Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n°399 Juin 1971

COHOMOLOGIE DES GROUPES DISCRETS

par Jean-Pierre SERRE

1. Sous-groupes discrets à quotient compact.

Soit G un groupe de Lie réel n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. On sait que l'espace homogène $X = K\backslash G$ est homéomorphe à un espace R^n ; lorsque G est semi-simple (à centre fini), X est l'espace symétrique attaché à G.

Soit Γ un sous-groupe discret de G vérifiant la condition suivante :

(a) Γ est sans torsion.

Alors Γ opère librement sur X, de sorte que X est un revêtement universel de la variété quotient $X_\Gamma = X/\Gamma$. Comme X est contractile, il en résulte que la cohomologie du groupe discret Γ s'identifie à celle de l'espace topologique X_Γ. Plus précisément, tout Γ-module M définit un faisceau localement constant $\tilde{M}$ sur X_Γ, et les groupes $H^q(\Gamma,M)$ et $H^q(X_\Gamma,\tilde{M})$ sont isomorphes.

On obtient ainsi à peu de frais(*) des renseignements sur la cohomologie de Γ. Par exemple :

1.1. La dimension cohomologique $cd(\Gamma)$ de Γ est $\leq n = \dim(X)$.

(On définit $cd(\Gamma)$ comme la borne supérieure des entiers q tels que $H^q(\Gamma,M) \neq 0$ pour au moins un Γ-module M.)

(*) du moins tant qu'on se borne à des théorèmes généraux ! Lorsque l'on veut des résultats plus explicites, c'est une autre affaire ; voir par exemple [8] et [13] pour le cas des sous-groupes arithmétiques de SL_2 sur un corps quadratique imaginaire.

Faisons maintenant une hypothèse supplémentaire :

(b) G/Γ est compact.

La variété X_Γ est alors compacte. On peut la trianguler (puisque c'est une variété différentielle - et même analytique réelle). On obtient ainsi une triangulation de X invariante par Γ ; en prenant le complexe de chaînes associé à cette triangulation, on obtient :

1.2. Il existe une suite exacte de Γ-modules

$$0 \to L_n \to \dots \to L_o \to \mathbf{Z} \to 0 ,$$

où les L_i sont des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules libres de rang fini.

(On exprime cette propriété en disant que Γ est de type (FL) , cf. [9], n°1.2.)

D'autre part, le calcul du groupe fondamental d'un complexe fini montre que :

1.3. Le groupe Γ est de présentation finie (i.e. définissable par un nombre fini de générateurs et de relations).

La dualité de Poincaré, appliquée à la variété X_Γ , entraîne :

1.4. Pour tout Γ-module M , le groupe de cohomologie $H^q(\Gamma,M)$ est isomorphe au groupe d'homologie $H_{n-q}(\Gamma, M \otimes \Omega)$, où Ω est le Γ-module correspondant au faisceau d'orientation de X_Γ . (Lorsque G est connexe, et qu'on a choisi une orientation de X , on peut identifier Ω à $\mathbf{Z}$ et $M \otimes \Omega$ à M .)

En particulier :

1.5. On a $cd(\Gamma) = n$.

Enfin, la formule de Gauss-Bonnet, appliquée à une structure riemannienne sur X_Γ invariante par G , permet de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(\Gamma) = \chi(X_\Gamma) = \sum_i (-1)^i \text{ rg.} L_i$$

de Γ :

1.6. Il existe une mesure bi-invariante μ_G sur G, indépendante du groupe Γ considéré, telle que

$$\chi(\Gamma) = \mu_G(G/\Gamma) .$$

(On dit que μ_G est la mesure d'Euler-Poincaré de G, cf. [9], n°3.1.)

Tous ces résultats sont bien connus. Ils ont malheureusement l'inconvénient de reposer sur les hypothèses (a) et (b) ci-dessus. En fait, l'hypothèse (a) (absence de torsion dans Γ) est assez innocente ; en effet, si Γ vérifie (b), et si G est plongeable dans un groupe linéaire (ce qui est le cas dans les applications), on peut montrer qu'il existe un sous-groupe Γ' de Γ qui est d'indice fini dans Γ, et qui est sans torsion. On pose

1.7. $$\mathrm{vcd}(\Gamma) = \mathrm{cd}(\Gamma') \quad \text{et} \quad \chi(\Gamma) = \chi(\Gamma')/(\Gamma:\Gamma') ,$$

et l'on montre que $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ et $\chi(\Gamma)$ ne dépendent pas du choix de Γ' (cf. [9], n°1.8). Les résultats ci-dessus, appliqués à Γ', entraînent alors :

1.8. On a $\mathrm{vcd}(\Gamma) = \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(\Gamma) = n$.

1.9. On a $\chi(\Gamma) = \mu_G(G/\Gamma)$.

La seule différence importante est que $\chi(\Gamma)$ est un nombre rationnel, et pas toujours un entier.

L'hypothèse (b) (compacité de G/Γ) est plus sérieuse. Elle est en défaut pour les groupes arithmétiques les plus intéressants, tels $SL_n(\mathbb{Z})$. Nous allons voir comment on peut surmonter cette difficulté, au moyen d'une compactification convenable de X_Γ .

2. Adjonction de coins à l'espace X (d'après Borel-Serre [3]).

Cette adjonction dépend d'une structure de groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ sous-jacente à la structure de groupe de Lie réel de G. Aussi allons-nous changer légèrement les notations, et désigner par G un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$; pour simplifier, nous supposerons en outre que G est semi-simple connexe. L'espace symétrique X est alors défini comme l'espace homogène des sous-groupes compacts maximaux du groupe de Lie réel $G(\mathbb{R})$.

Le résultat essentiel de la note [3] est la construction d'une certaine variété à coins $\bar{X}$ d'intérieur X. (Une "variété à coins", ou "variété à bords anguleux" est localement un produit fini de demi-espaces fermés ; voir là-dessus la thèse de Cerf, ou les exposés de Douady au séminaire Cartan 1961/62.) Cette variété jouit des propriétés suivantes :

2.1. Elle est réunion disjointe de parties e_P correspondant aux sous-groupes paraboliques P de G (définis sur $\mathbb{Q}$).

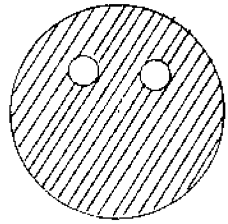
2.2. On a $X = e_G$, de sorte que le bord $\partial\bar{X} = \bar{X} - X$ de $\bar{X}$ est réunion disjointe des e_P, pour $P \neq G$.

2.3. L'adhérence $\overline{e_P}$ de e_P est la réunion des $e_{P'}$ tels que $P' \subset P$; c'est une sous-variété à coins de $\bar{X}$; elle est contractile.

2.4. La réunion $X(P)$ des $e_{P'}$, pour $P' \supset P$, est une sous-variété ouverte de $\bar{X}$.

Exemple

Lorsque le rang $rg_{\mathbb{Q}}G$ de G est 1 (resp. 0), la variété $\bar{X}$ est une variété à bord (resp. une variété "sans bord"), et les composantes connexes du bord sont des espaces $\mathbb{R}^{n-1}$, en correspondance bijective avec les sous-groupes paraboliques minimaux de G (il y en a donc une infinité dénombrable). Pour SL_2, on trouve pour $\bar{X}$ une surface homéomorphe au revêtement universel d'un disque fermé percé de deux trous.



La construction de $\bar{X}$ est esquissée dans [3]. On définit d'abord les sous-variétés $X(P)$ de 2.4 : au sous-groupe parabolique P on attache un certain groupe A isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times \dots \times \mathbb{R}_+^*$, et on fait opérer A sur X ("action géodésique") ; cette action fait de X un espace fibré principal de groupe structural A. La variété $X(P)$ est alors définie comme l'espace fibré associé $X \times^A \bar{A}$, où $\bar{A}$ est le "coin" $\mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+$. Il faut ensuite recoller les $X(P)$ entre eux ; la seule difficulté est de montrer que la variété $\bar{X}$ ainsi obtenue est séparée ; cela résulte d'un théorème de Borel ([2], prop. 12.6).

THÉORÈME 1 ([3]). Soit $\ell = rg_{\mathbb{Q}} G$. L'espace $\partial\bar{X}$ a même type d'homotopie qu'un bouquet de sphères de dimension $\ell-1$.

En utilisant les propriétés d'incidence des $\bar{e}_P$ (cf. 2.3), on démontre que $\partial\bar{X}$ a même type d'homotopie que l'immeuble de Tits ([14]) défini par les sous-groupes paraboliques de G. On applique alors un résultat de Solomon-Tits [12].

COROLLAIRE. Soit $n = \dim(X)$. Les groupes de cohomologie à supports compacts $H_c^q(\bar{X},\mathbb{Z})$ sont nuls pour $q \neq n-\ell$; le groupe $I = H_c^{n-\ell}(\bar{X},\mathbb{Z})$ est libre sur $\mathbb{Z}$.

Cela résulte du théorème 1, combiné avec la dualité de Poincaré, et avec le fait que $\bar{X}$ est contractile.

Soit maintenant Γ un sous-groupe arithmétique de $G(\mathbb{Q})$, i.e. un groupe commensurable au groupe $G(\mathbb{Z})$ des points entiers de G (pour un plongement donné de G dans un groupe $\mathbf{GL}_n$). Le groupe Γ opère de façon naturelle sur $\bar{X}$.

THÉORÈME 2 ([3]). <u>L'action de</u> Γ <u>sur</u> $\bar{X}$ <u>est propre ; le quotient</u> $\bar{X}_\Gamma = \bar{X}/\Gamma$ <u>est compact</u>.

Ce théorème est une reformulation de deux des principaux résultats de la "théorie de la réduction" (cf. Borel [2], th. 13.1 et th. 15.4). Les "domaines de Siegel" de la théorie de la réduction correspondent ici aux <u>voisinages</u> des points de $\partial\bar{X}$. (Signalons d'ailleurs que Siegel lui-même avait donné une construction analogue dans le cas du groupe $G = \mathbf{SL}_n$, cf. [10], III, p. 275-327.)

Supposons maintenant que Γ soit <u>sans torsion</u>. Il opère alors librement sur $\bar{X}$, et $\bar{X}_\Gamma = \bar{X}/\Gamma$ est une <u>variété à coins compacte</u> de classe C^ω, d'intérieur $X_\Gamma = X/\Gamma$. Cela fournit une version plus précise d'un théorème de Raghunathan [7] donnant l'existence (mais non la structure) d'une telle compactification. On retrouve ainsi (cf. [7]) le fait que Γ est de présentation finie et de type (FL). De plus, le corollaire au th. 1, combiné à un argument homologique standard, fournit le <u>théorème de dualité</u> suivant :

THÉORÈME 3 ([3]). <u>Soient</u> M <u>un</u> Γ-<u>module et</u> q <u>un entier</u>. <u>Le groupe de cohomologie</u> $H^q(\Gamma,M)$ <u>est isomorphe au groupe d'homologie</u> $H_{n-\ell-q}(\Gamma, I \otimes M)$, <u>où</u> $n = \dim(X)$, $\ell = \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} G$ <u>et</u> $I = H_c^{n-\ell}(\bar{X},\mathbb{Z})$.

[Lorsque $\ell = 0$, on a $\bar{X} = X$, le quotient X/Γ est compact, et le Γ-module I se réduit au module d'orientation Ω de 1.4.]

COROLLAIRE 1. <u>On a</u> $\mathrm{cd}(\Gamma) = n-\ell$.

Ce résultat s'étend aux groupes arithmétiques quelconques (pouvant avoir de la torsion), à condition de remplacer $\mathrm{cd}(\Gamma)$ par $\mathrm{vcd}(\Gamma) = \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$, cf. n°1.

COROLLAIRE 2. $H^q(\Gamma,\mathbb{Z}[\Gamma]) = 0$ <u>pour</u> $q \neq n-\ell$ <u>et</u> $H^{n-\ell}(\Gamma,\mathbb{Z}[\Gamma])$ <u>est isomorphe à</u> I .

Ce dernier résultat vaut même si Γ a de la torsion. On obtient ainsi une curieuse condition pour qu'un groupe Γ puisse être sous-groupe arithmétique (ou même S-arithmétique, cf. n°5) d'un groupe algébrique : il est nécessaire que les $H^q(\Gamma,\mathbb{Z}[\Gamma])$ soient nuls pour toutes les valeurs de q sauf une. On est tenté de dire, avec Verdier, que de tels groupes sont "de Cohen-Macaulay".

<u>Exemple</u>

Prenons $G = SL_3$; on a $n = \dim(X) = \dim.SL_3 - \dim.SO_3 = 8-3 = 5$ et $\ell = \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} G = 2$. On en déduit que $\mathrm{vcd}\, SL_3(\mathbb{Z}) = 5-2 = 3$, ce qui améliore de deux unités la borne donnée par 1.1.

3. <u>Caractéristiques d'Euler-Poincaré</u> (d'après G. Harder [6]).

Conservons les notations du n° précédent, et soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G(\mathbb{Q})$. Notons μ_G la mesure d'Euler-Poincaré de $G(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 4 ([6]). <u>On a</u> $\chi(\Gamma) = \mu_G(G(\mathbb{R})/\Gamma)$.

(Autrement dit, tout se passe comme si on pouvait appliquer brutalement la formule de Gauss-Bonnet à la variété à coins $\bar{X}_\Gamma$, sans lui ajouter de terme correctif dû à son bord $\partial\bar{X}_\Gamma$.)

La démonstration de Harder consiste à écrire X_Γ comme réunion croissante de pièces compactes $A(t)$ $(t \to \infty)$ auxquelles il applique la formule de Gauss-Bonnet

$$\chi(A(t)) = \int_{A(t)} \omega + \int_{\partial A(t)} \pi .$$

Il montre que l'on peut choisir les $A(t)$ de telle sorte que $A(t)$ et X_Γ

aient même type d'homotopie pour t assez grand, et que l'intégrale $\int_{\partial A(t)} \pi$ tende vers 0. Ceci fait, on a bien

$$\chi(X_\Gamma) = \lim_{t\to\infty} \int_{A(t)} \omega = \int_X \omega = \mu_G(G(\mathbf{R})/\Gamma) .$$

Harder montre également comment l'on peut <u>calculer</u> $\chi(\Gamma)$, par comparaison avec le nombre de Tamagawa de G. Je me bornerai au cas particulier du groupe symplectique :

THÉORÈME 5 ([6]). <u>Soient</u> k <u>un corps de nombres algébriques et</u> O_k <u>l'anneau des entiers de</u> k ; <u>soit</u> ζ_k <u>la fonction zêta du corps</u> k . <u>On a</u>

$$\chi(Sp_{2m}(O_k)) = \zeta_k(-1)\zeta_k(-3) \ldots \zeta_k(1-2m) .$$

<u>Remarques</u>

1) On sait depuis Siegel ([10], I, p. 545-546) que les nombres $\zeta_k(-1+2m)$ sont des nombres <u>rationnels</u> ; l'équation fonctionnelle de ζ_k montre qu'ils sont $\neq 0$ si et seulement si k est <u>totalement réel</u>. Lorsque $k = \mathbf{Q}$, on a $\zeta_{\mathbf{Q}}(1-2m) = -b_{2m}/2m$, où les b_{2m} sont les nombres de Bernoulli ; par exemple :

$$\chi(SL_2(\mathbf{Z})) = \zeta_{\mathbf{Q}}(-1) = -1/12 \ ; \quad \chi(Sp_4(\mathbf{Z})) = \zeta_{\mathbf{Q}}(-1)\zeta_{\mathbf{Q}}(-3) = -1/1440.$$

Lorsque k est abélien sur $\mathbf{Q}$, on peut exprimer $\zeta_k(1-2m)$ comme produit de <u>nombres de Bernoulli généralisés</u>, à la Leopoldt. Dans le cas général, Siegel [11] a donné des formules explicites permettant le calcul des $\zeta_k(1-2m)$, et en particulier une estimation de leurs dénominateurs. Signalons à ce sujet :

QUESTION. <u>Supposons que</u> k <u>ne contienne aucun sous-corps abélien sur</u> $\mathbf{Q}$, <u>à part</u> $\mathbf{Q}$. <u>Posons</u> $L = \zeta_k/\zeta_{\mathbf{Q}}$. <u>Est-il vrai que les nombres rationnels</u> $L(-1), L(-3), \ldots, L(1-2m), \ldots$ <u>soient des entiers</u> ?

C'est vrai pour $m = 1$; l'entier $\zeta_k(-1)/\zeta_{\mathbf{Q}}(-1) = -12\zeta_k(-1)$ est même divisible par 2^{r-1}, où $r = [k:\mathbf{Q}]$. Cela se démontre en utilisant le cas particulier $m = 1$ du th.5, cf. [9], n° 3.7.

2) Inversement, une fois les $\zeta_k(1-2m)$ connus, on peut en tirer des renseignements sur la <u>torsion</u> de certains groupes Γ. Plus précisément, notons $\mathrm{Tors}(\Gamma)$ l'ensemble des nombres premiers p tels que Γ contienne un élément d'ordre p. D'après une propriété élémentaire des caractéristiques d'Euler-Poincaré ([9], prop. 13), $\chi(\Gamma)$ est p-entier si $p \notin \mathrm{Tors}(\Gamma)$. Prenons par exemple pour Γ le groupe $E_8(\mathbf{Z})$ (i.e. le groupe des $\mathbf{Z}$-points d'un $\mathbf{Z}$-schéma en groupes déployé de type E_8). La formule de Harder [6] montre que $\chi(\Gamma)$ est p-entier si et seulement si p n'appartient pas à l'ensemble $S = \{2,3,5,7,11,13,19,31\}$. On a donc

$$\mathrm{Tors}(\Gamma) \supset S .$$

Mais d'autre part, un argument simple de réduction modulo ℓ (dû à Minkowski pour le groupe SL_n) montre que l'on a

$$\mathrm{Tors}(E_8(\mathbf{Q})) \subset S .$$

En comparant, il vient :

$$\mathrm{Tors}(E_8(\mathbf{Z})) = \mathrm{Tors}(E_8(\mathbf{Q})) = \{2,3,5,7,11,13,19,31\} .$$

Un argument analogue donne

$$\mathrm{Tors}(E_7(\mathbf{Z})) = \mathrm{Tors}(E_7(\mathbf{Q})) = \{2,3,5,7,11,13,19\} .$$

(Par contre, la méthode ne s'applique pas à E_6, car $\chi(E_6(\mathbf{Z}))$ est égal à 0.)

4. Un théorème de stabilité

On peut se proposer d'étendre aux groupes arithmétiques quelconques les théorèmes démontrés dans le cas d'un quotient compact par Weil, Matsushima, ... Des résultats dans cette direction ont été obtenus par Raghunathan, Garland et Hsiang notamment L'utilisation de la variété à coins $\bar{X}_\Gamma$ devrait permettre de les généraliser et d'en simplifier les démonstrations. C'est ainsi que Borel a obtenu un <u>théorème de stabilité</u> pour le groupe linéaire :

THÉORÈME 6 (Borel, non publié). <u>Soient</u> k <u>un corps de nombres algébriques,</u> O_k <u>l'anneau des entiers de</u> k , <u>et</u> Σ <u>l'ensemble des places archimédiennes de</u> k ; <u>pour tout entier</u> $m \geqq 1$, <u>posons</u> $\Gamma_m = \mathbf{SL}_m(O_k)$. <u>Alors</u> :

(i) <u>Pour</u> q <u>fixé,</u> $H^q(\Gamma_m, \mathbf{R})$ <u>est indépendant de</u> m <u>pour</u> m <u>assez grand.</u>

(ii) <u>L'algèbre de cohomologie stable</u> $\lim\limits_{m\to\infty} H^*(\Gamma_m, \mathbf{R})$ <u>est une algèbre extérieure engendrée par des éléments homogènes</u> $(x_{i,v})$, <u>avec</u> $v\in\Sigma$, $i\in\mathbf{N}$, $\deg(x_{i,v}) = 5 + 4i$ <u>si</u> v <u>est une place réelle, et</u> $\deg(x_{i,v}) = 3 + 2i$ <u>si</u> v <u>est complexe.</u>

En particulier, on a $H^2(\Gamma_m, \mathbf{R}) = 0$ pour m assez grand, résultat obtenu antérieurement par H. Garland, et utilisé dans l'étude du " K_2 " du corps k (cf. l'exposé de Bass dans le présent séminaire).

5. <u>Cohomologie des groupes</u> S-<u>arithmétiques</u> (d'après [9] et [4]).

Soient k un corps de nombres algébriques, S un ensemble fini de places de k contenant l'ensemble Σ des places archimédiennes, et O_S l'anneau des éléments de k qui sont entiers en dehors de S . Soit G un groupe algébrique semi-simple sur k ; choisissons un plongement de G dans un groupe $\mathbf{GL}_n$; un sous-groupe de $G(k)$ est dit S-<u>arithmétique</u> s'il est commensurable au groupe $G(O_S) = G(k) \cap \mathbf{GL}_n(O_S)$. Nous nous proposons d'étendre les résultats des $n^{os}2$ à 4 à de tels groupes.

Si $v\in S$, notons k_v le complété de k pour v ; si $v\in\Sigma$, on a $k_v \simeq \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; sinon, k_v est un corps local. Posons $G_v = G(k_v)$; c'est un groupe de Lie sur k_v . Si Γ est un sous-groupe S-arithmétique de $G(k)$, on vérifie tout de suite que Γ est un <u>sous-groupe discret</u> du groupe produit

$G_S = \prod_{v \in S} G_v$. On va utiliser ce fait pour faire opérer Γ sur un espace $\bar{X}_S$ analogue à l'espace $\bar{X}$ du n°2. Plus précisément, notons G' le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ déduit de G par restriction des scalaires et soit $\bar{X}$ la variété à coins attachée à G' ; d'autre part, si $v \in S-\Sigma$, soit X_v l'immeuble de Bruhat-Tits correspondant à G sur k_v (cf. [5]) ; on sait que X_v est un complexe "polysimplicial", contractile, de dimension $\ell_v = \mathrm{rg}_{k_v} G$, sur lequel le groupe G_v opère proprement. On définit alors l'espace $\bar{X}_S$ comme le produit de $\bar{X}$ et des X_v , pour $v \in S-\Sigma$. C'est un espace contractile, de dimension

$$n(S) = n + \sum_{v \in S-\Sigma} \ell_v \qquad , \quad \text{où} \quad n = \dim(\bar{X}) \ .$$

Le groupe Γ opère sur $\bar{X}_S$.

THÉORÈME 7 ([4]). L'action de Γ sur $\bar{X}_S$ est propre ; le quotient $\bar{X}_S/\Gamma$ est compact.

Cela résulte du théorème 2, combiné avec [1].

Pour aller plus loin, il est nécessaire de déterminer la cohomologie à supports compacts de $\bar{X}_S$; comme celle de $\bar{X}$ est connue, on est ramené à celle de l'immeuble X_v , pour $v \notin \Sigma$. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 8 ([4]). On a $H^q_c(X_v , \mathbb{Z}) = 0$ pour $q \neq \ell_v$, et le groupe $I_v = H^{\ell_v}_c(X_v , \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre.

La démonstration se fait en compactifiant X_v par adjonction d'un certain immeuble de Tits topologisé Y_v^{top}, et en calculant la cohomologie de Y_v^{top} par un procédé inspiré de [12].

COROLLAIRE. On a $H^q_c(\bar{X}_S , \mathbb{Z}) = 0$ pour $q \neq n(S) - \ell$, où $\ell = \mathrm{rg}_k G$, et le

<u>groupe</u> $I_S = H_c^{n(S)-\ell}(\bar{X}_S , \mathbf{Z})$ <u>est un</u> $\mathbf{Z}$-<u>module libre</u>, <u>isomorphe au produit tensoriel de</u> I <u>et des</u> I_v , <u>pour</u> $v \in S-\Sigma$.

Ceci fait, le même argument qu'au n°2 donne :

THÉORÈME 9 ([4]). <u>Soit</u> Γ <u>un sous-groupe</u> S-<u>arithmétique sans torsion de</u> $G(k)$ <u>et soit</u> M <u>un</u> Γ-<u>module</u>. <u>Pour tout entier</u> q , <u>les groupes</u> $H^q(\Gamma,M)$ <u>et</u> $H_{n(S)-\ell-q}(\Gamma, I_S \otimes M)$ <u>sont isomorphes</u>.

COROLLAIRE 1. <u>On a</u> $cd(\Gamma) = n(S)-\ell$.

COROLLAIRE 2. $H^q(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) = 0$ <u>pour</u> $q \neq n(S)-\ell$ <u>et</u> $H^{n(S)-\ell}(\Gamma , \mathbf{Z}[\Gamma])$ <u>est isomorphe à</u> I .

Enfin, on peut définir sur chaque G_v une mesure d'Euler-Poincaré (cf. [9], n°3.3). En faisant le produit tensoriel de ces mesures, on obtient une mesure d'Euler-Poincaré μ_S sur G_S et l'on a :

THÉORÈME 10. $\chi(\Gamma) = \mu_S(G_S/\Gamma)$.

Cela se déduit sans difficulté du théorème 4.

On peut également généraliser le théorème 5 : notons $\zeta_{k,S}$ la fonction zêta du corps k dont on a retiré les facteurs eulériens relatifs aux places de S . On a :

THÉORÈME 11. $\chi(Sp_{2m}(O_S)) = \zeta_{k,S}(-1)\zeta_{k,S}(-3)\ldots\zeta_{k,S}(1-2m)$.

Par exemple, la caractéristique d'Euler-Poincaré de $SL_2(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ est $\frac{p-1}{12}$ si p est premier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Math. IHES, 16 (1963), p. 5-30.

[2] A. BOREL - Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Paris, 1969.

[3] A. BOREL et J.-P. SERRE - Adjonction de coins aux espaces symétriques ; applications à la cohomologie des groupes arithmétiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 271, série A (1970), p. 1156-1158.

[4] A. BOREL et J.-P. SERRE - Cohomologie à supports compacts des immeubles de Bruhat-Tits ; applications à la cohomologie des groupes S-arithmétiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 272, série A (1971), p. 110-113.

[5] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes algébriques simples sur un corps local, Proc. Conf. Local Fields, Springer-Verlag, 1967. (Voir aussi C.R. Acad. Sci. Paris, 263, série A (1966), p. 598-601, 766-768, 822-825 et 867-869.)

[6] G. HARDER - A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups, Ann. Sci. ENS, 4 (1971), fasc. 3, p. 409-455.

[7] M.S. RAGHUNATHAN - A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups, Invent. Math., 4 (1968), p. 318-335.

[8] J.-P. SERRE - Le problème des groupes de congruence pour SL_2 , Ann. of Math., 92 (1970), p. 489-527.

[9] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1971. (Voir aussi C.R. Acad. Sci. Paris, 268, série A (1969), p. 268-271.)

[10] C.L. SIEGEL - Gesammelte Abhandlungen, 3 vol., Springer-Verlag, 1966.

[11] C.L. SIEGEL - Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper, Göttingen Nach., 1968, n° 2, p. 7-38 ; Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, ibid., 1969, n°10, p.87-102 ; Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, ibid., 1970, n°3, p. 15-56.

[12] L. SOLOMON - The Steinberg character of a finite group with BN-pair, Theory of Finite Groups (éd. par R. Brauer et C-H. Sah), W.A. Benjamin, New York, 1969, p. 213-221.

[13] R. SWAN - Generators and relations for certain special linear groups, Advances in Math., 6 (1971), p. 1-77. (Voir aussi Bull. A.M.S., 74 (1968), p. 576-581.)

[14] J. TITS - Structures et groupes de Weyl, Séminaire Bourbaki, exposé 288 (février 1965), W.A. Benjamin, New York, 1966.