^{1\alpha'} & H_S(B) &= (\mathrm{Hom}_S(N,B), B)^{\alpha' 1} \end{aligned}$$

wobei α, α' (ohne Indizes) jeweils die entsprechenden induzierten natürlichen Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha_1(A)&\colon A\otimes_R N\otimes_S M \to A & \alpha'_1(A)&\colon A \to \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M,A)) \\ \alpha_2(B)&\colon B\otimes_S M\otimes_R N \to B & \alpha'_2(B)&\colon B \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,B)) \end{aligned}$$

bezeichnen (s. Kap.2). Für die zu den Adjunktionspaaren $(\_\otimes_R N, \mathrm{Hom}_S(N,\_))$, $(\_\otimes_S M, \mathrm{Hom}_R(M,\_))$ zugehörigen Adjunktionen schreiben wir

$$\begin{aligned} \beta_1(A)&\colon \mathrm{Hom}_R(M,A)\otimes_S M \to A & \beta'_1(A)&\colon A \to \mathrm{Hom}_S(N, A\otimes_R N) \\ \beta_2(B)&\colon \mathrm{Hom}_S(N,B)\otimes_R N \to B & \beta'_2(B)&\colon B \to \mathrm{Hom}_R(M, B\otimes_S M). \end{aligned}$$

Diese sind die zu $T_R(A)$, $H_R(A)$, $T_S(B)$, $H_S(B)$ gehörigen Abbildungen in der jeweils adjungierten Darstellung. Analog bezeichnen T'_R, P'_R, H'_R, T'_S, P'_S, H'_S die entsprechenden Funktoren für die Kategorien der Linksmoduln.

6.10 Lemma Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring.

1) P_R ist zu T_R rechts- und zu H_R linksadjungiert und es gilt $P_R T_R = 1_{\text{Mod-}R}$, $P_R H_R = 1_{\text{Mod-}R}$.

2) P_S ist zu T_S rechts- und zu H_S linksadjungiert und es gilt $P_S T_S = 1_{\text{Mod-}S}$, $P_S H_S = 1_{\text{Mod-}S}$.

3) Insbesondere sind T_R, H_R, T_S, H_S voll treue auf Objekte injektive Funktoren und P_R, P_S exakt mit $P_R T_S = \_\otimes_S M$, $P_S T_R = \_\otimes_R N$.

4) Sind A_R, B_S Generatoren, und D_R, E_S Kogeneratoren, so ist $T_R(A)\oplus T_S(B)$ ein Generator und $H_R(D)\oplus H_S(E)$ ein Kogenerator in Mod-Λ.

Beweis 1) Bezeichnen $\text{Mod-}R \xrightarrow{Q} \text{Mod-}R{\times}S \xrightarrow{L} \text{Mod-}R$ den Projektions- und Injektionsfunktor, so sind (Q,L), (L,Q) Adjunktionspaare. Insbesondere ist auch die Komposition $(Q,L)(T,P) = (TQ,LP) = (T_R,P_R)$ von Adjunktionspaaren ein Adjunktionspaar. 2) gilt analog. 3) und 4) folgen aus 1) und 2). □

Ein Homomorphismus $f: A \to B$ über einem Ring S heißt **rational**, falls für jeden Untermodul $U \subset B_S$ mit $\mathrm{Bi}f \subset U$ gilt $\mathrm{Hom}_S(U/\mathrm{Bi}f, B) = 0$. Dual heißt f **korational**, falls für jeden Untermodul $U \subset \mathrm{Ke}f$ gilt $\mathrm{Hom}_S(A, \mathrm{Ke}f/U) = 0$. Offensichtlich ist ein rationaler bzw. korationaler Homomorphismus groß bzw. klein.

6.11 Bemerkung Sei (A,f) ein Λ-Rechtsmodul, dann gilt

1) Für die oben definierten Adjunktionen sind die zugehörigen Adjunktionsabbildungen $TP \to 1_{\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda}$, $1_{\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda} \to HP$ gegeben durch

$$(1,g): (A, A\otimes_R N)^{can} \to (A,B)^{fg}, \qquad (1,\bar f): (A,B)^{fg} \to (A, \mathrm{Hom}_R(M,A))^{can}$$
$$(f,1): (B\otimes_S M, B)^{can} \to (A,B)^{fg}, \qquad (\bar g,1): (A,B)^{fg} \to (A, \mathrm{Hom}_S(N,B))^{can}.$$

2) Wegen $\mathrm{Ke}(1,g) = (0,\mathrm{Ke}g)$ und $\mathrm{Hom}_\Lambda(T_R(A),(0,\mathrm{Ke}g/U)) = 0$ für jeden Untermodul $U \subset \mathrm{Ke}g$ sind $(1,g)$ und $(f,1)$ korationale Homomorphismen. Analog sind $(1,\bar f)$ und $(\bar g,1)$ rationale Homomorphismen. □

6.12 Endomorphismenringe Wir spezialisieren die Ergebnisse von 2.4 für die Berechnung des Endomorphismenringes für einen Rechtsmodul $T(A,B)$ über einem generalisierten Matrizenring $\Lambda = \left(\begin{smallmatrix} R & N \\ M & S \end{smallmatrix}\right)_{\rho\sigma}$ mit $A \in \mathrm{Mod}\text{-}R$, $B \in \mathrm{Mod}\text{-}S$ beliebig. Nach 2.4 gibt es semitriviale Ringisomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_\Lambda(T(A,B)) &\cong \mathrm{End}_{R\times S}((A,B)) \times_{\phi_1} \mathrm{Hom}_{R\times S}((A,B),(B\otimes_S M, A\otimes_R N)) \\ &\cong \mathrm{End}_R(A)\times \mathrm{End}_S(B) \times_{\phi_1} (\mathrm{Hom}_R(A,B\otimes_S M)\times \mathrm{Hom}_S(B,A\otimes_R N)), \end{aligned}$$

wobei ϕ_1 in zwei Abbildungen (setze $E = \mathrm{End}_R(A)$, $F = \mathrm{End}_S(B)$)

$$\rho_1: \mathrm{Hom}_S(B,A\otimes_R N)\otimes_F \mathrm{Hom}_R(A,B\otimes_S M) \to \mathrm{End}_R(A)$$
$$\sigma_1: \mathrm{Hom}_R(A,B\otimes_R M)\otimes_E \mathrm{Hom}_S(B,A\otimes_R N) \to \mathrm{End}_S(B)$$

zerfällt, mit $\rho_1(g,g') = \alpha_1(g\otimes 1)g'$, $\sigma_1(h,h') = \alpha_2(h\otimes 1)h'$ und $\alpha_1(a\otimes n\otimes m) = anm$, $\alpha_2(b\otimes m\otimes n) = bmn$ für jeweils geeignete Elemente. Wegen 6.3 gilt dann

1) $\mathrm{End}_\Lambda(T(A,B))$ ist ein generalisierter Matrizenring der Form

$$\mathrm{End}_\Lambda(T(A,B)) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(A) & \mathrm{Hom}_S(B,A\otimes_R N) \\ \mathrm{Hom}_R(A,B\otimes_S M) & \mathrm{End}_S(B) \end{pmatrix}_{\rho_1\sigma_1}.$$

2) Dual gilt für den Endomorphismenring $\mathrm{End}_\Lambda(H(A,B))$

$$\mathrm{End}_\Lambda(H(A,B)) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(A) & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(N,B),A) \\ \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M,A),B) & \mathrm{End}_S(B) \end{pmatrix}_{\rho_2\sigma_2}.$$

mit

$$\rho_2: \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(N,B),A)\otimes \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M,A),B) \to \mathrm{End}_R(A)$$
$$\sigma_2: \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M,A),B)\otimes \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(N,B),A) \to \mathrm{End}_S(B)$$

$\rho_2(g\otimes g') = g\mathrm{Hom}(M,g')\alpha_1'$, $\sigma_2(h\otimes h') = h\mathrm{Hom}(N,h')\alpha_2'$. □

Für $\Lambda = \left(\begin{smallmatrix} R & N \\ M & S \end{smallmatrix}\right)_{\rho\sigma}$ seien $I = NM$, $J = MN$ die Spurideale. Ähnlich wie oben erhalten wir für den Adjunktionstripel (C,V,K): $\mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \to \mathrm{Mod}\text{-}R/I\times \mathrm{Mod}\text{-}S/J$ von 2.6 zwei Adjunktionstripel

$$(C_R,V_R,K_R): \mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \to \mathrm{Mod}\text{-}R/I, \qquad (C_S,V_S,K_S): \mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \to \mathrm{Mod}\text{-}S/J$$

mit $C = (C_R,C_S)$, $V = (V_R,V_S)$, $K = (K_R,K_S)$. Explizit gilt

$$C_R((A,B)^{fg}) = A/BM, \quad V_R(A) = (A,0), \quad K_R((A,B)^{fg}) = \mathrm{Ke}\bar g,$$
$$C_S((A,B)^{fg}) = B/AN, \quad V_S(B) = (0,B), \quad K_S((A,B)^{fg}) = \mathrm{Ke}\bar f.$$

Setze $I' = \left(\begin{smallmatrix} I & N \\ M & S \end{smallmatrix}\right)$, $J' = \left(\begin{smallmatrix} R & N \\ M & J \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\Lambda/I' \cong R/I$, $\Lambda/J' \cong S/J$. Wir haben

6.13 Lemma Seien Λ, I', I, J', J wie oben. Dann gilt komponentenweise (Schreibweise von 2.6)

$$(C_R,V_R,K_R) \cong (C_{I'},V_{I'},K_{I'}), \qquad (C_S,V_S,K_S) \cong (C_{J'},V_{J'},K_{J'}).$$

Weiter gilt $\mathrm{Bi}(V_R) = \mathrm{Ke}(P_S)$, $\mathrm{Bi}(V_S) = \mathrm{Ke}(P_R)$. Also definieren wegen 6.10

$$\mathrm{Mod}\text{-}R/I \xrightarrow{V_R} \mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \xrightarrow{P_S} \mathrm{Mod}\text{-}S$$
$$\mathrm{Mod}\text{-}S/J \xrightarrow{V_S} \mathrm{Mod}\text{-}\Lambda \xrightarrow{P_R} \mathrm{Mod}\text{-}R$$

'zerfallende exakte Folgen' von Modulkategorien. □

Aus 6.10 und 6.13 erhalten wir eine Reihe von Aussagen, die sich auch in der Sprache der Lokalisierung und Kolokalisierung bzw. der Torsionstheorien allgemeiner darstellen lassen. Wir wollen aber zunächst hiervon der Einfachheit und Unmittelbarkeit halber keinen Gebrauch machen.

Man erhält aus 6.10 wegen der Volltreuheit und der Injektivität der Funktoren auf die Objekte

6.14 Satz Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring. Dann gilt

1) Die Funktorpaare (P_R, H_R) und (P_S, H_S) induzieren Äquivalenzen

$$\text{Mod-}R \cong Bi(H_R), \quad \text{Mod-}S \cong Bi(H_S).$$

Insbesondere sind $Bi(H_R)$ und $Bi(T_R)$ Giraud-Unterkategorien (d.i. reflexive Unterkategorien mit exaktem Reflektor $H_R P_R$ bzw. $H_S P_S$, d.i. Quotientenkategorien [41]).

2) Die Funktorpaare (T_R, P_R) und (P_S, H_S) induzieren Äquivalenzen

$$\text{Mod-}R \cong Bi(T_R), \quad \text{Mod-}S \cong Bi(T_S).$$

Insbesondere sind $Bi(T_R)$ und $Bi(T_S)$ Kogiraud-Unterkategorien (d.i. koreflexive Unterkategorien mit exaktem Koreflektor) von Mod-Λ. □

Wir beschreiben solche Unterkategorien und die von ihnen generierten bzw. kogenerierten Klassen (vollen Unterkategorien)

6.15 Satz Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul, $I' = \begin{pmatrix} I & N \\ M & S \end{pmatrix}$, $J' = \begin{pmatrix} R & M \\ M & J \end{pmatrix}$, $I = NM$, $J = MN$.

1) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $g: A \otimes_R N \to B$ ist surjektiv (bzw. bijektiv)

b) Es gibt einen Λ-Epimorphismus (bzw. einen Isomorphismus) $T_R(A') \to (A,B)^{fg}$

c) Die natürliche Abbildung $(A,B)^{fg} \otimes_\Lambda J' \to (A,B)^{fg}$ ist surjektiv (bzw. bijektiv).

2) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $\bar{f}: B \to Hom_R(M,A)$ ist injektiv (bzw. bijektiv)

b) Es gibt einen Λ-Monomorphismus (bzw. einen Isomorphismus) $(A,B)^{fg} \to H_R(A)$

c) Die natürliche Abbildung $(A,B)^{fg} \to Hom_\Lambda(J', (A,B)^{fg})$ ist injektiv (bzw. bijektiv).

3) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) f und g sind bijektiv (bzw. surjektiv)

b) Es gibt einen Λ-Isomorphismus $T_R(A) \cong T_S(B)$ (bzw. Epimorphismen $T_R(A) \to T_S(B)$, $T_S(B) \to T_R(A)$).

c) Die natürlichen Abbildungen $A \otimes_R I \to A$, $B \otimes_S J \to B$ sind bijektiv (surjektiv).

4) Duale Aussagen zu 3) gelten für $\bar{f}$, $\bar{g}$, H_R, H_S.

Beweis 1) 'a)=>b)' ist klar. Es gilt nun $T_R(A') \otimes_\Lambda J' \cong T_R(A')$ durch die natürliche Abbildung. Hieraus folgt 'b)=>c)'. Außerdem kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_R(A) \otimes_\Lambda J' & \xrightarrow{\cong} & T_R(A) \\ {\scriptstyle (1,g)\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1,g)} \\ (A,B)\otimes_\Lambda J' & \longrightarrow & (A,B)^{fg}. \end{array}$$

Wegen $Ke(g)J' = 0$ und $J'^2 = J'$ ist $T_R(A) \otimes_\Lambda J' \cong (A,B)^{fg} \otimes_\Lambda J'$. So folgt 'c)=>a)'.

2) gilt analog.

3) 'a) => b)' ist klar. Ist $(\phi, \psi): T_R(A) \to T_S(B)$ ein Epimorphismus. Dann betrachte die Komposition $(f,1)(\phi,\psi): T_R(A) \to (A,B)^{fg}$. So gilt $\psi = g(f\phi \otimes 1)$. Also ist g surjektiv. Ist zusätzlich (ϕ, ψ) bijektiv, so ist $f \otimes 1$ injektiv. Zusammen mit der symmetrischen Argumentation folgt dann 'b)=>a)'. 'a)<=>c)' folgt aus 2.8 bzw. mit 1) aus folgendem Lemma. □

6.16 Lemma Für einen beliebigen Ring R und Ideale $I, J \subset R$ gilt

1) $\mathbb{C}_I \cap \mathbb{C}_J = \mathbb{C}_{IJ} = \mathbb{C}_{I \cap J}$, $\mathbb{T}_I \cap \mathbb{T}_J = \mathbb{T}_{IJ} = \mathbb{T}_{I \cap J}$.

2) $\mathbb{D}_I \cap \mathbb{C}_J = \mathbb{D}_{IJ} = \mathbb{D}_{I \cap J}$, $\mathbb{F}_I \cap \mathbb{F}_J = \mathbb{F}_{IJ} = \mathbb{F}_{I \cap J}$.

Beweis 1) Wegen $AIJ \subset A(I \cap J) \subset AI \cap AJ$ für $A \in$ Mod-R gilt der zweite Teil von 1). Außerdem ist $\mathbb{C}_{IJ} \subset \mathbb{C}_{I \cap J} \subset \mathbb{C}_I \cap \mathbb{C}_J$. Wegen $A \otimes_R I \otimes_R J \cong A \otimes_R IJ$ falls $AI = A$, folgt dann der erste Teil. 2) gilt analog. □

Sind R und S ähnliche Ringe, so existiert bekanntlich nach Morita ein generalisierter Matrizenring $\Lambda(M_R)$ für einen Progenerator M_R mit $S \cong End(M_R)$. In diesem Fall gilt $Bi(T_R) = Bi(H_R) = Bi(T_S) = Bi(H_S)$. Umgekehrt folgt hieraus mit 6.14 die Äquivalenz Mod-$R \cong$ Mod-S. In der Literatur sind oft die Äquivalenzaussagen von Morita auf Aussagen über die Äquivalenz von Unterkategorien von Mod-R und Mod-S verallgemeinert worden. Diese Verallgemeinerungen lassen sich im Prinzip auf die Frage nach der Existenz eines generalisierten Matrizenringes Λ zurückführen, für den die Bilder zweier Funktoren aus $\{T_R, H_R, T_S, H_S\}$ übereinstimmen, bzw. auf die Untersuchung solcher Unterkategorien, deren Bilder (als vollen Unterkategorien von Mod-Λ) durch zwei solcher Funktoren gleich sind. Diese sind trivialerweise äquivalent. Wir haben

6.17 Lemma Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring. Sind U_1, U_2 zwei Funktoren aus $\{T_R, H_R, T_S, H_S\}$ und P_1, P_2 die zugehörigen Vergißfunktoren. Dann definiert jede volle Unterkategorie $C \subset Bi(U_1) \cap Bi(U_2)$ eine Äquivalenz zwischen $P_1(C)$ und $P_2(C)$. □

Wir geben hierzu ein Beispiel. Müller [28], und Kato, Ohtake [21] zeigten für einen Morita-Kontext (R,M,N,S,ρ,σ) mit den Spuridealen $I = NM \subset R$, $J = MN \subset S$ die Äquivalenz der vollen Unterkategorien $\mathbb{C}_I$ und $\mathbb{C}_J$ durch $\_\otimes_R N$ und $\_\otimes_S M$ bzw. von $\mathbb{D}_I$ und $\mathbb{D}_J$ durch $Hom_R(M,\_)$ und $Hom_S(N,\_)$. Diese (vollen) Unterkategorien sind wegen 6.15 die Urbilder von $Bi(T_R) \cap Bi(T_S)$ bzw. $Bi(H_R) \cap Bi(H_S)$ in Mod-R und Mod-S. Es gilt also

6.18 Folgerung Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $I = NM$, $J = MN$. Dann definieren die Funktorpaare $(\_\otimes_R N, \_\otimes_S M)$ und $(Hom_R(M,\_), Hom_S(N,\_))$ jeweils Äquivalenzen $\mathbb{C}_I \simeq \mathbb{C}_J$ und $\mathbb{D}_I \simeq \mathbb{D}_J$. □

6.19 Bemerkung Wir stellen dies in einen anderen Zusammenhang, als Ansatz für eine allgemeinere Untersuchung. Wir beschränken uns aber der Einfachheit halber auf Modulkategorien (vgl. auch Lambek [24], Isbell [17]).

1) Für Funktoren G, F: Mod-R $\to$ Mod-S und einen funktoriellen Homomorphismus $\phi: F \to G$ sei

$$Fix(\phi) = \{A \in \text{Mod-R} \mid \phi(A) \text{ ist ein Isomorphismus}\}.$$

Analog definiere $Epi(\phi)$ bzw. $Mono(\phi)$ als die Klasse (volle Unterkategorie) der Moduln $A \in$ Mod-R für die $\phi(A)$ einen Epimorphismus bzw. einen Monomorphismus ist. Es gilt $Fix(\phi)$ = Mod-R genau dann, wenn ϕ ein funktorieller Isomorphismus ist.

2) Gibt es für zwei Funktoren F: Mod-R $\to$ Mod-S, G: Mod-S $\to$ Mod-R natürliche Transformationen einerseits $\phi: FG \to 1_{Mod-S}$ oder $\phi: 1_{Mod-S} \to FG$ und andererseits $\psi: GF \to 1_{Mod-R}$ oder $\psi: 1_{Mod-R} \to GF$ (4 Fälle) derart, daß je nach Situation gilt

a) $(F\psi)(\phi F) = 1$ und $(\psi G)(G\phi) = 1$, d.h. (G,F) ist Adjunktion.

b) $(\phi F)(F\psi) = 1$ und $(G\phi)(\psi G) = 1$, d.h. (F,G) ist Adjunktion.

c) $\phi F = F\psi$ und $G\phi = \psi G$,

dann definieren F und G eine Äquivalenz von Kategorien

$$Fix(\phi) = Fix(\psi).$$

Dabei garantiert die jeweilige Bedingung a)-c), daß die Einschränkungen der Funktoren wohldefiniert sind. Dies gilt für beliebigen Kategorien.

3) Ein Spezialfall hiervon ist gegeben für jeden generalisierten Matrizenring $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$, d.h. es gibt zwei (R,S)-Adjunktionen (F,G), (F',G') gegeben jeweils durch die Bimoduln N bzw. M und die funktoriellen Homomorphismen $\alpha_1: F'F \to 1$, $\alpha_2: FF' \to 1$ (mit den Definitionen von 6.10). Dadurch sind die übrigen natürlichen Transformationen A_i', β_i', β_i, $i = 1,2$ eindeutig bestimmt. Es gelten für $C_1 = BiT_R \cap BiT_S$, $C_2 = BiH_R \cap BiH_S$, $C_3 = BiT_R \cap BiH_S$, $C_4 = BiH_R \cap BiT_S$ die Gleichungen

$P_R(C_1) = Fix(\alpha_1)$, $P_R(C_2) = Fix(\alpha_1')$, $P_R(C_3) = Fix(\beta_1')$, $P_R(C_4) = Fix(\beta_1)$,
$P_S(C_1) = Fix(\alpha_2)$, $P_S(C_2) = Fix(\alpha_2')$, $P_S(C_3) = Fix(\beta_2)$, $P_S(C_4) = Fix(\beta_2')$.

Ersetzen wir in C_1 bzw. C_2 die Bildkategorien durch die von ihnen generierten bzw. kogenerierten Klassen, dann gilt

$$P_R(C_1) = Epi(\alpha_1), \quad P_S(C_1) = Epi(\alpha_2) \quad \text{bzw.}$$
$$P_R(C_2) = Mono(\alpha_1'), \quad P_S(C_2) = Mono(\alpha_2').$$

Wegen der Kommutativität der Diagramme

$$\begin{tikzcd} A\otimes_R N\otimes_S M \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & Hom_R(M,A)\otimes M \arrow[d, "\beta_1"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta_1'"] \arrow[dr, "\alpha_1'"'] & Hom_S(N,A\otimes N) \arrow[d] \\ & Hom_S(N,Hom_R(M,A)), \end{tikzcd}$$

gilt $Epi(\alpha_1) \subset Epi(\beta_1)$, $Epi(\alpha_2) \subset Epi(\beta_2)$, sowie $Mono(\alpha_1') \subset Mono(\beta_1')$, $Mono(\alpha_2') \subset Mono(\beta_2')$. □

Der Vollständigkeit halber geben wir in diesem Zusammenhang eine Verallgemeinerung von Proposition 1 von Müller [28].

6.20 Lemma Für einen Bimodul ${}_RM_R$ seien $F = \_\otimes_R M$, $G = Hom_R(M_R,\_)$ und $\phi = 1\otimes\rho: F \to 1_{Mod-R}$ für einen Bimodulhomomorphismus $\rho: M \to R$. Weiter sei $I = Bi\rho$ das **Spurideal** und $\psi: 1_{Mod-R} \to G$ die zu ϕ adjungierte Transformation. Dann gilt

1) $Epi(\phi)$ ist eine Torsionsklasse in Mod-R abgeschlossen bzgl. kleiner Homomorphismen.

2) $Mono(\psi)$ ist eine hereditäre Torsionsklasse. Ist außerdem $IKe(\rho)$ =

$Ke(\rho) = 0$, dann ist $Fix(\psi)$ die zugehörige Quotientenkategorie und es gilt

$$Epi(\Phi) = \mathbb{T}_I, \quad Fix(\Phi) = \mathbb{C}_I, \quad Mono(\psi) = \mathbb{F}_I, \quad Fix(\psi) = \mathbb{D}_I.$$

Beweis 1) F ist rechtsexakt und erhält direkte Summen. So ist $Fix(\Phi)$ eine Torsionsklasse. Ist nun $f: P \to A$ ein kleiner Epimorphismus, $A \in Epi(\Phi)$, so betrachte die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} FP \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\Phi(P)"'] & FA \arrow[d, "\Phi(A)"] \\ P \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "1\otimes\rho"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & A\otimes_R I \arrow[dl] \\ A & \end{tikzcd} .$$

Nach Annahme ist $f\Phi(P)$ surjektiv, so auch $\Phi(P)$ wegen der Kleinheit von f. Also $P \in Epi(\Phi)$. Gilt nun $IKe(\rho) = 0$, so ist $1\otimes\rho$ bijektiv wegen $A\otimes_R Ke(\rho) = 0$. Also $Epi(\Phi) = \mathbb{T}_I$, $Fix(\Phi) = \mathbb{C}_I$.
Analog ist $Mono(\psi)$ eine torsionsfreie Klasse abgeschlossen bzgl. großer Monomorphismen, also hereditär, und, falls $Ke(\rho)I = 0$, $Mono(\psi) = \mathbb{F}_I$, $Fix(\psi) = \mathbb{D}_I$. Ist dies der Fall, so ist $A \in \mathbb{F}_I$ genau dann der Fall, wenn $E \in \mathbb{F}_I$ für die injektive Hülle E von A_R. Wegen $Ext_R(R/I,E) = 0$ ist dies genau dann der Fall, wenn $E \in \mathbb{D}_I$. Unter dieser Annahme betrachte das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & E/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & GA \arrow[r] & GE \arrow[r] & G(E/A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Durch das Schlangenlemma ist $\psi(A)$ genau dann surjektiv, wenn $E/A \in \mathbb{F}_I$. Es gilt also $A \in \mathbb{D}_I \iff A,\ E/A \in \mathbb{F}_I$. □

Aus 6.15 und 6.14 bzw. 6.13 erhalten wir unmittelbar folgende Aussagen für den Fall, daß σ surjektiv ist. Ist C eine beliebige Klasse von Moduln so schreiben wir $Gen(C)$ bzw. $Kog(C)$ für die von C generierten bzw. kogenerierten Klassen (vollen Unterkategorien).

6.21 Satz Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $I = NM$, $J = MN$. Dann sind äquivalent

1) σ ist surjektiv

2) Für jeden Λ-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$ ist g bijektiv, d.h. $Bi(T_R) =$ Mod-Λ

3) $Bi(T_S) \subset Gen(Bi(T_R))$ bzw. $Bi(T_S) \subset Bi(T_R)$

4) Für jeden Λ-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$ ist $\bar{f}$ bijektiv, d.h. $Bi(H_R) =$ Mod-Λ

5) $Bi(H_S) \subset Kog(Bi(H_R))$ bzw. $Bi(H_S) \subset Bi(H_R)$

6) Für jeden S-Rechtsmodul B gilt $V_J(B) = V(B_S) = V(B:J)$

7) Mod-$\Lambda \cong$ Mod-R durch die Adjunktion (T_R,P_R) bzw. (P_R,H_R)

8) $\Lambda \sim \Lambda(M_R)$ und M_R ist endlich erzeugt projektiv

9) $\Lambda \sim \Lambda({}_RN)$ und ${}_RN$ ist endlich erzeugt projektiv

10) $M = MI$ und ${}_SM$ bzw. N_S ist ein Generator

In diesem Fall ist die natürliche Abbildung $T_R \to H_R$ ein funktorieller Isomorphismus, d.h. $Bi(T_R) = Bi(H_R)$.

Beweis Die Äquivalenz 1) bis 7) folgt unmittelbar aus 6.14, 6.15 sowie der Zusatz. 8) => 1), 9) => 1) folgen aus 5.6 und 3.8 angewendet auf (M,S) bzw. $\binom{N}{S}$. Aus 1) folgt durch 4) $\Lambda \sim \Lambda(M_R)$ und $(M,S) \cong T_R(M)$ ist mit 2) endlich erzeugt projektiv, so auch M_R mit 7) bzw. 3.5 und 3.6. So gilt 1) => 8), 9). 1) => 10) ist klar. Mit 10) ist ${}_SM = MI = JM$ ein Generator, also $S = JS = J$. So gilt 10) => 1). □

Offensichtlich verallgemeinert dies die bekannte Aussage Mod-$R \cong$ Mod-$M_n(R)$ für eine natürliche Zahl n. Die Aussagen in [33] über die homologische Dimension von Moduln über Λ im Fall σ surjektiv, z.B. rh-dim R = rh-dim Λ, $p\text{-}dim_\Lambda(A,B)^{fg} = p\text{-}dim_R A$ sind dann wohl klar.

6.22 Bemerkung In [23] untersuchte J. Kraemer solche Ringe R mit ${}_SP_R \cong {}_SHom_S(P^*,S)$ und $P^* = Hom_R(P,R)$, $S = End(P_R)$ für jeden endlich erzeugten projektiven Modul P_R. Für einen endlich erzeugten projektiven Modul P_R sind äquivalent

1) Es gibt ein Isomorphismus ${}_SP_R \cong {}_SHom_S(P^*,S)$

2) Die natürliche Abbildung $P \to Hom_S(P^*,S)$ ist bijektiv

3) Die natürliche Abbildung $P \to Hom_R(I,P)$ ist bijektiv, $I = P^*P$.

Die Äquivalenz 2)<=>3) ist klar nach 6.21. 2)=>1) wurde in [23] gezeigt. Es gilt allgemeiner

6.23 Folgerung Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$, $I = NM$, $J = MN$, und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul und $\bar{f}: B \to Hom_R(M,A)$ bijektiv. Dann sind äquivalent

1) $A_R \cong Hom_S(N,B)$ (beliebig) und $B \in \mathbb{D}_J$ (d.h. $B \cong Hom_S(J,B)$)

2) $\bar{g}: A \to \mathrm{Hom}_S(N,B)$ ist bijektiv

3) Die natürliche Abbildung $A \to \mathrm{Hom}_R(I,B)$ ist bijektiv.

Beweis Mit 1) gilt $(A,B)^{fg} \cong (\mathrm{Hom}_S(N,B), \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,B)) \cong (\mathrm{Hom}_S(N,B),B) \in \mathrm{Bi}(H_S)$. Also ist $\bar{g}$ bijektiv nach 6.15. 2) => 3) => 1) gelten gleichfalls nach 6.15. □

Im allgemeinen erweist sich die Untersuchung von generalisierten Matrizenringen als ein effektives Werkzeug für die Verallgemeinerung von vielen bekannten Aussagen zu Moduln über Endomorphismenringen, insbesondere von endlich erzeugten projektiven Moduln und Generatoren. Zum Beispiel lassen sich aus den oben erwähnten Äquivalenzen viele der Ergebnisse von [25,26,42,4] über Torsionstheorien und Äquivalenzen von Quotientenkategorien folgern. Andererseits ist es möglich viele solcher Aussagen mittels generalisierter Matrizenringe auf die Untersuchung von endlich erzeugten projektiven Moduln zurückzuführen. Es gilt aus 6.21

6.24 Bemerkung

1) Ist R ein beliebiger Ring und $e \in R$ ein Idempotent, dann gilt $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}\begin{pmatrix} R & Re \\ eR & eRe \end{pmatrix}$.

2) Insbesondere gilt für $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ $\text{Mod-}\Lambda \cong \text{Mod-}\begin{pmatrix} \Lambda & V \\ U & R \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} \Lambda & V \\ U & R \end{pmatrix} \sim \Lambda(U_\Lambda)$ und $U = (R\ N)$ endlich erzeugt projektiv. Weiter gilt $R \cong \mathrm{End}(U_\Lambda)$.

□

Zum Schluß geben wir eine Aussage über den Zusammenhang in 6.10 von Adjunktionstripeln und generalisierten Matrizenringen. Dies berichtigt Theorem 2.3 von Cohn [3].

6.25 Satz Für beliebige Ringe R und S sind äquivalent

1) Es gibt einen generalisierten Matrizenring $\begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$.

2) Es gibt einen Ring T und jeweils (R,T)- und (S,T)-Adjunktionstripel (T_R,P_R,H_R) und (T_R,P_R,H_R) mit $P_RT_R \cong 1_{\text{Mod-}R}$, $P_ST_S \cong 1_{\text{Mod-}S}$ für die Adjunktionen und $P_ST_R(R) \cong N$, $P_RT_S(S) \cong M$.

Beweis 1) => 2) folgt aus 6.10. Gelte umgekehrt 2). Dann setze ${}_RU_T = T_R(R)$. So sind T_R, P_R, H_R natürlich äquivalent zu den Funktoren

$$T_R \cong \_\otimes_R U, \quad P_R \cong \mathrm{Hom}_T(U,\_), \quad H_R \cong \mathrm{Hom}_R(U^*,\_)$$

mit $U^* = \mathrm{Hom}_T(U,T)$ und $R \cong \mathrm{End}_R(R) \cong \mathrm{End}_T(T)$ auf natürliche Weise nach Voraussetzung. Analog gilt dies für (T_S,P_S,H_S) und einen Bimodul ${}_SV_T$ mit $S \cong \mathrm{End}_T(V)$. Dann ist nach 6.2 durch die Zusammensetzung

$$\Lambda(U_T)\circ\Lambda(V_T) = \begin{pmatrix} R & U^*\otimes_T V \\ V^*\otimes_T U & S \end{pmatrix}$$

ein generalisierter Matrizenring. Mit der Voraussetzung und 6.2 folgt dann die Behauptung. □

PROJEKTIVE UND INJEKTIVE MODULN

Im folgenden spezialisieren und ergänzen wir einige Ergebnisse aus dem 3. Kapitel über projektive und injektive Moduln, die von besonderem Interesse sind.

6.26 Lemma Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$, und seien A_R, B_S Rechtsmoduln. Dann gilt

1) Genau dann ist A_R projektiv, wenn $T_R(A)$ projektiv ist.

2) Genau dann ist A_R injektiv, wenn $H_R(A)$ injektiv ist.

3) Genau dann ist $h: A_R \to A'_R$ ein korationaler (kleiner) Epimorphismus, wenn $T_R(h)$ ebenfalls ein korationaler (kleiner) Epimorphismus ist.

4) Genau dann ist $h: A_R \to A'_R$ ein rationaler (großer) Monomorphismus, wenn $H_R(h)$ ebenfalls ein rationaler (großer) Monomorphismus ist.

Beweis Gilt im wesentlichen nach 3.7 und 3.10. Ist nun $h: A \to A'$ ein Epimorphismus und sind $U \subset \mathrm{Ke}h$, $V \subset \mathrm{Ke}(h\otimes 1)$ Untermoduln. So gilt $\mathrm{Hom}_\Lambda(T(A),(\mathrm{Ke}(h)/U, \mathrm{Ke}(h\otimes 1)/V)) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Ke}(h)/U)$. So gilt auch 3). 4) folgt analog. □

6.27 Folgerung Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ und seien $C = (A,B)^{fg}$, $C' = (A',B')^{f'g'}$ Λ-Rechtsmoduln. Dann gilt

1) Ist $g': A'\otimes_R N \to B'$ surjektiv, dann ist $(h,k): C \to C'$ genau dann ein korationaler (kleiner) Epimorphismus, wenn $h: A \to A'$ ein korationaler (kleiner) Epimorphismus und $g: A\otimes_R N \to B$ surjektiv ist.

2) Ist g' surjektiv, dann ist C genau dann eine projektive Hülle von C', wenn A eine projektive Hülle von A' und g bijektiv ist.

3) Ist $\bar{f}: B \to \mathrm{Hom}_R(M,A)$ injektiv, dann ist $(h,k): C \to C'$ genau dann ein rationaler (großer) Monomorphismus, wenn $h: A \to A$ ein rationaler

(großer) Monomorphismus und $\bar{f}'$: $B' \to Hom_R(M,A')$ injektiv ist.

4) Ist $\bar{f}$ injektiv, dann ist C' genau dann eine injektive Hülle (eine maximale rationale Erweiterung) von C, wenn A' eine injektive Hülle (eine maximale rationale Erweiterung) von A und $\bar{f}'$ bijektiv ist. Entsprechend gelten die symmetrischen und die kombinierten Aussagen. Beispielsweise gilt

5) Sind f', g' surjektiv dann sind äquivalent

a) C ist eine projektive Hülle von C'

b) A ist eine projektive Hülle von A' und g: $A \otimes_R N \cong B$

c) B ist eine projektive Hülle von B' und f: $B \otimes_S M \cong A$.

6) Sind $\bar{f}$, $\bar{g}$ injektiv dann sind äquivalent

a) C' ist eine injektive Hülle von C

b) A' ist eine injektive Hülle von A und $\bar{f}'$: $B' \cong Hom_R(M,A)$

c) B' ist eine injektive Hülle von B und $\bar{g}'$: $A' \cong Hom_S(N,B)$.

Beweis 1) Ist g' surjektiv und $C \to C'$ ein kleiner Epimorphismus, so ist g surjektiv wegen 6.15 und 6.20. So gilt die Behauptung nach 3.11 für kleine Epimorphismen. Analog folgt die Behauptung im korationalen Fall nach 6.26 und 6.11 zusammen mit der Tatsache (dies zeigt man leicht), daß eine Komposition $\phi\psi$ von Epimorphismen genau dann korational ist, wenn ϕ und ψ korational sind.

2) <= gilt nach 3.12. => gilt nach 1) und 3.8.

3) folgt analog, sowie auch 4) im Fall der injektiven Hüllen. Wegen 6.27 ist nur die Äquivalenz der Maximalität für rationale Erweiterungen zu zeigen. Ist aber A' eine maximale rationale Erweiterung, und ist $H(A') \to (A'',B'')$ eine rationale Erweiterung, dann auch $(A'',B'') \to H(A'')$ wegen 3). Also ist $A' \cong A''$ und die Komposition $H(A') \to (A'',B'') \to H(A'')$ ist bijektiv. Damit $H(A') \cong (A'',B'')$. Die Umkehrung gilt analog mit 3) und 6.11.

5) und 6) sind klar. □

6.28 Folgerung Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$, und sei A ein R-Rechtsmodul

1) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) P_R ist eine (endlich erzeugte) projektive Hülle von A_R und $ANM = A$.

b) $P \otimes_R N$ ist eine (endlich erzeugte) projektive Hülle von $A \otimes_R N$ und $P \otimes_R N \otimes_S M \cong P$ auf natürliche Weise

2) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) Q_R ist eine (endlich koerzeugte) injektive Hülle von A_R und $l_A(NM) = 0$

b) $Hom_R(M,Q)$ ist eine (endlich koerzeugte) injektive Hülle von $Hom_R(M,A)$ und $Q \cong Hom_S(N,Hom_R(M,Q))$ auf natürliche Weise. □

Beweis Folgt aus 6.27 mit 3.4. □

6.29 Folgerung Sei R ein beliebiger Ring, M_R endlich erzeugt projektiv und sei $\Lambda(M_R) = \binom{R\ M^*}{M\ S}$ der Dualitätsring

1) M_R ist injektiv und $l_M(M^*) = 0$ (d.h. $l_M(M^*M) = 0$) genau dann, wenn S rechts selbstinjektiv ist und es gibt einen Isomorphismus $_SM_R \cong Hom_S(M^*,S)_R$.

2) Für ein Rechtsideal $J \subset S$ ist U_R genau dann eine injektive Hülle von S/J, wenn $Hom_S(M^*,U)$ eine injektive Hülle von M/K ist, wobei $K = l_M(J:N)$. Strenger gilt

3) Für einen $\Lambda(M_R)$-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$ sei V_R eine injektive Hülle von $A/l_A(N)$ und U_S eine injektive Hülle von B_S. Dann gilt $U \cong Hom_R(M,V)$, $V \cong Hom_S(M^*,U)$.

Beweis 1) Für ' <= ' folgt $l_M(M^*) = 0$ aus 6.23. Dann folgt die Behauptung aus 2). 2) ist ein Spezialfall von 3). 3) folgt aus 6.28. □

In [23] Lemma 1.4 zeigte J.Kraemer $_SM_R \cong {}_SHom_S(M^*,S)_R$ für einen halbeinfachen Ring und einen endlich erzeugten Modul M_R. Dies ist ein Spezialfall von 1). Auch wurde 2) '=>' in [23] Satz 1.6 für $J = Ra(S)$ unter der Voraussetzung gezeigt, daß $R/Ra(R)$ halbeinfach ist. Dies ist überflüssig (vgl. auch 8.7).

Wir schliessen hier die Betrachtung von projektiven und injektiven Moduln mit einer Bemerkung für den Fall, daß ein generalisierter Matrizenring $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ semiperfekt ist. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn R und S semiperfekt sind (Für entsprechende Aussagen für injektive Moduln siehe 7.13). In diesem Fall gilt

6.30 Bemerkung Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ semiperfekt, und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Dann ist $(A,B)^{fg}$ genau dann projektiv, wenn gilt $(A,B)^{fg}$

$\cong T_R(P)\oplus T_S(Q)$ für projektive Moduln P_R und Q_S.

Beweis Wähle Idempotente $e_1,\dots,e_n \in R$, $f_1,\dots,f_m \in S$ derart, daß $\{e_1',\dots e_n', f_1',\dots f_m'\}$ mit $e_i' = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_j' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_j \end{pmatrix}$ eine Basis-Menge von primitiven Idempotenten bildet. Dann hat $(A,B)^{fg}$ eine Darstellung der Form

$$(A,B)^{fg} \cong e_1'\Lambda^{(I_1)}\oplus\dots\oplus e_n'\Lambda^{(I_n)}\oplus f_1'\Lambda^{(J_1)}\oplus\dots\oplus f_m'\Lambda^{(J_m)}.$$

Wegen $e_i'\Lambda^{(I_i)} \cong (e_iR, e_iN)^{(I_i)} \cong T_R(e_iR^{(I_i)})$ und $f_j'\Lambda^{(J_i)} \cong (f_jM, f_jS)^{(J_j)} \cong T_S(f_jS^{(J_j)})$ folgt hieraus die Behauptung. □

EINBETTUNG $R\times_\phi M \to \begin{pmatrix} R & M \\ M & R \end{pmatrix}_{\phi\phi}$

Im allgemeinen ist nicht jede semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ ein generalisierter Matrizenring. Sei z.B. K ein Körper, $R = M = K$, und sei ϕ die gewöhnliche Multiplikation. Jede semitriviale Erweiterung läßt sich aber mittels der Abbildung

$$R\times_\phi M \to \begin{pmatrix} R & M \\ M & R \end{pmatrix}_{\phi\phi}, \quad (r,m) \mapsto \begin{pmatrix} r & m \\ m & r \end{pmatrix}$$

in einen generalisierten Matrizenring einbetten. Der zugehörige Vergißfunktor ist dann

$$\amalg\colon \text{Mod-}\begin{pmatrix} M & R \\ R & M \end{pmatrix}_{\phi\phi} \to \text{Mod-}R\times_\phi M$$

mit $\amalg((A,B)^{fg}) = (A\oplus B, \begin{pmatrix} 0 & f \\ g & 0 \end{pmatrix})$, $\amalg(h,k) = h\oplus k$.

6.31 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann definiert

$$\Delta\colon \text{Mod-}R\times_\phi M \to \text{Mod-}\begin{pmatrix} R & M \\ M & R \end{pmatrix}_{\phi\phi}$$

mit $\Delta(A,f) = (A,A)^{ff}$ und $\Delta(h) = (h,h)$ einen treuen exakten Funktor. Weiter sind $\amalg$ und Δ zueinander links- und rechtsadjungiert.

Beweis Δ wird vom Diagonalfunktor Mod-R $\to$ Mod-$R\times R$ induziert. Umgekehrt ist $\amalg$ genau die Einschränkung des zum Diagonalfunktor adjungierten Koproduktes bzw. Produktes. Entsprechend werden die Adjunktionsisomorphismen induziert. □

6.32 Bemerkung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung

1) Für die Funktortripel (T,P,H) und (T_R,P_R,H_R) gelten folgende Beziehungen

$$\amalg T_R = T, \quad P_R\Delta = P, \quad \amalg H_R = H .$$

Insbesondere ist $((r,m),(r',m')) \mapsto \begin{pmatrix} r & m' \\ m & r' \end{pmatrix}$ ein Isomorphismus

$$\Delta(R\times_\phi M) \cong \begin{pmatrix} R & M \\ M & R \end{pmatrix}_{\phi\phi}$$

von $R\times_\phi M$-$\begin{pmatrix} R & M \\ M & R \end{pmatrix}_{\phi\phi}$-Bimoduln.

2) Für eine direkte Summe $A\oplus B$ von R-Moduln seien p_A, p_B die Projektionen und ι_A, ι_B die Injektionen. Die zur Adjunktion $(\Delta,\amalg)$ gehörigen universellen Abbildungen

$$e\colon \Delta\amalg((A,B)^{fg}) \to (A,B)^{fg}, \qquad n\colon (A,f) \to \amalg\Delta(A,f)$$

für entsprechende Moduln $(A,B)^{fg} \in$ Mod-Λ, $(A,f) \in$ Mod-$R\times_\phi M$ sind dann auf die übliche Weise durch die Projektionen $e = (p_A,p_B)$ und die Diagonalabbildung $n = (1_A,1_A)$ gegeben. Analog sind für die Adjunktion $(\amalg,\Delta)$ die natürlichen Abbildungen

$$e'\colon \amalg\Delta(A,f) \to (A,f), \qquad n'\colon (A,B)^{fg} \to \Delta\amalg(A,B)^{fg}$$

durch die Injektionen $n' = (\iota_A,\iota_B)$ und die Faltungsabbildung $e' = (1_A,1_A)$ gegeben.

3) Für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul ist mit $\bar{n} = (1_A,-1_A)$ die Folge

$$0 \to (A,-f) \xrightarrow{\bar{n}} (A\oplus A, \begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix}) \xrightarrow{e'} (A,f) \to 0$$

exakt in Mod-$R\times_\phi M$ (vgl. 1.19) und mit $\bar{n}' = (\iota_B,\iota_A)$ ist die Folge

$$0 \to (B,A)^{gf} \xrightarrow{\bar{n}'} (A\oplus B, A\oplus B)^{**} \xrightarrow{e} (A,B)^{fg} \to 0$$

exakt zerfallend für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$. Also gilt insbesondere $\Delta\amalg(A,B)^{fg} \cong (A,B)^{fg}\oplus(B,A)^{gf}$.

4) Offensichtlich definiert $(A,B)^{fg} \mapsto (B,A)^{gf}$ eine Äquivalenz Mod-$\Lambda \cong$ Mod-Λ.

Sei nun für einen beliebigen Ring S und eine Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}(S)$ der **Fixring**

, $S^G = \{s \in S \mid g(s) = s \text{ für alle } g \in G\}$.

Eine Ringerweiterung S/R heißt eine **Galois-Erweiterung über G** (Miyashita [26]), wenn $R = S^G$ und es Elemente $s_1,\dots,s_n, t_1,\dots,t_n \in S$ gibt mit $\Sigma_i\, s_i g(t_i) = \delta_{1g}$, wobei δ_{gh} das Kronecker-Symbol bezeichnet. Ist S/R eine Galois-Erweiterung, dann ist S/R insbesondere eine Frobenius-Erweiterung (Miyashita [26]) und eine separable Erweiterung (Hirata, Sugano [14]).

Betrachte im folgenden $R\times_\phi M$ mittels des gegebenen Ringmonomorphismus als einen Unterring von $\Lambda = \binom{RM}{MR}_{\phi\phi}$. Nach 6.32 2) ist dann bereits Λ eine separable Erweiterung von $R\times_\phi M$. Strenger gilt

6.33 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $\Lambda = \binom{RM}{MR}_{\phi\phi}$ der zugehörige generalisierte Matrizenring. Dann ist $\Lambda/R\times_\phi M$ eine Galois-Erweiterung über $G = \langle\sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$, wobei $\sigma\colon \Lambda \to \Lambda$ durch $\sigma\binom{rn}{ms} = \binom{sm}{nr}$ gegeben ist. Insbesondere ist $\Lambda/R\times_\phi M$ eine separable Erweiterung.

Beweis Es gilt offensichtlich $\Lambda^G = R\times_\phi M$. Weiter definieren $s_1 = t_1 = \binom{10}{00}$, $s_2 = t_2 = \binom{00}{01}$ Elemente in Λ derart, daß gilt $\Sigma_i\, s_i g(t_i) = \delta_{1g}$. □

Für einen Λ-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$ gelten dann die bekannten Gleichungen für die homologische Dimension bei Frobenius-Erweiterungen und Galois-Erweiterungen. Insbesondere

6.34 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $\Lambda = \binom{RM}{MR}_{\phi\phi}$ und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{p-dim}_\Lambda(A,B)^{fg} &= \text{p-dim}_{R\times_\phi M}(A,B)^{fg}\\ \text{s-dim}_\Lambda(A,B)^{fg} &= \text{s-dim}_{R\times_\phi M}(A,B)^{fg}\\ \text{i-dim}_\Lambda(A,B)^{fg} &= \text{i-dim}_{R\times_\phi M}(A,B)^{fg}\\ \text{rh-dim}\ \Lambda &\le \text{rh-dim}\ R\times_\phi M. \end{aligned}$$

□

Folgerung 6.35 antwortet gleichzeitig auf eine Frage von Palmer [33, Problem 4].

6.35 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $\Lambda = \begin{pmatrix} R & M\\ M & R\end{pmatrix}_{\phi\phi}$

und sei $H = \langle\rho,\sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ die durch $\rho\colon \Lambda \to \Lambda$, $\begin{pmatrix} r & n\\ m & s\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r & -n\\ -m & s\end{pmatrix}$ und $\sigma\colon \Lambda \to \Lambda$, $\begin{pmatrix} r & n\\ m & s\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s & m\\ n & r\end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe. Setze $G = \langle\sigma\rangle \subset H$.

1) Es gilt $\Lambda^H = R\times_\psi N$, wobei $N = \{m \in M \mid 2m = 0\}$ ein R-Bimodul ist und $\psi\colon N\otimes_R N \to R$ von ϕ induziert wird. Ist also M 2-torsionsfrei, d.h. gilt $m = 0$ falls $2m = 0$, dann $\Lambda^H = R$.

2) Ist $2 \in R$ invertierbar, dann ist $\Lambda = R\times_\phi M$ ein direkter Summand in Λ als $R\times_\phi M$-Bimodul, und für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul gilt $(A\oplus A, \binom{0f}{f0}) \cong (A,f)\oplus(A,-f)$.

3) Es gilt dann insbesondere, falls $2 \in R$ invertierbar ist,

$$\text{rh-dim}\ R\times_\phi M = \text{rh-dim}\ \Lambda.$$

Ist außerdem ϕ surjektiv, dann ist Λ/R eine separable Frobeniuserweiterung, und es gilt $\text{Mod-}\Lambda \cong \text{Mod-}R$,

$$\text{rh-dim}\ \Lambda = \text{rh-dim}\ R\times_\phi M = \text{rh-dim}\ R.$$

Beweis Es ist klar 1). Sei t das Inverse zu 2 in R. So definiert $\begin{pmatrix} r & n\\ m & r\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r+s & m+n\\ m+n & r+s\end{pmatrix}t$ das Inverse zur Inklusionsabbildung und $a \mapsto (a,a)t$ das Inverse zu e' (6.32 2)). Also ist $\Lambda/R\times_\phi M$ eine ausgezeichnete Frobeniuserweiterung. Mit [18] bzw. wegen $\text{p-dim}(A,f) = \text{p-dim}(A\oplus A, \binom{0f}{f0}) = \text{p-dim}_\Lambda(A,A)^{ff}$ nach 6.34 für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) gilt dann $\text{rh-dim}\ R\times_\phi M \le \text{rh-dim}\ \Lambda$. Mit 6.34 gilt Gleichheit. 3) ist klar wegen $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}\Lambda$ nach 6.21 bzw nach 5.14. □

7 ALLGEMEINE MODULN- UND RINGEIGENSCHAFTEN

Im folgenden machen wir einen Vergleich einiger modultheoretischer Eigenschaften von Moduln (A,f) über einer semitriviale Erweiterung $R\times_{\phi}M$ und A_R, sowie einiger ringtheoretischer Eigenschaften zwischen $R\times_{\phi}M$ und R. Insbesondere untersuchen wir jene Eigenschaften für generalisierte Matrizenringe.

Im folgenden bezeichne K-dim die Krull-Dimension von Moduln im Sinne von Gordon, Robson [12]. Für einen beliebigen Modul endlicher Länge bezeichne weiter $\text{Lä}(A)$ die Länge von A.

7.1 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul.

1) (A,f) ist genau dann endlich erzeugt, wenn $(A/A'M)_R$ endlich erzeugt ist für einen endlich erzeugten Untermodul $A' \subset A_R$.

2) (A,f) ist genau dann noethersch, bzw. artinsch, bzw. endlicher Länge, wenn A_R noethersch, bzw. artinsch, bzw. endlicher Länge ist.

3) Es gilt $\text{K-dim}_{R\times_{\phi}M}(A,f) = \text{K-dim}_R A$, falls eine der beiden Seiten existiert.

Beweis 1) Sei $a_1,\ldots,a_n$ ein erzeugendes System von (A,f) und $A' = \Sigma_i\, a_iR$. Dann ist $A/A'M = \Sigma_i\, \bar{a}_iR$. Sind umgekehrt jeweils $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ und $a_1',\ldots,a_n'$ erzeugende Systeme von $A/A'M$ und A' für $A' \subset A_R$, dann gilt für ein beliebiges Element $a \in A$ $a = \Sigma_i\, a_ir_i + \Sigma_i\, a_i'm_i = \Sigma_i\, a_i(r_i,0) + a_i'(0,m_i)$. Die Menge der a_i und a_i' bildet dann ein erzeugendes System von (A,f).

2) Sei zunächst (A,f) noethersch und $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Kette von R-Untermoduln von A. Jeder Untermodul erzeugt einen Untermodul $A_i + A_iM \subset (A,f)$ und induziert einen Untermodul $A_i \cap A_iM$ von (A,f). Nach Voraussetzung sind die aufsteigenden Ketten $A_1+A_1M \subset A_2+A_2M \subset \ldots$ und $A_1\cap A_1M \subset A_2\cap A_2M \subset \ldots$ stationär. Also gibt es ein i, so daß $A_i+A_iM = A_j+A_jM$ und $A_i\cap A_iM = A_j\cap A_jM$ für $j \geq i$. Für $a \in A_j$ existiert dann ein $b \in A_i$ mit $a+b \in A_iM$. Hieraus folgt $a+b \in A_i\cap A_iM$. Also $a \in A_i$. Dann

ist A_R noethersch. Sei andererseits A_R noethersch. Da jeder Untermodul $A \subset (A,f)$ gleichzeitig R-Untermodul ist, folgt daß, (A,f) noethersch ist. Der Beweis für die Äquivalenz im artinschen Fall folgt analog.

3) Wir zeigen zunächst durch transfinite Induktion: Sind $b \subset a$ Untermoduln von A_R, so daß $\text{Kdim}_R(a+aM/b+bM) \leq \alpha$ und $\text{Kdim}_R(a\cap aM/b\cap bM) \leq \alpha$, α Ordinalzahl, dann $\text{Kdim}_R(a/b) \leq \alpha$. Falls aber $\alpha = -1$, folgt dies aus dem Beweis von 2) im artinschen Fall. Sei nun $\alpha \geq 0$ und $a \supset b_1 \supset b_2 \supset \ldots \supset b$ eine absteigende Kette von Untermoduln. Dann gilt für fast alle i $\text{Kdim}_R(b_i+b_iM/b_{i+1}+b_{i+1}M) < \alpha$ und $\text{Kdim}_R(b_i\cap b_iM/b_{i+1}\cap b_{i+1}M) < \alpha$. Daraus folgt $\text{Kdim}_R b_i/b_{i+1} < \alpha$ nach Induktionsvoraussetzung. Hieraus ergibt sich $\text{Kdim}_R a/b \leq \alpha$.

Ist in der allgemeinen Behauptung eine der beiden Seiten -1 oder 0 d.h. artinsch, dann gilt die Gleichung nach 2). Sei nun $\text{Kdim}_{R\times_{\phi}M}(A,f) = \alpha > 0$ und $a_1 \supset a_2 \supset \ldots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von A_R. Nach Induktion und dem oben Gezeigten ist dann $\text{Kdim}_R a_i/a_{i+1} < \alpha$ für fast alle i. Also $\text{Kdim}_R A \leq \alpha$. Sei umgekehrt $\text{Kdim}_R A = \alpha > 0$. Da jede Kette von Untermoduln von (A,f) eine Kette von Untermoduln von A_R ist, folgt wieder nach Induktion $\text{Kdim}_{R\times_{\phi}M}(A,f) \leq \alpha$. □

7.2 Folgerung (Vgl. [33]). Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung. Dann gilt

1) $R\times_{\phi}M$ ist genau dann rechts noethersch, bzw. rechts artinsch, wenn R rechts noerthersch bzw. rechts artinsch ist und außerdem M_R endlich erzeugt ist.

2) Es gilt $\text{Kdim}\, R\times_{\phi}M = \sup\{\text{Kdim}\, R, \text{Kdim}\, M_R\}$, falls eine der beiden Seiten existiert. Insbesondere gilt $\text{Kdim}\, R\times_{\phi}M = \text{Kdim}\, R$ falls außerdem M_R endlich erzeugt ist. □

7.3 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) (A,f) ist einfach.

b) Entweder ist A_R einfach oder $\text{Lä}(A_R) = 2$ mit $A'\cap A'M = 0$ und $A'M \neq 0$ für jeden echten Untermodul $0 \neq A' \subset A_R$.

c) Entweder ist A_R einfach oder $\text{Lä}(A_R) = 2$ mit $A = A'\oplus A'M$ und $1_{A'}(1-m^2) = 0$ für einen (jeden) einfachen Untermodul $A' \subset A_R$ und jedes $m \in M$.

Insbesondere ist dann A_R halbeinfach und gilt entweder $f = 0$ oder ist f surjektiv und $\bar{f}$ injektiv.

2) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) (A,f) ist halbeinfach.

b) A_R ist halbeinfach und $AM = AMM = A_1 \oplus (A_2 + A_2M)$, wobei $A_1 = \Sigma\{A' \subset A_R \mid A'M = A' \text{ ist einfach}\}$ und $A_2 \subset A_R$.

c) A_R ist halbeinfach und $AM = AMM = A_1 \oplus A_2$ (A_1 wie oben) mit $1_{A'}(1-m^2) = 0$ für jeden einfachen Untermodul $A' \subset A_2$ und $m \in M$.

3) Gilt $\mathrm{Lä}(A,f) = n$, dann $\mathrm{Lä}(A_R) \le 2n$.

Beweis 1) 'a) => b)': Ist (A,f) einfach, so ist entweder $\mathrm{Ke}\bar{f} = A$, also ist A_R einfach, oder $\mathrm{Ke}\bar{f} = 0$. Ist $\bar{f}$ injektiv und ist $0 \ne A' \subset A_R$ ein echter Untermodul (falls A_R nicht einfach ist), dann ist $A' \cap A'M = 0$. Also $A' \oplus A'M = A$. Insbesondere ist A'_R einfach.
'b) => c)': Gibt es einen echten Untermodul $0 \ne A' \subset A$ dann $A' \oplus A'M = A$. Gilt $a(1-m^2) = 0$ für Elemente $a \in A'$, $m \in M$, dann definiert $0 \ne B = \{(a,am)r \in A \mid r \in R\}$ einen echten Untermodul in A mit $BM = B$.
'c) => a)': Ist A_R einfach, so ist (A,f) einfach. Sei $\mathrm{Lä}(A_R) = 2$ und $A' \subset A$ ein solcher Untermodul. Ist $0 \ne B \subset (A,f)$ ein echter Untermodul, so existiert nach 1.17 ein Isomorphismus $h: A' \to A'M$ mit $B = \{(a,h(a)) \mid a \in A'\}$. Für jede $0 \ne a \in A'$ ist $A' = aR$, $A'M = aM$. Ist für ein solches $a \in A'$ $h(a) = am$, $m \in M$, dann $(a,h(a))m = (am^2, am) = (am^2, h(am^2)) \in B$. Also $a(1-m^2) = 0$. Widerspruch.
2) 'a) => b)': A_R ist halbeinfach nach 1). Weiter gibt es ein Untermodul $A' \subset (A,f)$ mit $(A,f) = AM \oplus A'$. Dann $AM = AMM$ wegen $A'M = 0$. Es gilt nun $A_1M = A_1$. So ist $A_1 \subset (A,f)$ ein Untermodul und es gibt ein $R\times_\phi M$-Untermodul $A_2 \subset AM \subset (A,f)$ mit $AM = A_1 \oplus A_2$. Hieraus folgt b). 'b) => c)' ist klar nach 1), denn für jeden einfachen Untermodul $A' \subset A_2$ ist nach b) $A' \oplus A'M \subset A_2$ einfach (in Mod-$R\times_\phi M$).
'c) => a)': Da A_R halbeinfach ist, gibt es ein Untermodul $A' \subset A_R$ mit $A = \mathrm{Ke}\bar{f} \oplus A'$. Hieraus folgt $AM \cap \mathrm{Ke}\bar{f} = 0$ wegen $AM = AMM = (\mathrm{Ke}\bar{f} \oplus A')MM = A'MM \subset A'$. Also ist $\bar{f}$ auf AM injektiv. Hieraus wiederum gilt $AM \oplus \mathrm{Ke}\bar{f} = A$. Denn sei $A = \mathrm{Ke}\bar{f} \oplus AM \oplus A''$. So gilt $A''M \subset AM \cap \mathrm{Ke}\bar{f} = 0$ wegen $A''MM \subset AM \cap A'' = 0$. Also $A'' \subset A'' \cap \mathrm{Ke}\bar{f} = 0$. Nun stimmen die R- und $R\times_\phi M$-Untermoduln von $\mathrm{Ke}\bar{f}$ überein, so ist $\mathrm{Ke}\bar{f}$ halbeinfach als $R\times_\phi M$-Modul. Weiter ist $A_1 \subset (A,f)$ halbeinfach nach 1). Ist $A_2 = \Sigma B_i$ Summe von einfachen R-Untermoduln, dann gilt $B_i \cap B_iM = 0$ für jedes i, sonst $B_i \subset A_1$. Nun erfüllt $B_i \oplus B_iM \subset$

$A_2 + A_2M$ für jedes i die Voraussetzungen von b) in 1). Hieraus folgt di Behauptung.
3) folgt aus 1). □

7.4 Bemerkung Für einen $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) sind äquivalent
1) A_R ist halbeinfach und $AM = AMM$.
2) A_R ist halbeinfach und $\bar{f}|_{AM}$ ist injektiv.
3) A_R ist halbeinfach und es gilt $A = \mathrm{Ke}\bar{f} \oplus AM$.

Beweis Folgt aus dem Beweis von 7.3 2) 'c) => a)'. □

7.5 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$ links-t-nilpotent, (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Dann ist (A,f) genau dann einfach, bzw. halbeinfach, wenn A_R einfach bzw. halbeinfach ist, und $f = 0$.

Beweis Es gilt $AM = AMI$. Also $AM = 0$. So gilt die Behauptung nach 7.3. □

7.6 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung und (A,f) ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Hat 2 keine Torsion in AM (AM ist 2-torsionsfrei), dann ist (A,f) genau dann halbeinfach, wenn A_R halbeinfach ist und $AM = AMM$.

Beweis Es ist '<=' zu zeigen. Sei also $AM_R = AMM$ halbeinfach und $AM = A_1 \oplus A_2$ mit A_1 wie in 7.3. Ist $A' \subset A_2$ ein einfacher Untermodul, dann ist $A' \oplus A'M$ entweder einfach in Mod-$R\times_\phi M$, oder es gibt (da $A'M$ einfach) einen echten $R\times_\phi M$-Untermodul $B = \{(a,h(a)) \mid a \in A'\} \subset A' \oplus A'M$ für einen Isomorphismus $h: A' \to A'M$. Analog definiert $-h$ einen echten Untermodul $B' \subset A' \oplus A'M$, und es gilt $A' \oplus A'M = B \oplus B' \subset A_1$. Dies ist nicht möglich. Die Behauptung folgt dann mit 7.3. □

Ist $R\times_\phi M$ halbeinfach, so ist mit 7.3 bzw. 3.7 R halbeinfach. Die Umkehrung gilt genau dann, wenn $R\times_\phi M/R$ eine halbeinfache Erweiterung ist, d.h. wenn jeder $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) $(R\times_\phi M,R)$-projektiv ist. Es gilt weiter

7.7 Folgerung (Vgl. [33]) Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $I = MM$.

1) Dann sind äquivalent

a) R ist halbeinfach und $MI = M$.

b) R ist halbeinfach und ϕ ist rechts bzw. links nicht entartet.

c) $R\times_\phi M \cong R_1\times(R_2\times_{\phi'}M)$, wobei R_1, R_2 halbeinfache Ringe sind und $R_2\times_{\phi'}M$ eine semitriviale Erweiterung von R_2 mit ϕ' surjektiv ist. Insbesondere ist M_R endlich erzeugt.

2) Ist $R\times_\phi M$ halbeinfach, dann gelten die Bedingungen von 1). Außerdem ist für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) $\bar{f}$ surjektiv und f injektiv.

3) Ist $R\times_\phi M$ halbeinfach und $I\subset Ra(R)$ bzw. $l_M(M)\subset M$ ist groß, dann $M = 0$.

4) Gilt 1)c) und ist $R_2\times_{\phi'}M/R_2$ eine halbeinfache Erweiterung im Sinne von Hirata, Sugano [14], (z.B. falls 2 invertierbar ist in R_2) bzw. hat $R_2\times_{\phi'}M$ endliche homologische Dimension, dann ist $R\times_\phi M$ halbeinfach.

5) Hat 2 keine Torsion in M, dann ist $R\times_\phi M$ genau dann halbeinfach, wenn die Bedingungen in 1) gelten.

Beweis 1) gilt aus 7.4. Dabei ist $R_1 = l_R(M)$, $R_2 = I$ und $l_M(M) = 0$, also $R_1M = 0$. Der erste Teil von 2) folgt zunächst aus 7.3. Außerdem ist nach 2.2 für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul (A,f) die Abbildung $(1,f)\colon T(A)\to D(A)$ ein kleiner sowie $(1,\bar{f})\colon D(A)\to H(A)$ ein großer Homomorphismus. 3) Gilt aus 2) und 1). 4) ist klar aus der Vorbemerkung zu 7.7 und 5.14. 5) folgt aus 7.6. □

7.8 Folgerung Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S\end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Dann gilt

1) $(A,B)^{fg}$ ist genau dann einfach, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt

a) A_R ist einfach und $B = 0$.

b) B_S ist einfach und $A = 0$.

c) A_R ist einfach, $0 \neq g$ surjektiv und $\bar{f}$ injektiv.

d) A_R, B_S sind einfach und $f \neq 0$, $g \neq 0$.

Die Bedingungen c) und d) wie auch die zu c) symmetrischen Aussagen sind äquivalent.

2) Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $(A,B)^{fg}$ ist halbeinfach.

b) A_R, B_S sind halbeinfach und es gilt $AN = BMN$, $BM = ANM$.

c) A_R, B_S sind halbeinfach und $\bar{f}|_{AN}$, $\bar{g}|_{BM}$ sind injektiv.

d) $A_R = \mathrm{Ke}\bar{g}\oplus BM$, $B_S = \mathrm{Ke}\bar{f}\oplus AN$ sind halbeinfach.

Beweis Dies folgt aus 7.3, da für generalisierte Matrizenringe $A_1 = ($ immer gilt. □

7.9 Folgerung Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S\end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ und sei $I = NM$, $J = MN$. Dann sinc äquivalent

1) Λ ist halbeinfach.

2) R, S sind halbeinfach und es gilt $MI = M$, $NJ = N$.

3) R, S sind halbeinfach und es gilt $l_M(N) = 0$, $l_N(M) = 0$.

Ist $_SM$ treu, dann auch

4) R ist halbeinfach und σ surjektiv.

Beweis 1) <=> 2) <=> 3) ist klar. Ist Λ halbeinfach und $_SM$ treu, dann gilt mit 7.7 bzw 7.4 $S = l_S(M)\oplus MN$. Also ist σ surjektiv. Umgekehrt gilt 1) aus 4), wenn $_SM$ treu ist, da nach 6.21 Mod-$R \cong$ Mod-Λ bzw. ist mit 6.21 jeder Λ-Rechtsmodul $(A,B)^{fg}$ zu $T_R(A)$ isomorph, also projektiv nach 3.7. □

7.10 Folgerung Sei $\Lambda = \Lambda(M_R)$ der Dualitätsring von M_R. Dann sind äquivalent

1) Λ ist halbeinfach

2) R ist halbeinfach und M_R endlich erzeugt. □

7.11 Lemma Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S\end{pmatrix}_{\rho\sigma}$, und sei $A = \oplus_I A_i$ für R-Rechtsmoduln A_i. Genau dann ist Q_R eine injektive Hülle von A_R, wenn $H_R(Q)$ eine injektive Hülle von $\oplus_I H_R(A_i)$.

Beweis Es gilt $\oplus_I H_R(A_i) = (\oplus_I A_i, \oplus_I \mathrm{Hom}_R(M,A_i))^{fg})$ und $\bar{f}$ ist injektiv. Nach 6.27 folgt die Behauptung. □

Wir können also die injektiven und die projektiven Hüllen einfacher Moduln über Λ vollständig mit Ausdrücken über R und S charakterisieren. Analoges gilt für minimale Kogeneratoren. Eine ähnliche Teilaussage unter der Voraussetzung Λ semiperfekt wurde in [23] gezeigt.

7.12 Satz Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ ein beliebiger generalisierter Matrizenring, $I = NM$, $J = MN$, und sei $(A,B)^{fg}$ ein einfacher Λ-Rechtsmodul. Dann gilt

1) Seien jeweils Q_R und P_S injektive Hüllen von A_R und B_S. Dann sind $H_R(Q)$, falls $A \neq 0$, und $H_S(P)$, falls $B \neq 0$, injektive Hüllen von $(A,B)^{fg}$.

2) Genau dann hat $(A,B)^{fg}$ eine projektive Hülle, wenn A_R, falls $A \neq 0$, bzw. B_S, falls $B \neq 0$, eine projektive Hülle Q_R bzw. P_S besitzt. Dann sind $T_R(Q)$ bzw. $T_S(P)$ falls $\neq 0$ projektive Hüllen von $(A,B)^{fg}$.

3) Seien $U = \{A_i \in \text{Mod-}R \mid i \in I\}$ und $V = \{B_j \in \text{Mod-}S \mid j \in J\}$ Representantensysteme für die Klassen isomorpher einfacher Moduln. Außerdem seien $I_2 \subset I_1$, $J_2 \subset J_1$ Teilmengen derart, daß $A_iI = 0$, $B_jJ = 0$ genau dann gilt, wenn $i \in I_2$, $j \in J_2$. Weiter sei $A_iN \subset \text{Hom}_R(M,A_i)$, $B_jM \subset \text{Hom}_S(N,B_j)$ Dann ist

$$W = \{(A_i, A_iN) \mid i \in I_1\} \cup \{(B_jM, B) \mid j \in J_2\}$$

ein Representantensystem für die Klasse einfacher isomorpher Moduln in Mod-Λ.

4) Seien jeweils $I(A_i)$ und $I(B_j)$ injektive Hüllen von A_i und B_j. Dann ist

$$C_\circ = (\oplus_{I_1} H_R(I(A_i))) \oplus (\oplus_{J_2} H_S(I(B_j))) \cong (\oplus_{I_2} H_R(I(A_i))) \oplus (\oplus_{J_1} H_S(I(B_j)))$$

ein minimaler Kogenerator in Mod-Λ.

5) Sei $A_1 = \oplus_{I_1} I(A_i)$, $A_2 = \oplus_{I_2} I(A_i)$, $B_1 = \oplus_{J_1} I(B_j)$, $B_2 = \oplus_{J_2} I(A_i)$. Ist $C_\circ$ injektiv, dann gilt $C_\circ \cong H_R(A_1) \oplus H_S(B_2) \cong H_R(A_2) \oplus H_S(B_1)$.

Beweis 1) und 2) sind klar aus 7.8 und 6.27. Auch 3), denn für jeden A_i, B_j, $i \in I_1$, $j \in J_1$ sind (A_i, A_iN), (B_jM, B) einfach. Ist $(A,B)^{fg}$ einfach mit $A \neq 0$, dann $h: A \cong A_i$ für ein $i \in I$. Aber $(A,B) \cong (A, \bar{f}(B)) \cong (A_1, A_1N)$ durch die Einschränkung von $H_R(h)$. Ist $A = 0$, dann $(A,B) \cong (0, B_j)$ für ein $j \in J_2$. 4) und 5) folgen aus 1), 3) und 7.11. □

7.13 Folgerung Sei $\Lambda = \binom{R\ N}{M\ S}_{\rho\sigma}$ rechts artinsch, d.h. R, S sind rechts artinsch und M_R, N_S endlich erzeugt, und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Dann ist $(A,B)^{fg}$ genau dann injektiv, wenn gilt $(A,B)^{fg} \cong$

$H_R(Q) \oplus H_S(P)$ für injektive Moduln Q_R und P_S.

Beweis Folgt aus 7.12 und 7.11. □

Wir untersuchen nun die Frage, wann eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi$ einfach ist.

7.14 Lemma Sei $R \times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $M \neq 0$. Dann sin äquivalent

1) $R \times_\phi M$ ist ein Schiefkörper.
2) M_R ist einfach, ϕ surjektiv und $m^2 \neq 1$ für jedes $m \in M$.
3) R ist ein Körper, $\phi \neq 0$ und $m^2 \neq 1$ für jedes $m \in M$.

Beweis Die Äquivalenz von 2) und 3) ist klar nach 5.13. Ist $R \times_\phi M$ ei Körper, so ist wegen $M \neq 0$ ϕ surjektiv und M_R einfach. Wäre $m^2 = 1$ so wäre $(1,m)(1,-m) = 0$. Gelte nun umgekehrt 3) und $(r,m) \in R \times_\phi M$, rs 1, $a = (ms)^2$, $b = (sm)^2$. Dann gilt $bs = sa$ und damit

$$(r,m)s((1-a)^{-1}, -ms(1-a)^{-1}) = (1,0),$$
$$((1-b)^{-1}, -(1-b)^{-1}sm)s(r,m) = (1,0).$$

So gilt 1). □

7.15 Satz Sei $R \times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $M \neq 0$. Dann sind äquivalent

1) $R \times_\phi M$ ist einfach.
2) Es gilt eine der folgenden Bedingungen
   a) R ist einfach mit $m^2 \neq 1$ für jedes $m \in M^R$ und $\phi \neq 0$
   b) $R \times_\phi M \cong \binom{T\ V}{U\ S}_{\tau\sigma}$ ist ein generalisierter Matrizenring mit T einfach und σ surjektiv.

Im Fall a) gilt $Ze(R \times_\phi M) = Ze(R) \times_{\phi'} M^R$.

Beweis Gelte zunächst 1). Dann ist wegen $MM \oplus M \subset R \times_\phi M$ ϕ surjektiv. Sei nun R einfach. Dann ist ${}_RM_R$ einfach als Bimodul und es gilt a) ähnlich wie in 7.3. Wir zeigen zusätzlich $Ze(R \times_\phi M) = Ze(R) \times M^R$. a) folgt dann auch mit 7.14. Die Inklusion $Ze(R \times_\phi M) \subset Ze(R) \times M^R$ ist klar. Sei nun $(r,m) \in Ze(R) \times M^R$. Dann ist $M = mR$, da ${}_RM_R$ einfach ist. Für ein beliebiges Element $(s, mt) \in R \times_\phi M$ gilt dann $(r,m)(s,mt) = (sr+mtm, mtr+sm)$

$= (s,mt)(r,m)$. Damit ist die umgekehrte Inklusion gezeigt.
Enthält R ein echtes Ideal $I \neq 0$, dann ist $(I\cap MIM)\oplus(MI\cap IM)$ ein echtes Ideal in $R\times_\phi M$. Also $I\cap MIM = 0$ und $MI\cap IM = 0$. Damit ist $R\times_\phi M = (I\oplus MIM)\oplus(MI\oplus IM)$, $R = I\oplus MIM$. Wegen $IMI+(MIM)M(MIM) \subset IM\cap MI = 0$ und 6.3 gilt $R\times_\phi M \cong \begin{pmatrix} I & IM \\ MI & MIM\end{pmatrix}_{t\sigma}$, wobei $t\colon IM\otimes_{MIM}MI \to I$ und $\sigma\colon MI\otimes_I IM \to MIM$ von ϕ induziert werden. Da jedes Ideal $J \subset I$ auf dieselbe Weise ganz $R\times_\phi M$ erzeugt, ist ${}_RI_R$ einfach. Wegen $I^2 = I$ sind dann t und σ surjektiv. Damit gilt b).
Gelte umgekehrt a) und sei $A \subset R\times_\phi M$ ein echtes Ideal. Dann ist ϕ surjektiv. Nach 1.15 hat dann A Kern Null. Ist $A \neq 0$, dann gibt es einen R-R-Homomorphismus $h\colon R \to M$ mit $A = \{(r,h(r)) \mid r \in R\}$. Dies widerspricht aber (ähnlich wie in 7.3) der Voraussetzung. Damit ist $R\times_\phi M$ einfach. Die Implikation b) => 1) folgt aus folgendem Satz. □

7.16 Satz Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S\end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $R \neq 0$. Dann sind äquivalent

1) Λ ist einfach
2) R ist einfach und σ surjektiv.

In diesem Fall gilt Mod-$R \cong$ Mod-Λ.

Beweis Jedes Ideal $0 \neq I \subset R$ erzeugt in Λ das Ideal $\begin{pmatrix} I & IM \\ MI & MIM\end{pmatrix}$. So folgt 2) aus 1). Umgekehrt ist Mod-$\Lambda \cong$ Mod-R nach 6.21, bzw. enthält jedes Ideal ($\neq 0$) in Λ das Ideal $\begin{pmatrix} R & N \\ M & MN\end{pmatrix}$ wegen $l_M(N) = 0$, $l_N(M) = 0$.
□

7.17 Folgerung Sei $\Lambda = \Lambda(M_R)$ der Dualitätsring von M_R. Dann sind äquivalent

1) Λ ist einfach
2) R ist einfach und M_R endlich erzeugt projektiv.
3) S ist einfach und M_R ein Generator. □

8 RADIKALE UND SOCKEL

Für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ und einen $R\times_\phi M$-Rechtsmodu (A,f) läßt sich leicht aus 7.3 zeigen, daß jeder maximale Untermodul $A' \subset (A,f)$ entweder maximal in A_R oder Durchschnitt zweier maximaler Untermoduln von A_R. Also gilt $Ra(A_R) \subset Ra(A,f)$. Aus 7.3 gilt weiter $So(A,f) \subset So(A_R)$. Wir zeigen im folgenden strengere Resultate.

8.1 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, und seien (A,f) (beliebig), $(A',f') = (B\oplus C,\begin{pmatrix} 0 & h \\ g & 0\end{pmatrix})$ $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln. Weiter sei K der Kern von $Ra(A',f')$ und H die Hülle von $So(A',f')$ in der Zerlegung $B\oplus C$. Dann gilt

1) $Ra(A_R)+l_{AM}(Ra(A_R):M) \subset Ra(A,f)$.
2) $So(A,f) \subset So(A_R)\cap(So(A_R)M+Ke\bar{f})$.
3) Ist g surjektiv, dann ist $K = Ra(B_R)\oplus(Ra(B_R):M)$.
4) Ist $\bar{h}$ injektiv, dann ist $H = So(B_R)\oplus So(B_R)M \subset So(B_R)\oplus So(C_R)$.
5) Ist $AMM \subset Ra(A_R)$, dann $Ra(A,f) = D$ mit $D/AM = Ra((A/AM)_R)$.
6) Ist $l_A(M) \subset A_R$ groß, dann $So(A,f) = So(Ke(\bar{f})_R)$.

Beweis 1) Sei $A' \subset (A,f)$ ein maximaler Untermodul, dann ist $(A/A')_R$ nach 7.3 entweder einfach oder $A/A' = (A_1/A')\oplus(A_2/A')$ mit $A_1, A_2 \subset A_R$ maximal und $A' = A_1\cap A_2$. So gilt $Ra(A_R) \subset Ra(A,f)$. Dies folgt auch unmittelbar aus 3.11. Sei $U = l_{AM}(Ra(A_R):M)$. Ist $U \not\subset Ra(A,f)$, dann $A'+U = A$ für einen maximalen Untermodul $A' \subset (A,f)$. Hieraus $U \subset AM = A'M+UM \subset A'$. Widerspruch. Also $Ra(A_R)+U \subset Ra(A,f)$.
2) folgt aus 7.3.
3) Nach 1) gilt bereits die Inklusion '$\supset$'. Ist umgekehrt $I_\circ \subset B_R$ maximal, dann ist $I_\circ\oplus(I_\circ:M)_C$ der Kern in $B\oplus C$ eines maximalen Untermoduls $A' \subset (A,f)$. Denn ist $I_\circ\oplus(I_\circ:M)$ bereits maximal, dann ist dies gleich A'. Gibt es $I_\circ\oplus(I_\circ:M) \subsetneq A' \subset (A,f)$ mit dem Kern $I'_\circ\oplus U'_\circ$ und der Hülle $I'\oplus U'$ in $B\oplus C$, so ist $I_\circ \subsetneq I' = B$ und hieraus $U' = BM = C$, $I_\circ = I'_\circ$. Wegen 1.16 gilt $(B\oplus C)/A' \cong (B/I_\circ,h)$ als $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln für geignetes h. Aber $(B/I_\circ,h)$ ist nach 7.3 einfach. Also ist $A' \subset (A,f)$ maximal. Nach 1.18 ist dann $K \subset Ra(B)\oplus(Ra(B):M)_C$.

4) folgt dual zu 3) mit 7.3.
5) Nach 3) ist für jeden R/I-Rechtsmodul U $Ra(U,0) = Ra(U_R)$ und nach 1) $Ra(A_R)+AM \subset Ra(A,f)$. Weiter gilt $Ra((A,f))/AM = Ra((A/AM,0)) = Ra((A/AM)_R) = D/AM$. Hieraus folgt die Behauptung.
6) Nach Voraussetzung gilt $So(A_R) \subset l_A(M)$. Also $So(A_R)M+Ke\bar{f} = Ke\bar{f}$. Mit 2) also $So(A,f) \subset So(Ke(\bar{g})_R) \subset So(A,f)$. □

8.1 5),6) enthalten insbesondere allgemeiner die bekannten Ergebnisse für trivialen Erweiterungen und Dreiecksmatrizenringe (vgl. Kasch [19, S.292], Goodearl [11, S.107-113]. 5) verallgemeinert Lemma 1) von [33]. Satz 8.1 3),4) gilt insbesondere für $(A,f) = T(B)$ bzw. $(A,f) = H(B)$. In 8.2 wenden wir die Ergebnisse von 8.1 auf $R\times_\phi M$ an. Sind $Ra(R\times_\phi M)$ und $So(R\times_\phi M)$ der Form $I\oplus U$ für ein Ideal $I \subset R$ und einen Untermodul $U \subset {}_RM_R$, dann wird $Ra(R\times_\phi M)$ und zum Teil auch $So(R\times_\phi M)$ durch 8.2 vollständig charakterisiert.

8.2 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung und seien K der Kern von $Ra(R\times_\phi M)$ und H die Hülle von $So(R\times_\phi M)$ (als Rechtsmodul). Dann gilt

1) $K = Ra(R)\oplus l_M(Ra(R):M) = Ra(R)\oplus r_M(Ra(R):M)$.
2) Ist ϕ rechts nicht entartet, dann $H = So(R_R)\oplus So(R_R)M$.
3) Ist ${}_RM$ treu, dann $H = So(M_R)M\oplus So(M_R) \subset So(R_R)\oplus So(M_R)$.
4) Ist $MM \subset Ra(R)$, dann $Ra(R\times_\phi M) = Ra(R)\oplus M$. In diesem Fall gilt 8.1 5) für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul.
5) Ist $I = MM$ rechts-t-nilpotent, dann gilt (als Rechtsmoduln) $So(R\times_\phi M) = So(l_R(M))\oplus So(l_M(M))$. In diesem Fall gilt 8.1 6) für jeden $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. □

Wir geben für die erste Gleichung einen direkten Beweis. Ist $r \in Ra(R)$ und (A,f) einfacher $R\times_\phi M$-Rechtsmodul, dann gilt $Ar = 0$ nach 7.3. Also $(r,0) \in Ra(R\times_\phi M)$. Ist $m \in (Ra(R):M)$, dann gilt $mM \subset Ra(R)$. So ist nach 3.11 $mM\oplus mR$ klein in $R\times_\phi M$. Also gilt $(0,m) \in Ra(R\times_\phi M)$. Insgesamt gilt dann $Ra(R)\oplus(Ra(R):M) \subset Ra(R\times_\phi M)$. Sei umgekehrt $K = I_\circ\oplus U_\circ$ und $r \in I_\circ$, so ist $(1-r,0)$ invertierbar, also auch $1-r \in R$. Hieraus folgt $I_\circ\oplus U_\circ \subset Ra(R)\oplus Ra(R):M)$.

8.3 Beispiel Im allgemeinen gilt nicht $K = Ra(R\times_\phi M)$, wobei K den

Kern von $Ra(R\times_\phi M)$. Hierzu gab Palmer [33] ein Beispiel. Ist $R = M =$ ein Körper, also $R\times_\phi M \cong R[X]/(X^2-1)$, so gilt $Ra(R\times_\phi M) = 0$ falls Char(K $\neq 2$, aber $Ra(R\times_\phi M) = \{(r,r) | r \in K\}$ falls $Char(K) = 2$. Also ist $R\times_\phi$ ein lokaler Ring. Folgendes erläutert diesen Zusammenhang. □

8.4 Lemma Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, und sei $(A,f) = (B\oplus C,(\begin{smallmatrix}0 & h\\ g & 0\end{smallmatrix}))$ ein $R\times_\phi M$-Rechtsmodul. Ist $2 \in R$ invertierbar bzw. ist jeder einfache R-Rechtsmodul 2-torsionsfrei, dann sind $Ra(A,f)$ und $So(A,f)$ der Form

$$Ra(A,f) = U\oplus V,\quad So(A,f) = U'\oplus V' \quad \text{mit } U,\ U' \subset B_R,\ V,\ V' \subset C_R.$$

Beweis Sei K der Kern von $Ra(A,f)$ in $B\oplus C$. Dann ist K nach 1.18 der Durchschnitt der Kerne in $B\oplus C$ der maximalen Untermoduln. Es genügt also zu zeigen, daß jeder solche Kern ein Durchschnitt von maximalen Untermoduln in (A,f) ist. Dazu sei $A' \subset (A,f)$ ein maximaler Untermodul mit dem Kern $I_\circ\oplus U_\circ$ und der Hülle $I\oplus U$ in $B\oplus C$. Dann ist entweder bereits $I\oplus U = A'$ oder $I\oplus U = A$. Gelte der letzte Fall. Dann ist nach 1.16 $A/A' \cong (I/I_\circ,h')$ für ein geeignetes h'. Nach 1.15 ist $A'/(I_\circ\oplus U_\circ) = \{(a,\alpha(a)) | a \in I/I_\circ\} \cong (I/I_\circ,-h')$ einfach (für ein geeignetes $\alpha\colon I/I_\circ \to U/U_\circ$). Definiere $A'' \subset (A,f)$ durch $A''/(I_\circ\oplus U_\circ) = \{(a,-\alpha(a)) | a \in I/I_\circ\}$. Dann ist A'' wegen $A/A'' \cong (I/I_\circ,-h')$ maximal und $A'\cap A'' = I_\circ\oplus U_\circ$ nach Voraussetzung. Die Behauptung für $So(A,f)$ gilt analog. □

8.5 Folgerung Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, und seien (A,f) (beliebig), $(A',f') = (B\oplus C,(\begin{smallmatrix}o & h\\ g & o\end{smallmatrix}))$ $R\times_\phi M$-Rechtsmoduln. Ist $2 \in R$ invertierbar bzw. ist jeder einfache R-Rechtsmodul 2-torsionsfrei, dann gilt

1) $So(A,f) = So(A_R)\cap(So(A_R)M+Ke\bar{f})$.
2) Ist g surjektiv, dann $Ra(A',f') = Ra(B_R)\oplus(Ra(B_R):M)$.
3) Ist $\bar{h}$ injektiv, dann $So(A',f') = So(B_R)\oplus So(B_R)M$.
4) $Ra(R\times_\phi M) = Ra(R)\oplus(Ra(R):M)$.
5) $So(R\times_\phi M) = (So(R)\cap(So(M)M+l_R(M)))\oplus(So(M)\cap(So(R)M+l_M(M)))$.

Beweis 1) folgt aus 3) durch den Monomorphismus $(A,f) \to H(A)$. 2), 3) und 4) folgen aus 8.4 und 8.1. 5) folgt aus 1). □

8.6 Folgerung Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring, $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Weiter bezeichne Ra und So das Radikal und den Sockel für Rechtsmoduln. Dann gilt

1) Ist g surjektiv, dann gilt $Ra(A,B)^{fg} = (Ra(R), l_B(Ra(A):M))$.
2) Sind f, g surjektiv, dann gilt $Ra(A,B)^{fg} = (Ra(A_R), Ra(B_S))$.
3) Insbesondere gilt (Vgl. Sands [39])

$$Ra(\Lambda) = \begin{pmatrix} Ra(R) & l_N(Ra(R):M) \\ l_M(Ra(S):N) & Ra(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ra(R) & r_N(Ra(S):M) \\ r_M(Ra(R):N) & Ra(S) \end{pmatrix}$$

4) Ist $\bar{f}$ injektiv, dann gilt $So(A,B)^{fg} = (So(A), So(A)N)$.
5) Sind $\bar{f}, \bar{g}$ injektiv, dann $So(A,B)^{fg} = (So(A_R), So(B_S))$.
6) $So(A,B)^{fg} = (So(A) \cap (So(B)M + Ke\bar{g}), So(B) \cap (So(A)N + Ke\bar{f}))$.
7) $So(\Lambda_\Lambda) = \begin{pmatrix} So(R) \cap (So(N)M + l_R(N) & So(N) \cap (So(R)N + l_N(M) \\ So(M) \cap (So(S)M + l_M(N) & So(S) \cap (So(M)N + l_S(M) \end{pmatrix}$

Insbesondere gilt beispielsweise falls $l_M(N) = 0$, $l_N(M) = 0$

$$So(\Lambda_\Lambda) = \begin{pmatrix} So(R) & So(R)N \\ So(S)M & So(S) \end{pmatrix},$$

und falls ${}_SM$, ${}_RN$ treu sind

$$So(\Lambda_\Lambda) = \begin{pmatrix} So(N)M & So(N) \\ So(M) & So(M)N \end{pmatrix}.$$

Beweis 1) bis 5) folgen aus 8.1. 6) folgt aus 4) durch den Monomorphismus $(A,B)^{fg} \to H_R(A) \oplus H_S(B)$. 7) folgt aus 4) und 6). □

Es gelten dann (vgl. Bemerkung nach 6.29) eine Reihe von Folgerungen. Wir geben einige Beispiele hierfür.

8.7 Folgerung Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ mit σ surjektiv, und sei $(A,B)^{fg}$ ein Λ-Rechtsmodul. Dann gilt auf natürliche Weise

1) $Ra(A,B)^{fg} = (Ra(A_R), Ra(A_R)N) \cong (Ra(A_R), Hom_S(M, Ra(A_R)))$.
2) $So(A,B)^{fg} = (So(A_R), So(A_R)N) \cong (So(A_R), Hom_S(M, So(A_R)))$.
3) $Ra(\Lambda) = \begin{pmatrix} Ra(R) & Ra(R)N \\ MRa(R) & MRa(R)N \end{pmatrix}$.
4) $So(\Lambda) = \begin{pmatrix} So(R) & l_N(So(R):M) \\ r_M(So(R):N) & (M:So(R):N) \end{pmatrix}$.
5) Ist $\bar{g}$ injektiv, dann ist $So(B_S) \subset B_S$ groß genau dann, wenn $So(A_R) \subset A_R$ groß ist.
6) Ist f surjektiv, dann ist $Ra(B_S) \subset B_S$ klein genau dann, wenn

$Ra(A_R) \subset A_R$ klein ist. □

5) und 6) sind Spezialfälle von 6.27. In [23] zeigte J. Kraemer 5 '=>' für den Fall $A_R = Hom_S(N,B)$ unter der Voraussetzung R/Ra(R halbeinfach. Diese Voraussetzung ist nicht notwendig.

8.8 Folgerung Sei $R \times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M' & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$ ein generalisierter Matrizenring. Dann gilt

1) Ist $R \times_\phi M$ semiprimitiv, dann auch R und es gilt $l_M(M) = r_M(M) = 0$. Falls $2 \in R$ invertierbar ist, bzw. falls jeder einfache R-Rechtsmodul 2-torsionsfrei ist, gilt dann auch die Umkehrung.
2) Λ ist genau dann semiprimitiv, wenn gilt
   a) R, S sind semiprimitiv.
   b) $l_{M'}(N) = 0$, $l_N(M') = 0$, bzw. $r_{M'}(N) = 0$, $r_N(M') = 0$.

Folgt $s = 0$ aus $NsM' = 0$ für $s \in S$, dann heißt Λ **S-treu**. Ist dies der Fall, dann ist die Bedingung 'S semiprimitiv' überflüssig. □

Beweis 1) Folgt unmittelbar aus 8.2 und 8.5.
2) '=>' gilt aus 1). Die Umkehrung gilt analog mit 8.6. Ist Λ S-treu, so gilt aus $Ra(R) = 0$ mit 8.6 $NRa(S)M = 0$. Also $Ra(S) = 0$. □

8.9 Satz Sei $R \times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, $\bar{R} = R/Ra(R)$, $\bar{M} = M/(Ra(R):M)$. Dann sind äquivalent

1) $R \times_\phi M$ ist lokal.
2) Es gilt eine der folgenden Bedingungen
   a) R ist lokal und $MM \subset Ra(R)$.
   b) R ist lokal, ϕ surjektiv und $m^2 - 1 \notin Ra(R)$ für jedes $m \in M$.
   c) R ist lokal und $\bar{R} \times_{\bar{\phi}} \bar{M} \cong \bar{R}[X]/(X^2-1)$ mit $Char(\bar{R}) = 2$.

Beweis Sei $R \times_\phi M$ lokal. Ist $MM \subset Ra(R)$, d.h. $MM \oplus M \subset Ra(R \times_\phi M)$ so gilt a). Ist $MM \not\subset Ra(R)$, so ist ϕ surjektiv nach 8.1. Ist dann $Ra(R \times_\phi M) = Ra(R) \oplus (Ra(R):M)$, so folgt b) nach 7.14. Andernfalls ist $Ra(R \times_\phi M)$ eine echte subdirekte Summe in $R \times_\phi M$. Für $r \in R$, $r \notin Ra(R)$ ist dann auch $(r,0) \notin Ra(R \times_\phi M)$, so ist $(r,0)$ invertierbar, also auch $r \in R$. Damit ist $\bar{R}$ ein Schiefkörper und $\bar{M}_R = M/(Ra(R):M)$ einfach. So ist nach 8.4 $Char(\bar{R}) = 2$. Mit 1.17 gibt es einen $\bar{R}$-$\bar{R}$-Isomorphismus $h: \bar{R} \to \bar{M}$ mit $Ra(\bar{R} \times_{\bar{\phi}} \bar{M}) = \{(r, h(r)) \mid r \in \bar{R}\}$. So gilt $m^2 = 1 \in \bar{R}$ für $m = h(1) \in \bar{M}$.

Insbesondere gilt $\bar{R}\times_{\bar{\phi}}\bar{M} \cong \bar{R}[X]/(X^2-1)$ nach 5.21.
Die Umkehrung im Fall a) ist klar wegen $Ra(R\times_{\phi}M) = Ra(R)\oplus M$. Im Fall b) gilt nach 7.14 wegen $Ra(R\times_{\phi}M) = Ra(R)\oplus(Ra(R):M)$. Gilt c), so ist $\bar{R}$ ein Schiefkörper und $R\times_{\phi}M/Ra(R\times_{\phi}M) \cong \bar{R}[X]/(X+1)$. Der Rest der Behauptung ist klar. □

8.10 Lemma Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, $I\oplus U \subset R\times_{\phi}M$ ein Rechtsideal mit $I \subset R$, $U \subset M$. Dann gilt

1) $I\oplus U$ ist nilpotent genau dann, wenn $I \subset R$ nilpotent ist.

2) $I\oplus U$ ist links-t-nilpotent genau dann, wenn $I \subset R$ links-t-nilpotent ist.

Beweis 1) Ist I nilpotent mit Nilpotenzindex n, so gilt $(I\oplus U)^n \subset U^2\oplus U$ wegen $(I\oplus U)^m \subset (I^m+U^2)\oplus U$. Also gilt $(I\oplus U)^{2n^2} = 0$ wegen $(U^2\oplus U)^{2m} = U^{2m}\oplus UU^{2m}$ für jede natürliche Zahl m. Die Umkehrung ist klar.
2) Sei I_R links-t-nilpotent und (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul mit $(A,f)(I\oplus U) = (A,f)$. Dann $AI+AU = A$. Somit gilt $AU = A$, da $AI \subset A$ klein ist. Hieraus $A = AUI+AU^2$. Dann gilt $A = AUI$, da $AU^2 \subset A$ klein ist. Dies impliziert $A = AU = 0$. Also ist $I\oplus U$ links-t-nilpotent. Die Umkehrung ist klar. □

Der Beweis von 2) ist wesentlich kürzer als derjenige von Palmer [33,S.229]. Dort wurde gezeigt, daß unter der Voraussetzung $MM \subset Ra(R)$ $Ra(R)\oplus M$ links-t-nilpotent ist, falls auch $Ra(R)$ links-t-nilpotent ist.

Wir haben dann (Vgl. [33])

8.11 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, $\bar{R} = R/Ra(R)$, $\bar{M} = M/(Ra(R):M)$. Dann gilt

1) $R\times_{\phi}M$ ist semilokal genau dann, wenn R semilokal ist. In diesem Fall ist $\bar{M}$ als $\bar{R}$-Rechtsmodul endlich erzeugt.

2) $R\times_{\phi}M$ ist rechtsperfekt genau dann, wenn R rechtsperfekt ist.

3) $R\times_{\phi}M$ ist semiprimär genau dann, wenn R semiprimär ist.

Beweis 1) Sei $\bar{R}$ halbeinfach. Dann ist $\bar{M}\otimes_{\bar{R}}\bar{M} \to \bar{R}$ links nicht entartet, d.h. $l_{\bar{M}}(\bar{M}) = 0$ wegen 8.1. Nach 7.7 gibt es eine Zerlegung $\bar{R}\times_{\bar{\phi}}\bar{M} \cong R_1\times(R_2\times_{\phi_2}\bar{M})$ mit $R_1M = MR_1 = 0$ und ϕ_2 surjektiv. So ist $\bar{M}$ als

$\bar{R}$-Rechtsmodul endlich erzeugt. Nach 7.1 ist dann $\bar{R}\times_{\bar{\phi}}\bar{M}$ (rechts) artinsch und wegen $Ra(R)\oplus(Ra(R):M) \subset Ra(R\times_{\phi}M)$ auch $R\times_{\phi}M/Ra(R\times_{\phi}M)$. Also ist $R\times_{\phi}M/Ra(R\times_{\phi}M)$ halbeinfach.
Ist umgekehrt $R\times_{\phi}M/Ra(R\times_{\phi}M)$ rechts artinsch und $I\oplus U$ die Hülle von $Ra(R\times_{\phi}M)$ in $R\times_{\phi}M$, so ist $R\times_{\phi}M/I\oplus U \cong R/I\times_{\phi'}M/U$ rechts artinsch und insbesondere auch R/I nach 7.1. Wegen $I\oplus U/Ra(R\times_{\phi}M) \cong (I/Ra(R),f)$ nach 1.16 ist dann auch $I/Ra(R)$ als R-Rechtsmodul artinsch. Hieraus folgt die Behauptung.
2), 3): '=>' folgt aus 1), 8.2 und 8.10. Ist R semiprimär (rechtsperfekt), so ist mit 1) $\bar{R}\times_{\bar{\phi}}\bar{M}$ rechts artinsch. Damit ist $Ra(R\times_{\phi}M)/(Ra(R)\oplus(Ra(R):M))$ nilpotent. Nach dem Lemma 8.10 ist aber $Ra(R)\oplus(Ra(R):M)$ nilpotent (links-t-nilpotent). Dies gilt dann auch für $Ra(R\times_{\phi}M)$. □

Wir untersuchen nun halbartinsche Ringe

8.12 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, (A,f) ein $R\times_{\phi}M$-Rechtsmodul.

1) (A,f) ist genau dann halbartinsch, wenn A_R halbartinsch ist.

2) $R\times_{\phi}M$ ist genau dann halbartinsch, wenn R halbartinsch ist.

Beweis 1) Sei A_R halbartinsch, $0 \neq (B,g)$ ein Faktormodul von (A,f). So ist $So(B_R)$ groß in B_R. Ist $Ke\bar{g} \neq 0$, dann $0 \neq So(B_R)\cap Ke\bar{g} \subset So(B,g)$. Ist $Ke\bar{g} = 0$ und $A' \subset B_R$ einfach, dann ist $A'M$ einfach. Nach 7.3 enthält $A'+A'M$ einen einfachen Untermodul in Mod-$R\times_{\phi}M$. Dann $So(B,g) \neq 0$.
Ist umgekehrt (A,f) halbartinsch, $0 \neq h: A \to B$ ein Epimorphismus in R-Mod, so gilt $H(h)(1,\bar{f}) \neq 0$. Dann nach Voraussetzung und 8.1 $0 \neq So(Bi(H(h)(1,\bar{f}))) \subset So(H(B)) = So(B_R)\oplus So(B_R)M$. Also $So(B_R) \neq 0$. 2) folgt aus 1). □

Wir erhalten das Analogon zu 8.1 für das Primradikal. Für einen beliebigen Ring S sei dieser mit $P(S)$ bezeichnet.

8.13 Satz Sei $R\times_{\phi}M$ eine semitriviale Erweiterung, und K der Kern von $P(R\times_{\phi}M)$ in $R\times_{\phi}M$. Dann gilt

$$K = P(R)\oplus l_M(P(R):M) = P(R)\oplus r_M(P(R):M).$$

Insbesondere gilt für einen generalisierten Matrizenring $\Lambda = \begin{pmatrix} R & N \\ M & S \end{pmatrix}_{\rho\sigma}$

$$P(\Lambda) = \begin{pmatrix} P(R) & l_N(P(R):M) \\ l_M(P(S):N) & P(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(R) & r_N(P(S):M) \\ r_M(P(R):N) & P(S) \end{pmatrix}.$$

Beweis Aus 8.10 folgt unmittelbar $P(R) \subset P(R\times_\phi M)$ und hieraus $P(R)\oplus(P(R)M+MP(R)) \subset P(R\times_\phi M)$. Dann gilt wegen $(P(R)\oplus(P(R):M))^2 \subset P(R)\oplus P(R)M+MP(R)$ auch $P(R)\oplus(P(R):M) \subset P(R\times_\phi M)$. Für jede Ringerweiterung S/R gilt aber auch $P(S)\cap R \subset P(R)$, da jedes m-System in R ein solches in S ist. Hieraus folgt die umgekehrte Inklusion. □

8.14 Satz Sei $R\times_\phi M$ eine semitriviale Erweiterung, und sei $A \subset R\times_\phi M$ ein Ideal.

1) Ist A semiprim, dann ist $I_o\oplus(I_o:M)$ der Kern von A in $R\times_\phi M$ für ein semiprimes Ideal I_o.

2) Ist A Primideal, dann ist $I_o\oplus(I_o:M)$ der Kern von A in $R\times_\phi M$ für ein Ideal $I_o \subset R$ mit folgender Eigenschaft: Sind $K, L \subset R$ Ideale mit $KL \subset I_o$ und $KMLM \subset I_o$, dann $K \subset I_o$ oder $L \subset I_o$.

Beweis 1) Sei $I_o\oplus U_o$ der Kern von A in $R\times_\phi M$, und sei $J \subset R$ ein Ideal mit $J^2 \subset I_o$, dann $(J\oplus JM)^3 \subset I_o\oplus U_o \subset A$ wegen $JMJM \subset J$ und $MJ^2M \subset MI_oM \subset I_o$. Also $J \subset I_o$. Setze $U = (I_o:M)$. Wegen $(I_o\oplus U)^2 \subset I_o\oplus U_o$ gilt auch $U \subset U_o$.

2) gilt analog. □

Nachtrag 8.14 berichtigt Theorem 2.2 von Sakano [44]. Ist nämlich $\Lambda = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}$ für einen Körper K, dann ist Λ einfach, also ein Primring. Weiter ist Λ eine semitriviale Erweiterung von $R = K\times K$. R ist aber nicht prim. Der Fehler im Beweis in [44] liegt darin, daß für eine semitriviale Erweiterung $R\times_\phi M$ und für ein beliebiges Ideal $I \subset R$ $I\oplus(l_M(I:M)\cap r_M(I:M))$ im allgemeinen kein Ideal in $R\times_\phi M$ ist. □

LITERATUR

[1] Bass, H.: The Morita theorems. University of Oregon 1962

[2] Bass, H.: Algebraic K-thory. Benjamin, new York 1968.

[3] Cohn, P. M.: Morita equivalence and duality. Queen Mary College Math Notes 1966.

[4] Cunningham, R. S.; Rutter, E. A.; Turnidge, D. R.: Rings of quotient of endomorphism rings of projektive modules.

[5] Faith,C.: Algebra: Rings, modules and categories I. Springer-Verla Berlin Heidelberg New York 1973.

[6] Fossum, R. M.; Griffitth, P. A.; Reiten, I.: Trivial extensions o: abelian categories. Lect. Notes Math. 456 (1975).

[7] Fuchs, L.: On subdirect unions.

[8] Fuchs, L.; Loonstra, F.: On the cancellation of modules in direct sum: over Dedekind domains. Indag. Math. 33 (1971), 163-169.

[9] Garcia-Herreros, E.: Semitriviale Erweiterungen von Kategorien. Zu Veröffentlichung vorgesehen.

[10] Garcia-Herreros, E.: Kontext-Kategorien. Zur Veröffentlichung vorgesehen.

[11] Goodearl, K. R.: Ring theory. Non singular rings and modules. Marcel Dekker, New York Basel 1976.

[12] Gordon, R.; Robson, J. C.: Krull dimension. Mem. American Math. Soc. 133 (1973).

[13] Harada,M.: Hereditary semi-primary rings and triangular matrix rings. Nagoya Math. J. 27 (1966), 463-484.

[14] Hirata, K.; Sugano, K.: On semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings. J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 360-373.

[15] Hochschild, G: Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956),246-269.

[16] Hochschild, G.: Note on relative homological dimension. Nagoya Math. J. 15 (1958), 89-94.

[17] Isbell, J. R.: General functorial semantic I. American J. Math. 94 (1972), 535-596.

[18] Kasch, F.: Projektive Frobeniuserweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. 1960/61, 89-115.

[19] Kasch, F.: Moduln und Ringe. B. G. Teubner, Stuttgart 1977.

[20] Kashu, A. I.: Morita contexts and torsion of modules. Math. Notes Acad. Sci. USSR 28 (1980), 706-710.

[21] Kato,T.; Ohtake, K.: Morita contexts and equivalence. J. Alg. 61 (1979), 360-366.

[22] Kitamura, Y.: A characterization of trivial extension which is a Frobenius one. Arch. Math. 34 (1980), 111-113.

[23] Kraemer, J.: Injektive Moduln, (Morita-)Selbstdualitäten, Zentren von Ringen. Alg. Berichte 52 (1985).

[24] Lambek, J.; Rattray, B. A.: Localization and duality in additive categories. Houston J. Math. 1 (1975), 87-100.

[25] Miller, R. W.: Endomorphism rings of finitely generated projektive modules. Pac. J. Math. 47 (1973), 199-220.

[26] Miyashita, Y.: Finite outer Galois theory of non commutative rings. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 19 (1966), 114-134.

[27] Miyashita,, Y.: On a generalisation of Kitamura's theorem. Arch. Math. 40 (1983), 126-131.

[28] Müller, B.: The quotient categorie of a morita context. J. Alg. 28 (1974), 389-407.

[29] Nobusawa, N.: On duality in Γ-rings. Math. J. Okayama Univ. 24 (1983), 69-73.

[30] Nobusawa, N.: Γ-rings and Morita equivalence of rings. Math. J. Okayama Univ. 25 (1984), 151-156.

[31] Palmer, I; Roos, J.-E.: Formules explicites pour la dimension homologique des anneaux de matrices generalixées. Comptes Rendus, Serie A. 273 (1971), 1026-1029.

[32] Palmer, I.; Roos, J.-E.: Explicit formulae for the global homological dimensions of trivial extensions of rings. J. Alg. 27 (1974), 380-413.

[33] Palmer, I.: The global homological dimension of semi-trivial extensions of rings. Math. Scand. 37 (1975), 223-256.

[34] Pareigis, B.: Einige Bemerkungen über Frobenius-Erweiterungen. Math. Ann. 153 (1964), 1-13.

[35] Reiten, I.: Trivial extensions of Gorenstein rings. Thesis, University of Illinois, Urbana 1971.

[36] Roos, J.-E.: Locally noetherian categories and generalized strictly linearly compact rings. Applications. Lect. Notes Math. 92 (1969) 197-277.

[37] Sakano, K.: Injektive hulls of Φ-trivial extensions of rings. Comm Alg. 13 (1985), 1367-1377.

[38] Sandomierski, F. L.: Modules over the endomorphism ring of a finitel generated projective module. Proc. American Math. Soc. 31 (1972) 27-31.

[39] Sands, A. D.: Radicals and morita contexts. J. Alg. 24 (1973), 335-345

[40] Sugano, K.: On separable extensions over a local ring. Hokkaido Math J. 11 (1982), 11-115.

[41] Stenström, B.: Rings of quotients. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

[42] Turnidge, D. R.: Torsion theories and rings of quotients of morita equivalent rings. Pac. J. Math. 37 (1971), 225-234.

[43] Zimmermann, B.: Endomorphism rings of selg-generators. Alg. Berichte 27 (1975).

Nachtrag:

[44] Sakano, K.: Some aspects of Φ-trivial extensions of rings. Comm. Alg. 13(10) (1985), 2199-2210.

Oktober 1985

Eduardo Garcia-Herreros

Mathematisches Institut
der Universitat München
Theresienstr. 39
8000 München 2

West-Germany

bereits erschienene

Algebra Berichte

Nr. 1 *Günther Hauger und Wolfgang Zimmermann:*
Quasi – Frobenius – Moduln
1973, 13 Seiten, DM 8,–

Nr. 2 *Helmut Zöschinger:*
Komplementierte Moduln über Dedekindringen.
1973, 16 Seiten, DM 9,–

Nr. 3 *Bodo Pareigis:*
On K-Theory of Hopf Algebras of Finite Type.
1973, 50 Seiten, DM 12,–

Nr. 4 *Tilman Würfel:*
Über absolut reine Ringe
1973, 29 Seiten, DM 10,–

Nr. 5 *Günter Hauger und Wolfgang Zimmermann:*
Dichte Ringe.
1973, 10 Seiten, DM 6,–

Nr. 6 *Helmut Zöschinger:*
Komplemente als direkte Summanden.
1973, 19 Seiten, DM 9,–

Nr. 7 *Thomas Wilhelm:*
Polynomideale und Potenzreihenideale über einem Stellenring.
1973, 12 Seiten, DM 8,–

Nr. 8 *Wolfgang Müller:*
Symmetrische Algebren mit injektivem Zentrum.
1973, 7 Seiten, DM 7,–

Nr. 9 *Hans J. Müller:*
Eine Charakterisierung rechts-artinischer Ringe über die globale Dimension.
1973, 11 Seiten, DM 7,–

Nr. 10 *Manfred B. Wischnewsky:*
Generalized Universal Algebra in Initialstructure Categories.
1973, 35 Seiten, DM 11,–

Nr. 11 *Toma Albu und Constantin Nastasescu:*
Modules Arithmétiques.
1973, 24 Seiten, DM 10,–

Nr. 12 *Heidi Schneider:*
Reflexivität, orthogonale Komplemente und perfekte Dualität für adjungierte Faktoren.
1973, 34 Seiten, DM 11,–

Nr. 13 *Helmut Röhrl und Thomas Woolley:*
Some elementary properties of the Category $\underline{\mathrm{Top}}_M|B$
1973, 46 Seiten, DM 12,–

Nr. 14 *Tilman Würfel:*
Kohärenz und Lokalisierung.
1973, 16 Seiten, DM 9,–

Nr. 15 *Helmut Zöschinger:*
Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben.
1973, 24 Seiten, DM 10,–

Nr. 16 *Manfred Wischnewsky:*
On Regular Topological Algebras over Arbitrary Base-Categories.
1973, 36 Seiten, DM 11,–

Nr. 17 *Wolfgang Müller:*
Unzerlegbare Moduln über artinschen Ringen.
1973, 44 Seiten, DM 12,–

Nr. 18 *Günter Hauger und Wolfgang Zimmermann:*
Lokalisierung, Vervollständigung von Ringen und Bikommutatoren von Moduln.
1974, 42 Seiten, DM 12,–

Nr. 19 *Hans-Jürgen Schneider:*
Endliche algebraische Gruppen.
1974, 56 Seiten, DM 14,–

Nr. 20 *Michael Pfender:*
Universal Algebra in S-Monoidal Categories.
1974, 38 Seiten, DM 12,–

Nr. 21 *Toma Albu:*
Sur la Dimension de Gabriel des Modules.
1974, 27 Seiten, DM 11,–

Nr. 22 *Bruno J. Müller:*
On Duality for Topological Abelian Groups and Modules.
1974, 20 Seiten, DM 10,–

Nr. 23 *Hans J. Müller:*
Die Abelschen Unterkategorien der P- und J-Ko-Präsentierungen.
1974, 28 Seiten, DM 11,–

Nr. 24 *Wolfgang Müller:*
Artinsche Ringe vom Endlichen Typ.
1974, 16 Seiten, DM 9,–

Nr. 25 *Toma Albu und Constantin Năstăsescu:*
Modules sur les Anneaux de Krull.
1974, 20 Seiten, DM 10,–

Nr. 26 *Helmut Röhrl und Manfred B. Wischnewsky:*
Universal Algebra over Hopf-Algebras.
1974, 36 Seiten, DM 12,–

Nr. 27 *Birge Zimmermann:*
Endomorphism rings of Self-Generators
1975, 24 Seiten, DM 11,–

Nr. 28 *Kozo Sugano:*
Separable extensions of Quasi-Fobenius Rings.
1975, 12 Seiten, DM 8,–

Nr. 29 *Manfred B. Wischnewsky:*
On linear Representations of Affine Groups I.
1975, 36 Seiten, DM 12,–

Nr. 30 *Wolfgang Zimmermann:*
Rein injektive direkte Summen von Moduln.
1975, 62 Seiten, DM 15,–

Nr. 31 *Helmut Zöschinger:*
Über Torsions- und K-Elemente von Ext (C, A).
1975, 42 Seiten, DM 12,–

Nr. 32 *Günter Hauger:*
Derivationsmoduln
1977, 72 Seiten, DM 18,–

Nr. 33 *Tilmann Würfel:*
Ringerweiterungen und Injektivität.
1977, 34 Seiten, DM 11,–

Nr. 34 *Mitsuhiro Takeuchi:*
The #-product of group sheaf extensions applied to Long's theory of dimodule algebras.
1977, 56 Seiten, DM 14,–

Nr. 35 *Thomas S. Ligon:*
Galois-Theorie in monoidalen Kategorien.
1978, 110 Seiten, DM 20,–

Nr. 36 *Rainer Schulz:*
Reflexive Moduln über perfekten Ringen.
1979, 70 Seiten, DM 16,–

Nr. 37 *Toma Albu und Constantin Năstăsescu:*
Local Cohomology and Torsion Theory.
1979, 40 Seiten, DM 12,–

Nr. 38 *Rudolf Netzsch:*
Bialgebren in Endomorphismenringen.
1979, 146 Seiten, DM 26,–

Nr. 39 *Cornelius Greither:*
Die unzerlegbaren Moduln über $k[X, Y]/(X, Y)^2$.
1979, 26 Seiten, DM 12,–

Nr. 40 *Bodo Pareigis*
Non-additive ring and module theory V. Projective and coflat objects.
1980, 33 Seiten, DM 12,–

Nr. 41 *Rainer Schulz:*
The descending Loewy Length of endomorphism Rings.
1981, 12 Seiten, DM 8,–

Nr. 42 *Luc Bonami:*
On p-Solvable Groups with p-Lengt
1982, 26 Seiten, DM 12,–

Nr. 43 *Ernst August Behrens:*
A Semigroup Theoretical Approach to the Non- Commutative Arithmetic
1982, 54 Seiten, DM 16,–

Nr. 44 *Cornelius Greither:*
Zum Kürzungsproblem Kommutativer Algebren
1983, 128 Seiten, DM 26,–

Nr. 45 *Ina Kersten:*
Eine neue Kummertheorie für zyklische Galoiserweiterungen von Grad p^2
1983, 106 Seiten, DM 25,–

Nr. 46 *Julius Martin Zelmanowitz:*
Duality Theory for Quasi-Injective Modules
1984, 18 Seiten, DM 14,–

Nr. 47 *Peter Herrmann:*
Projective Properties of Modules
1984, 54 Seiten, DM 19,–

Nr. 48 *Luc Bonami:*
On the Structure of Skew Group Rin
1984, 64 Seiten, DM 19,–

Nr. 49 *Azmi Hanna und Ahmad Shamsuddin:*
Duality in the Category of Modules. Applications
1984, 34 Seiten, DM 16,–

Nr. 50 *Rainer Schulz:*
Über den Erweiterungsring $\mathrm{Ext}^*_R(M,M)$
1984, 54 Seiten, DM 19,–

Nr. 51 *Andreas Zöllner:*
Lokal – direkte Summanden
1984, 76 Seiten, DM 24,–

Nr. 52 ***Julius Kraemer:***
Injektive Moduln, (Morita-)Selbstdualitäten, Zentren von Ringen
1985, 208 Seiten, DM 34,–

Verlag
Reinhard Fischer
Fallmerayerstraße 36
8000 München 40
West Germany