Beziehungen zwischen Transfer und J-Homomorphismus

Diplomarbeit von Stephan Stolz

Bonn 1979

Inhalt

	Einleitung	3
§1	Vorbereitungen	8
§2	Die Spiegelungsabbildung	17
§3	Der J-Homomorphismus	24
§4	Die Thom-Pontrjagin Konstruktion	29
§5	Der Transfer	36
§6	Beweis des Hauptresultates	45
§7	Geometrische Interpretation	51
§8	Ein gerahmter Bordismus	65.
	Literaturverzeichnis	71

Einleitung

Der bekannteste Teil der stabilen Homotopiegruppen π_*^S ist das Bild des J-Homomorphismus. Identifiziert man π_n^S über die Thom - Pontrjagin Konstruktion mit Ω_n^{fr}, der Bordismusgruppe n-dimensionaler gerahmter Mannigfaltigkeiten, läßt sich der J-Homomorphismus folgendermaßen beschreiben: Eine Abbildung g von der Sphäre S^n in die spezielle orthogonale Gruppe SO kann man als Automorphismus eines trivialen Vektorbündels über S^n auffassen. Die Komposition dieses Automorphismus mit der Standardrahmung $\bar{g}$ von S^n ist eine neue Rahmung, die wir mit $g\bar{g}$ bezeichnen. Die Zuordnung $g \longmapsto (S^n, g\bar{g})$ induziert den J-Homomorphismus $J: \pi_n(SO) \to \Omega_n^{fr}$.

Dieses 'Twisten' von Rahmungen kann man für beliebige Mannigfaltigkeiten N mit Rahmung $\bar{g}$ durchführen und einen 'geometrischen J-Homomorphismus' $\tilde{J}: \tilde{\Omega}_n^{fr}(SO) \longrightarrow \Omega_n^{fr}$ definieren durch $[N,g,\bar{g}] \longmapsto [N,g\bar{g}]$.

Dessen Bild ist wesentlich größer als das Bild des J-Homomorphismus und bisher nicht bekannt. Erst vor kurzem wurde gezeigt, daß diese Abbildung nicht surjektiv ist [Kn].

Analog zu diesen reellen J-Homomorphismen definiert man komplexe J-Homomorphismen, indem man die spezielle orthogonale Gruppe SO durch die unitäre Gruppe U ersetzt.

Die Bordismusgruppen freier S^1-Mannigfaltigkeiten mit äquivarianter Rahmung kann man mit den gerahmten Bordismusgruppen des komplex-projektiven Raumes $\mathbb{C}P(\infty)$ identifizieren und erhält eine Vergißabbildung $\bar{t}: \Omega_n^{fr}(\mathbb{C}P(\infty)) \longrightarrow \Omega_{n+1}^{fr}$.

In [Lö] wird die Frage aufgeworfen, ob $\bar{t}$ identisch ist mit der Komposition

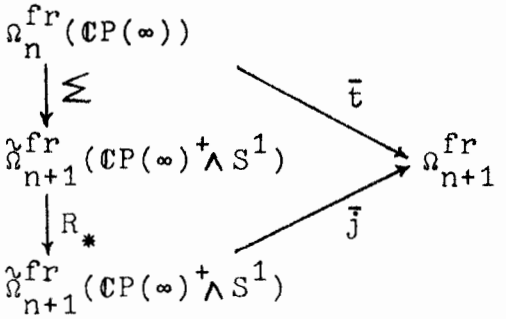
$$\Omega_n^{fr}(\mathbb{C}P(\infty)) \xrightarrow{\Sigma} \tilde{\Omega}_{n+1}^{fr}(\mathbb{C}P(\infty)^+ \wedge S^1) \xrightarrow{R_*} \tilde{\Omega}_{n+1}^{fr}(U) \xrightarrow{\bar{j}} \Omega_{n+1}^{fr} \quad ,$$

wobei Σ den Suspensionsisomorphismus bezeichnet, und $R: \mathbb{C}P(\infty)^+ \wedge S^1 \longrightarrow U$ die komplexe Spiegelungsabbildung, die einem eindimensionalen komplexen Unterraum $l \in \mathbb{C}P(k)$ und einer komplexen Zahl $z \in S^1$ den unitären Automorphismus von $\mathbb{C}^k$ zuordnet, der auf l durch Multiplikation mit z operiert und das orthogonale Komplement festläßt.

Gegeben eine n-Mannigfaltigkeit B' mit Rahmung $\bar{g}$ und eine Abbildung g von B' in $\mathbb{C}P(\infty)$, so wird das Bild der Bordismusklasse $[B',g,\bar{g}] \in \Omega_n^{fr}(\mathbb{C}P(\infty))$ unter der obigen Komposition durch das Produkt $B' \times S^1$ mit einer getwisteten Rahmung repräsentiert, das Bild unter $\bar{t}$ durch das zurückgezogene universelle S^1-Prinzipalbündel mit einer äquivarianten Rahmung. Im ersten Fall ist die Mannigfaltigkeit ein triviales S^1-Bündel, und der 'Twist' steckt in der Rahmung, während im zweiten Fall die Rahmung äquivariant ist und die Mannigfaltigkeit ein 'getwistetes' S^1-Bündel.

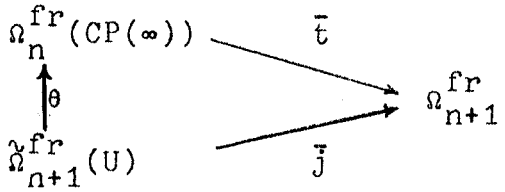
Mit differentialtopologischen Methoden wird in dieser Arbeit der folgende Satz und die weiteren Resultate bewiesen:

<u>Satz A</u> : Das nebenstehende Diagramm kommutiert bis aufs Vorzeichen



Ein direkter Beweis des Satzes durch Angabe eines Bordismus, der auf U.Koschorke zurückgeht, wird in §8 skizziert.

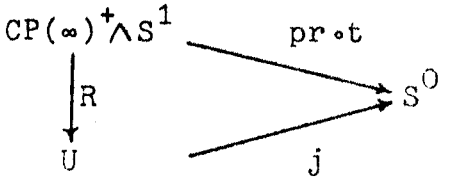
Als Korollar zu Satz A folgt, daß das Bild von $\bar{t}$ im Bild von $\bar{j}$ liegt. Dies gilt auch umgekehrt, denn man kann einen 'Singularitäten-Homomorphismus' θ definieren, wie dies im reellen Fall in [Ko] getan wird, und beweisen, was wir jedoch nicht in dieser Arbeit tun wollen, daß das Diagramm



bis aufs Vorzeichen kommutiert.

Die Abbildungen $\bar{j}$ bzw. $\bar{t}$ werden von stabilen Abbildungen $j:U \longrightarrow S^0$ bzw. $pr \circ t: CP(\infty)^+ \wedge S^1 \longrightarrow S^0$ induziert, sodaß sich Satz A aus dem folgenden Resultat ergibt :

<u>Satz B</u> : Das Diagramm



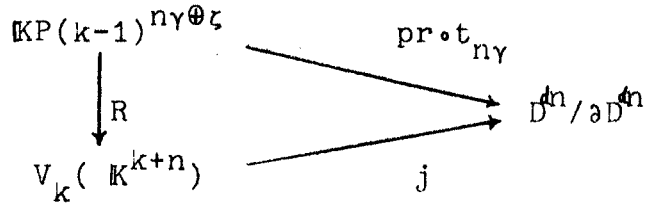
kommutiert bis aufs Vorzeichen, d.h. bis auf eine stabile Abbildung $S^0 \to S^0$ mit Abbildungsgrad ± 1.

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist die folgende: Es gibt einen für punktierte Räume X definierten J-Homomorphismus $J: \tilde{K}^{-1}(X) \longrightarrow \pi_s^0(X)$, der für $X=S^n$ mit dem üblichen J-Homomorphismus $J: \pi_n(U) \longrightarrow \pi_n^s$ übereinstimmt. Aus Satz B

folgt, daß $pr_* t \varepsilon \pi_S^0(CP(\infty)^+ \wedge S^1)$ im Bild des verallgemeinerten J-Homomorphismus liegt. Diese Aussage wurde von E.Ossa benutzt, um zu zeigen, daß die Ordnung eines durch eine Liegruppe mit linksinvarianter Parallelisierung repräsentierten Elementes in Ω_*^{fr} ein Teiler von $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ ist. Weitere Anwendungen von Satz B findet man in [Kn].

Satz B ist ein Spezialfall des allgemeineren Resultats

Satz C : Das folgende Diagramm stabiler Abbildungen kommutiert bis aufs Vorzeichen für große k



Hierbei bezeichnet $\mathbb{K}$ die reellen bzw. komplexen Zahlen bzw. die Quaternionen, d die Dimension von $\mathbb{K}$ über den reellen Zahlen, und $\mathbb{K}P(k-1)$ den $\mathbb{K}$-Projektiven Raum. $\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta}$ ist der Thomraum der Whitneysumme von n Kopien des kanonischen $\mathbb{K}$-Linienbündels γ und des adjungierten Vektorbündels ζ (siehe 1.7 bzw. 1.4), $V_k(\mathbb{K}^{k+n})$ bezeichnet die Stiefelmannigfaltigkeit der $\mathbb{K}$-linearen, orthogonalen Monomorphismen von $\mathbb{K}^k$ in $\mathbb{K}^{k+n}$.
R ist eine 'verallgemeinerte Spiegelungsabbildung', die stabile Abbildung j kann man als 'verallgemeinerten J-Homomorphismus' betrachten, und $pr_* t_{n\gamma}$ ist die Komposition des verallgemeinerten Transfers mit Koeffizienten in einem Vektorbündel (siehe §5) mit einer Projektionsabbildung.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Ulrich Koschorke und Herrn Karlheinz Knapp für das Thema und die Betreuung der Arbeit.

Stephan Stolz

Bonn, April 1979

§1 Vorbereitungen

(1.0) Allgemeine Notationen

Unter 'Abbildungen' zwischen topologischen Räumen verstehen wir in dieser Arbeit stetige Abbildungen.

Es seien X,Y topologische Räume, $A \subset X$, $f: A \longrightarrow B$ eine Abbildung, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Vektorbündel über Y, $\phi: \alpha \longrightarrow \beta$, $\psi: \gamma \longrightarrow \delta$ Vektorbündelmorphismen. Dann bezeichnet

X^+	die disjunkte Vereinigung von X mit dem Einpunktraum,
X/A	den Quotienten von X nach A mit Basispunkt $* = [A]$; $X/\emptyset = X^+$
$*$	den Basispunkt eines punktierten Raumes
$X \wedge Y = X \times Y / (X \times \{*\} \cup \{*\} \times Y)$	das Smashprodukt punktierter Räume $(X,*)$ und $(Y,*)$
$f_{\mid A}$	die Einschränkung von f auf A
$\alpha \oplus \beta$	die Whitneysumme der Vektorbündel α und β
$\phi \oplus \psi: \alpha \oplus \gamma \longrightarrow \beta \oplus \delta$	die Whitneysumme der Morphismen ϕ und ψ
$f^*\alpha$	das induzierte Vektorbündel
$f^*\phi: f^*\alpha \longrightarrow f^*\beta$	den induzierten Morphismus
$\alpha \simeq \beta$	einen Vektorbündelisomorphismus zwischen α und β
$M \hookrightarrow N$	die Einbettung einer Mannigfaltigkeit M in eine Mannigfaltigkeit N
$I = [0,1]$	das Einheitsintervall

(1.1) Die Quaternionen

Es bezeichne $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen. Auf der direkten Summe $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ kann man eine Multiplikation definieren durch $(a,b)\cdot(a',b') = (aa' - bb', ab' + ba')$. Bezüglich dieser Multiplikation ist $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ ein Körper, den man die Quaternionen nennt und mit dem Symbol $\mathbb{H}$ bezeichnet.

Genau wie man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit einem Unterkörper der komplexen Zahlen identifiziert, kann man die komplexen Zahlen mittels der Inklusion $a \longmapsto (a,0)$ als Unterkörper der Quaternionen auffassen.

Die auf $\mathbb{C}$ gegebene Konjugation läßt sich auf $\mathbb{H}$ fortsetzen indem man für $(a,b)\in\mathbb{H}$ definiert : $\overline{(a,b)} := (\bar{a},-b)$.

Weiterhin kann man den Realteil einer Quaternion z definieren durch $\mathrm{Re}\ z := \frac{z+\bar{z}}{2}$. Der Realteil einer Quaternion ist stets eine reelle Zahl und verallgemeinert den Begriff des Realteiles einer komplexen Zahl.

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ und d die Dimension von $\mathbb{K}$ über den reellen Zahlen. Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$ (mit Skalarmultiplikation von rechts) definieren wir ein $\mathbb{K}$- Skalarprodukt durch $\langle v,w\rangle := \bar{v}_1 w_1 + \ldots + \bar{v}_n w_n \in \mathbb{K}$ für $v = (v_1,\ldots,v_n)\in \mathbb{K}^n$ und $w = (w_1,\ldots,w_n)\in \mathbb{K}^n$.

Für $k,k'\in \mathbb{K}$ gilt dann $\langle vk,wk'\rangle = \bar{k}\langle v,w\rangle k'$.

Wenn die $\mathbb{K}$-lineare Struktur keine Rolle spielt, werden wir $\mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{R}^{dk}$ identifizieren. Für zwei Elemente $v,w\in \mathbb{K}^n$ ist das reelle Skalarprodukt, d.h. das übliche Skalarprodukt von v und w, wenn man beide als Elemente von $\mathbb{R}^{dn}$ auffasst, gegeben durch $\mathrm{Re}\langle v,w\rangle \in \mathbb{R}$.

(1.2) Mannigfaltigkeiten, Vektorbündel und Thomräume

Unter 'Mannigfaltigkeiten wollen wir immer C^∞-Mannigfaltigkeiten - evtl. mit Rand - verstehen. Den Rand einer Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir mit ∂M, das Tangentialbündel mit TM.

Gegeben ein Faserbündel $\pi: E \longrightarrow B$ werden wir, sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind, nicht nur für den Totalraum, sondern auch für das Bündel das Symbol E benutzen; insbesondere schreiben wir für das triviale Vektorbündel $pr_1: B \times \mathbb{R}^a \longrightarrow B$ (pr_1 ist die Projektion auf den ersten Faktor) kurz $B \times \mathbb{R}^a$, oder auch (a) , wenn klar ist, um welchen Basisraum es sich handelt.

Für ein Vektorbündel α mit Riemannscher Metrik über dem Basisraum B bezeichnen wir mit $D(\alpha)$ bzw. $S(\alpha)$ das Scheiben- bzw. Sphärenbündel von α, und mit B^α den Thomraum $D(\alpha)/S(\alpha)$. Falls der Basisraum B eine Mannigfaligkeit ist, hat das Scheibenbündel $D(\alpha)$ die Struktur einer Mannigfaltigkeit mit $\partial D(\alpha) = S(\alpha)$.

Da die in dieser Arbeit vorkommenden Räume parakompakt sind, man also mittels einer Partition der Eins immer eine Riemannsche Metrik wählen kann, und der Homeomorphietyp von B^α nicht von dieser Wahl abhängt, können wir auch ohne Bezug auf eine Metrik von d e m Thomraum von α reden.

Elemente aus B^α schreiben wir in der Form $[v]$ mit $v \in D(\alpha)$, wobei wir aber auf doppelte Klammern verzichten, wenn - wie bei assoziierten Vektorbündeln (vgl. 1.3) - die Elemente aus dem Scheibenbündel schon Äquivalenzklassen sind.

(1.3) Assoziierte Vektorbündel

Es sei G eine kompakte Liegruppe, $\pi:E \longrightarrow B$ ein Prinzipal G-Bündel (G operiere von rechts auf E), und V ein Vektorraum mit einer G-Operation von links. Man kann eine Rechts-G-Operation auf E×V definieren durch

$$(E\times V)\times G \longrightarrow E\times V$$
$$((e,v),g) \longmapsto (eg, g^{-1}v)$$

Der Orbitraum $E\times_G V$ ist der Totalraum eines Vektorbündels über B mit der Projektionsabbildung $E\times_G V \longrightarrow B$ definiert durch $[e;v] \longmapsto \pi(e)$. Dieses Bündel bezeichnet man als das zum Prinzipalbündel assoziierte Vektorbündel.

Für ein assoziiertes Vektorbündel μ mit Faser V können wir das induzierte Bündel $\pi^*\mu$ mit dem trivialen Vektorbündel E×V identifizieren, da der kanonische Vektorbündelmorphismus $E\times V \longrightarrow \mu$ einen Isomorphismus $E\times V \longrightarrow \pi^*\mu$ induziert.

Die Whitneysumme von zwei assoziierten Vektorbündeln, sagen wir mit Fasern V und W, kann man mit dem assoziierten Bündel mit Faser V⊕W identifizieren; ein typisches Element aus dem Totalraum ist also [e;v,w] mit $e\in E$, $v\in V$, $w\in W$ (das Semikolon soll deutlich den Basis- von dem Faseranteil trennen). Auch die Elemente der Whitneysumme eines assoziierten Vektorbündels mit Faser V und eines beliebigen Vektorbündels ξ über B werden wir in der Form [e;v,w] schreiben, wobei e ein Element von E ist, v ein Element von V, und w aus $\xi_{\pi(e)}$, der Faser von ξ über dem Punkt $\pi(e)$.

(1.4) Das adjungierte Vektorbündel

Die adjungierte Darstellung einer Liegruppe Liealgebra $\mathfrak{g}$, dem Tangentialraum des neutral von G, wird definiert durch

$$G \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$(g,v) \longmapsto d(L_g \circ R_{g^{-1}})(v) \quad ,$$

wobei L_g bzw. R_g die Links- (bzw. Rechts-) Translation mit g bezeichnet, und $d(L_g \circ R_{g^{-1}})$ die zu $L_g \circ R_{g^{-1}}$ gehörende Tangentialabbildung.

Gegeben ein Prinzipal G-Bündel $\pi: E \longrightarrow B$, nennen wir das zu dieser Darstellung gehörende assoziierte Vektorbündel das adjungierte Vektorbündel und bezeichnen es mit dem Symbol ζ.

(1.5) Die muliplikative Verknüpfung des Körpers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ induziert eine Liegruppenstruktur für die Sphäre S^{d-1} ($d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$). Den Tangentialraum an das neutrale Element identifizieren wir mit dem Untervektorraum U der Vektoren aus $\mathbb{K}$, die senkrecht auf dem Einheitselement stehen, oder anders ausgedrückt : $\mathfrak{g} = \{z \in \mathbb{K} / \mathrm{Re}\, z = 0\}$. Die adjungierte Darstellung von G auf U sieht so aus :

$$G \times U \longrightarrow U$$
$$(g,z) \longmapsto gzg^{-1}$$

(1.6) Das Tangentialbündel eines Faserbündels

Es seien E und B Mannigfaltigkeiten, und $\pi: E \longrightarrow B$ ein Faserbündel. Dann gibt es eine kurze exakte Vektorbündel-

sequenz $0 \longrightarrow T_F E \longrightarrow TE \longrightarrow \pi^* TB \longrightarrow 0$
(vgl. Kap. III §3 in [La]), wobei $T_F E$ das 'Tangentialbündel längs der Faser' bezeichnet und der Morphismus $TE \longrightarrow \pi^* TB$ von der Tangentialabbildung von π induziert wird.

Wenn es sich um ein Prinzipalbündel handelt, ist $T_F E$ isomorph zu $\pi^* \zeta$, wobei ζ das adjungierte Vektorbündel bezeichnet. Die Abbildung $\pi^* \zeta \simeq E \times \mathfrak{g} \longrightarrow TE$ ist die Einschränkung der Tangentialabbildung der G-Operation $E \times G \longrightarrow E$ auf $E \times \mathfrak{g} \subset T(E \times G)$.

Im Fall eines Scheibenbündels $\pi : D(\alpha) \longrightarrow B$ ist $T_F D(\alpha)$ isomorph zu $\pi^* \alpha$, wobei man den Morphismus $\pi^* \alpha \longrightarrow TD(\alpha)$ dadurch konstruieren kann, daß man einem Element $(x;v)$ aus $\pi^* \alpha$ mit Fußpunkt $x \in D(\alpha)$ und v aus der Faser von α über dem Punkt $\pi(x)$ die Ableitung des Weges $t \longmapsto x + tv \in D(\alpha)$ im Nullpunkt zuordnet.

Nach Wahl einer Riemannschen Metrik für TE spalten die exakten Sequenzen, und man erhält die bis auf Homotopie kanonischen Vektorbündelisomorphismen
$TE \simeq \pi^* TB \oplus \pi^* \zeta$ und $TD(\alpha) \simeq \pi^* TB \oplus \pi^* \alpha$.

Für das Sphärenbündel $S(\alpha)$ als Rand von $D(\alpha)$ hat man einen Isomorphismus $TS(\alpha) \oplus (1) \simeq TD(\alpha)_{|S(\alpha)}$, wobei das Bild des kanonischen Schnittes in (1) ein nach innen weisendes Normalenfeld sein soll.

(1.7) Das Prinzipalbündel über dem Projektiven Raum

Die Liegruppe $G = S^{d-1}$ operiert durch Rechtsmultiplikation

frei auf der Sphäre $S^{dk-1} \subset \mathbb{K}^k$:

$$S^{dk-1} \times S^{d-1} \longrightarrow S^{dk-1}$$

$$((x_1,\ldots,x_k),g) \longmapsto (x_1g,\ldots,x_kg)$$

Den Orbitraum nennt man den reellen (bzw. komplexen bzw. quaternionellen) projektiven Raum. Wir werden ihn mit dem Symbol $\mathbb{K}P(k-1)$ bezeichnen.

Die Projektion auf den Orbitraum $\pi: S^{dk-1} \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)$ ist ein Prinzipal G-Bündel. Das assoziierte Vektorbündel mit Faser $\mathbb{K}$, wobei G auf $\mathbb{K}$ durch Rechtsmultiplikation mit dem Inversen operiert, bezeichnen wir mit γ, das adjungierte Vektorbündel mit ζ.

Die Inklusion des Tangentialbündels längs der Fasern von S^{dk-1}, das wir nach (1.6) mit $\pi^*\zeta \cong S^{dk-1}\times U$ (siehe 1.5) identifizieren, in das Tangentialbündel von S^{dk-1} ist explizit gegeben durch

$$S^{dk-1}\times U \longrightarrow TS^{dk-1} = \{(x;v)\in S^{dk-1}\times \mathbb{R}^{dk}/v \text{ senkrecht zu } x\}$$

$$(x,z) \longmapsto (x,xz)$$

(1.8) Bordismusgruppen mit Koeffizienten

Eine ausführliche Darstellung dieser Bordismustheorie findet man in [Sa].

Es sei X ein topologischer Raum, und ξ ein Vektorbündel der Faserdimension s über X. Als ξ-Mannigfaltigkeit über X bezeichnen wir ein Tripel $(M,f,\bar{f})$, wobei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist, f eine Abbildung von M in X, und die 'Rahmung' $\bar{f}$ ein stabiler Vektorbündelisomorphismus

$$(r+s+t) \longrightarrow TM\oplus f^*\xi\oplus(t) \quad ,$$

d.h. eine Äquivalenzklasse von Vektorbündelisomorphismen,

wobei wir zwei Isomorphismen $\phi:(r+s+t) \longrightarrow TM\oplus f^*\xi\oplus(t)$ und $\phi':(r+s+t') \longrightarrow TM\oplus f^*\xi\oplus(t')$ äquivalent nennen, wenn für eine genügend große natürliche Zahl k $\phi\oplus id:(r+s+t)\oplus(t'+k) \longrightarrow TM\oplus f^*\xi\oplus(t)\oplus(t'+k)$ und $\phi'\oplus id:(r+s+t')\oplus(t+k) \longrightarrow TM\oplus f^*\xi\oplus(t')\oplus(t+k)$ als Vektorbündelisomorphismen homotop sind.

Auf die übliche Weise definiert man die Bordismusrelation r-dimensionaler ξ-Mannigfaltigkeiten und macht die Menge der Bordismusklassen, die man mit $\Omega_r(X;\xi)$ bezeichnet, durch die Verknüpfung 'disjunkte Vereinigung' zu einer Gruppe. Für die von der ξ-Mannigfaltigkeit $(M,f,\bar{f})$ repräsentierte Bordismusklasse schreiben wir $[M,f,\bar{f}]$.

Für ein triviales Bündel ξ ist $\Omega_r(X;\xi)$ die Bordismusgruppe von stabil gerahmten Mannigfaltigkeiten $\Omega_r^{fr}(X)$ (vgl. §15 in [Co]). Ω_*^{fr} ist ein verallgemeinerter Homologiefunktor. Für den induzierten Homomorphismus einer Abbildung $f:X \longrightarrow Y$ schreiben wir f_*, mit $\tilde{\Omega}_*^{fr}$ bezeichnen wir die reduzierte Theorie, d.h. $\tilde{\Omega}_r^{fr}(X)$ ist der Kern des Homomorphismus $\Omega_r^{fr}(X) \xrightarrow{p_*} \Omega_r^{fr}(*)$, wobei p die Projektion von X auf den Einpunktraum * bezeichnet. Statt $\Omega_r^{fr}(*)$ schreiben wir auch kurz Ω_r^{fr}.

(1.9) Der Thomisomorphismus

Es sei α ein a-dimensionales Vektorbündel über dem Raum X, und $[M,f,\bar{f}] \in \tilde{\Omega}_{r+a}^{fr}(X^\alpha)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß f transversal zu $X \subset X^\alpha$ ist. Das Urbild $N = f^{-1}(X)$ ist dann eine Untermannigfaltigkeit von M, sagen wir mit Normalenbündel ν, und die Einschränkung

der Tangentialabbildung von f auf N induziert einen Vektorbündelisomorphismus $f_*:\nu \longrightarrow g^*\alpha$ (Satz 5.12 in [Brö]), wobei $g:N \longrightarrow X$ die Einschränkung von f auf N ist.

Bezeichnet man die Komposition

$$(r+a+t) \xrightarrow{\bar{f}|_N} TM|_N \oplus (t) \cong TN \oplus \nu \oplus (t) \xrightarrow{id \oplus f_* \oplus id} TN \oplus g^*\alpha \oplus (t)$$

mit $\bar{g}$, so ist das Tripel $(N,g,\bar{g})$ eine α-Mannigfaltigkeit über X. Deren Bordismusklasse hängt nur von der Klasse $[M,f,\bar{f}]$ ab.

Der durch $[M,f,\bar{f}] \longmapsto [N,g,\bar{g}]$

definierte Homomorphismus $\Omega^{fr}_{r+a}(X^\alpha) \longrightarrow \Omega^{fr}_r(X)$

ist bijektiv, und man bezeichnet ihn als Thomisomorphismus.

(1.10) Stabile Abbildungen

Es seien X und Y punktierte Räume, $f:X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, $D^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / -1 \leq x_i \leq 1\}$ der Einheitswürfel im n-dimensionalen Raum mit Rand ∂D^n.

Dann bezeichnen wir $X \wedge D^1/\partial D^1$ (bzw. $f \wedge id: X \wedge D^1/\partial D^1 \longrightarrow Y \wedge D^1/\partial D^1$) als die Suspension oder Einhängung von X (bzw. f). Durch n-fache Einhängung erhält man den Raum $X \wedge D^n/\partial D^n$ (bzw. die Abbildung $f \wedge id: X \wedge D^n/\partial D^n \longrightarrow Y \wedge D^n/\partial D^n$).

Die n-fache Einhängung eines Thomraumes B^α identifizieren wir mit $B^{\alpha \oplus (n)}$.

Man definiert eine Äquivalenzrelation, indem man zwei Abbildungen $g:X \wedge D^n/\partial D^n \longrightarrow Y \wedge D^n/\partial D^n$ und $g':X \wedge D^m/\partial D^m \longrightarrow Y \wedge D^m/\partial D^m$ äquivalent nennt, wenn sie nach genügend häufigem Einhängen homotop sind. Die Äquivalenzklasse [g] bezeichnet man als die von g repräsentierte stabile Abbildung.

§2 Die Spiegelungsabbildung

Für einen Punkt $x \in S^{k-1}$ sei R_x die Spiegelung an der zu x orthogonalen Hyperebene. Die von der Zuordnung

$$x \longmapsto R_x$$

induzierte Abbildung

$$R: \mathbb{R}P(k-1) \longrightarrow O(k)$$

vom (reellen) projektiven Raum in die Gruppe der orthogonalen Automorphismen von $\mathbb{R}^k$ bezeichnet man als <u>reelle Spiegelungsabbildung</u>.

Eingeschränkt auf den von x aufgespannten Untervektorraum ist R_x Multiplikation mit -1, eingeschränkt auf das orthogonale Komplement die Identität. Das legt folgende Verallgemeinerung nahe:

Es sei $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ und $d=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$. Für $x \in S^{dk-1} \subset \mathbb{K}^K$ und $z \in S^{d-1} \subset \mathbb{K}$ stellen wir uns unter $R_{x,z}$ den Automorphismus von $\mathbb{K}^k$ vor, der auf dem von x erzeugten $\mathbb{K}$-Unterraum durch Multiplikation mit z operiert, und das orthogonale Komplement festläßt.

(2.1) Genauer läßt sich das so formulieren: Für $v \in \mathbb{K}^k$ sei

$$R_{x,z}(v) := v + x(z-1)\langle x,v\rangle \quad ,$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^k$ bezeichnet (siehe 1.1).

(2.2) <u>Lemma</u>

Für alle $x \in S^{dk-1}$ und $z \in S^{d-1}$ ist $R_{x,z}$ ein $\mathbb{K}$-linearer, orthogonaler Automorphismus von $\mathbb{K}^k$, oder anders ausgedrückt: $R_{x,z} \in O_{\mathbb{K}}(k)$, wobei wir mit $O_{\mathbb{K}}(k)$ die orthogonale Gruppe bzw. die unitäre Gruppe bzw. die symplektische Gruppe für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{H}$ bezeichnen.

Beweis: Die $\mathbb{K}$-Linearität von $R_{x,z}$ folgt sofort aus der Definition von $R_{x,z}$, wenn man berücksichtigt, daß für alle $k \in \mathbb{K}$ gilt $\langle x, vk \rangle = \langle x, v \rangle k$ (1.1).

Um die Orthogonalität von $R_{x,z}$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß der von x aufgespannte $\mathbb{K}$-lineare Unterraum und sein orthogonales Komplement invariante Unterräume sind, und daß $R_{x,z}$ eingeschränkt auf diese orthogonal ist, das heißt, daß für v,v' aus dem jeweiligen Unterraum die Skalarprodukte $\langle v, v' \rangle$ und $\langle R_{x,z}(v), R_{x,z}(v') \rangle$ übereinstimmen.

Für $v = xk$ mit $k \in \mathbb{K}$ gilt: $R_{x,z}(xk) = xk + x(z-1)\langle x, xk \rangle$

$= xk + x(z-1)k = xzk$.

Wenn v im orthogonalen Komplement des von x aufgespannten Unterraumes liegt, d. h. wenn gilt $\langle x, v \rangle = 0$, erhält man $R_{x,z}(v) = v$.

Daraus folgt die Invarianzaussage und die Orthogonalität von $R_{x,z}$ eingeschränkt auf das orthogonale Komplement.

Um zu zeigen, daß die Einschränkung von $R_{x,z}$ auf den von x aufgespannten Unterraum orthogonal ist, seien xk und xk' mit $k, k' \in \mathbb{K}$ zwei Elemente aus diesem Unterraum.

Dann gilt: $\langle R_{x,z}(xk), R_{x,z}(xk') \rangle = \langle xzk, xzk' \rangle = \bar{k}k' = \langle xk, xk' \rangle$, was zu beweisen war.

Beispiel: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $x \in S^{k-1}$ ist $R_{x,-1}$ die Spiegelung an der zu x orthogonalen Hyperebene.

Es gilt offensichtlich $R_{-x,-1} = R_{x,-1}$ und $R_{x,1} = \mathrm{id}$.

Dies läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

(2.3) Lemma

Für $x \in S^{dk-1}$ und $z, g \in S^{d-1}$ gilt $R_{xg,g^{-1}zg} = R_{x,z}$ und $R_{x,1} = id$.

Beweis: Es sei $v \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$R_{xg,g^{-1}zg}(v) = v + xg(1-g^{-1}zg)\langle xg, v\rangle$$
$$= v + xgg^{-1}(1-z)gg^{-1}\langle x, v\rangle$$
$$= v + x(1-z)\langle x, v\rangle = R_{x,z}(v)$$

und $R_{x,1} = v + x(1-1)\langle x, v\rangle = v$.

Genau wie wir wegen $R_{-x,-1} = R_{x,-1}$ die reelle Spiegelungsabbildung $R: \mathbb{R}P(k-1) \to O(k)$ definieren konnten, faktorisiert die Abbildung

$$S^{dk-1} \times S^{d-1} \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)$$
$$(x, z) \longmapsto R_{x,z}$$

wegen der Eigenschaften (2.3) über einen Quotienten von $S^{dk-1} \times S^{d-1}$. Dieser Quotient ist homeomorph zu dem Thomraum des adjungierten Vektorbündels ζ über $\mathbb{K}P(k-1)$. Um die Abbildung direkt auf dem Thomraum angeben zu können, beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

(2.4) Lemma

Es sei G die Gruppe S^{d-1} , deren Verknüpfung die Einschränkung der Multiplikation in $\mathbb{K}$ ist. G operiere auf $\mathbb{K}$ durch Konjugation: $G \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(g,k) \longmapsto gkg^{-1}$. Dann sind $U = \{z \in \mathbb{K} / \operatorname{Re} z = 0\}$, $D(U) = \{z \in U / |z| \leq 1\}$, $S(U) = \{z \in U / |z| = 1\}$ und $S^{d-1} \subset \mathbb{K}$ invariante Teilmengen (vgl. 1.5), und die Zuordnung

$$z \in D(U) \longmapsto \tilde{z} := 2|z|^2 - 1 + 2\sqrt{1-|z|^2}\, z \in S^{d-1}$$

induziert einen äquivarianten basispunkterhaltenden Homeomorphismus $D(U)/S(U) \longrightarrow S^{d-1}$,

wobei das Einselement der Basispunkt in S^{d-1} ist.

Bemerkung : Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $S(U) = \emptyset$, $D(U)/S(U) = \{0\} \cup \{*\}$, $S^{d-1} = \{-1,+1\}$, die Null wird auf -1, der Basispunkt auf 1 abgebildet.

Beweis des Lemmas :

Die Invarianz von U folgt aus $\mathrm{Re}(g^{-1}zg) = g^{-1}(\mathrm{Re}\, z)g$, die Invarianz von D(U), S(U) und S^{d-1} ergibt sich aus der Invarinz des Skalarproduktes (1.1).

Zur Wohldefiniertheit der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} D(U)/S(U) & \longrightarrow & S^{d-1} \\ |z| & \longmapsto & \tilde{z} \end{array}$$

rechnet man nach, daß gilt $|\tilde{z}|^2 = 1$, und daß $\tilde{z} = 1$ für $|z|=1$.

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig. Nachrechnen zeigt, daß

$$\begin{array}{ccc} S^{d-1} & \longrightarrow & D(U)/S(U) \\ z' & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{z' - \mathrm{Re}\, z'}{\sqrt{2(1 - \mathrm{Re}\, z')}} & \text{für } z' \neq 1 \\ * & \text{für } z' = 1 \end{cases} \end{array}$$

eine Umkehrabbildung ist (hierbei bezeichnet * den Basispunkt von D(U)/S(U) ,repräsentiert durch irgendein $z \in S^{d-1}$) .Aus der Kompaktheit von D(U)/S(U) und der Hausdorffeigenschaft von S^{d-1} folgt die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Es sei $g \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^{-1}zg &= 2|g^{-1}zg|^2 - 1 + 2\sqrt{1-|g^{-1}zg|^2}\, g^{-1}zg \\ &= g^{-1}(2|z|^2 - 1 + 2\sqrt{1-|z|^2}\, z)g = g^{-1}\tilde{z}g , \end{aligned}$$

womit auch die Äquivarianz der Abbildung gezeigt ist.

Nun können wir definieren :

(2.5) Definition

Die basispunkterhaltende Abbildung

$$R : \mathbb{K}P(k-1)^{\zeta} \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)$$

$$[\, x \,;\, z \,] \longmapsto R_{x,\tilde{z}}$$

bezeichnen wir als Spiegelungsabbildung. Hierbei ist die Identität der Basispunkt in $O_{\mathbb{K}}(k)$.

Erinnerung : Das adjungierte Vektorbündel ζ über $\mathbb{K}P(k-1)$ ist das zum Prinzipalbündel $\pi : S^{dk-1} \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)$ assoziierte Vektorbündel mit Faser U (1.5) , sodaß wir Elemente aus dem Thomraum $\mathbb{K}P(k-1)^{\zeta}$ als Äquivalenzklassen $[x;z]$ mit $x \in S^{dk-1}$ und $z \in D(U)$ schreiben können (1.3) .

Bemerkungen :

(i) Zur Wohldefiniertheit der Abbildung :

Für $g \in G$ gilt nach Lemma 2.3 und 2.4

$$R_{xg,\widetilde{g^{-1}zg}} = R_{xg,g^{-1}\tilde{z}g} = R_{x,\tilde{z}}$$

Falls der Betrag von z eins wird, gilt $\tilde{z} = 1$, und dann folgt aus (2.3) $R_{x,\tilde{z}} = id$. Also ist die Abbildung wohldefiniert und respektiert die Basispunkte.

(ii) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, wo das Bündel ζ die Dimension Null hat, ist $\mathbb{R}P(k-1)^{\zeta} = \mathbb{R}P(k-1)^{+}$ (1.0) , der Basispunkt wird auf die Identität abgebildet, und die Abbildung R, eingeschränkt auf $\mathbb{R}P(k-1)$ ist die eingangs definierte reelle Spiegelungsabbildung.

Im Folgenden wollen wir eine etwas allgemeinere Spiegelungsabbildung als die in (2.3) definierte konstruieren. Dazu identifizieren wir die Elemente der reellen (bzw. komplexen bzw. quaternionellen) Stiefelmannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{K}^{k+n})$ mit den orthogonalen $\mathbb{K}$-linearen Monomorphismen $\mathbb{K}^k \longrightarrow \mathbb{K}^{k+n}$. Weiterhin wollen wir die Vektorräume $\mathbb{K}^k$ und $\mathbb{K}^n$ gemäß dem kanonischen Isomorphismus $\mathbb{K}^k \oplus \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{k+n}$ mit den entsprechenden Unterräumen von $\mathbb{K}^{k+n}$ identifizieren. Als Basispunkt in $V_k(\mathbb{K}^{k+n})$ wählen wir die kanonische Inklusion $\mathbb{K}^k \longrightarrow \mathbb{K}^{k+n}$. Mit diesen Konventionen können wir definieren :

(2.6) Definition : Die basispunkterhaltende Abbildung

$$R : \mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta} \longrightarrow V_k(\mathbb{K}^{k+n})$$

gegeben durch

$$[x_1;x_2,z] \longmapsto R_{x,\tilde{z}} \mid \mathbb{K}^k$$

mit $x = \sqrt{1-|x_2|^2}\, x_1 + x_2 \in \mathbb{K}^{k+n}$ bezeichnen wir als (verallgemeinerte) Spiegelungsabbildung.

Erinnerung : Das Bündel $n\gamma$ ist das zum Prinzipalbündel $\pi : S^{dk-1} \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)$ assoziierte Vektorbündel mit Faser $\mathbb{K}^n$, wobei $G = S^{d-1}$ auf $\mathbb{K}^n$ durch Rechtsmultiplikation mit dem Inversen operiert. Deshalb können wir Elemente aus dem Thomraum $\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta}$ als Äquivalenzklassen $[x_1;x_2,z]$ schreiben mit $x_1 \in S^{dk-1}$ und $(x_2,z) \in D(\mathbb{K}^n \oplus U)$ (vgl. 1.3). Hierbei wählen wir auf $\mathbb{K}^n \oplus U$ die Maximumsnorm.

Zur Wohldefiniertheit : Für $x_1 \in S^{dk-1}$, $x_2 \in \mathbb{K}^n$, $|x_2| \leq 1$ und $z \in D(U)$ hat $x = \sqrt{1-|x_2|^2}\, x_1 + x_2 \in \mathbb{K}^{k+n}$ Norm eins, deshalb ist $R_{x,\tilde{z}}$ ein orthogonaler Automorphismus von $\mathbb{K}^{k+n}$, und

folglich die Einschränkung von $R_{x,\tilde{z}}$ auf $\mathbb{K}^k$ ein $\mathbb{K}$-linearer orthogonaler Monomorphismus.

Es bleibt zu zeigen, daß $R_{x,\tilde{z}|\mathbb{K}^k}$ nur von der Äquivalenzklasse von (x_1,x_2,z) abhängt: Ersetzt man (x_1,x_2,z) durch $(x_1g,x_2g,g^{-1}zg)$ für ein $g\in G = S^{d-1}$, wird x zu xg. Nach Lemma 2.3 und 2.4 gilt aber

$$R_{xg,\widetilde{g^{-1}zg}} = R_{xg,g^{-1}\tilde{z}g} = R_{x,\tilde{z}} \quad .$$

Weiterhin : Für $|x_2| = 1$ ist $x = x_2 \in \mathbb{K}$, deshalb verschwindet für $v\in \mathbb{K}^k$ das Skalarprodukt $\langle x,v\rangle$ und folglich (2.1) gilt $R_{x,\tilde{z}}(v) = v$. Dasselbe ergibt sich für $|z| = 1$. Das bedeutet, daß für $|(x_2,z)| = 1$ $R_{x,\tilde{z}|\mathbb{K}^k}$ der Basispunkt in $V_k(\mathbb{K}^{k+n})$ ist.

§3 Der J-Homomorphismus

Notation : Der (unreduzierte) Join $X*Y$ zweier Räume X und Y ist der Quotientenraum von $X\times[0,1]\times Y$, für dessen Elemente $[x,s,y]$ mit $x\in X$, $s\in[0,1]$, $y\in Y$ die folgenden Relationen gelten:

$[x,0,y] = [x',0,y]$ und $[x,1,y] = [x,1,y']$ für $x,x'\in X; y,y'\in Y$.

Die (unreduzierte) Suspension SX eines Raumes X ist der Quotient von $[0,1]\times X$ mit den Relationen

$[0,x] = [0,x']$ und $[1,x] = [1,x']$ für $x,x'\in X$.

Für Räume X und Y mit Basispunkten x_o bzw. y_o ist das Smash-produkt $X\wedge Y$ durch $X\wedge Y := X\times Y/\{(x,y)\in X\times Y / x=x_o \vee y=y_o\}$ definiert.

Sofern keine Verwechselungen möglich sind, werden wir den Basispunkt eines punktierten Raumes immer mit $*$ bezeichnen.

Erinnerung :

Wie im letzten Abschnitt sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, und $d=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$.

Die Elemente der Stiefelmannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{K}^{k+n})$ betrachten wir als orthogonale $\mathbb{K}$-lineare Monomorphismen $\mathbb{K}^k \longrightarrow \mathbb{K}^{k+n}$. Wir identifizieren die Vektorräume $\mathbb{K}^k$ und $\mathbb{K}^n$ gemäß der Aufspaltung $\mathbb{K}^{k+n} \cong \mathbb{K}^k \oplus \mathbb{K}^n$ mit den entsprechenden Untervektorräumen von $\mathbb{K}^{k+n}$. Als Basispunkt $\alpha_o \in V_k(\mathbb{K}^{k+n})$ wählen wir die Inklusion $\mathbb{K}^k \longrightarrow \mathbb{K}^{k+n}$.

Man kann auf die 'Auswertungsabbildung'

$$f : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \times S^{dk-1} \longrightarrow S^{dk-1}$$
$$(\alpha, v) \longmapsto \alpha(v)$$

die Hopfkonstruktion (vgl. S.199 in [Hu]) anwenden und

erhält die Abbildung $H(f) : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1} \longrightarrow SS^{d(k+n)-1}$

$$[\alpha , s , v] \longmapsto [s, \alpha(v)],$$

die man als J-Homomomorphismus bezeichnet.

Bemerkung :

$V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}$ und $SS^{dk(k+n)-1}$ sind Räume ohne kanonischen Basispunkt, aber $V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}$ ist homotopieäquivalent zu dem punktierten Raum $V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$, und $SS^{d(k+n)-1}$ ist homeomorph zu $D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$. Unter Verwendung dieser punktierten Räume kann man eine stabile Version des J-Homomorphismus definieren :

(3.1) Definition

Die durch die Abbildung

$$J : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$$

$$[\alpha , v] \longmapsto \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{|v|} - 1\right)\alpha(v)+v\right] & \text{für } v \neq 0 \\ * & \text{für } v = 0 \end{cases}$$

repräsentierte stabile Abbildung

$$j : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \longrightarrow D^{dn}/\partial D^{dn}$$

bezeichnen wir als stabilen J-Homomorphismus.

Das folgende Lemma zeigt, daß diese Definition mit den üblichen Definitionen des J-Homomorphismus in Einklang ist.

(3.2) Lemma

(i) Die Abbildung J ist wohldefiniert und stetig.

(ii) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk} & \xrightarrow{J} & D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)} \\ \downarrow G & & \downarrow F \\ V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1} & \xrightarrow{H(f)} & SS^{d(k+n)-1} \end{array}$$

kommutiert bis auf Homotopie, wobei G eine Homotopieäquivalenz, und F ein Homeomorphismus ist.

Beweis : Die Abbildung $F : SS^{d(k+n)-1} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$ wird definiert durch $[s , v] \longmapsto [(1-s)v]$

Man prüft nach, daß F wohldefiniert und stetig ist, und daß

$$D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)} \longrightarrow SS^{d(k+n)-1}$$
$$[v] \longmapsto [1-|v|, \frac{v}{|v|}]$$

die Umkehrabbildung zu F ist (für $|v| = 0$ steht $\frac{v}{|v|}$ für irgendeinen Vektor aus $\partial D^{d(k+n)}$). Weil die beteiligten Räume kompakt und hausdorff sind, ist F ein Homeomorphismus.

Die Abbildung $G : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1} \longrightarrow V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$ wird definiert durch $[\alpha , s , v] \longmapsto [\alpha , sv]$

Man sieht leicht, daß G wohldefiniert und stetig ist und eine Abbildung $G' : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}/K \longrightarrow V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$ induziert, wobei $K = \{[\alpha_o, s, v] \in V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}\}$ (α_o : Basispunkt in $V_k(\mathbb{K}^{k+n})$).

Ebenso überzeugt man sich davon, daß die Abbildung

$$V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk} \longrightarrow V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}/K$$
$$[\alpha , v] \longmapsto [\alpha , v , \frac{v}{|v|}]$$

wohldefiniert und invers zu G' ist (für $|v| = 0$ steht $\frac{v}{|v|}$ für irgendeinen Vektor aus S^{dk-1}). Also ist G' ein Homeomorphismus, da wir es mit kompakten Hausdorffräumen zu tun haben.

Nun ist K ein Kegel in $V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}$, die Projektion $p : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1} \longrightarrow V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}/K$ auf den

Quotientenraum deshalb eine Homotopieäquivalenz und folglich ist G als Komposition dieser Projektion und des Homeomorhpismus G' ebenfalls eine Homotopieäquivalenz.

Um das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk} & \xrightarrow{J} & D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)} \\ & \overset{G'}{\nearrow} & & & \\ V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}/K & & \uparrow G & & \uparrow F \\ & \underset{p}{\nwarrow} & & & \\ & & V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1} & \xrightarrow{H(f)} & SS^{d(k+n)-1} \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ zu ergänzen, genügt es, die Abbildung $F \circ H(f)$ homotop so abzuändern, daß sie über $V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}/K$ faktorisiert. Genau das leistet die folgende Homotopie :

$$H : I \times (V_k(\mathbb{K}) * S^{dk-1}) \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$$

$$(t, [\alpha, s, v]) \longmapsto H_t([\alpha, s, v]) := [(1-s)\alpha(v) + tsv]$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $s = 0$ liegt $(1-s)\alpha(v) + tsv = \alpha(v)$ in $\partial D^{d(k+n)}$, und für $s = 1$ ist $(1-s)\alpha(v) + tsv = tv$ unabhängig von α .

Für $t = 0$ gilt $H_0([\alpha, s, v]) = [(1-s)\,\alpha(v)] = F \circ H(f)([\alpha, s, v])$, also ist H_0 die Komposition $F\,H(f)$.

H_1 faktorisiert über $V_k(\mathbb{K}^{k+n}) * S^{dk-1}/K$, denn für $[\alpha_0, s, v] \in K$ gilt $H_1([\alpha_0, s, v]) = [(1-s)\alpha_0(v) + sv] = [v] = * \in D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$.

Damit haben wir gezeigt, daß man das Diagramm durch $H_1 \circ G'^{-1}$ bis auf Homotopie kommutativ ergänzen kann, und es bleibt nur noch übrig nachzuweisen, daß $H_1 \circ G'^{-1}$

mit der in (3.1) definierten Abbildung J übereinstimmt.

Dazu sei $[\alpha,v]\in V_k(\mathbb{K}^{k+n})* D^{dk}/\partial D^{dk}$. Dann ist

$$H_1\circ G'^{-1}([\alpha,v]) = H_1([\alpha,|v|,\tfrac{v}{|v|}])\ [(1-|v|)\alpha(\tfrac{v}{|v|}) + |v|\tfrac{v}{|v|}]$$

$$=[(\tfrac{1}{|v|}-1)\alpha(v) + v] = J([\alpha,v]) \text{ für } v \neq 0 \text{ und}$$

$$H_1\circ G'^{-1}([\alpha,0]) = * = J([\alpha,0]) .$$

§4 Die Thom - Pontrjagin Konstruktion

In diesem Paragraphen wollen wir - ohne Beweis - zwei Versionen des Satzes von Thom-Pontrjagin formulieren. Die erste Version findet man in [Mi], Bemerkung S.50; die zweite ist eine leichte Verallgemeinerung des Satzes 31 in Kapitel III von [Di], und enthält die erste Version als Spezialfall.

Notation : Alle Abbildungen in diesem Abschnitt seien basispunkterhaltend. Sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind, werden wir den Basispunkt eines Raumes X mit * bezeichnen. Wie üblich ist X/A für $A = \emptyset$ die Vereinigung von X mit einem extra Basispunkt.

Der Satz von Hopf besagt, daß die Homotopieklassen von Abbildungen

$$X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p \quad ,$$

wobei X eine kompakte p-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, durch ihren Abbildungsgrad klassifiziert werden (dieser Grad ist ganzzahlig für orientierte und Element von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für nichtorientierbare X).

Gegeben eine eine Abbildung $f : X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p$, deren Einschränkung auf $X-\partial X$ differenzierbar ist, kann man ihren Grad durch Abzählen der Urbildpunkte eines regulären Wertes bestimmen (wobei, wenn X orientiert ist, je nach Orientierungsverhalten der Tangentialabbildung in einem Urbildpunkt dieser positiv oder negativ zu zählen ist, während für nicht orientierbare X die Anzahl der Urbildpunkte modulo zwei den Grad angibt) .

Nun wollen wir den Fall betrachten, daß die Dimension von X größer als p ist. Dann ist das Urbild $f^{-1}(0)$ - sofern f eingeschränkt auf eine Umgebung von $f^{-1}(0)$ differenzierbar und die Null ein regulärer Wert dieser Abbildung ist - eine Untermannigfaltigkeit von $X-\partial X$ der Kodimension p . Die Tangentialabbildung von f, eingeschränkt auf das Normalenbündel ν von $f^{-1}(0)$, induziert einen Vektorbündelisomorphismus

$$f_* : \nu \longrightarrow (p)$$ ([Brö], Satz 5.12)

(4.1) Definition

Es sei M eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von $X-\partial X$. Eine Trivialisierung des Normalenbündels ν von M in X, das heißt einen Bündelisomorphismus

$$\phi : \nu \longrightarrow (p)$$

bezeichnet man als Rahmung von M in X. Das Paar (M,ϕ) nennt man eine gerahmte Untermannigfaltigkeit von X.

(4.2) Definition

Es sei $f : X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p$ eine Abbildung, deren Einschränkung auf eine Umgebung von $f^{-1}(0)$ differenzierbar ist mit der Null als regulärem Wert. Dann bezeichnen wir die gerahmte Untermannigfaltigkeit $(f^{-1}(0),f_*)$ als die zu f gehörende Pontrjagin - Mannigfaltigkeit.

Die Pontrjagin - Mannigfaltigkeiten zwei homotoper Abbildungen sind natürlich im Allgemeinen verschieden. Aber man kann zeigen, daß sie zur gleichen Klasse gehören bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation :

(4.3) Definition

Zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten (M,ϕ) und (M',ϕ') von X heißen bordant, wenn es eine kompakte Untermannigfaltigkeit N von $X\times I$ gibt und einen Vektorbündelisomorphismus $\psi : \nu(N,X\times I) \longrightarrow (p)$

($\nu(N,X\times I)$ bezeichnet das Normalenbündel von N in $X\times I$), sodaß für eine geeignete positive Zahl δ Folgendes gilt :

(i) $N\cap X\times[0,\delta) = M\times[0,\delta)$

$N\cap X\times(1-\delta,1] = M'\times(1-\delta,1]$

$N\cap \partial X\times I = \emptyset$

(ii) $\psi_{|M\times\{t\}} = \phi$ für $t\in[0,\delta)$ und

$\psi_{|M'\times\{t\}} = \phi'$ für $t\in(1-\delta,1]$

Hierbei identifizieren wir für $t\in[0,\delta)$ die Bündel $\nu(N,X\times I)_{|M\times\{t\}}$ und $\nu(M,X)$ unter dem Vektorbündelisomorphismus, der von der Inklusion $i_t : X \longrightarrow X\times\{t\}$ induziert wird, und ebenso für $t\in(1-\delta,1]$ die Bündel $\nu(N,X\times I)_{|M'\times\{t\}}$ und $\nu(M',X)$.

(4.4) Beispiel

Es sei M eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von $X=\partial X$ und ϕ,ϕ' zwei Trivialisierungen des Normalenbündels ν von M in X, die als Bündelisomorphismen homotop sind, das heißt, es gibt über $M\times I$ einen Vektorbündelisomorphismus

$$\psi : pr_1^*\nu \longrightarrow (p) \quad ,$$

dessen Einschränkung auf $M\times\{0\}$ gleich ϕ ist, und dessen Einschränkung auf $M\times\{1\}$ mit ϕ' übereinstimmt ($pr_1 : M\times I \longrightarrow M$ ist die Projektion auf den ersten Faktor) .

Dann sind die gerahmten Untermannigfaltigkeiten (M,ϕ) und (M,ϕ') bordant, denn man kann den Bündelisomorphismus ψ so wählen, daß er nicht nur für $t = 0$, sondern auch für $t\in[0,\delta)$ mit ψ übereinstimmt und für $t\in(1-\delta,1]$ mit ϕ'. $N = M\times I$ und ψ erfüllen dann die Bedingungen (i) und (ii).

(4.5) Satz (Pontrjagin-Thom)

Man erhält eine Bijektion zwischen Homotopieklassen von Abbildungen

$$X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p$$

und Bordismusklassen von gerahmten Untermannigfaltigkeiten von X, indem man einer Homotopieklasse α die Bordismusklasse der Pontrjagin - Mannigfaltigkeit eines geeigneten Repräsentanten $f\in\alpha$ zuordnet.

'geeignet' heißt hier, daß die Einschränkung von f auf eine Umgebung von $f^{-1}(0)$ differenzierbar und die Null ein regulärer Wert ist, sodaß man von der Pontrjagin - Mannigfaltigkeit dieser Abbildung sprechen kann.

Bemerkung : Ein solcher Repräsentant existiert immer, denn man kann eine stetige Abbildung durch eine differenzierbare approximieren und eine differenzierbare durch eine Abbildung, die transversal zu einer Untermannigfaltigkeit ist (Satz 14.7 bzw. 14.8 in [Brö]) . Diese Approximation führt nicht aus der ursprünglichen Homotopieklasse heraus (Satz 12.9 in [Brö]) .

(4.6) Lemma

Es sei M eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von $X - \partial X$ und ϕ, ϕ' zwei Trivialisierungen des Normalenbündels ν, sodaß die zugehörigen stabilen Vektorbündelisomorphismen übereinstimmen (vgl. 1.8) . Dann repräsentieren (M,ϕ) und (M,ϕ') die gleiche stabile Abbildung $X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p$.

Beweis : Es sei $f : X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p$ eine Abbildung mit Pontrjaginmannigfaltigkeit (M,ϕ) . Die Pontrjagin - Mannigfaltigkeit der s-fachen Suspension von f

$f \wedge id : X \times D^s/\partial(X\times D^s) = X/\partial X \wedge D^s/\partial D^s \longrightarrow D^p/\partial D^p \wedge D^s/\partial D^s = D^p \times D^s/\partial(D^p \times D^s)$

hat die Mannigfaltigkeit M, mittels der Einbettung $M \hookrightarrow X \hookrightarrow X\times D^s$ aufgefasst als Untermannigfaltigkeit von $X\times D^s$ mit Normalenbündel $\nu \oplus (s)$, zusammen mit der Rahmung

$$\nu \oplus (s) \xrightarrow{\phi \oplus id} (p) \oplus (s) \quad .$$

Wenn $f' : X/\partial X \longrightarrow D^p/\partial D^p$ eine Abbildung mit Pontrjagin - Mannigfaltigkeit (M,ϕ') ist, sind nach 4.4 für genügend große s die Pontrjagin - Mannigfaltigkeiten der s-fachen Suspension von f und f' bordant, also repräsentieren f und f' die gleiche stabile Abbildung.

Es seien X,Y kompakte Mannigfaltigkeiten mit $\partial Y = \emptyset$, ξ ein Vektorbündel über Y, und $f : X/\partial X \longrightarrow Y^\beta$ eine basispunkterhaltende Abbildung, die in einer Umgebung von $f^{-1}(Y)$ differenzierbar und transversal zu Y ist, wobei wir Y mit dem Nullschnitt von β identifizieren. Das Urbild $M = f^{-1}(Y)$ ist dann eine Untermannigfaltigkeit von X, deren Normalenbündel wir mit ν bezeichnen

wollen, und die Tangentialabbildung von f , eingeschränkt auf M, induziert einen Vektorbündelisomorphismus

$$f_* : \nu \longrightarrow g^*\beta \qquad \text{(Satz 5.12 in [Brö])},$$

wobei $g: M \longrightarrow Y$ die Einschränkung von f auf M ist.

(4.7) Definition

Das Tripel (M,g,f_*) nennt man die zu f gehörende Pontrjagin - Mannigfaltigkeit.

Genau wie in 4.3 kann man nun Bordismusklassen von Tripeln (M,g,ϕ) definieren, wobei M eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von X ist, g eine Abbildung von M in Y, und $\phi: \nu \longrightarrow g^*\beta$ ein Vektorbündelisomorphismus, (ν bezeichnet das Normalenbündel von M in X) .

Zwei solche Tripel (M,g,ϕ) und (M',g',ϕ') heißen bordant genau dann, wenn die Paare (M,g) und (M',g') im Sinne von 4.3 bordant sind, und wenn es auf diesem Bordismus N eine Abbildung $G: N \longrightarrow Y$ gibt mit

$G_{|M\times\{0\}} = g$ und $G_{|M'\times\{1\}} = g'$.

(4.8) Satz (Pontrjagin - Thom)

Man erhält eine Bijektion zwischen Homotopieklassen von Abbildungen $X/\partial X \longrightarrow Y$ und Bordismusklassen von Tripeln (M,g,ϕ), indem man einer Homotopieklasse die Pontrjagin - Mannigfaltigkeit eines Repräsentanten zuordnet, der differenzierbar in einer Umgebung von $f^{-1}(Y)$ und transversal zu Y ist.

Bemerkung

Wenn Y aus einem Punkt besteht, ist $D^p/\partial D^p$ der Thomraum des Bündels β , falls β die Faserdimension p hat. Der Satz 4.8 liefert in diesem Spezialfall die Aussage des Satzes 4.5 .

§5. Der Transfer

Notation : In diesem Paragraphen sei B eine geschlossene Mannigfaltigkeit, $\pi: E \longrightarrow B$ ein Prinzipalbündel, ζ das adjungierte Bündel und α ein Vektorbündel über B .

Ziel dieses Abschnittes ist die Konstruktion einer stabilen Abbildung

$$t_\alpha : B^{\alpha \oplus \zeta} \longrightarrow E^{\pi^* \alpha} \quad ,$$

die man als Transfer oder Umkehrabbildung bezeichnet.

Die Methode ist wie folgt :

Man konstuiert eine Einbettung $E \hookrightarrow D(\alpha \oplus \zeta\ \oplus(s))$ von E in das Scheibenbündel $D(\alpha \oplus \zeta\ \oplus(s))$ über B und gibt einen Vektorbündelisomorphismus ϕ an zwischen dem Normalenbündel ν von E und $\pi^*\alpha \oplus (s)$. Nach Satz 4.8 repäsentiert dann die Untermannigfaltigkeit E von $D(\alpha \oplus \zeta \oplus(s))$ zusammen mit der Abbildung $id: E \longrightarrow E$ und dem Isomorphismus ϕ eine Homotopieklasse von Abbildungen

$$D(\alpha \oplus \zeta \oplus(S))/\partial D(\alpha \oplus \zeta \oplus(s)) = B^{\alpha \oplus \zeta \oplus(s)} \longrightarrow E^{\pi^* \alpha \oplus(s)}$$

Die zugehörige stabile Abbildung ist der Transfer. Man findet eine Beschreibung des Transfers in [Be] oder in [Bo], wo eine Transferabbildung nicht nur für die Projektionsabbildung eines Prinzipalbündels, sondern für alle möglichen Abbildungen mit gewissen Eigenschaften definiert wird.

Nun zur Konstruktion der Einbettung und des Vektorbündelisomorphismus ϕ.

Wir wählen für ein hinreichend großes s eine Einbettung $E \subset D^s$ in die s-dimensionale Scheibe, sodaß das Bild von E ganz im Inneren von D^s liegt. Die Tangentialabbildung dieser Einbettung induziert einen Vektorbündelmonomorphismus

$$i_* : TE \longrightarrow E \times \mathbb{R}^s \quad .$$

Wir schränken diesen Monomorphismus ein auf das Tangentialbündel längs der Fasern von E, das isomorph ist zu $\pi^*\zeta$ (8.6), bezeichnen mit ω das orthogonale Komplement, und erhalten so einen Vektorbündelisomorphismus

$$\psi : \pi^*\zeta \oplus \omega \longrightarrow E \times \mathbb{R}^s$$

(8.8) **Beispiel**

Wir betrachten das Prinzipal G-Bündel $\pi : S^{dk-1} \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)$. Hierbei ist, wie in 1.7, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, $G = S^{d-1}$ operiert durch Rechtsmultiplikation auf S^{dk-1}. Die von der Einbettung

$$i : S^{dk-1} \longrightarrow D^{dk}$$
$$x \longmapsto \tfrac{1}{2}x$$

induzierte Abbildung $i : TS^{dk-1} \longrightarrow S^{dk-1} \times \mathbb{R}^{dk}$ ist Multiplikation der Vektoren in der Faser mit $\frac{1}{2}$, sodaß der Vektorbündelmonomorphismus $\pi^*\zeta = S^{dk-1} \times U \longrightarrow S^{dk-1} \times \mathbb{R}^{dk}$ gegeben ist durch $(x,z) \longmapsto (x, \frac{1}{2}xz)$ (vgl. 1.7). Hierbei ist $U = \{z \in \mathbb{K} / \operatorname{Re} z = 0\}$ die Liealgebra von $G = S^{d-1}$ (vgl. 1.5). Das orthogonale Komplement des Bildbündels ist das Vektorbündel $\{(x;w) \in S^{dk-1} \times \mathbb{R}^{dk} / \langle x,w\rangle = \operatorname{Re}\langle x,w\rangle\}$, denn das (reelle)

Skalarprodukt $\mathrm{Re}\langle w, \frac{1}{2}xz\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\langle w,x\rangle z)$ verschwindet genau dann für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $\mathrm{Re}\, z = 0$, wenn $\langle x,w\rangle$ reell ist, d.h. wenn gilt $\langle x,w\rangle = \mathrm{Re}\langle x,w\rangle$.

Der Vektorbündelisomorphismus $\psi : \pi^*\zeta \oplus \omega \longrightarrow S^{dk-1} \times \mathbb{R}^{dk}$ ist demnach gegeben durch $(x;z,w) \longmapsto (x; w+\frac{1}{2}xz)$.

Das Vektorbündel ω ist von Interesse für uns wegen der folgenden Eigenschaft :

(3,3) **Lemma**

Das Normalenbündel der Einbettung $E \xrightarrow{\pi \times i} B \times D^s$ ist kanonisch isomorph zu ω .

Beweis : Wir konstruieren diesen Isomorphismus auf eine Weise, die auf spätere Anwendung zugeschnitten ist und hier etwas schwerfällig erscheinen mag :

Sei $(x;w) \in \omega \subset E \times \mathbb{R}^s$. Dann ist $c(t) = (\pi(x); i(x)+tw) \in B \times D^s$ eine für hinreichend kleine t definierte Kurve in $B \times D^s$ mit $c(0) = (\pi \times i)(x)$. Die Ableitung $\dot{c}(0)$ dieser Kurve im Nullpunkt ist ein Tangentialvektor im Punkt $(\pi \times i)(x)$.

Wir zeigen, daß die Zuordnung $(x;w) \longmapsto \dot{c}(0)$ einen Isomorphismus von ω in das Normalenbündel von E induziert.

Zur Injektivität :

Angenommen $\dot{c}(0)$ liegt im Tangentialbündel von E (aufgefasst als Untervektorbündel von $T(B \times D^s)_{|(\pi \times i)(E)}$). Da die Projektion von $\dot{c}(0)$ auf den Tangentialraum des Faktors B verschwindet, muß $\dot{c}(0)$ ein Vektor aus dem Tangentialbündel längs der Fasern, d. h. aus $\pi^*\zeta$ sein. Wie man sofort

nachrechnet, ist die Projektion von $\dot{c}(0)$ auf den Tangentialraum von D^S gerade $(x;w)\varepsilon\omega$ und dieser Vektor steht nach Konstruktion von ω senkrecht auf allen Tangentialvektoren längs der Faser, also gilt $w = 0$.

Die Surjektivität folgt aus Dimensionsgründen.

Man kann dieses Lemma folgendermaßen etwas verallgemeinern:

(5.4) Lemma

Es sei η ein Vektorbündel über B. Dann ist das Normalenbündel der Einbettung $E \subset\longrightarrow D(\eta\oplus(s))$, definiert durch $x \longmapsto [x;0,i(x)]$, kanonisch isomorph zu $\pi^*\eta\oplus\omega$.

Beweis : Es sei $(x;v,w)\varepsilon\pi^*\eta\oplus\omega$ (d.h. $x\varepsilon E$, $v\varepsilon\eta_{\pi(x)}$, der Faser von η über $\pi(x)$ und $(x,w)\varepsilon\omega_x$). Die Ableitung der Kurve $c(t) = [x;tv,i(x)+tw]\varepsilon D(\eta\oplus(s))$ im Nullpunkt ist ein Tangentialvektor an den Bildpunkt von x .

Genau wie in Lemma 5.3 kann man zeigen, daß die Zuordnung $(x;v,w)\longmapsto \dot{c}(0)$ einen Vektorbündelisomorphismus von $\pi^*\eta\oplus\omega$ in das Normalenbündel von E induziert :

Zum Beweis der Injektivität benutzt man die beiden Projektionen $D(\eta\oplus(s)) \longrightarrow B$ und $D(\eta\oplus(s)) \longrightarrow D^S$, die Surjektivität folgt aus Dimensionsüberlegungen.

Nun sei $\eta = \alpha\oplus\zeta$. Das Lemma 5.4 zeigt, daß das Normalenbündel der Einbettung $E \subset\longrightarrow D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))$, gegeben durch $x \longmapsto [x;0,0,i(x)]$, kanonisch isomorph ist zu $\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$.

Es sei ϕ der Vektorbündelisomorphismus

$$\phi : \pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{id\oplus\psi'} \pi^*\alpha\oplus(s) \quad ,$$

wobei ψ' die Komposition $\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{-id\oplus id} \pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{\psi} (s)$ mit dem Isomorphismus ψ (5.1) bezeichnet.

Faßt man E als Untermannigfaltigkeit von $D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))$ mit Trivialisierung ϕ auf, entspricht dem Tripel (E,id_E,ϕ) unter der Thom - Pontrjagin Konstruktion (4.8) eine (bis auf Homotopie definierte) Abbildung

$$T_\alpha(i) : D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))/\partial D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s)) = B^{\alpha\oplus\zeta\oplus(s)} \longrightarrow E^{\pi^*\alpha\oplus(s)} .$$

(5.5) Definition

Die von $T_\alpha(i)$ repräsentierte stabile Abbildung

$$t_\alpha : B^{\alpha\oplus\zeta} \longrightarrow E^{\pi^*\alpha}$$

bezeichnet man als Transfer oder Umkehrabbildung.

(5.6) Bemerkungen :

(i) Zur Wohldefiniertheit : Die zur Einbettung $E \subset \xrightarrow{i} D^s \subset \xrightarrow{i_s} D^{s+1}$ gehörende (bis auf Homotopie definierte) Abbildung $T_\alpha(i_s\circ i): B^{\alpha\oplus\zeta\oplus(s+1)} \longrightarrow E^{\pi^*\alpha\oplus(s+1)}$ ist die Suspension der Abbildung $T_\alpha(i)$.

Für genügend große s sind je zwei Einbettungen von E in D^s isotop. Die zugehörigen Tripel (E,id_E,ϕ) sind dann bordant und repräsentieren über die Thom -Pontrjagin Konstruktion die gleiche Homotopieklasse, sodaß die stabile Abbildung $t_\alpha : B^{\alpha\oplus\zeta} \longrightarrow E^{\pi^*\alpha}$ wohldefiniert ist.

(ii) Der Übergang vom Vektorbündelisomorphismus ψ zu ψ' ist notwendig, damit unsere Definition des Transfers mit der in der Literatur üblichen Definition übereinstimmt, was in Lemma 5.8 gezeigt wird.

(iii) Wenn α ein zum Prinzipalbündel $\pi: E \longrightarrow B$ assoziiertes Vektorbündel ist, sagen wir mit Faser $\mathbb{R}^a$, wobei G linear auf $\mathbb{R}^a$ operiert, ist $\pi^*\alpha$ kanonisch isomorph zum trivialen Bündel $E \times \mathbb{R}^a$, und wir können auf die Fasern projezieren :

$$pr : E^{\pi^*\alpha} = (E \times D^a)/(E \times \partial D^a) \longrightarrow D^a/\partial D^a$$

Die stabile Abbildung $pr \circ t_\alpha : B^{\alpha \oplus \zeta} \longrightarrow D^a/\partial D^a$ wird repräsentiert von der Komposition

$$B^{\alpha\oplus\zeta\oplus(s)} \xrightarrow{T_\alpha(i)} E^{\pi^*\alpha\oplus(s)} = E^{\pi^*\alpha} \wedge D^s/\partial D^s \xrightarrow{pr\wedge id} (D^a/\partial D^a) \wedge (D^s/\partial D^s).$$

Die Pontrjagin - Mannigfaltigkeit dieser Abbildung ist E, wie in (5.5) aufgefasst als Untermannigfaltigkeit des Scheibenbündels $D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))$ mit Normalenbündel $\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$, zusammen mit der Rahmung $\phi : \pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \longrightarrow \pi^*\alpha\oplus(s) \simeq (a)\oplus(s)$.

(5.7) Beispiel

Wir betrachten wie in (5.2) das Prinzipal G-Bündel $\tau: S^{dk-1} \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)$. Es sei γ das kanonische $\mathbb{K}$-Linienbündel über $\mathbb{K}P(k-1)$, und $\alpha = n\gamma$, oder anders ausgedrückt : Es sei γ das zum Prinzipalbündel assoziierte Vektorbündel mit Faser $\mathbb{K}^n$, wobei G durch Rechtsmultiplikation mit dem Inversen auf $\mathbb{K}^n$ operiert (vgl. 1.7).

Nun benutzen wir das allgemeine Rezept zur Konstruktion des Transfers, sowie die Einbettung i und den Vektorbündelisomorphismus ψ, die in 5.2 explizit angegeben wurden. So erhalten wir die Einbettung

$$\begin{array}{ccc} S^{dk-1} & \longrightarrow & D(n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk)) \\ x & \longmapsto & [x;0,0,\tfrac{1}{2}x] \end{array}$$

mit Normalenbündel $\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$ und den Vektorbündel-

Isomorphismus $\phi : \pi^*n_\gamma \oplus \pi^*\zeta \oplus \omega \longrightarrow \pi^*n_\gamma \oplus (dk) \simeq S^{dk-1} \times \mathbb{K}^{k+n}$

$$(x;v,z,w) \longmapsto (x;v+w-\tfrac{1}{2}xz)$$

Dabei ist $x \in S^{dk-1}$, $v \in \mathbb{K}^n$, $z \in U$, $(x;w) \in \omega$ und wir identifizieren wieder $\mathbb{K}^k$ und $\mathbb{K}^n$ entsprechend der Aufspaltung $\mathbb{K}^{k+n} = \mathbb{K}^k \oplus \mathbb{K}^n$ mit Unterräumen von $\mathbb{K}^{k+n}$.

Nach Bemerkung 5.6(iii) ist S^{dk-1} mit dieser Einbettung und Rahmung die Pontrjagin - Mannigfaltigkeit der Abbildung $(pr \wedge id) \circ T_{n_\gamma}(i) : \mathbb{K}P(k-1)^{n_\gamma \oplus \zeta \oplus (dk)} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$, die die stabile Abbildung $pr \circ t_{n_\gamma} : \mathbb{K}P(k-1)^{n_\gamma \oplus \zeta} \longrightarrow D^{dn}/\partial D^{dn}$ repräsentiert.

Die Beschreibung des Transfers in [Be] unterscheidet sich von unserer Darstellung dadurch, daß der Vektorbündelisomorphismus zwischen dem Normalenbündel von E in $D(\alpha \oplus \zeta \oplus (s))$ und dem Bündel $\pi^*\alpha \oplus (s)$ auf folgende elegante, aber nicht so explizite Weise, wie es für unseren Beweis des Satzes (6.1) wünschenswert ist, konstruiert wird :

Das Tangentialbündel von $D(\alpha \oplus \zeta \oplus (s))$ eingeschränkt auf E kann man - bis auf Homotopie kanonisch - mit dem Bündel $\pi^*TB \oplus \pi^*\alpha \oplus \pi^*\zeta \oplus (s)$ identifizieren (durch Spaltung der kurzen exakten Vektorbündelsequenz

$$0 \longrightarrow \pi^*\alpha \oplus \pi^*\zeta \oplus (s) \longrightarrow TD(\alpha \oplus \zeta \oplus (s))_{|E} \longrightarrow \pi^*TB \longrightarrow 0 \ ;$$

vgl. Kap. III, §3 in [La]) , das Tangentialbündel von E mit $\pi^*TB \oplus \pi^*\zeta$ (1.6) .

Mit einem Transversalitätsargument zeigt man, daß sich für genügend große s der Vektorbündelisomorphismus

$\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta\oplus\nu \simeq TE\oplus\nu \simeq TD(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))_{|E} \simeq \pi^*TB\oplus\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus(s)$

homotop so abändern läßt, daß $\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta$ identisch auf sich und ν isomorph auf $\pi^*\alpha\oplus(s)$ abgebildet wird.

(5.8) Lemma

Der so konstruierte - und für große s bis auf Homotopie wohldefinierte - Isomorphismus $\nu \simeq \pi^*\alpha\oplus(s)$ stimmt bis auf Homotopie mit dem Isomorphismus

$\nu = \pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{\phi} \pi^*\alpha\oplus(s)$ überein, den wir zur Definition des Transfers benutzt haben (vgl. 5.5) .

Beweis : Es ist zu zeigen, daß die Vektorbündelisomorphismen

$(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)\simeq TE\oplus\nu\simeq TD(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))_{|E}\simeq\pi^*TB\oplus\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus(s)$

und $(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)\xrightarrow{id\oplus\phi}(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus(s))$

bis auf Homotopie gleich sind. Dazu beschreiben wir zunächst beide Isomorphismen explizit und geben dann eine Homotopie an.

Es sei $e\varepsilon E$, $v\varepsilon(\pi^*TB)_e$, $z,z'\varepsilon(\pi^*\zeta)_e$, $a\varepsilon(\pi^*\alpha)_e$, und $w\varepsilon\omega_e$, wobei für ein Vektorbündel η mit Basisraum E $(\eta)_e$ die Faser über dem Punkt e bezeichnet. Nach Konstruktion von ϕ (5.5) ist der Isomorphismus

$$(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)\xrightarrow{id\oplus\phi}(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus(s))$$

gegeben durch $(v,z,a,z',w)\longmapsto(v,z,a,i_*(-z')+w)$,

wobei $i_*:\pi^*\zeta\oplus\pi^*TB\simeq TE\longrightarrow(s)$ der Vektorbündelmonomorphismus ist, der von der Einbettung $i:E\hookrightarrow D^s$ induziert wird (vgl. 5.1) .

Der Isomorphismus

$\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)\simeq TE\oplus\nu\simeq TD(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))_{|E}\simeq\pi^*TB\oplus\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus(s)$ ist gegeben durch $(v,z,a,z',w)\longmapsto(v,a,z',i_*(v)+i_*(z)+w)$, wie sich für die Tangentialkomponente von E, d.h. für $(v,z,0,0,0)\varepsilon(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)$ aus der Konstruktion der Einbettung $E\hookrightarrow D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))$ ergibt, und für die Normalenkomponente, d.h. für $(0,0,a,z',w)\varepsilon(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)$ daraus folgt, daß der Isomorphismus zwischen $\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus(s)$ und dem Tangentialbündel längs der Fasern von $D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s)$ eingeschränkt auf E genauso konstruiert wird wie der Isomorphismus $\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega\simeq\nu$ - indem man, wie in Lemma 5.4 beschrieben, Elementen aus $\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus(s)$ bzw. $\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$ Tangentialvektoren von Kurven in $D(\alpha\oplus\zeta\oplus(s))$ zuordnet.

Für $t\in[0,1]$ definieren wir einen Vektorbündelisomorphismus $H_t:(\pi^*TB\oplus\pi^*\zeta)\oplus(\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega)\longrightarrow\pi^*TB\oplus\pi^*\alpha\oplus\pi^*\zeta\oplus(s)$ durch

$H_t(v,z,a,z',w):=(v,a,z\cos t\frac{\pi}{2}+z'\sin t\frac{\pi}{2},ti_*(v)+i_*(-z'\cos t\frac{\pi}{2}+z\sin t\frac{\pi}{2})+w)$.

Man sieht leicht, daß H_0 bzw. H_1 mit den oben explizit angegebenen Isomorphismen übereinstimmen, sodaß dies die gesuchte Homotopie ist.

§6 Beweis des Hauptresultates

Nachdem in den vorangegangenen Paragraphen die Spiegelungsabbildung (2.6), der J-Homomorphismus (3.1) und der Transfer (5.6) definiert wurden, können wir nun das Hauptresultat der Arbeit formulieren und beweisen.

(6.1) Satz

Das folgende Diagramm von stabilen Abbildungen ist kommutativ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta} & \xrightarrow{pr\circ t_{n\gamma}} & D^{dn}/\partial D^{dn} \\ \downarrow R & & \downarrow \tilde{A} \\ V_k(\mathbb{K}^{k+n}) & \xrightarrow{\quad j \quad} & D^{dn}/\partial D^{dn} \end{array} .$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{K}$ die reellen bzw. komplexen bzw. quaternionellen Zahlen, d die Dimension von $\mathbb{K}$ über den reellen Zahlen, $\tilde{A}$ ist eine stabile Abbildung mit Abbildungsgrad $(-1)^{dn+d-1}$, und $pr\circ t_{n\gamma}$ die in 5.6(iii) beschriebene Komposition des Transfers mit der Projektion auf die Fasern.

Im Spezialfall n = 0 kann man das Ergebnis so formulieren:

(6.2) Korollar

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}P(k-1)^{\zeta} & & \\ \downarrow R & \searrow^{pr\circ t} & \\ & & S^0 \\ O_{\mathbb{K}}(k) & \nearrow_{j} & \end{array}$$

kommutiert bis aufs Vorzeichen, d.h. bis auf eine stabile Abbildung $S^0 \longrightarrow S^0$ mit Abbildungsgrad ± 1 .

Mit t bezeichnen wir hierbei den Transfer $t_{0\gamma}$.

Beweis : Die stabile Abbildung $pr \circ t_{n\gamma}$ wird repräsentiert durch die Komposition

$(pr \wedge id) \circ T_{n\gamma}(i) : \mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma \oplus \zeta \oplus (dk)} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$

(vgl. 5.6 (iii)), deren Pontrjaginmannigfaltigkeit explizit in 5.7 angegeben wurde.

Die stabile Abbildung j kommt von der Abbildung

$$J : V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)} \qquad (3.1) .$$

Folglich wird die stabile Abbildung $j \circ R$ durch die Komposition von

$$\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma \oplus \zeta} \wedge D^{dk}/\partial D^{dk} \xrightarrow{R \wedge id} V_k(\mathbb{K}^{k+n}) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$$

mit der Abbildung J repräsentiert.

Zum Beweis des Satzes bestimmen wir die Pontrjagin - Mannigfaltigkeit von $J \circ (R \wedge id)$ - d.h. das Urbild der Null (6.3) und die Trivialisierung des Normalenbündels (6.4) - und stellen fest, daß diese gerahmte Untermannigfaltigkeit bis auf Vorzeichen in der Rahmung mit der zu $(pr \wedge id) \circ T_{n\gamma}(i)$ gehörenden Pontrjagin - Mannigfaltigkeit übereinstimmt (6.5) .

(i) Wenn wir in der üblichen Weise $\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma \oplus \zeta} \wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$ mit dem Thomraum $\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma \oplus \zeta \oplus (dk)}$ identifizieren, ist die Abbildung

$$J \circ (R \wedge id) : \mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma \oplus \zeta \oplus (dk)} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$$

gegeben durch $[x_1; x_2, z, v] \to \begin{cases} [(\frac{1}{|v|} - 1) R_{x, \tilde{z}}(v) + v] & \text{für } v \neq 0 \\ * & \text{für } v = 0 \end{cases}$

mit $x = \sqrt{1 - |x_2|^2}\, x_1 + x_2$ (vgl. 2.6).

Zur Bestimmung des Urbildes der Null sei $[x_1, x_2, z, v]$ ein Element von $\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma \oplus \zeta \oplus (dk)}$ mit $(\frac{1}{|v|} - 1) R_{x, \tilde{z}}(v) + v = 0$.

Weil $R_{x,\tilde{z}}$ eine orthogonale Abbildung ist, stimmen die Normen von $R_{x,\tilde{z}}(v)$ und v überein, deshalb gilt $\tilde{z}(\frac{1}{|v|}\cdot|v|-1) = 1$, woraus $|v| = \frac{1}{2}$ und $R_{x,\tilde{z}}(v) = -v$ folgt. Anschaulich gesehen läßt $R_{x,\tilde{z}}$ Vektoren im orthogonalen Komplement fest und operiert auf dem von x erzeugten $\mathbb{K}$-Untervektorraum durch Multiplikation mit $\tilde{z}$. Aus $R_{x,\tilde{z}}(v) = -v$ folgt deshalb $\tilde{z} = -1$ und $v = \frac{1}{2}xk$ für ein $k\in S^{d-1}\subset\mathbb{K}$.

Das ergibt sich auch durch eine kurze Rechnung aus der Definition $R_{x,\tilde{z}}(v) = v + x(\tilde{z}-1)\langle x,v\rangle$ (2.1) . Denn wegen $-v = R_{x,\tilde{z}}(v) = v + x(\tilde{z}-1)\langle x,v\rangle$ gilt $-2v = x(\tilde{z}-1)\langle x,v\rangle$, das heißt : v ist von der Form $\frac{1}{2}xk$ für ein $k\in S^{d-1}$. Vergleich der Koeffizienten von x in der Gleichung

$$-2(\tfrac{1}{2}xk) = x(\tilde{z}-1)\langle x,\tfrac{1}{2}xk\rangle$$

führt dann zu $\tilde{z} = -1$, woraus,wie man leicht anhand der Definition von $\tilde{}$ nachrechnet, $z = 0$ folgt.

In 2.6 wurde x definiert durch $x := \sqrt{1-|x_2|^2}\,x_1 + x_2$, wobei bezüglich der Aufspaltung $\mathbb{K}^{k+n} = \mathbb{K}^k \oplus \mathbb{K}^n$ der Vektor x_1 im ersten, x_2 im zweiten Summand liegt. Wegen $v\in \mathbb{K}^k$ und $v = \frac{1}{2}xk$ gilt $x_2 = 0$ und $x = x_1$. Jedes Element im Urbild der Null ist also von der Form

$$[x;0,0,\tfrac{1}{2}xk] = [x'k^{-1};0,0,\tfrac{1}{2}x'] = [x';0,0,\tfrac{1}{2}x']\in \mathbb{KP}(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk)}$$

mit $x' = xk\in S^{dk-1}$. Man rechnet nach, daß auch umgekehrt ein solches Element auf Null abgebildet wird.

Wir können das Ergebnis so zusammenfassen :

(6.3)
$$(J\circ(R\wedge id))^{-1}(0) = \{[x;0,0,\tfrac{1}{2}x]\in \mathbb{KP}(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk)} / x\in S^{dk-1}\}$$

Der Vergleich mit 5.7 zeigt, daß dies genau die Einbettung der Sphäre S^{dk-1} in das Scheibenbündel $D(n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk))$ über $\mathbb{K}P(k-1)$ ist, die mit der dort beschriebenen Rahmung ϕ unter der Thom - Pontrjagin Konstruktion der Abbildung $(pr\wedge id)\circ T_{n\gamma}(i)$ entspricht.

(ii) Der nächste Schritt ist die Bestimmung der induzierten Rahmung für $(J\circ(R\wedge id))^{-1}(0)$. Nach Lemma 5.4 ist das Normalenbündel von $(J\circ(R\wedge id))^{-1}(0)$ kanonisch isomorph zu $\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$. Wir erhielten diesen Isomorphismus, indem wir einem Element $(x;v,z,w)\in\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$ $(x\in S^{dk-1},\ v\in \mathbb{K}^n,\ z\in U,\ (x;w)\in\omega)$ den Tangentialvektor $\dot{c}(0)$ der Kurve $c(t) = [x;tv,tz,\frac{1}{2}x+tw]\in \mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk)}$ zuordneten.
Das Bild von $\dot{c}(0)$ unter der Tangentialabbildung von $J\circ(R\wedge id)$ ist die Ableitung der Bildkurve $J\circ(R\wedge id)\circ c(t)\in D^{d(k+n)}$ im Punkte $t=0$. Eine einfache,aber etwas langatmige Ableitungsübung führt zu dem Ergebnis :

$$\frac{d}{dt}(J\circ(R\wedge id)\circ c(t))_{t=0} = 2(w - x(<x,w>-\mathrm{Re}<x,w>))+xz-v \in \mathbb{K}^{k+n}$$
$$= 2w + xz - v \quad (\text{da } (x;w)\in\omega \text{ (vgl. 5.2)})$$

Also ist die induzierte Rahmung

(6.4) $$(J\circ(R\wedge id))_* : \pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \longrightarrow S^{dk-1}\times \mathbb{K}^{k+n}$$
gegeben durch $$(x;v,z,w) \longmapsto (x;2w+xz-v)$$

(iii) Um die Rahmung $(J\circ(R\wedge id))_*$ mit der zur Abbildung $(pr\wedge id)\circ T_{n\gamma}(i)$ gehörenden Rahmung ϕ zu vergleichen, schreiben wir $(J\circ(R\wedge id))_*$ folgendermaßen:

$(J\circ(R\wedge id))_*: \pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{-id\oplus -2id\oplus 2id} \pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{\phi} S^{dk-1}\times \mathbb{K}^{k+n}$

Hierbei bezeichnet cid für eine reelle Zahl c die Multiplikation der Vektoren in der Faser mit c .

Durch eine homotope Abänderung kann man den Faktor zwei zum Verschwinden bringen, um dann, die Trivialität des Bündels $\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta$ ausnutzend, das folgende Lemma anzuwenden :

Lemma Es sei ω ein Vektorbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit und $\phi : (a)\oplus\omega \longrightarrow (a)\oplus(b)$ ein Vektorbündelisomorphismus.

Dann repräsentieren $\phi': (a)\oplus\omega \xrightarrow{-id\oplus id} (a)\oplus\omega \xrightarrow{\phi} (a)\oplus(b)$

und $\phi'': (a)\oplus\omega \xrightarrow{\phi} (a)\oplus(b) \xrightarrow{-id\oplus id} (a)\oplus(b)$

den gleichen stabilen Vektorbündelisomorphismus (vgl. 1.8).

Beweis : Die Isomorphismen

$\phi'\oplus id$ und $\phi''\oplus id : (a)\oplus\omega\oplus(s) \longrightarrow (a)\oplus(b)\oplus(s)$ sind gleich, wenn der Vektorbündelisomorphismus

$$\phi\oplus id : (a)\oplus\omega\oplus(s) \longrightarrow (a)\oplus(b)\oplus(s)$$

das triviale Bündel (a) identisch auf sich und $\omega\oplus(s)$ isomorph auf $(b)\oplus(s)$ abbildet. Andernfalls zeigt man mit einem Transversalitätsargument, daß man $\phi\oplus id$ homotop so abändern kann, daß dies gilt.

(6.5) Das Lemma zeigt, daß der Vektorbündelisomorphismus $(J\circ(R\wedge id))_*$, der bis auf Homotopie mit der Komposition

$\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{-id\oplus -id\oplus id} \pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{\phi} S^{dk-1}\times \mathbb{R}^{d(k+n)}$

übereinstimmt, die gleiche stabile Trivialisierung des Normalenbündels $\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega$ repräsentiert wie die Komposition

$$\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta\oplus\omega \xrightarrow{\phi} S^{dk-1}\times \mathbb{R}^{d(k+n)} \xrightarrow{id\times A} S^{dk-1}\times \mathbb{R}^{d(k+n)},$$

wobei A ein Automorphismus von $\mathbb{R}^{d(k+n)}$ ist, der Vektoren aus einem (dn+d-1)-dimensionalen Unterraum (dn+d-1 ist die Faserdimension von $\pi^*n\gamma\oplus\pi^*\zeta$) auf ihr Negatives abbildet und Vektoren im orthogonalen Komplement festläßt.

Aus Lemma 4.6 folgt dann, daß die Abbildung

$$J\circ(R\wedge id) : \mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk)} \longrightarrow D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$$

mit Pontrjaginmannigfaltigkeit $(S^{dk-1},(J\circ(R\wedge id))_*) - S^{dk-1}$ gemäß 6.3 aufgefasst als Untermannigfaltigkeit von $D(n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk))$ - die gleiche stabile Abbildung repräsentiert wie die Komposition von

$$\mathbb{K}P(k-1)^{n\gamma\oplus\zeta\oplus(dk)} \xrightarrow{(pr\wedge id)\circ T_{n\gamma}(i)} D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)} \quad \text{und}$$

$$D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)} \xrightarrow{\tilde{A}} D^{d(k+n)}/\partial D^{d(k+n)}$$

mit Pontrjagin - Mannigfaltigkeit $(S^{dk-1},(id\times A)\circ\phi)$, wobei die von A induzierte Abbildung $\tilde{A}$ den Abbildungsgrad $(-1)^{dn+d-1}$ hat.

§7 Geometrische Interpretation

In diesem Paragraphen beschreiben wir explizit die Homomorphismen $\bar{t}:\Omega_r(\mathbb{K}P(k-1);\zeta) \longrightarrow \Omega^{fr}_{r+d-1}$ und $\bar{j}:\tilde{\Omega}^{fr}_r(O_{\mathbb{K}}(k)) \longrightarrow \Omega^{fr}_r$, die von dem Transfer bzw. von dem stabilen J-Homomorphismus induziert werden, um dann die Kommutativität (bis aufs Vorzeichen) des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}P(k-1)^{\zeta} & & \\ \downarrow R & \searrow^{pr\circ t} & \\ O_{\mathbb{K}}(k) & \xrightarrow{j} & S^0 \end{array}$$

(Korollar 6.2)

geometrisch zu interpretieren. Um ein flüssigeres Lesen zu ermöglichen, stellen wir die Beweise von (7.2), (7.4) und (7.6) an das Ende.

Zunächst zur geometrischen Interpretation des Transfers : Es sei G eine kompakte Liegruppe der Dimension g, $\pi:E \longrightarrow B$ ein Prinzipal G-Bündel, ζ das adjungierte Vektorbündel und $[B',g,\bar{g}]$ ein Element aus $\Omega_r(B;\zeta)$.
Das mittels $g:B' \longrightarrow B$ zurückgezogene Prinzipalbündel bezeichnen wir mit $\pi':E' \longrightarrow B'$ und die 'induzierte' stabile Trivialisierung

$$(r+g+t) \xrightarrow{\pi'^*\bar{g}} \pi'^*TB' \oplus \pi'^*g^*\zeta \oplus (t) \simeq TE' \oplus (t)$$

des Tangentialbündels von E' mit $\bar{h}$. Hierbei ist $\pi'^*TB' \oplus_{\pi} \pi'^*g^*\zeta \simeq TE'$ der in 1.6 beschriebene kanonische Vektorbündelisomorphismus.

(7.1) Definition : Den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{t}:\Omega_r(B;\zeta) &\longrightarrow \Omega^{fr}_{r+g} \\ [B',g,\bar{g}] &\longmapsto [E',\bar{h}] \end{aligned}$$

bezeichnen wir als geometrischen Transfer.

Bemerkung : Der geometrische Transfer des Prinzipalbündels $\pi: S^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P(k-1)$ (bzw. $\pi: S^{2k-1} \longrightarrow \mathbb{C}P(k-1)$) stimmt mit dem in [Lö] definierten Homomorphismus $S_{\mathbb{R}}: \Omega_r^{fr}(\mathbb{R}P(\infty)) \longrightarrow \Omega_r^{fr}$ (bzw. $S_{\mathbb{C}}: \Omega_r^{fr}(\mathbb{C}P(\infty)) \longrightarrow \Omega_{r+1}^{fr}$) überein (für k groß gegenüber r ist $\Omega_r^{fr}(\mathbb{K}P(k-1)) \approx \Omega_r^{fr}(\mathbb{K}P(\infty))$.

(7.2) Satz : Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}^{fr}_{r+g+s}(B^{\zeta\oplus(s)}) & \xrightarrow{((pr\wedge id)\circ T(i))_*} & \tilde{\Omega}^{fr}_{r+g+s}(D^s/\partial D^s) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \Omega_r(B;\zeta) & \xrightarrow{\bar{t}} & \Omega^{fr}_{r+g} \end{array}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen Thomisomorphismen sind, und $(pr\wedge id)\circ T(i)$ die stabile Abbildung $pr\circ t$ repräsentiert (vgl. 5.6 (iii)) (Wir schreiben kurz T(i) (bzw. t) für $T_\alpha(i)$ (bzw t_α), wenn α das nulldimensionale Vektorbündel ist) .

Nun zur geometrischen Interpretation des stabilen J-Homomorphismus :

Es sei N eine Mannigfaltigkeit und $\bar{g}: (r+dk+t) \longrightarrow TN\oplus(dk+t)$ eine stabile Trivialisierung des Tangentialbündels von N. Gegeben eine Abbildung $g: N \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)$ in die orthogonale bzw. unitäre bzw. symplektische Gruppe, bezeichnen wir mit $g^*\lambda: N\times \mathbb{R}^{dk} \longrightarrow N\times \mathbb{R}^{dk}$ den mittels g zurückgezogenen Vektorbündelisomorphismus $\lambda: O_{\mathbb{K}}(k)\times \mathbb{R}^{dk} \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)\times \mathbb{R}^{dk}$

$$(\alpha, v) \longmapsto (\alpha, \alpha(v))$$

und schreiben $g\bar{g}$ für die stabile Trivialisierung

$$(r+dk+t) \xrightarrow{\bar{g}} TM\oplus(dk)\oplus(t) \xrightarrow{id\oplus g^*\lambda\oplus id} TM\oplus(dk)\oplus(t)$$

des Tangentialbündels von N.

(7.3) Definition

Die Abbilung $\bar{j} : \tilde{\Omega}_r^{fr}(O_{\mathbb{K}}(k)) \longrightarrow \Omega_r^{fr}$

$[N,g,\bar{g}] \longmapsto [N,g\bar{g}]$

bezeichnen wir als geometrischen J-Homomorphismus.

(7.4) Satz : Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk}) & \xrightarrow{J_*} & \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(D^{dk}/\partial D^{dk}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \tilde{\Omega}^{fr}_{r}(O_{\mathbb{K}}(k)) & \xrightarrow{\bar{j}} & \Omega^{fr}_{r} \end{array}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen Suspensions- bzw. Thomisomorphismen sind, und die Abbildung J den stabilen J-Homomorphismus j repräsentiert (vgl. 3.1) .

Aus (6.2), (7.2), (7.4) und der Beobachtung, daß die induzierte Abbildung einer Abbildung vom Grad -1 Bordismusklassen auf ihr Inverses abbildet, folgt dann :

(7.5) Korollar : Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega_r(\mathbb{KP}(k-1);\zeta) & & \\ \downarrow \cong & \searrow^{\bar{t}} & \\ \tilde{\Omega}^{fr}_{r+d-1}(\mathbb{KP}(k-1)^{\zeta}) & & \Omega^{fr}_{r+d-1} \\ \downarrow R_* & \nearrow_{\bar{j}} & \\ \tilde{\Omega}^{fr}_{r+d-1}(O_{\mathbb{K}}(k-1)) & & \end{array}$$

kommutiert bis aufs Vorzeichen. Hierbei ist die nicht näher bezeichnete Abbildung das Inverse des Thomisomorphismus.

Bemerkung : Dieses Resultat wird für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ in [Br] bewiesen, während der komplexe Fall in [Lö] als offenes Problem erwähnt wird.

Um die Kommutativität des obigen Diagrammes geometrisch interpretieren zu können, brauchen wir noch eine explizite Beschreibung der Abbildung $\Omega_r(\mathbb{K}P(k-1);\zeta) \longrightarrow \tilde{\Omega}^{fr}_{r+d-1}(\mathbb{K}P(k-1)^\zeta)$. Dazu definieren wir das Vektorbündel η als die direkte Summe von ζ und einem trivialen (reellen) Linienbündel und die Abbildung $q: S(\eta)=S^{dk-1}\times_G S^{d-1} \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)^\zeta$ durch

$$[x;z] \longmapsto [x;f(z)] \quad ,$$

wobei $G = S^{d-1}$ auf S^{dk-1} durch Rechtsmultiplikation, auf S^{d-1} durch Konjugation operiert, und $f: S^{d-1} \longrightarrow D(U)/\partial D(U)$ die Umkehrabbildung des in 2.4 beschriebenen äquivarianten Homeomorphismus ist.

Gegeben ein Element $[B',g,\bar{g}]$ aus $\Omega_r(\mathbb{K}P(k-1);\zeta)$ bezeichnen wir mit $h: S(g^*\eta) \longrightarrow \mathbb{K}P(k-1)^\zeta$ die Komposition von q mit der Bündelabbildung, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(g^*\eta) & \longrightarrow & S(\eta) \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{\;g\;} & \mathbb{K}P(k-1) \end{array}$$

kommutativ ergänzt, und mit $\bar{h}'$ den Vektorbündelisomorphismus

$$\bar{h}': (r+d+t) \xrightarrow{p'^*\bar{g}} p'^*TB \oplus p'^*g^*\eta \oplus (t) \cong TS(g^*\eta) \oplus (1) \oplus (t) \quad ,$$

wobei man den nicht näher bezeichneten Isomorphismus aus den Identifikationen $TD(g^*\eta)_{|S(g^*\eta)} \cong p'^*TB' \oplus p'^*g^*\eta$ und $TD(g^*\eta)_{|S(g^*\eta)} \cong TS(g^*\eta)\oplus(1)$ (vgl. 1.6) erhält.

(7.6) Lemma

Die zum Thomisomorphismus inverse Abbildung

$$\Omega_r(\mathbb{K}P(k-1);\zeta) \longrightarrow \mathfrak{N}^{fr}_{r+d-1}(\mathbb{K}P(k-1)^{\zeta})$$

ist gegeben durch $[B',g,\bar{g}] \longmapsto [S(g^*\eta),h,\bar{h}']$

Nun können wir Korollar 7.5 folgendermaßen umformulieren:

(7.7) Korollar : Es sei B' eine geschlossene Mannigfaltigkeit, g eine Abbildung von B' in $\mathbb{K}P(k-1)$ und $\bar{g}:(r+d-1+t) \longrightarrow TN \oplus g^*\eta \oplus (t)$ ein Vektorbündelisomorphismus. Dann repräsentiert der Totalraum E' des zurückgezogenen Prinzipalbündels mit der 'induzierten' Rahmung $\bar{h}$ (siehe 7.1) bis aufs Vorzeichen die gleiche Bordismusklasse wie das Sphärenbündel von $g^*\eta$ mit der Rahmung $(R\circ h)\bar{h}'$, die man aus der Rahmung $\bar{h}'$ durch 'Vertwisten' mit der Abbildung $R\circ h : S(g^*\eta) \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)$ erhält (siehe 7.3) .

(7.8) Bemerkung

Bei der Konstruktion der gerahmten Mannigfaltigkeit $(E',\bar{h})$ bestimmt die Abbildung g die 'Vertwistung' des Raumes E', für die Beschreibung der Rahmung $\bar{h}$ spielt g keine Rolle mehr, während bei $(S(g^*\eta),(R\circ h)\bar{h}')$ die Vertwistung der Rahmung von g bestimmt wird, $S(g^*\eta)$ aber - jedenfalls für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ - nicht von der Abbildung g abhängt, denn für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $S(g^*\eta) = B'\times\{-1,+1\}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt $S(g^*\eta) = B'\times S^1$.

Beweis von Satz 7.2 :

Zunächst beweisen wir folgenden Hilfssatz

Lemma : Es seien X,Y kompakte Mannigfaltigkeiten, B eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von Y mit Normalenbündel ω und $f:X \longrightarrow Y/\partial Y$ eine in einer Umgebung von $f^{-1}(B)$ differenzierbare und zu B transversale Abbildung.
Weiterhin sei $B'=f^{-1}(B)$, $g:B' \longrightarrow B$ die Einschränkung von f auf B', und $\bar{g}:D'=D(g^*\omega) \longrightarrow D=D(\omega)$ die Bündelabbildung über g ($D(\omega)$ bezeichnet das Scheibenbündel von ω bezüglich einer Riemannschen Metrik auf ω, $D(g^*\omega)$ das Scheibenbündel bezüglich der induzierten Metrik auf $g^*\omega$).
Dann kann man eine Tubenumgebung von B bzw. B' mit D bzw. D' identifizieren und f homotop so abändern, daß $f_{|D'} = \bar{g}$ und $f(X-D') \subset Y/\partial Y - D$.

Beweis : Die Tangentialabbildung von f, eingeschränkt auf B', induziert aufgrund der Transversalitätsbedingung einen Isomorphismus zwischen dem Normalenbündel von B' in X und dem zurückgezogenen Bündel $g^*\omega$. Deshalb können wir das Scheibenbündel D' mittels einer Tubenabbildung mit einer Tubenumgebung von B' identifizieren. Ebenso identifizieren wir D mit einer Tubenumgebung von B in Y. Weil B' ein Deformationsretrakt von D' ist, und die Abbildungen f und $\bar{g}$ auf B' übereinstimmen, kann man $f_{|D'}$ in $\bar{g}$ deformieren, d.h. es gibt eine Homotopie $H : [0,1]\times D' \longrightarrow Y/\partial Y$

$$(t,v) \longmapsto H_t(v)$$

mit $H_0 = f_{|D'}$ und $H_1 = \bar{g}$.
Es sei $h:[0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine Abbildung mit

$h(0,s)=0$, $h(t,1)=0$ und $h(1,s)=\begin{cases}1 & \text{für } 0\leq s\leq 0.5\\ 2(1-s) & \text{für } 0.5\leq s\leq 0\end{cases}$

Dann ist $H' : [0,1]\times D' \longrightarrow Y/\partial Y$

$$(t,v)\longmapsto H_{h(t,|v|)}(v) \quad ,$$

wobei $|v|$ die Norm von v bzgl. der Riemannschen Metrik auf $g^*\omega$ bezeichnet, eine Homotopie mit $H'_0 = f_{|D'}$ $H'_{1|\frac{1}{2}D'} = \bar{g}_{|\frac{1}{2}D'}$ und $H'_{t|\partial D'} = f_{|\partial D'}$; d.h. während wir die Abbildung f auf dem Rand der Tubenumgebung D' festlassen, können wir sie im Inneren homotop so abändern, daß sie auf der kleineren Tubenumgebung $\frac{1}{2}D' = \{v\in D'/|v|\leq\frac{1}{2}\}$ mit g übereinstimmt.

Nun zeigen wir, daß für dieses abgeänderte f und eine geeignete Tubenumgebung $\delta D' = \{v\in D'/|v|\leq\delta\}$ mit $0\leq\delta\leq\frac{1}{2}$ $f(X-\delta D')$ in $Y/\partial Y - \delta D$ liegt.

Wegen $f_{|\frac{1}{2}D'} = \bar{g}_{|\frac{1}{2}D'}$ gilt für $0\leq\delta\leq\frac{1}{2}$ $f(\frac{1}{2}D'-\delta D')\subset Y/\partial Y - \delta D'$.

Weil $f(X-\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}')\cap D$ kompakt ist, wobei $\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}'$ das offene Scheibenbündel bezeichnet, gibt es in $f(X-\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}')\cap D$ einen Punkt geringsten Abstandes zu B. Dieser Abstand kann wegen $f(X-\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}')\cap B = \emptyset$ nicht null sein, sodaß für ein geeignetes δ zwischen Null und $\frac{1}{2}$ $f(x-\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}')\cap\delta D$ die leere Menge ist, woraus $f(X-\delta D')\subset Y/\partial Y - \delta D$ folgt.

Damit haben wir das Lemma bewiesen, wenn man in der Behauptung D bzw. D' durch δD bzw. $\delta D'$ ersetzt. Mit der Bemerkung, daß δD bzw. $\delta D'$ bezüglich der mit $\frac{1}{\delta}$ multiplizierten Metrik auf ω die Scheibenbündel von ω bzw. $g^*\omega$ sind, ist der Beweis komplett.

Nach dieser Vorbereitung kommen wir zu dem Beweis des Satzes 7.2 zurück :

Es sei $[M,f,\bar{f}] \in \tilde{\Omega}^{fr}_{r+g+s}(B^{\zeta\oplus(s)})$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $f:M \longrightarrow B^{\zeta\oplus(s)}$ in einer Umgebung von $B' = f^{-1}(B)$ differenzierbar und transversal zu $B \subset B^{\zeta\oplus(s)}$ ist.

Das Lemma und die Bezeichnungsweise dort anwendend, können wir eine Tubenumgebung von B bzw. B' mit dem Scheibenbündel D bzw. D' identifizieren und annehmen, daß $f_{|D'}:D' \longrightarrow D \subset B^{\zeta\oplus(s)}$ die Bündelabbildung über g ist (die wir hier aber nicht mit $\bar{g}$ bezeichnen, da wir dieses Symbol anderweitig verwenden wollen), und daß f(M-D') in $B^{\zeta\oplus(s)}-D$ liegt.

Im weiteren Beweis werden wir gewisse kanonische Vektorbündelisomorphismen mit dem Symbol $\approx$ bezeichnen. Zu diesen gehören die Isomorphismen $TE \approx \pi^*TB\oplus\pi^*\zeta$ und $TE' \approx \pi'^*TB\oplus\pi'^*g^*\zeta$ (vgl. 1.6). Weiterhin haben wir die Isomorphismen $TD'_{|B'} \approx TB'\oplus g^*\zeta\oplus(s)$ (denn $D' = D(g^*\zeta\oplus(s))$, und $TD' \approx p'^*TD'_{|B'}$ (denn die Projektion $p':D' \longrightarrow B'$ ist eine Homotopieäquivalenz), sowie daraus abgeleitet $TD' \approx p'^*TB'\oplus p'^*g^*\zeta\oplus(s)$ (die Komposition der obigen Isomorphismen) und $TD'_{|E'} \approx \pi'^*TB'\oplus\pi'^*g^*\zeta\oplus(s)$ (deren Einschränkung auf E') .

Das Bild von $[M,f,\bar{f}]$ unter dem Thomisomorphismus ist $[B',g,\bar{g}]$, wobei wir mit $\bar{g}$ den Vektorbündelisomorphismus

$$\bar{g} : (r+g+s+t) \xrightarrow{\bar{f}_{|B'}} TM_{|B'}\oplus(t) \approx TB'\oplus g^*\zeta\oplus(t)$$

bezeichnen.

Das Bild von $[M,f,\bar{f}]$ unter der Komposition von $((pr\wedge id)\circ T(i))_*$ und Thomisomorphismus wird repräsentiert von dem Urbild der Null unter der Abbildung

$$M \xrightarrow{f} B^{\zeta\oplus(s)} \xrightarrow{(pr\wedge id)\circ T(i)} D^s/\partial D^s$$

mit der entsprechenden Rahmung. Wir kennen das Urbild der Null unter $(pr\wedge id)\circ T(i)$ und dessen Rahmung (5.6 (iii)) : Es ist ein Unterbündel E des Scheibenbündels D mit Normalenbündel ν und Rahmung $\phi:\nu \longrightarrow (s)$.

Weil $f_{|D'}:D'=g^*D \longrightarrow D$ mit der Bündelabbildung übereinstimmt, und $f(M-D')$ in $B^{\zeta\oplus(s)}-D$ liegt, ist das Urbild $((pr\wedge id)\circ T(i)\circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(E)$ das induzierte Bündel $E' := g^*E \subset D' = g^*D$ mit Normalenbündel $g^*\nu$, und bzgl. der Rahmung gilt $((pr\wedge id)\circ T(i)\circ f)_* = g^*\phi : g^*\nu \longrightarrow (s)$.

Bezeichnen wir mit $\bar{h}'$ den Vektorbündelisomorphismus

$$\bar{h}' : (r+g+s+t) \xrightarrow{\bar{f}_{|E'}} TM_{|E'}\oplus(t) \simeq TE'\oplus g^*\nu\oplus(t) \xrightarrow{id\oplus g^*\phi\oplus id} TE'\oplus(s)\oplus(t)$$

so repräsentiert $[E',\bar{h}']$ das Bild von $[M,f,\bar{f}]$ unter der Komposition von $((pr\wedge id)\circ T(i))_* : \pi^{fr}_{r+g+s}(B^{\zeta\oplus(s)}) \longrightarrow \Omega^{fr}_{r+g}$ und Thomisomorphismus.

Zum Beweis des Satzes bleibt zu zeigen, daß der Vektorbündelisomorphismus $\bar{h}'$ mit dem Isomorphismus $\bar{h}$ aus der Definition des geometrischen Transfers bis auf Homotopie übereinstimmt.

Aus Lemma 5.8 folgt, daß die Isomorphismen

$$TD_{|E} \simeq TE\oplus\nu \xrightarrow{id\oplus\phi} TE\oplus(s)$$

und $$TD_{|E} \simeq \pi^*TB\oplus\pi^*\zeta\oplus(s) \simeq TE\oplus(s)$$

bis auf Homotopie gleich sind. Deshalb stimmen auch die

Isomorphismen $TD'_{|E'} \simeq TE' \oplus g^*\nu \xrightarrow{id \oplus g^*\phi} TE' \oplus (s)$

und $TD'_{|E'} \simeq \pi'^*TB' \oplus \pi'^* g^*\zeta \oplus (s) \simeq TE' \oplus (s)$

bis auf Homotopie überein.

Ebenfalls bis auf Homotopie gleich sind die Isomorphismen

$(r+g+s+t) \xrightarrow{\bar{f}_{|D'}} TD' \oplus (t)$ und

$(r+g+s+t) \xrightarrow{p'^*\bar{f}_{|B'}} p'^*TD'_{|B'} \oplus (t) \simeq TD' \oplus (t)$,

denn ihre Einschränkungen auf B' stimmen überein, und B' ist ein Deformationsretrakt von D'.

Wir schränken diese Isomorphismen auf E' ein, bilden die Kompositionen mit den zuerst betrachteten Isomorphismen, und erhalten die bis auf Homotopie übereinstimmenden Vektorbündelisomorphismen

$$(r+g+s+t) \xrightarrow{\bar{f}_{|E'}} TD'_{|E'} \oplus (t) \simeq TE' \oplus g^*\nu \xrightarrow{id \oplus g^*\phi} TE' \oplus (s) \quad \text{und}$$

$$(r+g+s+t) \xrightarrow{\pi'^*\bar{f}_{|B'}} \pi'^*TD'_{|B'} \oplus (t) \simeq TD'_{|E'} \oplus (t) \simeq \pi'^*TB' \oplus \pi'^* g^*\zeta \oplus (s) \simeq TE' \oplus (s)$$

Der erste Isomorphismus ist $\bar{h}'$, der zweite die Komposition von $\pi'^*\bar{g} : (r+g+s+t) \longrightarrow \pi'^*TB' \oplus \pi'^* g^*\zeta \oplus (s)$ mit dem kanonischen Isomorphismus $\pi'^*TB' \oplus \pi'^* g^*\zeta \oplus (s) \simeq TE' \oplus (s)$.

Genau so wurde aber der Isomorphismus $\bar{h}$ bei der Definition des geometrischen Transfers konstruiert.

Beweis von Satz 7.4

Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

In (i) beweisen wir die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}) & \xrightarrow{J'_*} & \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(D^{dk}/\partial D^{dk}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \Omega^{fr}_{r}(O_{\mathbb{K}}(k)) & \longrightarrow & \Omega^{fr}_{r} \\ [N,g,\bar{g}] & \longmapsto & [N,g\bar{g}] \end{array} ,$$

wobei die vertikalen Abbildungen Thomisomorphismen sind,

und $J' : O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)} \longrightarrow D^{dk}/\partial D^{dk}$

durch $[\alpha,v] \longmapsto [\alpha(v)]$ definiert wird

($O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}$ ist der Thomraum des trivialen dk-dimensionalen Bündels über $O_{\mathbb{K}}(k)$).

In (ii) wird bewiesen, daß man das Diagramm, dessen Kommutativität wir in dem Satz behaupten, durch Einschränkung des obigen Diagrammes erhält. Genauer gesagt wird gezeigt, daß wir $\tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk})$ mit einem direkten Summand von $\tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)})$ identifizieren können, und daß J_* (bzw. der Suspensionsisomorphismus) die Einschränkung von J'_* (bzw. des Thomisomorphismus) auf $\tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk})$ ist.

(i) Es sei $[M,f,\bar{f}] \in \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}^{(dk)})$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß f transversal zu $O_{\mathbb{K}}(k) \subset O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}$ ist. Das Bild von $[M,f,\bar{f}]$ unter dem Thomisomorphismus wird von dem Tripel $(N,g,\bar{g})$ repräsentiert, wobei N das Urbild von $O_{\mathbb{K}}(k)$ unter f ist, $g:N \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)$ die Einschränkung von f auf N, und $\bar{g}$ der

Vektorbündelisomorphismus

$$(r+dk+t) \xrightarrow{\bar{f}_{|N}} TM_{|N} \oplus (t) \simeq TN \oplus \nu \oplus (t) \xrightarrow{id \oplus f_* \oplus id} TN \oplus (dk) \oplus (t) \ .$$

Hierbei bezeichnet ν das Normalenbündel von N in M und $f_* : \nu \longrightarrow (dk)$ den Vektorbündelisomorphismus, der von der Einschränkung der Tangentialabbildung von f auf N induziert wird (vgl. 1.9) .

Das Bild von $[M,f,\bar{f}]$ unter der Komposition von J'_* und dem Thomisomorphismus wird repräsentiert durch die Mannigfaltigkeit $(J' \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(0_{\mathbb{K}}(k)) = N$, zusammen mit der Rahmung

$$\bar{g}' : (r+dk+t) \xrightarrow{\bar{f}_{|N}} TM_{|N} \oplus (t) \simeq TN \oplus \nu \oplus (t) \xrightarrow{id \oplus (J' \circ f)_* \oplus id} TN \oplus (dk) \oplus (t)$$

Man überlegt sich, daß $(J' \circ f)_*$ identisch ist mit der Komposition von $f_* : \nu \longrightarrow (dk)$ und $g^*(J'_*) : (dk) \longrightarrow (dk)$, wobei J'_* die Einschränkung der Tangentialabbildung von J auf das Normalenbündel von $0_{\mathbb{K}}(k)$ in $0_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}$ bezeichnet, und daß J'_* der in 7.3 λ genannte Vektorbündelisomorphismus ist.

Daraus folgt, daß die Rahmung $\bar{g}'$ identisch ist mit der Komposition $(r+dk+t) \xrightarrow{\bar{g}} TN \oplus (dk) \oplus (t) \xrightarrow{id \oplus g^* \lambda \oplus id} TN \oplus (dk) \oplus (t)$, d.h. daß $[N,\bar{g}']$ das Bild von $[N,\bar{g}]$ unter dem geometrischen J-Homomorphismus ist, was zu zeigen war.

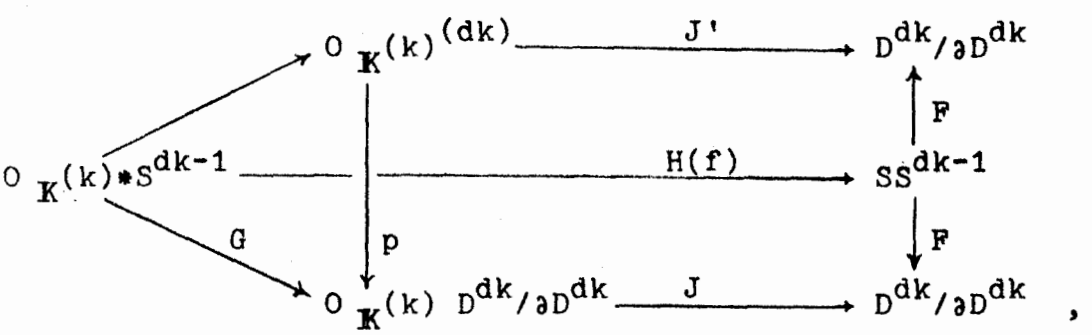
(ii) Man erhält den Raum $0_{\mathbb{K}}(k) \wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$, wenn man in dem Thomraum $0_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}$ die 'Faser' $D^{dk}/\partial D^{dk}$ über dem Basispunkt zu einem Punkt zusammenschlägt. Weil die Inklusion $D^{dk}/\partial D^{dk} \longrightarrow 0_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}$ ein Linksinverses hat, spaltet die exakte Bordismussequenz des Paares

$(D^{dk}/\partial D^{dk}, O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)})$, sodaß man $\tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk})$ mit einem direkten Summand von $\tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)})$ identifizieren kann. Aus der Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk}) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \Omega^{fr}_{r}(O_{\mathbb{K}}(k)) & \xleftarrow{i} & \tilde{\Omega}^{fr}_{r}(O_{\mathbb{K}}(k)) \end{array} ,$$

wobei p_* die von der Projektion $p: O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)} \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk}$ induzierte Abbildung, und i die offensichtliche Inklusion ist, folgt, daß man den Suspensionsisomorphismus (rechte vertikale Abbildung) als Einschränkung des Thomisomorphismus (linke vertikale Abbildung) auf $\tilde{\Omega}^{fr}_{r+dk}(O_{\mathbb{K}}(k)\wedge D^{dk}/\partial D^{dk})$ verstehen kann.

Daß J_* die Einschränkung von J'_* ist, folgt aus der Kommutativität des Diagrammes



wobei die nicht näher bezeichnete Abbildung $O_{\mathbb{K}}(k)*S^{dk-1} \longrightarrow O_{\mathbb{K}}(k)^{(dk)}$ durch $[\alpha,s,v] \longmapsto [\alpha,sv]$ gegeben ist, während die Abbildung H(f), der Homeomorphismus F, und die Homotopieäquivalenz G in 3.2 definiert wurden, wo wir auch bewiesen haben, daß das untere Teildiagramm bis auf Homotopie kommutiert. Die Kommutativität der übrigen Teildiagramme folgt direkt aus den Definitionen.

Beweis von Lemma 7.6 :

Das Sphärenbündel $S(g^*\eta)$mit der Rahmung $\bar{h}'$ berandet - als gerahmte Mannigfaltigkeit - das Scheibenbündel $D(g^*\eta)$ mit der Rahmung

$$\bar{H}':(r+d+t)\xrightarrow{s^*\bar{g}}s^*TB'\oplus s^*g^*\eta\oplus(t)\cong TD(g^*\eta)\oplus(t)\quad,$$

wobei $s:D(g^*\eta)\longrightarrow B'$ die Projektionsabbildung bezeichnet. Deshalb ist $[S(g^*\eta),h,\bar{h}']$ eine reduzierte Bordismusklasse.

Es bleibt übrig zu zeigen, daß $[S(g^*\eta),h,\bar{h}']$ durch den Thomisomorphismus (siehe 1.9) auf $[B',g,\bar{g}]$ abgebildet wird.

Man überlegt sich anhand der expliziten Formel in 2.4 , daß das Urbild von $\mathbb{K}P(k-1)$, aufgefasst als Nullschnitt in $\mathbb{K}P(k-1)^\zeta$, unter der Abbildung $q:S(\eta)\longrightarrow\mathbb{K}P(k-1)$ aus den Punkten $(x;-1)\varepsilon S(\eta)=S(\zeta\oplus(1))$ mit $x\varepsilon\,\mathbb{K}P(k-1)$ besteht, woraus $h^{-1}(\mathbb{K}P(k-1))=\{(x;-1)\varepsilon S(g^*\eta)=S(g^*\zeta\oplus(1))\}$ folgt. Wir können $h^{-1}(\mathbb{K}P(k-1))$ unter der Projektion p' mit B' identifizieren.

Nun zur Rahmung : Das Normalenbündel von $B'=h^{-1}(\mathbb{K}P(k-1))$ in $S(g^*\eta)$ ist isomorph zu $g^*\zeta$, das Normalenbündel von $\mathbb{K}P(k-1)$ in $\mathbb{K}P(k-1)^\zeta$ isomorph zu ζ.

Mithilfe der Methode, die wir im Beweis von 6.1 benutzt haben, berechnet man, daß die von der Tangentialabbildung von h induzierte Abbildung $h_*:g^*\zeta\longrightarrow g^*\zeta$ die Identität ist.

Daraus folgt, daß der Isomorphismus

$$(r+d+t)\xrightarrow{\bar{h}'|_{B'}}TS(g^*\eta)_{|B'}\oplus(1+t)\cong TB'\oplus g^*\zeta\oplus(1+t)\xrightarrow{id\oplus h_*\oplus id}TB'\oplus g^*\zeta\oplus(1+t)$$

- mit dieser Rahmung repräsentiert B' das Bild von $[S(g^*\eta),h,\bar{h}']$ unter dem Thomisomorphismus (vgl. 1.9) - mit $\bar{g}$ übereinstimmt, was zu zeigen war.

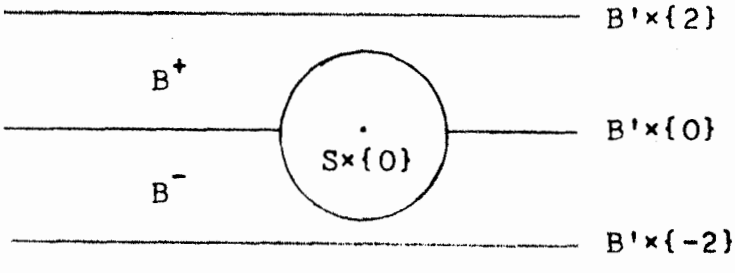
§8 Ein gerahmter Bordismus

Im Folgenden wollen wir einen direkten Beweis der Aussage (7.7) skizzieren, wobei wir uns der Anschaulichkeit und der Einfachheit der Notation halber auf den komplexen Fall beschränken.

Die Notation aus §7 übernehmend ist also zu zeigen, daß die gerahmten Mannigfaltigkeiten $(E',\bar{h})$ und $(B'\times S^1,(R\circ h)\bar{h}')$ bis aufs Vorzeichen die gleiche Bordismusklasse repräsentieren, d.h. es ist ein gerahmter Bordismus zu konstruieren. Der erste Schritt dazu ist die

(8.1) Konstruktion einer Mannigfaltigkeit mit Rand $E'\cup B'\times S^1$

Das Prinzipal S^1-Bündel E' kann man mit dem Sphärenbündel eines komplexen Linienbündels λ identifizieren. Wir wählen einen transversalen Schnitt s in λ, sodaß das Urbild des Nullschnittes eine Untermannigfaltigkeit S von B' ist mit Normalenbündel $\lambda_{|S}$. Es sei B^+ (bzw. B^-) die Menge der Punkte (b,t) aus $B'\times\{-2,+2\}$ mit positivem t (bzw. negativem t), die außerhalb einer Tubenumgebung von $S\times\{0\}$ liegen.



Wir liften λ zu einem Vektorbündel über B^-, um das so erhaltene Bündel $pr^*\lambda_{|B^-}$ $(pr:B^+\cap B^- \longrightarrow B'$ bezeichnet

die Projektion auf B') mittels des Isomorphismus

$$(B^+ \cap B^-) \times \mathbb{C} \longrightarrow pr^* \lambda_{|B^+ \cap B^-}$$

$$((b,0);z) \longmapsto ((b,0);zs(b))$$

mit dem trivialen Bündel $B^+ \times \mathbb{C}$ zu verkleben.
Das Sphärenbündel des resultierenden Vektorbündels ξ ist eine Mannigfaltigkeit, deren Rand aus drei Teilen besteht: (i) $B' \times S^1$, (ii) $S(\lambda)$,(iii) einem S^1- Bündel über dem Rand einer Tubenumgebung von $S \times \{0\}$ in $B' \times \{-2,+2\}$.

Den Rand einer solchen Tubenumgebung können wir mit dem Sphärenbündel $S(\lambda_{|S} \oplus (1))$ über S identifizieren, und es ist nicht schwer zu zeigen, daß das fragliche S^1-Bündel darüber isomorph ist zu dem Bündel

$$S((2) \oplus \lambda_{|S}) \longrightarrow S(\lambda_{|S} \oplus (1))$$

$$(s;z_1,z_2) \longmapsto (s;2\bar{z}_1 z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \quad ,$$

wobei s ein Element aus S ist, z_1 eine komplexe Zahl und z_2 ein Element aus der Faser von λ über dem Punkt s. Eingeschränkt auf eine Faser von $S(\lambda_{|S} \oplus (1))$ ist dies gerade die Hopf-Faserung (vgl. §5 in [Ho]).
Wir erhalten nun den gesuchten Bordismus, indem wir das Sphärenbündel $S(\xi)$ längs der Randkomponente $S((2) \oplus \lambda_{|S})$ mit dem Scheibenbündel $D((2) \oplus \lambda_{|S})$ verkleben.

(8.2) Konstruktion einer Rahmung für den Bordismus

Das Tangentialbündel von $B^+ \cap B^-$ identifizieren wir mit $pr^*TB' \oplus (1)$, das Tangentialbündel des Prinzipal S^1-Bündels $\pi: S(\xi) \longrightarrow B^+ \cap B^-$ gemäß (1.6) mit $\pi^*(pr^*TB \oplus (1)) \oplus (1) \cong (pr \circ \pi)^* TB \oplus (2)$ (Im quaternionellen Fall ist $S(\xi)$ kein

Prinzipalbündel; man kann zeigen, daß das Tangentialbündel längs der Fasern von $S(\xi)$ isomorph ist zu $\pi^*\zeta$, wobei ζ das zum Prinzipalbündel $S(pr^*\lambda)$ adjungierte Vektorbündel bezeichnet).

Eine Rahmung für $S(\xi)$ ist gegeben durch den Isomorphismus

$$\bar{u} : (r+2+t) \xrightarrow{(pr\circ\pi)^*\bar{g}} (pr\circ\pi)^*TB'\oplus(2)\oplus(t) \cong TS(\xi)\oplus(t) .$$

Eingeschränkt auf $S(\lambda)$ stimmt $\bar{u}$ mit der Rahmung $\bar{h}$ überein.

Über der Randkomponente $B'\times S^1$ erhält man die 'richtige' Rahmung $\bar{h}'$ (bis aufs Vorzeichen), indem man $\bar{u}$ folgendermaßen vertwistet :

Es sei $u:S(\xi)\longrightarrow \mathbb{C}P(k-1)\wedge S^1$ die - bis auf Homotopie wohldefinierte - Abbildung, deren $\mathbb{C}P(k-1)$-Komponente die klassifizierende Abbildung für das komplexe Linienbündel $(\pi\circ pr)^*\lambda$ ist (k soll hinreichend groß sein), und deren S^1-Komponente auf $S(\xi_{|B^+})=B^+\times S^1$ durch die Projektion auf den zweiten Faktor definiert wird, während einem Element $(b,t;z')$ aus $S(\xi_{|B^-})=S(pr^*\lambda_{|B^-})$ $(b\in B',\ t\in\{-2,0\},\ z'\in\lambda_b)$ die komplexe Zahl z zugeordnet wird, für die $zs(b)=z'|s(b)|$ gilt.

Die Abbildung u ist wohldefiniert, weil $(\pi\circ pr)^*\lambda$ eingeschränkt auf $S(\xi_{|B^-})=S(pr^*\lambda_{|B^-})$ trivial ist, d.h. man kann die klassifizierende Abbildung für $(\pi\circ pr)^*\lambda$ so wählen, daß $S(\xi_{|B^-})$ - also insbesondere auch die Punkte $(b,t;z)\in S(\xi_{|B^-})$ mit $s(b)=0$ - auf den Basispunkt $[x_0]=[1,0,\ldots,0]\in\mathbb{C}P(k-1)$ abgebildet werden.

Gegeben eine solche Abbildung $u:S(\xi)\longrightarrow \mathbb{C}P(k-1)\wedge S^1$, bezeichnen wir mit $u^*\mu:S(\xi)\times\mathbb{C}^k\longrightarrow S(\xi)\times\mathbb{C}^k$ den mittels u

zurückgezogenen Vektorbündelisomorphismus

$$\mu : (\mathbb{C}P(k-1)\wedge S^1)\times\mathbb{C}^k \longrightarrow (\mathbb{C}P(k-1)\wedge S^1)\times\mathbb{C}^k$$

$$([x,z],v) \longmapsto ([x,z],R_{x,z}\circ R_{x_o,z}^{-1}(v))$$

und mit $u\bar{u}$ die getwistete stabile Trivialisierung

$$(r+2+t)\oplus(2k)\xrightarrow{id\oplus u^*\mu}(r+2+t)\oplus(2k)\xrightarrow{\bar{u}\oplus id}TS(\xi)\oplus(t)\oplus(2k)$$

des Tangentialbündels von $S(\xi)$.

Über $S(\lambda)$ stimmen die Rahmungen $u\bar{u}$ und $\bar{u}$ überein, da wir, wie oben angedeutet, u so wählen können, daß $S(\lambda)$ auf den Basispunkt von $\mathbb{C}P(k-1)\wedge S^1$ abgebildet wird, und da der Isomorphismus μ die Faser über dem Basispunkt identisch auf sich abbildet. Eingeschränkt auf $B'\times S^1$ ist $u\bar{u}$ bis aufs Vorzeichen identisch mit $(R\circ h)\bar{h}'$.

Es bleibt übrig, durch explizite Rechnung die Rahmung $u\bar{u}$ auf der Randkomponente $S((2)\oplus\lambda_{|S})$ zu bestimmen und zu zeigen, daß man sie auf das Scheibenbündel $D((2)\oplus\lambda_{|S})$ fortsetzen kann.

Dazu kann man so vorgehen :

Man identifiziert das Tangentialbündel von $D((2)\oplus\lambda_{|S})$ mit $p^*TS\oplus p^*\lambda_{|S}\oplus(2)$, wobei $p:D((2)\oplus\lambda_{|S})\longrightarrow S$ die Projektion ist. Eine Rahmung für $D((2)\oplus\lambda_{|S})$ ist dann gegeben durch

$$\bar{u}':(r+2+t)\xrightarrow{p^*\bar{g}_{|S}}p^*TB'_{|S}\oplus(2+t)\simeq p^*TS\oplus p^*\lambda_{|S}\oplus(2)\oplus(t)$$

Die Einschränkungen der Rahmungen $\bar{u}$ bzw. $\bar{u}'$ auf das Sphärenbündel $S((2)\oplus\lambda_{|S})$, die wir mit $\bar{u}_|$ bzw. $\bar{u}'_|$ bezeichnen werden, unterscheiden sich nur in dem Tangentialbündel längs der Fasern, d.h. wir können $\bar{u}_|$ als

Komposition schreiben :

$$\bar{u}_{|}:(r+2+t)\xrightarrow{\bar{u}'_{|}}q^*TS\oplus(q^*\lambda_{|S}\oplus(2))\oplus(t)\xrightarrow{id\oplus\psi\oplus id}q^*TS\oplus(q^*\lambda_{|S}\oplus(2))\oplus(t)$$

wobei $q:S((2)\oplus\lambda_{|S})\longrightarrow S$ die Einschränkung von p auf $S((2)\oplus\lambda_{|S})$ ist, und $\psi:q^*\lambda_{|S}\oplus(2)\longrightarrow q^*\lambda_{|S}\oplus(2)$ ein Vektorbündelisomorphismus.

Die getwistete Rahmung $u\bar{u}$ eingeschränkt auf $S((2)\oplus\lambda_{|S})$ ist gegeben durch die Komposition von

(8.3)
$$(r+2+t)\oplus(2k)\xrightarrow{id\oplus u^*\mu}(r+2+t)\oplus(2k)\xrightarrow{\bar{u}'_{|}\oplus id}q^*TS\oplus(q^*\lambda_{|S}\oplus(2))\oplus(t)\oplus(2k)$$
$$\text{und } q^*TS\oplus(q^*\lambda_{|S}\oplus(2))\oplus(t)\oplus(2k)\xrightarrow{id\oplus\psi\oplus id\oplus id}q^*TS\oplus q^*\lambda_{|S}\oplus(2)\oplus(t)\oplus(2k)$$

Wenn wir (2k) als komplexes Vektorbündel betrachten, ist der Isomorphismus $u^*\mu$ über einem Punkt $x\in S((2)\oplus\lambda_{|S})$ gegeben durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $u_2(x)^{-1}$ in der ersten Komponente, gefolgt von der Multiplikation mit $u_2(x)$ in dem von $u_1(x)\in\mathbb{C}P(k-1)$ bestimmten eindimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}^k$ (mit u_1 bzw. u_2 bezeichnen wir die Komponenten der Abbildung $u:S((2)\oplus\lambda_{|S})\longrightarrow\mathbb{C}P(k-1)\wedge S^1$).

Man findet eine einfachere Beschreibung der obigen Komposition, wenn man $\bar{u}'_{|}\oplus id$ homotop zu einem Isomorphismus $\bar{u}''$ abändert, sodaß die Umkehrabbildung von $\bar{u}''$ das komplexe Linienbündel $q^*\lambda_{|S}$ komplex linear und monomorph in (2k) abbildet und das triviale komplexe Linienbündel (2) identisch auf die erste Komponente von (2k) (Transversalitätsargument).

Denn man erhält dann durch Einschränkung der Umkehrabbildung von $(id\oplus\psi\oplus id)\circ\bar{u}''$ einen $\mathbb{C}$-linearen Vektorbündel-

monomorphismus $q^*\lambda_{|S} \longrightarrow S((2)\oplus\lambda_{|S})\times\mathbb{C}^k$ (ψ stellt sich als $\mathbb{C}$-linear heraus), mit anderen Worten eine klassifizierende Abbildung $u_1 : S((2)\oplus\lambda_{|S}) \longrightarrow \mathbb{C}P(k-1)$ für das Bündel $q^*\lambda_{|S}$, und mit dieser Wahl von u ist der Isomorphismus (8.3), wenn man $\bar{u}'_{|}\oplus id$ durch $\bar{u}''$ ersetzt, identisch mit der Komposition

$$(r+2+t)\oplus(2k) \xrightarrow{\bar{u}'} q^*TS\oplus q^*\lambda_{|S}\oplus(2)\oplus(2k) \xrightarrow{id\oplus id\oplus u_2^{-1}\oplus id} q^*TS\oplus q^*\lambda_{|S}\oplus(2)\oplus(2k)$$

$$\xrightarrow{id\oplus\psi\oplus id} q^*TS\oplus q^*\lambda_{|S}\oplus(2)\oplus(2k) \xrightarrow{id\oplus u_2\oplus id\oplus id} q^*TS\oplus q^*\lambda_{|S}\oplus(2)\oplus(2k) \quad ,$$

wobei wir mit u_2 bzw. u_2^{-1} die Vektorbündelisomorphismen bezeichnen, die in der Faser über einem Punkt x durch Multiplikation mit $u_2(x)$ bzw. $u_2(x)^{-1}$ operieren.
Bei dieser Konstruktion muß man sich davon überzeugen, daß ψ derart beschaffen ist, daß solche Punkte $x\in S((2)\oplus\lambda_{|S})$, für die $u_2(x)$ nicht wohldefiniert ist, unter der Abbildung u_2 auf den Basispunkt von $\mathbb{C}P(k-1)$ abgebildet werden.

Schließlich zeigt man durch eine kurze explizite Rechnung, daß die Hintereinanderschaltung der letzten drei Isomorphismen in der obigen Komposition homotop zur Identität ist, sodaß die vertwistete Rahmung $u\bar{u}$, eingeschränkt auf $S((2)\oplus\lambda_{|S})$ bis auf Homotopie mit der Rahmung $\bar{u}''$ übereinstimmt, die wir ihrerseits durch homotope Abänderung des Vektorbündelisomorphismus $\bar{u}'_{|}\oplus id$ gewonnen haben, von dem wir wissen, daß er sich auf das Scheibenbündel $D((2)\oplus\lambda_{|S})$ fortsetzen läßt.

Literaturverzeichnis

[Be] J.C. Becker und R.E. Schultz
Equivariant Function Spaces and Stable Homotopy Theory I, Comm. Math. Helv. 49 (1974), 1-34

[Bo] J.M. Boardman Stable Homotopy, Chapter V - Duality and Thom Spectra, Notes University of Warwick 1966

[Br] E.H. Brown,Jr. Framed Manifolds with a Fixed Point Free Involution, Michigan Math. J. 23 (1976), 257-260

[Brö] T. Bröcker und K. Jänich
Einführung in die Differentialtopologie, Heidelberger Taschenbücher, Springer, Berlin - Heidelberg - New York

[Co] P.E. Conner und E.E. Floyd
The Relation of Cobordism to K-Theories, Lecture Notes Nr. 28, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1966

[Di] T. Bröcker und T. tom Dieck
Kobordismentheorie, Lecture Notes Nr. 178 Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1970

[Ho] H. Hopf Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931)

[Hu] D. Husemöller Fibre Bundles, Second Edition, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1975

[Kn] K. Knapp — Applications of K-Theory to Stable Homotopie Theory, Preprint

[Ko] U. Koschorke — Non-degenerate Singularities of Vector Bundle Morphisms I, Preprint

[La] S. Lang — Introduction to Differentiable Manifolds, Third Printing, Wiley & Sons 1967

[Lö] P. Löffler und L. Smith — Linebundles over Framed Manifolds, Math. Z. 138 (1974)

[Mi] J.W. Milnor — Topology from the Differentiable Viewpoint, University Press of Virginia 1965

[Sa] H.A. Salomonsen — Bordism and Geometric Dimension, Bordism and Geometric Dimension, Math. Scand. 32 (1973), 87-111