

Einige Ergebnisse über Homotopiegruppen von Sphären.

by THOMEIER, S.

in Mathematische Annalen

volume 164; pp. 225 - 250



Göttingen State and University Library

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online-systems to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Digitalisierungszentrum

37070 Göttingen

Germany

E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Göttingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Digitalisierungszentrum

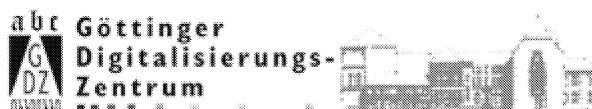
37070 Göttingen

Germany

E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de



Göttingen State and University Library



Einige Ergebnisse über Homotopiegruppen von Sphären

Herrn Professor Dr. G. KÖTHE

anlässlich seines 60. Geburtstags am 25. Dezember 1965 gewidmet

Von

SIEGFRIED THOMEIER in Frankfurt

In dieser Arbeit sollen einige Sätze über Homotopiegruppen von Sphären bewiesen werden. Dabei sind es vor allem zwei Fragen, mit denen wir uns beschäftigen wollen. Erstens soll nämlich untersucht werden, in welcher Weise die verschiedenen Homotopiegruppen eines Stammes miteinander zusammenhängen, insbesondere aber, wie Ordnung und Struktur der unstabilen Homotopiegruppen eines Stammes von der entsprechenden stabilen Gruppe abhängen. Diese Frage wird für die letzten unstabilen Gruppen eines jeden Stammes weitgehend beantwortet; dabei wird sich zeigen, daß die Art dieses Zusammenhangs zwischen den letzten unstabilen Gruppen und der stabilen Gruppe im wesentlichen nur von der Restklasse des jeweiligen Stammes modulo 8 abhängt, sich also periodisch wiederholt. So sind beispielsweise für alle $r = 8k + 2$, $k > 1$, die letzten sechs unstabilen Homotopiegruppen des r -Stammes isomorph zu den direkten Summen

$$G_r \oplus Z_8, G_r \oplus Z_8, G_r \oplus Z_8 \oplus Z_{24}, G_r \oplus Z_8, G_r \oplus Z_4, G_r \oplus Z_2$$

(wo G_r die stabile Homotopiegruppe des jeweiligen Stammes und Z_m die zyklische Gruppe der Ordnung m bezeichnet), während etwa für $r = 8k + 5$ die entsprechenden Gruppen die Form

$$G_r \oplus Z_2, G_r \oplus Z_2, G_r \oplus Z_2 \oplus Z_2, G_r \oplus Z_2 \oplus Z_2, G_r \oplus Z_2, G_r \oplus Z$$

(worin Z die freie zyklische Gruppe bezeichnet) haben. Ähnliche Aussagen gelten auch für die anderen Restklassen von r modulo 8. Die genaue Formulierung und eine Zusammenstellung dieser Ergebnisse findet man in § 1, die Beweise folgen in § 3.

Des weiteren werden wir uns mit der Frage beschäftigen, welche Homotopiegruppen von Sphären aus dem Nullelement allein bestehen können. Von einer Vielzahl dieser Gruppen werden wir, ohne ihre tatsächliche Struktur genau zu kennen, nachweisen, daß sie jedenfalls nicht Null sein können. Bezüglich der stabilen Homotopiegruppen etwa werden wir zeigen:

Wenn die natürliche Zahl r einer der Restklassen 0, 1, 2, 3, 6 oder 7 (modulo 8) angehört, so ist die 2-Komponente der stabilen Homotopiegruppe G_r des r -Stammes von Null verschieden.

Einige weitere Sätze über nichtverschwindende Homotopiegruppen werden auch für den unstabilen Fall bewiesen werden. Diese Ergebnisse sind ebenfalls, zusammen mit einigen Folgerungen, in § 1 zusammengestellt. Die Beweise dieser Aussagen werden in § 4 geführt werden.

Herrn Professor Dr. W. FRANZ danke ich für Anregung und Förderung dieser Arbeit.

§ 1

Einige Vorbemerkungen bilden den ersten Teil dieses Paragraphen. Daran anschließend folgt eine Darstellung der in der Einleitung angekündigten Ergebnisse.

Die n -dimensionale Sphäre S^n , $n \geq 1$, fassen wir im folgenden stets auf als Teilmenge des Hilbertraumes, bestehend aus den Punkten $(x_1, x_2, \dots)$ mit $x_j = 0$ für $j > n + 1$ und mit

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Hierdurch wird erreicht, daß der Punkt $b = (1, 0, 0, \dots)$ allen Sphären zugehört. Wir wählen b als Basispunkt und werden unter der i -ten Homotopiegruppe $\pi_i(S^n)$ der n -Sphäre immer die Gruppe $\pi_i(S^n; b)$ verstehen. Alle auftretenden Abbildungen bilden den Basispunkt auf sich ab. Unter dem r -Stamm, $r > 0$, verstehen wir wie üblich die Folge der Homotopiegruppen $\pi_{r+n}(S^n)$, wobei n die natürlichen Zahlen durchläuft. Der FREUDENTHALSche Einhängungshomomorphismus

$$E: \pi_{r+n}(S^n) \rightarrow \pi_{r+n+1}(S^{n+1})$$

ist bekanntlich für $n \geq r + 2$ ein Isomorphismus (vgl. [4]). Die Limesgruppe $\lim \pi_{r+n}(S^n)$ heißt die stabile Gruppe des r -Stammes und werde mit G_r bezeichnet, also

$$\pi_{r+n}(S^n) \approx G_r \quad \text{für } n \geq r + 2.$$

Die übrigen $r + 1$ Homotopiegruppen des r -Stammes $\pi_{r+n}(S^n)$, $n = 1, 2, \dots, r + 1$, heißen die unstabilen Gruppen dieses Stammes. Die letzte, zweitletzte, drittletzte usw. unstabile Gruppe des r -Stammes bezeichnen wir abkürzend auch durch G_r^{-1} , G_r^{-2} , G_r^{-3} usw.; es ist also

$$G_r^{-1} = \pi_{2r+1}(S^{r+1}), \quad G_r^{-2} = \pi_{2r}(S^r), \quad G_r^{-3} = \pi_{2r-1}(S^{r-1})$$

und allgemein

$$G_r^q = \pi_{2r+q+2}(S^{r+q+2}) \quad \text{für } -r - 1 \leq q \leq -1.$$

Wie schon erwähnt, bezeichne Z bzw. Z_m die unendliche zyklische Gruppe bzw. die zyklische Gruppe der Ordnung m . Unter $o(G)$ verstehen wir die Ordnung einer Gruppe G , unter $o(\alpha)$ die Ordnung eines Gruppenelementes α . Es wird sich weiter als zweckmäßig erweisen, für gewisse spezielle Elemente von Homotopiegruppen von Sphären eine Bezeichnung einzuführen. So sei ι_n die Homotopieklasse der identischen Abbildungen $S^n \rightarrow S^n$. Die durch die Hopf'schen Abbildungen $S^3 \rightarrow S^2$ bzw. $S^7 \rightarrow S^4$ bestimmten Klassen nennen wir η_2

bzw. ν_4 und definieren η_n (bzw. ν_n) als die $(n-2)$ -fach (bzw. die $(n-4)$ -fach) iterierte Einhängung von η_2 (bzw. von ν_4), also

$$\eta_n = E^{n-2}(\eta_2) \in \pi_{n+1}(S^n) \quad \text{für } n > 2$$

und

$$\nu_n = E^{n-4}(\nu_4) \in \pi_{n+3}(S^n) \quad \text{für } n > 4.$$

Unter $[\alpha, \beta]$ sei schließlich das Whiteheadprodukt aus den Elementen α und β verstanden.

Über den in der Einleitung erwähnten Zusammenhang zwischen der Struktur der letzten unstabilen Homotopiegruppen und der stabilen Gruppe im r -Stamm gelten nun die folgenden Sätze (die verschiedenen Sätze beziehen sich auf die verschiedenen Restklassen von r modulo 8):

1.1. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $8k$ -Stamm die folgende Struktur:

$$G_{8k}^{-1} \approx G_{8k} \oplus Z_2, \quad G_{8k}^{-2} \approx G_{8k} \oplus Z_2 \oplus Z_2, \quad G_{8k}^{-3} \approx G_{8k} \oplus Z_2.$$

Ist k keine Zweierpotenz, $k \neq 2^j$ mit $j \geq 0$, so gilt darüber hinaus

$$G_{8k}^{-4} \approx G_{8k} \oplus Z_{12}, \quad G_{8k}^{-5} \approx G_{8k}^{-6} \approx G_{8k}.$$

1.2. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+1)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} G_{8k+1}^{-1} &\approx G_{8k+1} \oplus Z, & G_{8k+1}^{-2} &\approx G_{8k+1} \oplus Z_2, \\ G_{8k+1}^{-3} &\approx G_{8k+1} \oplus Z_2 \oplus Z_2, & G_{8k+1}^{-4} &\approx G_{8k+1} \oplus Z_2, \\ G_{8k+1}^{-5} &\approx G_{8k+1}^{-6} \approx G_{8k+1}^{-7} \approx G_{8k+1}. \end{aligned}$$

1.3. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+2)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} G_{8k+2}^{-1} &\approx G_{8k+2} \oplus Z_2, & G_{8k+2}^{-2} &\approx G_{8k+2} \oplus Z_4, \\ G_{8k+2}^{-3} &\approx G_{8k+2} \oplus Z_8, & G_{8k+2}^{-4} &\approx G_{8k+2} \oplus Z_8 \oplus Z_{24}, \\ G_{8k+2}^{-5} &\approx G_{8k+2} \oplus Z_8. \end{aligned}$$

Für alle $k \geq 2$ gilt darüber hinaus

$$G_{8k+2}^{-6} \approx G_{8k+2} \oplus Z_8.$$

1.4. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+3)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$G_{8k+3}^{-1} \approx G_{8k+3} \oplus Z, \quad G_{8k+3}^{-2} \approx G_{8k+3}^{-3} \approx G_{8k+3}.$$

Weiter gilt

$$G_{8k+3}^{-4} \approx G_{8k+3}^{-5} \approx G_{8k+3}^{-6}.$$

Die Ordnung dieser drei Gruppen ist das Doppelte der Ordnung von G_{8k+3} .

Insbesondere ist

$$G_{8k+3}^{-4} \approx G_{8k+3}^{-5} \approx G_{8k+3}^{-6} \approx G_{8k+3} \oplus Z_2,$$

wenn das Element $[\nu_{8k+1}, \iota_{8k+1}]$ in $\pi_{16k+4}(S^{8k+1})$ nicht halbirbar ist.

1.5. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+4)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} G_{8k+4}^{-1} &\approx G_{8k+4} \oplus Z_2, & G_{8k+4}^{-2} &\approx G_{8k+4} \oplus Z_2 \oplus Z_2, \\ G_{8k+4}^{-3} &\approx G_{8k+4} \oplus Z_2, & G_{8k+4}^{-4} &\approx G_{8k+4} \oplus Z_{12}, \\ G_{8k+4}^{-5} &\approx G_{8k+4}^{-6} \approx G_{8k+4}^{-7} \approx G_{8k+4}. \end{aligned}$$

1.6. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+5)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} G_{8k+5}^{-1} &\approx G_{8k+5} \oplus Z, & G_{8k+5}^{-2} &\approx G_{8k+5} \oplus Z_2, \\ G_{8k+5}^{-3} &\approx G_{8k+5}^{-4} \approx G_{8k+5} \oplus Z_2 \oplus Z_2, & G_{8k+5}^{-5} &\approx G_{8k+5}^{-6} \approx G_{8k+5} \oplus Z_2. \end{aligned}$$

1.7. Satz: (a) Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+6)$ -Stamm die folgende Ordnung:

$$\begin{aligned} o(G_{8k+6}^{-1}) &= 2 \cdot o(G_{8k+6}), & o(G_{8k+6}^{-2}) &= 4 \cdot o(G_{8k+6}), \\ o(G_{8k+6}^{-3}) &= 8 \cdot o(G_{8k+6}). \end{aligned}$$

(b) Ist $k+1$ keine Zweierpotenz, $k+1 \neq 2^j$ mit $j \geq 1$, so gilt weiter

$$o(G_{8k+6}^{-4}) = 192 \cdot o(G_{8k+6}), \quad o(G_{8k+6}^{-5}) = o(G_{8k+6}^{-6}) = 16 \cdot o(G_{8k+6}).$$

(c) Für alle $k > 1$, für welche das Element $[\iota_{8k+7}, \iota_{8k+7}]$ in $\pi_{16k+13}(S^{8k+7})$ nicht halbbierbar ist, haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+6)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$G_{8k+6}^{-1} \approx G_{8k+6} \oplus Z_2, \quad G_{8k+6}^{-2} \approx G_{8k+6} \oplus Z_4, \quad G_{8k+6}^{-3} \approx G_{8k+6} \oplus Z_8.$$

(d) Für alle $k \geq 1$ gilt $G_{8k+6}^{-5} \approx G_{8k+6}^{-6}$.

1.8. Satz: Für alle $k \geq 1$ haben die letzten unstabilen Homotopiegruppen im $(8k+7)$ -Stamm die folgende Struktur:

$$G_{8k+7}^{-1} \approx G_{8k+7} \oplus Z, \quad G_{8k+7}^{-2} \approx G_{8k+7}^{-3} \approx G_{8k+7}.$$

Weiter gilt $G_{8k+7}^{-5} \approx G_{8k+7}^{-6}$ und, wenn $k+1$ keine Zweierpotenz ist, auch $G_{8k+7}^{-5} \approx G_{8k+7}^{-4}$. Die Ordnung der drei Gruppen

$$G_{8k+7}^{-4}, \quad G_{8k+7}^{-5} \quad \text{und} \quad G_{8k+7}^{-6}$$

ist in diesem Falle das Doppelte der Ordnung der stabilen Gruppe G_{8k+7} . Ist außerdem das Element $[\nu_{8k+5}, \iota_{8k+5}]$ in $\pi_{16k+12}(S^{8k+5})$ nicht halbbierbar, so gilt darüber hinaus

$$G_{8k+7}^{-4} \approx G_{8k+7}^{-5} \approx G_{8k+7}^{-6} \approx G_{8k+7} \oplus Z_2.$$

Die in diesen Sätzen enthaltenen Aussagen über die Ordnung der letzten unstabilen Homotopiegruppen des r -Stammes seien der besseren Übersicht wegen noch einmal zusammengestellt. Nach den obigen Sätzen sind diese Ordnungen entweder gleich der Ordnung der jeweiligen stabilen Gruppe oder gleich einem Vielfachen davon. Die folgende Tabelle liefert die Ordnung der Gruppe G_q^r , ausgedrückt durch die Ordnung a der jeweiligen stabilen Gruppe G_r , in Abhängigkeit von q und der Restklasse von r modulo 8:

	$q = -7$	$q = -6$	$q = -5$	$q = -4$	$q = -3$	$q = -2$	$q = -1$
$r = 8k$		$a^{\otimes}$	$a^{\otimes}$	$12a^{\otimes}$	$2a$	$4a$	$2a$
$r = 8k + 1$	a	a	a	$2a$	$4a$	$2a$	∞
$r = 8k + 2$		$8a^{\odot}$	$8a$	$192a$	$8a$	$4a$	$2a$
$r = 8k + 3$		$2a$	$2a$	$2a$	a	a	∞
$r = 8k + 4$	a	a	a	$12a$	$2a$	$4a$	$2a$
$r = 8k + 5$		$2a$	$2a$	$4a$	$4a$	$2a$	∞
$r = 8k + 6$		$16a^{\oplus}$	$16a^{\oplus}$	$192a^{\oplus}$	$8a$	$4a$	$2a$
$r = 8k + 7$		$2a^{\oplus}$	$2a^{\oplus}$	$2a^{\oplus}$	a	a	∞

Diese Tabelle gilt für alle $k \geq 1$, wo nichts anderes bemerkt. Die Bedeutung der Zeichen ist dabei wie folgt:

$\otimes$: wenn k keine Zweierpotenz 2^j , $j \geq 0$, ist;

$\oplus$: wenn $k + 1$ keine Zweierpotenz 2^j , $j \geq 1$, ist;

$\odot$: wenn $k \geq 2$ ist.

Bezüglich der zweiten in der Einleitung erwähnten Fragestellung, welche Homotopiegruppen von Sphären aus dem Nullelement allein bestehen können, soll gezeigt werden:

1.9. Satz: Für alle natürlichen Zahlen $r \equiv 0, 1, 2, 3, 6$ oder 7 (modulo 8) ist die 2-Komponente der stabilen Homotopiegruppe G_r des r -Stammes von Null verschieden.

Erst recht sind also die ganzen Gruppen G_r in diesen Fällen ungleich Null. Für die verbleibenden Fälle $r \equiv 4, 5$ (modulo 8), für welche die entsprechende Aussage allgemein nicht gilt (so ist beispielsweise $G_4 = G_5 = G_{12} = 0$ und $G_{13} = Z_3$), beweist man jedoch:

1.10. Satz: Sowohl unter den G_{8k+4} als auch unter den G_{8k+5} gibt es unendlich viele nichttriviale Gruppen.

In den Fällen $r \equiv 2, 6$ (modulo 8) gilt darüber hinaus:

1.11. Satz: Für alle $k \geq 0$ enthält die stabile Gruppe G_{8k+2} eine zyklische Gruppe Z_2 der Ordnung 2 als direkten Summanden.

1.12. Satz: Für $k = 0, 1$ und alle $k > 1$, für welche das Element $w_{8k+7} = [\iota_{8k+7}, \iota_{8k+7}]$ in $\pi_{16k+13}(S^{8k+7})$ nicht halbirbar ist, enthält die stabile Gruppe G_{8k+6} eine zyklische Gruppe Z_2 der Ordnung 2 als direkten Summanden.

Weiter gilt über die stabilen Homotopiegruppen:

1.13. Satz: Sei k eine natürliche Zahl, sei p eine ungerade Primzahl mit $(p-1) \mid 2k$. Dann teilt p die Ordnung der stabilen Homotopiegruppe G_{4k-1} .

1.14. Satz: Sei k eine natürliche Zahl, sei p eine ungerade Primzahl mit $(p-1) \mid 2k$. Sei weiter p^i Teiler von k für eine nichtnegative ganze Zahl i . Dann teilt p^{i+1} die Ordnung der stabilen Homotopiegruppe G_{4k-1} .

1.15. Satz: Sei m eine natürliche Zahl und t eine ungerade natürliche Zahl mit $\varphi(t) \mid m$ (φ ist die Eulersche φ -Funktion). Dann teilt t die Ordnung der stabilen Homotopiegruppe G_{2m-1} .

Aus diesen Sätzen ergeben sich eine Reihe von Folgerungen, so etwa:

1.16. Korollar: Wenn p eine ungerade Primzahl und r eine natürliche Zahl mit $r \equiv -1 \pmod{2p-2}$ ist, so gilt $p \mid o(G_r)$.

Daraus wiederum folgt beispielsweise für $p = 3$ und $p = 5$:

1.17. Korollar: (a) Für alle $k \geq 0$ ist die 3-Komponente von G_{8k+3} und G_{8k+7} ungleich Null.

(b) Für alle $k \geq 0$ ist darüber hinaus die 5-Komponente von G_{8k+7} ungleich Null.

Weiterhin erhält man durch Benutzung der in [12] aufgeführten Zusammenhänge zwischen den stabilen Homotopiegruppen G_r und den Milnorschen Kobordismengruppen Θ_r Aussagen über diese abelschen Gruppen Θ_r , die nach MILNOR alle endlich sind. So gilt etwa:

1.18. Korollar: Für alle natürlichen Zahlen $r > 6$ mit $r \equiv 1, 3$ oder 7 (modulo 8) ist Θ_r von Null verschieden. In allen anderen Restklassen modulo 8 gibt es jeweils unendlich viele von Null verschiedene Kobordismengruppen Θ_r .

Da nach S. SMALE [18] die Ordnung von Θ_r (zumindest für $r \neq 3, 4$) mit der Anzahl d_r aller Diffeomorphieklassen von differenzierbaren Strukturen auf der r -dimensionalen Sphäre S^r übereinstimmt, hat man somit entsprechende Aussagen auch über diese Zahlen d_r .

Aus Satz 1.9, zusammen mit den Ergebnissen in den Sätzen 1.1 bis 1.8, schließt man über die letzten unstabilen Homotopiegruppen:

1.19. Korollar: (a) Für alle $k \geq 1$ sind im $(8k+1)$ -, $(8k+2)$ -, $(8k+3)$ -, $(8k+5)$ -, $(8k+6)$ - und $(8k+7)$ -Stamm die letzten sieben unstabilen Homotopiegruppen ungleich Null.

(b) Für alle $k \geq 0$ sind im $(8k+4)$ -Stamm die letzten vier unstabilen Homotopiegruppen ungleich Null.

(c) Für alle $k \geq 0$ sind im $(8k)$ -Stamm die letzten vier unstabilen Homotopiegruppen ungleich Null. Dies gilt auch von den letzten sieben unstabilen Homotopiegruppen dieses Stammes, wenn k keine Zweierpotenz ist.

Benutzt man weiter unser Ergebnis in [19], so erhält man noch die folgenden Aussagen über unstabile Homotopiegruppen von Sphären:

1.20. Satz: Sei p eine ungerade Primzahl und k eine natürliche Zahl mit $(p-1) \mid 2k$. Dann ist die p -Komponente von $\pi_{n+4k-1}(S^n)$ ungleich Null, wenn

$$n \geq \frac{4k+2}{p-1}, \quad \text{falls } n \text{ gerade bzw.}$$

$$n \geq \frac{4k+2}{p-1} - 1, \quad \text{falls } n \text{ ungerade ist.}$$

1.21. Satz: Sei p eine ungerade Primzahl, k eine natürliche Zahl mit $(p-1) \mid 2k$ sowie n eine gerade natürliche Zahl mit

$$n \geq \frac{4k+1}{p-2}.$$

Dann ist die p -Komponente der Homotopiegruppe $\pi_{2n+4k-2}(S^n)$ ungleich Null.

Bemerkung: Entsprechende Aussagen wie die von Satz 1.11. und 1.12. gibt es auch für den $(8k)$ - und den $(8k+1)$ -Stamm. Es gilt nämlich:

1.22. Satz: (a) Für alle $k \geq 1$ enthält G_{8k} einen direkten Summanden Z_2 .

(b) Für alle $k \geq 1$ enthält G_{8k+1} einen direkten Summanden $(Z_2 + Z_2)$.

Herrn Professor ADAMS danke ich für einen Hinweis, wie man diese beiden Aussagen unter Benutzung der K -Theorie beweisen kann. Dieser Beweis soll

hier jedoch nicht aufgenommen werden, da er den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

§ 2

Zur Bequemlichkeit des Lesers sollen in diesem Paragraphen einige Tatsachen und Hilfsmittel in Kurzfassung zusammengestellt werden, die in den Beweisen der obigen Sätze des öfteren benutzt werden, ehe wir uns in den Paragraphen 3 und 4 diesen Beweisen selbst zuwenden. Die wichtigste Rolle bei diesen Überlegungen spielt naturgemäß die Einhängung, deren Wirken genauer untersucht werden muß. Hierzu dient zunächst die Whiteheadsche EHP -Sequenz. Da nach FREUDENTHAL [4] die $(n+1)$ -mal iterierte Einhängung

$$E^{n+1}: \pi_{i-n}(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{2n+1})$$

für $i \leq 3n-2$ ein Isomorphismus ist, kann durch $P(\alpha) = [E^{-n-1}(\alpha), \iota_n]$ für diese Werte von i ein Homomorphismus

$$P: \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_{i-1}(S^n)$$

definiert werden. Bezeichnet man weiter mit

$$H: \pi_{i+1}(S^{n+1}) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{2n+1})$$

G. W. WHITEHEADS Verallgemeinerung des Hopfschen Homomorphismus (vgl. [23]), so stellt die EHP -Sequenz eine Verknüpfung der Homomorphismen P und H mit der Einhängung E dar. In [24] wurde bewiesen:

2.1. Die EHP -Sequenz

$$\pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{i-1}(S^n) \xrightarrow{E} \dots$$

ist für $i \leq 3n-2$ exakt.

Für den Kern des Einhängungshomomorphismus ergibt sich somit (vgl. auch [11], Satz 7.7):

2.2. Der Kern der Einhängung $E: \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$ besteht für $i < 3n$ aus den Elementen $[\alpha, \iota_n]$, wobei $\alpha \in \pi_{i-n+1}(S^n)$.

Hieraus erhält man sofort Aufschluß über den Kern sowie den Kokern der Einhängung in den uns interessierenden Fällen. Wir unterscheiden dazu die Einhängungshomomorphismen, die die letzten unstabilen Homotopiegruppen des r -Stammes miteinander verbinden, durch Indices voneinander:

$$\begin{aligned} \pi_{2r-5}(S^{r-5}) &\xrightarrow{E_5} \pi_{2r-4}(S^{r-4}) \xrightarrow{E_4} \pi_{2r-3}(S^{r-3}) \xrightarrow{E_3} \pi_{2r-2}(S^{r-2}) \xrightarrow{E_2} \\ &\xrightarrow{E_1} \pi_{2r-1}(S^{r-1}) \xrightarrow{E_0} \pi_{2r}(S^r) \xrightarrow{E_1} \pi_{2r+1}(S^{r+1}) \xrightarrow{E_0} \pi_{2r+2}(S^{r+2}) \approx G_r. \end{aligned}$$

Die Aussagen über Kern und Kokern der Einhängung lauten dann:

2.3. (a) Für $r \geq 0$ erzeugt $[\iota_{r+1}, \iota_{r+1}]$ den Kern von E_0 .

(b) Für $r \geq 3$ erzeugt $[\eta_r, \iota_r]$ den Kern von E_1 .

(c) Für $r \geq 3$ erzeugt $[\theta_{r-1}, \iota_{r-1}]$ den Kern von E_2 .

(d) Für $r \geq 7$ erzeugt $[\nu_{r-2}, \iota_{r-2}]$ den Kern von E_3 .

(e) Für $r \geq 9$ ist E_4 ein Monomorphismus.

(f) Für $r \geq 11$ ist E_5 ein Monomorphismus.

(g) Für $r \geq 11$ erzeugt $[\kappa_{r-5}, \iota_{r-5}]$ den Kern von E_6 .

2.4. (a) Für $r \geq 0$ ist E_0 ein Epimorphismus.

(b) Für gerade $r \geq 2$ ist E_1 ein Epimorphismus, für ungerade $r \geq 3$ ist $\text{Koker } E_1 = Z$.

(c) Für $r \geq 4$ ist $\text{Koker } E_2 = Z_m$ mit $m = \frac{2}{q}$, wobei $q = o([\eta_{r-1}, \iota_{r-1}])$ ist.

(d) Für $r \geq 6$ ist $\text{Koker } E_3 = Z_m$ mit $m = \frac{2}{q}$, wobei $q = o([\vartheta_{r-2}, \iota_{r-2}])$ ist.

(e) Für $r \geq 8$ ist $\text{Koker } E_4 = Z_m$ mit $m = \frac{24}{q}$, wobei $q = o([\nu_{r-3}, \iota_{r-3}])$ ist.

(f) Für $r \geq 10$ ist E_5 ein Epimorphismus.

(g) Für $r \geq 12$ ist E_6 ein Epimorphismus.

Hierin bezeichnen die Elemente ι_r, η_r, ν_r , wie schon in § 1 erwähnt wurde, die Erzeugenden der Gruppen

$$\pi_r(S^r), \pi_{r+1}(S^r), \pi_{r+3}(S^r)$$

und zur Abkürzung ist die Zusammensetzung $\eta_r \circ \eta_{r+1}$ mit ϑ_r , die Zusammensetzung $\nu_r \circ \nu_{r+3}$ mit κ_r bezeichnet. Bezeichnet man weiter die von einem Element ε erzeugte zyklische Gruppe Z bzw. Z_m mit $Z(\varepsilon)$ bzw. $Z_m(\varepsilon)$, so gilt nämlich (vgl. etwa [21]):

2.5. (a) $\pi_n(S^n) = Z(\iota_n)$ für $n \geq 1$,

(b) $\pi_{n+1}(S^n) = Z_2(\eta_n)$ für $n \geq 3$,

(c) $\pi_{n+2}(S^n) = Z_2(\vartheta_n)$ für $n \geq 2$,

(d) $\pi_{n+3}(S^n) = Z_{24}(\nu_n)$ für $n \geq 5$,

(e) $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ für $n \geq 6$,

(f) $\pi_{n+5}(S^n) = 0$ für $n \geq 7$,

(g) $\pi_{n+6}(S^n) = Z_2(\kappa_n)$ für $n \geq 5$;

sowie ferner

2.6. $\eta_n \circ \eta_{n+1} \circ \eta_{n+2} = \vartheta_n \circ \eta_{n+2} = 12 \cdot \nu_n$.

Um Kern und Kokern der Einhängung in diesen Fällen zu kennen, muß man also die Whiteheadprodukte $[\alpha, \iota_n]$ für $\alpha = \iota_n, \eta_n, \vartheta_n, \nu_n$ sowie κ_n und alle $n \geq 1$ untersuchen. Einige Ergebnisse in dieser Richtung haben bereits vor längerem P. J. HILTON und J. H. C. WHITEHEAD in [7] und [8] bewiesen:

2.7. (a) $[\eta_n, \iota_n] \neq 0$, wenn $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

(b) $[\eta_n, \iota_n] = 0$, wenn $n \equiv -1 \pmod{4}$.

(c) $[\eta_n, \iota_n] = 0$, wenn $n \equiv 2$ oder 6 .

2.8. (a) $[\vartheta_n, \iota_n] = 0$, wenn $n \equiv -1, 2 \pmod{4}$.

(b) $[\vartheta_n, \iota_n] \neq 0$, wenn $n \equiv 0 \pmod{4}$.

(c) $[\vartheta_n, \iota_n] = 0$, wenn $n \equiv 5$.

2.9. $[\nu_n, \iota_n] = 0$, wenn $n \equiv -1 \pmod{8}$.

In § 3 wird gezeigt werden:

2.10. $o([\nu_n, \iota_n]) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } n \equiv 1, 3 \pmod{8} \\ 12, & \text{wenn } n \equiv 2, 6 \pmod{8} \end{cases}$.

2.11. $[\kappa_n, \iota_n] = 0$, wenn $n \equiv 4 \pmod{8}$.

Über die hier noch fehlenden Fälle bewies jüngst M. E. MAHOWALD (bisher unveröffentlicht, vgl. aber [14]) die folgenden Aussagen:

2.12. $[\eta_n, \iota_n] \neq 0$, wenn $n \equiv 2 \pmod{4}$ und $n > 6$.

2.13. $[\vartheta_n, \iota_n] \neq 0$, wenn $n \equiv 1 \pmod{4}$ und $n > 5$.

2.14. $o([\nu_n, \iota_n]) = \begin{cases} 24, & \text{wenn } n \equiv 0 \pmod{8} \\ 24, & \text{wenn } n \equiv 4 \pmod{8} \text{ und } n \neq 2^j - 4 \\ 2, & \text{wenn } n \equiv 5 \pmod{8} \text{ und } n \neq 2^j - 3. \end{cases}$

Schließlich betrachten wir noch die Elemente $w_n = [\iota_n, \iota_n]$. Bekanntlich ist $w_n = 0$ genau dann, wenn in $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ ein Element mit der Hopfschen Invariante 1 existiert (vgl. [22], Satz 3.12). J. F. ADAMS bewies in [1], daß dies gerade für $n = 1, 3$ und 7 der Fall ist. Aus der Antikommutativität des Whiteheadproduktes folgt, daß für alle anderen ungeraden n die Ordnung $o(w_n) = 2$ ist. Für gerade n hat w_n bekanntlich die Hopfsche Invariante 2 und daher unendliche Ordnung. Es ist also

2.15. $o(w_n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 1, 3 \text{ oder } 7 \\ 2, & \text{für alle anderen ungeraden } n \\ \infty, & \text{für alle geraden } n. \end{cases}$

Des weiteren benötigen wir die folgenden Formeln (vgl. [3], Satz 2.11):

2.16. Wenn $\alpha \in \pi_{p-1}(S^{n-1})$ und $\beta \in \pi_{q-1}(S^{n-1})$, so gilt

$$[E\alpha, E\beta] = (-1)^{p(q+n)} \cdot w_n E^n(\alpha) E^p(\beta).$$

Daraus folgt insbesondere

2.17. (a) $[\eta_n, \iota_n] = [\iota_n, \iota_n] \circ \eta_{2n-1}$,

(b) $[\vartheta_n, \iota_n] = [\iota_n, \iota_n] \circ \vartheta_{2n-1}$,

(c) $[\nu_n, \iota_n] = [\iota_n, \iota_n] \circ \nu_{2n-1}$,

(d) $[\eta_n, \eta_n] = [\vartheta_n, \iota_n]$.

In [5] und [6] bewies P. J. HILTON:

2.18. (a) Wenn $\alpha \in \pi_p(S^n)$, $\beta \in \pi_r(S^p)$, $r \leq 4p - 4$, $p \leq 4n - 4$ und $r \leq 4n - 4$, so gilt

$$H(\alpha \circ \beta) = (H\alpha) \circ \beta + E^{n-1}\alpha \circ E^{p-1}\alpha \circ H\beta.$$

(b) Ist n ungerade, $\alpha \in \pi_i(S^n)$, $i \leq 4n - 4$, so gilt $2 \cdot H(\alpha) = 0$.

Aus 2.16 und 2.18 folgt noch (wegen $H\beta = 0$ für eingehängte Elemente β):

2.19. Es sei $\alpha \in \pi_{p-1}(S^{n-1})$, $\beta \in \pi_{q-1}(S^{n-1})$ und $p + q \leq 4n - 3$. Dann gilt

$$H([E\alpha, E\beta]) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{p(q+n)} \cdot 2E^n\alpha \circ E^p\beta, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung der $EH P$ -Sequenz zu. Dazu bezeichnen wir, wie üblich, mit $V_{s,t}$ die reelle STIEFEL-Mannigfaltigkeit, deren Punkte geordnete t -Tupel orthonormierter Vektoren des euklidischen Raumes R^s , $s > t \geq 1$, sind. I. M. JAMES erklärt in [9] für $i \leq 3n - 2$ und alle natürlichen Zahlen m Homomorphismen

$$H_m : \pi_{i+m}(S^{n+m}) \rightarrow \pi_{i-n}(V_{n+m,m})$$

und

$$P_m : \pi_{i-n}(V_{n+m,m}) \rightarrow \pi_{i-1}(S^n),$$

von denen er den folgenden Zusammenhang mit der m -fach iterierten Einhängung E^m nachweist:

2.20. Die für $i \leq 3n - 2$ definierte Sequenz

$$\pi_i(S^n) \xrightarrow{E^m} \pi_{i+m}(S^{n+m}) \xrightarrow{H_m} \pi_{i-n}(V_{n+m,m}) \xrightarrow{P_m} \pi_{i-1}(S^n) \xrightarrow{E^m} \dots$$

ist exakt.

(Für $m = 1$ erhält man hieraus gerade wieder die normale EHP -Sequenz, da H_1 bzw. P_1 mit den oben auftretenden Homomorphismen H bzw. P bis auf Isomorphie übereinstimmen und $V_{n+1,1}$ zur n -Sphäre S^n homöomorph ist.)

Schon die Existenz dieser exakten Sequenz wird für unsere Untersuchungen bedeutsame Informationen über das Wirken der mehrfach iterierten Einhängung liefern. Dazu benutzen wir weiter einige der Resultate von G. F. PÄCHTER, der in [15] gewisse spezielle Homotopiegruppen von STIEFEL-Mannigfaltigkeiten berechnet hat. Die folgenden seiner Ergebnisse werden später benötigt werden:

2.21. Für alle $k \geq 1$ ist

- (a) $\pi_{4k+1}(V_{4k+4,4}) = Z_2 \oplus Z_2$
- (b) $\pi_{8k+2}(V_{8k+4,5}) = Z_2$
- (c) $\pi_{8k+3}(V_{8k+5,5}) = Z_{24} \oplus Z_8$
- (d) $\pi_{8k+5}(V_{8k+7,7}) = 0$
- (e) $\pi_{8k+4}(V_{8k+6,7}) = Z_2$
- (f) $\pi_{8k}(V_{8k+2,4}) = 0$
- (g) $\pi_{8k+1}(V_{8k+2,4}) = Z \oplus Z_{12}$
- (h) $\pi_{8k+2}(V_{8k+3,4}) = Z_2 \oplus Z_2$
- (i) $\pi_{8k+2}(V_{8k+5,3}) = Z$
- (j) $\pi_{8k+3}(V_{8k+5,3}) = Z_4$
- (k) $\pi_{8k+3}(V_{8k+5,4}) = Z_8$
- (l) $\pi_{8k+2}(V_{8k+5,6}) = Z_2$
- (m) $\pi_{8k+3}(V_{8k+5,6}) = Z_8$
- (n) $\pi_{8k+2}(V_{8k+1,2}) = Z_2 \oplus Z_2$
- (o) $\pi_{8k+3}(V_{8k+1,2}) = Z_2$
- (p) $\pi_{4k+3}(V_{4k+5,3}) = Z_4$
- (q) $\pi_{4k+3}(V_{4k+4,2}) = Z \oplus Z_2$.

An dieser Stelle soll ein Ergebnis von J. F. ADAMS erwähnt werden, welches bei mehreren der späteren Beweise eine bedeutende Rolle spielen wird. Es handelt sich um die Frage, ein wie oft eingehängtes Element das Whiteheadprodukt $w_n = [\iota_n, \iota_n]$ ist. Genauer wird für alle $n \geq 1$ eine nichtnegative ganze Zahl $\rho(n)$ dadurch eindeutig definiert, daß w_n zwar im Bild der $\rho(n)$ -mal iterierten Einhängung, nicht jedoch im Bild der $(\rho(n) + 1)$ -mal iterierten Einhängung liegen soll. Bekanntlich ist $\rho(n) = 0$ für gerade n und $\rho(n) \geq 1$ für alle ungeraden n . Stellt man die Zahl $n + 1$ in der Form

$$n + 1 = 16^a \cdot bc$$

dar, wobei $a \geq 0$, b ungerade und $c = 1, 2, 4$ oder 8 ist, so wird die Frage nach dem Zahlenwert von $\rho(n)$ durch den folgenden Satz beantwortet (vgl. [2]):

2.22. Für alle $n \geq 1$ gilt $\varrho(n) = 8a + c - 1$.

Um Aufschluß über die Struktur einiger Homotopiegruppen von Sphären zu erhalten, werden wir später zeigen, daß die *EHP*-Sequenz in vielen der uns interessierenden Fälle zerfällt. Dieser Nachweis ist in besonders einfachen Fällen sehr bequem zu führen, wenn man den folgenden algebraisch trivialen Hilfssatz benutzt:

2.23. Sei $i \leq 3n - 2$ und $\alpha \in \pi_{i+1}(S^{n+1})$ ein Element mit $m\alpha = 0$ (m natürliche Zahl). Das Bild des Hopfschen Homomorphismus

$$H: \pi_{i+1}(S^{n+1}) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{2n+1})$$

sei eine von $H(\alpha)$ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung m , also $\text{Im } H = Z_m(H(\alpha))$. Dann gilt

$$\pi_{i+1}(S^{n+1}) = Z_m(\alpha) \oplus E(\pi_i(S^n)).$$

Die Anwendbarkeit dieses Hilfssatzes beruht darauf, daß man in speziellen Fällen die Existenz von Elementen nachweisen kann, die die Voraussetzungen von 2.23 erfüllen. So gilt beispielsweise (BARRATT, unveröffentlicht):

2.24. Für alle $l \geq 1$ existieren Elemente $\delta_{4l} \in \pi_{8l}(S^{4l})$ und $\delta'_{4l-1} \in \pi_{8l-1}(S^{4l-1})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $2 \cdot \delta_{4l} = 0$ bzw. $2 \cdot \delta'_{4l-1} = 0$,
- (b) $E(\delta_{4l}) = w_{4l+1}$ bzw. $E(\delta'_{4l-1}) = [\eta_{4l}, \iota_{4l}]$,
- (c) $H(\delta_{4l}) = \eta_{8l-1}$ bzw. $H(\delta'_{4l-1}) = \vartheta_{8l-3}$.

Beweis. Dieses Lemma folgt, bis auf die Aussage unter (a), sofort aus Hilfssatz 11.10 in [21], indem man dort für $n = 4l - 1$ bzw. $4l - 2$ und für $\alpha = \iota_{8l-2}$ bzw. η_{8l-4} setzt. Lediglich $2 \cdot \delta_{4l} = 2 \cdot \delta'_{4l-1} = 0$ ist zu beweisen: Da $\varrho(\eta_{4l}) = 2$ ist, folgt $E(2\delta'_{4l-1}) = 0$. Wegen 2.3 wird der Kern der Einhängung

$$E: \pi_{8l-1}(S^{4l-1}) \rightarrow \pi_{8l}(S^{4l})$$

von dem Element $[\vartheta_{4l-1}, \iota_{4l-1}]$ erzeugt, welches nach 2.8 verschwindet. Also ist E ein Monomorphismus und daher ist auch $2\delta'_{4l-1} = 0$. Um auch $2\delta_{4l} = 0$ zu beweisen, benützen wir die Sequenz aus 2.20 in dem folgenden Spezialfall:

$$\pi_{4l+1}(V_{4l+4,4}) \xrightarrow{P_4} \pi_{8l}(S^{4l}) \xrightarrow{E^4} \pi_{8l+4}(S^{4l+4}).$$

Da schon $E^2(\delta_{4l}) = E(w_{4l+1}) = 0$ ist, liegt δ_{4l} erst recht im Kern der vierfach iterierten Einhängung E^4 . Wegen der Exaktheit obiger Sequenz für alle $l \geq 1$ ist also $\delta_{4l} = P_4(\alpha)$ für irgendein Element $\alpha \in \pi_{4l+1}(V_{4l+4,4}) = Z_2 \oplus Z_2$; es gilt also jedenfalls $2\alpha = 0$, und somit auch $2 \cdot \delta_{4l} = 0$.

In anderem Zusammenhang werden noch zwei weitere Ergebnisse benutzt werden. In [20] bewies H. TODA die folgende Aussage:

2.25. Sei p eine ungerade Primzahl. Dann ist in jedem der folgenden Fälle die p -Komponente der stabilen Gruppe G_r von Null verschieden:

- (a) wenn $r = 2(p-1)(tp+s) - 2(t-s)$
- (b) wenn $r = 2(p-1)(tp+s+1) - 2(t-s) - 1$.

Dabei sind jeweils s und t ganze Zahlen mit $0 \leq s < t \leq p-1$.

Schließlich haben M. A. KERVAIRE und J. MILNOR in [13] für alle natürlichen Zahlen r eine Gruppe $\mathcal{O}_r$, die Kobordismengruppe (genauer: h -Kobordis-

mengruppe) dieser Dimension r definiert. Zwischen der Ordnung dieser Gruppen Θ_r und der Ordnung der stabilen Homotopiegruppen G_r der Sphären gibt es die folgenden Beziehungen (vgl. [12]):

2.26. Bezeichnet B_k die k -te Bernoullische Zahl und ist $a_k = 1$ für gerade k bzw. $a_k = 2$ für ungerade natürliche Zahlen k , so gilt:

$$(a) \quad o(\Theta_{4k-1}) = o(G_{4k-1}) \cdot 2^{2k-4} (2^{2k-1} - 1) \cdot B_k \cdot \frac{a_k}{k}, \text{ für alle } k > 1,$$

$$(b) \quad o(\Theta_{4k}) = o(G_{4k}) \cdot \frac{a_k}{2}, \text{ für alle } k > 1,$$

$$(c) \quad o(\Theta_{4k+1}) = o(G_{4k+1}) \cdot \frac{a_k}{2} \cdot u_k, \text{ für alle } k \geq 1,$$

$$(d) \quad o(\Theta_{4k+2}) = o(G_{4k+2}) \cdot \frac{u_k}{2}, \text{ für alle } k \geq 1.$$

In (c) und (d) ist u_k eine der beiden Zahlen 1 oder 2.

§ 3

Wir kommen nun zu den Beweisen. Zunächst betrachten wir die letzten beiden unstabilen Gruppen des $(2m+1)$ -Stammes (die Einhängungshomomorphismen werden jetzt wieder durch Indices unterschieden):

$$\pi_{4m+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{E_1} \pi_{4m+3}(S^{2m+2}) \xrightarrow{E_0} \pi_{4m+4}(S^{2m+3}) \approx G_{2m+1}.$$

Es gilt:

3.1. Für alle $m \geq 4$ gilt im $(2m+1)$ -Stamm

$$(a) \quad \pi_{4m+3}(S^{2m+2}) = Z(w_{2m+2}) \oplus \text{Im } E_1$$

$$(b) \quad \text{Im } E_1 \approx G_{2m+1}, \text{ also auch}$$

$$(c) \quad G_{2m+1}^{-1} = \pi_{4m+3}(S^{2m+2}) \approx G_{2m+1} \oplus Z(w_{2m+2}).$$

Nach J. P. SERRE ist nämlich $\pi_{4m+3}(S^{2m+2})$ direkte Summe einer freien zyklischen und einer endlichen abelschen Gruppe. Für alle $m \geq 4$ gibt es in ihr kein Element mit der Hopfschen Invariante 1; weiter ist nach 2.19 $H(w_{2m+1}) = 2 \cdot \iota_{4m+3}$. Der freie Anteil wird daher von w_{2m+2} erzeugt und der endliche Bestandteil muß mit dem Kern von

$$H: \pi_{4m+3}(S^{2m+2}) \rightarrow \pi_{4m+3}(S^{4m+3}),$$

also wegen der Exaktheit der EHF -Sequenz mit $\text{Im } E_1$ übereinstimmen. Nach 2.3 und 2.4 ist aber E_0 ein Epimorphismus mit $\text{Ker } E_0 = Z(w_{2m+2})$, woraus sich 3.1 ergibt.

Wegen 2.3 und 2.7 ist E_1 für $m = 2l+1$ ein Monomorphismus. Es folgt daher sofort

3.2. Für alle $l \geq 2$ gilt im $(4l+3)$ -Stamm:

$$(a) \quad G_{4l+3}^{-1} = \pi_{8l+7}(S^{4l+4}) \approx G_{4l+3} \oplus Z(w_{4l+4})$$

$$(b) \quad G_{4l+3}^{-2} = \pi_{8l+6}(S^{4l+3}) \approx G_{4l+3}.$$

Weiter ist E_2 in diesem Stamm nach 2.3 und 2.8 ein Monomorphismus und nach 2.4 und 2.12 ein Epimorphismus. Also gilt:

3.3. Für alle $l \geq 2$ ist im $(4l+3)$ -Stamm

$$G_{4l+3}^{-3} = \pi_{8l+5}(S^{4l+2}) \approx G_{4l+3}.$$

Betrachtet man nun die nächsten unstabilen Gruppen des $(4l+3)$ -Stammes

$$\pi_{8l+2}(S^{4l-1}) \xrightarrow{E_5} \pi_{8l+3}(S^{4l}) \xrightarrow{E_4} \pi_{8l+4}(S^{4l+1}) \xrightarrow{E_3} \pi_{8l+5}(S^{4l+2}),$$

so ergibt sich aus 2.3 und 2.4: E_5 ist ein Isomorphismus, E_4 ein Monomorphismus und E_3 ist außerdem epimorph, wenn $[\nu_{4l}, \iota_{4l}]$ die Ordnung 24 hat. Nach 2.14 ist dies aber für alle geraden l und für diejenigen ungeraden l , die nicht von der Form $4l = 2^j - 4$ sind, der Fall. Weiter ist E_3 wegen 2.13 ein Epimorphismus, dessen Kern von $[\nu_{4l+1}, \iota_{4l+1}]$ erzeugt wird. Nach 2.10 hat dieses Whiteheadprodukt für alle geraden l , nach 2.14 auch für diejenigen ungeraden l , die nicht von der Form $4l+1 = 2^j - 3$ sind, die Ordnung 2. Somit folgt, wenn man $l = 2k$ bzw. $2k+1$ setzt, durch Zusammenfassung dieser Aussagen mit 3.1 bis 3.3 gerade der Inhalt von Satz 1.4 bzw. von Satz 1.8.

Wir behandeln jetzt den r -Stamm für den Fall $r \equiv 1 \pmod{4}$, d. h. den $(4l+1)$ -Stamm. Die letzten unstabilen Gruppen sind hier

$$\begin{aligned} \pi_{8l-3}(S^{4l-4}) &\xrightarrow{E_6} \pi_{8l-2}(S^{4l-3}) \xrightarrow{E_5} \pi_{8l-1}(S^{4l-2}) \xrightarrow{E_4} \pi_{8l}(S^{4l-1}) \xrightarrow{E_3} \\ &\xrightarrow{E_2} \pi_{8l+1}(S^{4l}) \xrightarrow{E_1} \pi_{8l+2}(S^{4l+1}) \xrightarrow{E_0} \pi_{8l+3}(S^{4l+2}) \xrightarrow{E_0} \pi_{8l+4}(S^{4l+3}) \approx G_{4l+1}. \end{aligned}$$

Wir definieren zwei Elemente α_{4l} und β_{4l-1} durch

$$\alpha_{4l} = \delta_{4l} \circ \eta_{8l} \in \pi_{8l+1}(S^{4l})$$

bzw. durch

$$\beta_{4l-1} = \eta_{4l-1} \circ \delta_{4l} \in \pi_{8l}(S^{4l-1}).$$

Da die Ordnung von η_{8l} und von η_{4l-1} gleich 2 ist, haben sowohl die α_{4l} als auch die β_{4l-1} eine Ordnung, die Teiler von 2 ist. Aus 2.18 folgt aber

$$H(\alpha_{4l}) = \vartheta_{8l-1} \quad \text{und} \quad H(\beta_{4l-1}) = 12 \cdot \nu_{8l-3}$$

und somit ist $o(\alpha_{4l}) = o(\beta_{4l-1}) = 2$. Daher ist

$$H: \pi_{8l+1}(S^{4l}) \rightarrow \pi_{8l+1}(S^{8l-1})$$

ein Epimorphismus und wegen 2.18 hat der Homomorphismus

$$H: \pi_{8l}(S^{4l-1}) \rightarrow \pi_{8l}(S^{8l-3})$$

das Bild $\text{Im } H = Z_2(12 \cdot \nu_{8l-3})$. Die Elemente α_{4l} und β_{4l-1} erfüllen also die Voraussetzungen von 2.23, woraus man für $l \geq 2$ folgert:

$$3.4. \quad (a) \quad \pi_{8l+1}(S^{4l}) = Z_2(\alpha_{4l}) \oplus \text{Im } E_3$$

$$(b) \quad \pi_{8l}(S^{4l-1}) = Z_2(\beta_{4l-1}) \oplus \text{Im } E_4.$$

Nach 2.19 ist $H([\vartheta_{4l}, \iota_{4l}]) = 0$. Da $\text{Ker } E_2$ von $[\vartheta_{4l}, \iota_{4l}]$ erzeugt wird, gilt also $\text{Ker } E_2 \subset \text{Im } E_3$. Da weiter E_2 nach 2.4 ein Epimorphismus ist, folgt aus 3.4 und wegen $E(\alpha_{4l}) = [\eta_{4l+1}, \iota_{4l+1}]$:

$$3.5. \quad \pi_{8l+2}(S^{4l+1}) \approx Z_2([\eta_{4l+1}, \iota_{4l+1}]) \oplus \text{Im } E_3 / \text{Ker } E_2.$$

Durch Anwendung von E_1 hierauf ergibt sich wegen

$$\text{Ker } E_1 = Z_2([\eta_{4l+1}, \iota_{4l+1}])$$

(vgl. 2.3):

3.6. $\text{Im } E_1 \approx \text{Im } E_3 / \text{Ker } E_2$.

Setzt man in 3.1 nun $m = 2l$, so hat man $\text{Im } E_1 \approx G_{4l+1}$ und erhält also durch Vergleich mit 3.5 und 3.6:

3.7. Für alle $l \geq 2$ gilt im $(4l+1)$ -Stamm:

$$(a) \ G_{4l+1}^{-1} = \pi_{8l+3}(S^{4l+2}) \approx G_{4l+1} \oplus Z(w_{4l+2})$$

$$(b) \ G_{4l+1}^{-2} = \pi_{8l+2}(S^{4l+1}) \approx G_{4l+1} \oplus Z([\eta_{4l+1}, \iota_{4l+1}]).$$

Entsprechend schließt man aus 3.4 (b), daß wegen $H([\nu_{4l-1}, \iota_{4l-1}]) = 0$ folgt:

$$3.8. \ \text{Im } E_3 \approx Z_2([\vartheta_{4l}, \iota_{4l}]) \oplus \text{Im } E_4 / \text{Ker } E_3.$$

Daraus, zusammen mit 3.4 (a), folgert man

$$3.9. \ \pi_{8l+1}(S^{4l}) \approx Z_2(\alpha_{4l}) \oplus Z_2([\vartheta_{4l}, \iota_{4l}]) \oplus \text{Im } E_4 / \text{Ker } E_3.$$

Durch Anwendung von E_2 hierauf und durch Vergleich mit 3.5 ergibt sich

$$3.10. \ (a) \ \pi_{8l+2}(S^{4l+1}) \approx Z_2([\eta_{4l+1}, \iota_{4l+1}]) \oplus \text{Im } E_4 / \text{Ker } E_3,$$

$$(b) \ \text{Im } E_4 / \text{Ker } E_3 \approx G_{4l+1}.$$

Somit ist weiter gezeigt:

3.11. Für alle $l \geq 2$ gilt im $(4l+1)$ -Stamm

$$G_{4l+1}^{-3} = \pi_{8l+1}(S^{4l}) \approx G_{4l+1} \oplus Z_2(\alpha_{4l}) \oplus Z_2([\vartheta_{4l}, \iota_{4l}]).$$

Zur weiteren Behandlung dieses Stammes untersuchen wir jetzt die Fälle l gerade und l ungerade getrennt. Zunächst sei $l = 2k$ gerade. Nach 2.3 und 2.9 ist in diesem Falle E_3 ein Monomorphismus. Da aber wegen 2.3 und 2.4 auch E_4 monomorph und E_5 ein Isomorphismus ist, folgt aus 3.10 (b), daß $\text{Im } E_4 \approx \approx G_{8k+1}$ ist und aus 3.4 und 3.8 ergibt sich:

3.12. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+1)$ -Stamm:

$$(a) \ G_{8k+1}^{-4} = \pi_{16k}(S^{8k-1}) \approx G_{8k+1} \oplus Z_2(\beta_{8k-1})$$

$$(b) \ G_{8k+1}^{-5} = \pi_{16k-1}(S^{8k-2}) \approx G_{8k+1}$$

$$(c) \ G_{8k+1}^{-6} = \pi_{16k-2}(S^{8k-3}) \approx G_{8k+1}.$$

Als letzte Aussage im $(8k+1)$ -Stamm soll jetzt noch gezeigt werden, daß auch $E_6: \pi_{16k-3}(S^{8k-4}) \rightarrow \pi_{16k-2}(S^{8k-3})$ ein Isomorphismus ist. Natürlich ist E_6 wegen 2.4 ein Epimorphismus. Nach 2.3 muß also noch gezeigt werden, daß $[\kappa_{8k-4}, \iota_{8k-4}] = 0$ ist; dies ist gerade die noch zu beweisende Aussage 2.11. Dazu zeigen wir zunächst die Gültigkeit des folgenden Hilfssatzes:

3.13. Für alle $k \geq 1$ existiert ein Element $\varepsilon_{8k} \in \pi_{16k+2}(S^{8k})$ mit

$$(a) \ 24 \cdot \varepsilon_{8k} = 0$$

$$(b) \ E^3(\varepsilon_{8k}) = w_{8k+3}$$

$$(c) \ H(\varepsilon_{8k}) = \nu_{16k-1}.$$

Beweis. Die Sequenz

$$\begin{aligned} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) &\xrightarrow{E^5} \pi_{16k+6}(S^{8k+4}) \xrightarrow{H_*} \\ &\xrightarrow{H_*} \pi_{8k+2}(V_{8k+4,5}) \xrightarrow{P_*} \pi_{16k}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_*^5} \pi_{16k+5}(S^{8k+4}) \end{aligned}$$

ist nach 2.20 für alle $k \geq 1$ exakt. Wegen 3.11 und 3.12 gilt $\text{Ker } E_*^5 = Z_2(\beta_{8k-1})$. Nach 2.21 ist $\pi_{8k+2}(V_{8k+4,5}) = Z_2$, also ist P_* ein Monomorphismus und daher E^5 ein Epimorphismus. Zu einem Element $\lambda \in \pi_{16k+5}(S^{8k+3})$ existiert also ein

Element $\mu \in \pi_{16k+1}(S^{8k-1})$ derart, daß $E\lambda = E^5\mu$ ist. Das Element $\lambda - E^4\mu$ liegt also im Kern der Einhängung

$$E: \pi_{16k+5}(S^{8k+3}) \rightarrow \pi_{16k+6}(S^{8k+4}).$$

Wegen 2.2 ist λ daher von der Form

$$3.14. \quad \lambda = t \cdot w_{8k+3} + E^4\mu, \text{ mit } t = 0 \text{ oder } t = 1.$$

Nach 2.22 ist jedoch w_{8k+3} ein genau dreifach eingehängtes Element. Demnach existiert ein Element $\varepsilon'_{8k} \in \pi_{16k+2}(S^{8k})$, für welches $E^3(\varepsilon'_{8k}) = w_{8k+3}$ und $H(\varepsilon'_{8k}) = u \cdot v_{16k-1}$ ist, wobei u ein Teiler von 24 ist. Andererseits folgt aus der Exaktheit von

$$\pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E} \pi_{16k+2}(S^{8k}) \xrightarrow{H} \pi_{16k+2}(S^{16k-1}) \xrightarrow{P} \pi_{16k}(S^{8k-1})$$

wegen 2.9, daß H ein Epimorphismus ist. Also existiert ein Element $\varepsilon''_{8k} \in \pi_{16k+2}(S^{8k})$ mit $H(\varepsilon''_{8k}) = v_{16k-1}$ und nach 3.14 ist $E^3(\varepsilon''_{8k})$ von der Form

$$E^3(\varepsilon''_{8k}) = t \cdot w_{8k+3} + E^4\mu,$$

wobei $\mu \in \pi_{16k+1}(S^{8k-1})$ und $t = 0$ oder $t = 1$ ist. Nun definiert man

$$\varepsilon_{8k} = \varepsilon'_{8k} - (u-1)\varepsilon''_{8k} + (u-1) \cdot E(\mu), \quad \text{falls } t = 0$$

bzw.

$$\varepsilon_{8k} = \varepsilon''_{8k} - E(\mu), \quad \text{falls } t = 1.$$

Es gilt jedenfalls $E^3(\varepsilon_{8k}) = w_{8k+3}$ und $H(\varepsilon_{8k}) = v_{16k-1}$. Wegen ersterem folgt aus der Exaktheit der Sequenz

$$\pi_{8k+3}(V_{8k+5,5}) \xrightarrow{P_*} \pi_{16k+2}(S^{8k}) \xrightarrow{E^5} \pi_{16k+7}(S^{8k+5}),$$

daß $\varepsilon_{8k} \in \text{Im } P_5$ ist. Wegen 2.21 folgt hieraus schließlich auch $24 \cdot \varepsilon_{8k} = 0$. Damit ist 3.13 bewiesen.

Vergleicht man diesen Hilfssatz mit Lemma 11.17 von [21], so folgt

3.15. Für alle $k \geq 1$ existiert ein Element

$$\gamma_{8k-3} \in \pi_{16k-1}(S^{8k-3}) \quad \text{mit} \quad H(\gamma_{8k-3}) = \kappa_{16k-7}.$$

Wegen der Exaktheit der EHP -Sequenz ist also $[\kappa_{8k-4}, \iota_{8k-4}] = 0$. Damit ist 2.11 bewiesen und wegen des nach 3.12 Gesagten ist damit gleichzeitig gezeigt:

3.16. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+1)$ -Stamm

$$G_{8k+1}^{-7} = \pi_{16k-3}(S^{8k-4}) \approx G_{8k+1}^{-6} \approx G_{8k+1}.$$

Durch Zusammenfassung der Aussagen 3.7, 3.11, 3.12 und 3.16 erhält man den Inhalt von Satz 1.2, der damit ebenfalls bewiesen ist.

Um die Erörterung des Falles $r \equiv 1 \pmod{4}$ zum Abschluß zu bringen, müssen wir nun noch den Fall l ungerade, $l = 2k+1$, behandeln. Der Grundgedanke des Beweises ist hier der gleiche wie für den Fall gerader l . Wir definieren ein Element $\gamma_{8k} = \varepsilon_{8k} \circ v_{16k+2} \in \pi_{16k+5}(S^{8k})$. Aus 2.18 folgt $H(\gamma_{8k}) = \kappa_{16k-1}$ und daher $E(\gamma_{8k}) \neq 0$. Da aber nach 2.3 E_4 und E_5 Monomorphismen sind, gilt auch $E^3(\gamma_{8k}) = [v_{8k+3}, \iota_{8k+3}] \neq 0$. Damit ist 2.10 für den Fall $n \equiv 3 \pmod{8}$ bewiesen und es folgt also $\text{Ker } E_3 = Z_2([v_{8k+3}, \iota_{8k+3}])$. Da die

Sequenz

$$\pi_{8k+6}(V_{8k+5,4}) \xrightarrow{P_4} \pi_{16k+6}(S^{8k+1}) \xrightarrow{E^4} \pi_{16k+10}(S^{8k+5})$$

für $k \geq 1$ exakt ist, folgt weiter, daß $E(\gamma_{8k})$ die Ordnung 2 hat. Nach 2.21 ist nämlich $\pi_{8k+6}(V_{8k+5,4}) = Z_2$ und wegen $E([\nu_{8k+3}, \iota_{8k+3}]) = 0$ gilt $E(\gamma_{8k}) \in \text{Ker } E^4$. Daher muß entweder

$$3.17. \quad o(\gamma_{8k}) = 2$$

oder

$$3.18. \quad 2 \cdot \gamma_{8k} = [\kappa_{8k}, \iota_{8k}]$$

gelten. Wir wollen zeigen, daß in jedem der beiden Fälle

$$\text{Ker } E_3 = Z_2([\nu_{8k+3}, \iota_{8k+3}])$$

direkter Summand in $\pi_{16k+8}(S^{8k+3})$ ist: Angenommen, es gilt 3.18. Bezeichnet man mit $\langle \alpha \rangle$ die Restklasse von $\alpha \in \pi_{16k+5}(S^{8k})$ modulo $\text{Ker } E_6$, so ist durch $f(\langle \alpha \rangle) = H(\alpha)$ ein Homomorphismus $f: \pi_{16k+5}(S^{8k})/\text{Ker } E_6 \rightarrow \pi_{16k+5}(S^{16k-1})$ und durch $g(\kappa_{16k-1}) = \langle \gamma_{8k} \rangle$ ein Homomorphismus $g: \pi_{16k+5}(S^{16k-1}) \rightarrow \pi_{16k+5}(S^{8k})/\text{Ker } E_6$ definiert. Natürlich ist $f \cdot g$ der identische Automorphismus von $\pi_{16k+5}(S^{16k-1})$; deshalb ist

$$\pi_{16k+5}(S^{8k})/\text{Ker } E_6 = Z_2(\langle \gamma_{8k} \rangle) \oplus \text{Ker } f,$$

und wegen der Epimorphie von E_6 (nach 2.4) gilt

$$3.19. \quad \pi_{16k+6}(S^{8k+1}) \approx Z_2(E(\gamma_{8k})) \oplus \text{Ker } f, \text{ wobei } \text{Ker } f = \text{Im } E_7/\text{Ker } E_6.$$

Durch Anwendung von $E^2 = E_4 E_5$ hierauf erhält man schließlich

$$\text{Im } E_4 \approx Z_2([\nu_{8k+3}, \iota_{8k+3}]) \oplus \text{Ker } f.$$

In dem anderen Falle, in welchem 3.17 erfüllt ist, folgt die Behauptung durch Anwendung von Hilfssatz 2.23 mit $\alpha = \gamma_{8k}$ sofort: $\pi_{16k+5}(S^{8k}) = Z_2(\gamma_{8k}) \oplus \text{Im } E_7$, und wegen $\text{Ker } E_6 \subset \text{Im } E_7$ und da E_6 nach 2.4 ein Epimorphismus ist, folgt wiederum

$$\pi_{16k+6}(S^{8k+1}) \approx Z_2(E(\gamma_{8k})) \oplus \text{Im } E_7/\text{Ker } E_6.$$

In jedem Falle gilt $\text{Im } E_4 \approx Z_2([\nu_{8k+3}, \iota_{8k+3}]) \oplus \text{Im } E_7/\text{Ker } E_6$. Da aber $Z_2([\nu_{8k+3}, \iota_{8k+3}]) = \text{Ker } E_3$ ist, folgt nach 3.10 (b)

$$\text{Im } E_7/\text{Ker } E_6 \approx G_{8k+5}.$$

Durch Vergleich mit 3.4 (b) erhält man also:

3.20. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+5)$ -Stamm:

- (a) $G_{8k+5}^{-4} = \pi_{16k+8}(S^{8k+3}) \approx G_{8k+5} \oplus Z_2(\beta_{8k+3}) \oplus Z_2([\nu_{8k+3}, \iota_{8k+3}])$
- (b) $G_{8k+5}^{-5} = \pi_{16k+7}(S^{8k+2}) \approx G_{8k+5} \oplus Z_2(E^2(\gamma_{8k}))$
- (c) $G_{8k+5}^{-6} = \pi_{16k+6}(S^{8k+1}) \approx G_{8k+5} \oplus Z_2(E(\gamma_{8k})).$

Die Zusammenfassung der Ergebnisse 3.7, 3.11 und 3.20 liefert genau die Aussagen von Satz 1.6.

Nachdem wir jetzt die sich auf die ungeraden Stämme beziehenden Sätze 1.2, 1.4, 1.6 und 1.8 bewiesen haben, wenden wir uns nun den Aussagen über die geraden Stämme und deren Beweis zu. Auch hier ist die zugrunde liegende Beweisidee die gleiche wie oben. Lediglich die zum Nachweis des Zerfallens gewisser Sequenzen angewandte Methode wird den jeweils vorliegenden Um-

ständen angepaßt. So werden beispielsweise die Beweise für den $(8k+2)$ -Stamm anders geführt werden als die bisherigen, weil wir dort nicht von vornherein Elemente konstruieren können, die die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.23 erfüllen.

Zunächst zeigen wir: die Ordnung von $[\nu_{4l-2}, \iota_{4l-2}]$ ist für alle $l \geq 3$ gleich 12. Wegen 2.6 und 2.16 ist nämlich

$$12 \cdot [\nu_{4l-2}, \iota_{4l-2}] = [\vartheta_{4l-2}, \iota_{4l-2}] \circ \eta_{8l-3}.$$

Dies ist Null nach 2.8; daher ist die gesuchte Ordnung ein Teiler von 12. Nach 2.19 ist andererseits $H([\nu_{4l-2}, \iota_{4l-2}]) = 2 \cdot \nu_{8l-5}$; also ist diese Ordnung gleich 12. Damit ist auch 2.10 für $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$ bewiesen.

Wir betrachten jetzt die letzten unstabilen Gruppen des $(4l)$ -Stammes:

$$\begin{aligned} \pi_{8l-5}(S^{4l-5}) &\xrightarrow{E_4} \pi_{8l-4}(S^{4l-4}) \xrightarrow{E_5} \pi_{8l-3}(S^{4l-3}) \xrightarrow{E_4} \pi_{8l-2}(S^{4l-2}) \xrightarrow{E_2} \\ &\xrightarrow{E_3} \pi_{8l-1}(S^{4l-1}) \xrightarrow{E_1} \pi_{8l}(S^{4l}) \xrightarrow{E_1} \pi_{8l+1}(S^{4l+1}) \xrightarrow{E_0} \pi_{8l+2}(S^{4l+2}) \approx G_{4l}. \end{aligned}$$

Die in 2.24 vorkommenden Elemente $\delta_{4l} \in \pi_{8l}(S^{4l})$ und $\delta'_{4l-1} \in \pi_{8l-1}(S^{4l-1})$ erfüllen die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.23. Deshalb folgt für $l \geq 1$:

$$3.21. (a) \pi_{8l-1}(S^{4l-1}) = Z_2(\delta'_{4l-1}) \oplus \text{Im } E_3$$

$$(b) \pi_{8l}(S^{4l}) = Z_2(\delta_{4l}) \oplus \text{Im } E_2.$$

Hieraus ergibt sich durch Anwendung der (nach 2.3 monomorphen) Einhängung E_2 auf 3.21 (a) zusammen mit (b)

$$3.22. \pi_{8l}(S^{4l}) = Z_2([\eta_{4l}, \iota_{4l}]) \oplus Z_2(\delta_{4l}) \oplus \text{Im}(E_2 E_3),$$

da nach 2.24 $E_2(\delta'_{4l-1}) = [\eta_{4l}, \iota_{4l}]$ ist.

Nun ist weiter E_1 ein Epimorphismus mit $\text{Ker } E_1 = Z_2([\eta_{4l}, \iota_{4l}])$ und $E_1(\delta_{4l}) = w_{4l+1}$, ebenfalls nach 2.24, sowie E_0 ein Epimorphismus mit $\text{Ker } E_0 = Z_2(w_{4l+1})$, sodaß folgt:

$$3.23. (a) \pi_{8l+1}(S^{4l+1}) = Z_2(w_{4l+1}) \oplus \text{Im}(E_1 E_2 E_3)$$

$$(b) \pi_{8l+2}(S^{4l+2}) = G_{4l} = \text{Im}(E_0 E_1 E_2 E_3).$$

Also sind die direkten Summanden $\text{Im}(\dots)$ in 3.22 und 3.23 isomorph zur stabilen Gruppe G_{4l} und es gilt:

3.24. Für alle $l \geq 1$ gilt im $(4l)$ -Stamm:

$$(a) G_{4l}^{-1} = \pi_{8l+1}(S^{4l+1}) \approx G_{4l} \oplus Z_2(w_{4l+1})$$

$$(b) G_{4l}^{-2} = \pi_{8l}(S^{4l}) \approx G_{4l} \oplus Z_2([\eta_{4l}, \iota_{4l}]) \oplus Z_2(\delta_{4l})$$

$$(c) G_{4l}^{-3} = \pi_{8l-1}(S^{4l-1}) \approx G_{4l} \oplus Z_2(\delta'_{4l-1}).$$

Weiter folgt noch

$$3.25. \text{Ker}(E_0 E_1 E_2 E_3) = \text{Ker } E_3 = Z_{12}([\nu_{4l-2}, \iota_{4l-2}]),$$

da E_2 ein Monomorphismus ist und sowohl $\text{Ker } E_1 \subset \text{Im}(E_2 E_3)$ als auch $\text{Ker } E_0 \subset \text{Im}(E_1 E_2 E_3)$ ist.

Zur weiteren Behandlung dieses Stammes unterscheiden wir wieder gerade und ungerade l . Sei zuerst $l = 2k+1$ ungerade. In diesem Fall betrachten wir die beiden Sequenzen

$$\begin{aligned} \pi_{16k+3}(S^{8k-1}) &\xrightarrow{E^*} \pi_{16k+10}(S^{8k+6}) \xrightarrow{H_7} \\ &\xrightarrow{H_7} \pi_{8k+4}(V_{8k+6}, 7) \xrightarrow{P_7} \pi_{16k+2}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_7^*} \pi_{16k+9}(S^{8k+6}) \end{aligned}$$

und

$$\pi_{8k+5}(V_{8k+7,7}) \xrightarrow{P_7^*} \pi_{16k+4}(S^{8k}) \xrightarrow{E_{**}^7} \pi_{16k+11}(S^{8k+7}),$$

die nach 2.20 für $k \geq 1$ exakt sind. Da $\pi_{8k+5}(V_{8k+7,7}) = 0$ und $\pi_{8k+4}(V_{8k+6,7}) = Z_2$ ist, erweist sich E_{**}^7 als ein Monomorphismus, und da $\text{Ker } E_{**}^7 = Z_2$ ist, folgt $\text{Im } H_7 = 0$ und somit ist E^7 epimorph. Weiter ist natürlich

$$\pi_{16k+10}(S^{8k+6}) \approx \pi_{16k+11}(S^{8k+7}) \approx G_{8k+4}$$

und schließlich ist $E_6: \pi_{16k+3}(S^{8k-1}) \rightarrow \pi_{16k+4}(S^{8k})$ ein Isomorphismus, da (nach 2.16 und 2.9) $[\kappa_{8k-1}, \iota_{8k-1}] = [\nu_{8k-1}, \iota_{8k-1}] \circ \nu_{16k} = 0$ ist. Also folgt:

3.26. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+4)$ -Stamm

$$G_{8k+4}^{-7} = \pi_{16k+3}(S^{8k-1}) \approx G_{8k+4}^{-6} = \pi_{16k+4}(S^{8k}) \approx$$

$$G_{8k+4}^{-5} = \pi_{16k+5}(S^{8k+1}) \approx G_{8k+4}.$$

Weiter ist, wie wir gesehen haben, $E^6 = E_0 E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$ ein Isomorphismus. Durch $f = (E^6)^{-1} \cdot (E_0 E_1 E_2 E_3)$ ist deshalb ein Homomorphismus

$$f: \pi_{16k+6}(S^{8k+2}) \rightarrow \pi_{16k+4}(S^{8k})$$

mit $f \cdot (E_4 E_5) = \text{Identität}$ definiert. Es folgt also

$$\pi_{16k+4}(S^{8k}) = \text{Im}(E_4 E_5) \oplus \text{Ker } f.$$

Wegen $\text{Ker } f = \text{Ker}(E_0 E_1 E_2 E_3) = \text{Ker } E_3 = Z_{12}([\nu_{8k+2}, \iota_{8k+2}])$ ist daher gezeigt:

3.27. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+4)$ -Stamm

$$G_{8k+4}^{-4} = \pi_{16k+6}(S^{8k+2}) \approx G_{8k+4} \oplus Z_{12}([\nu_{8k+2}, \iota_{8k+2}]).$$

Wegen $H([\nu_{8k+2}, \iota_{8k+2}]) = 2 \cdot \nu_{16k+3}$ folgt hieraus noch

$$P(\nu_{16k+3}) = [\nu_{8k+1}, \iota_{8k+1}] \neq 0,$$

womit auch 2.10 jetzt vollständig bewiesen ist. Durch Zusammenfassen der Aussagen 3.24, 3.26 und 3.27 erhalten wir den Inhalt von Satz 1.5.

Wir kommen nun zum Fall $l = 2k$, d. h. zum $(8k)$ -Stamm. Dazu betrachte man die für $k \geq 1$ exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \pi_{16k-1}(S^{8k-2}) &\xrightarrow{E_4^*} \pi_{16k+3}(S^{8k+2}) \xrightarrow{H_4^*} \pi_{8k+1}(V_{8k+2,4}) \xrightarrow{P_4} \\ &\xrightarrow{P_4} \pi_{16k-2}(S^{8k-2}) \xrightarrow{E_4} \pi_{16k+2}(S^{8k+2}) \xrightarrow{H_4} \pi_{8k}(V_{8k+2,4}). \end{aligned}$$

Da $\pi_{8k}(V_{8k+2,4}) = 0$, $\pi_{8k+1}(V_{8k+2,4}) = Z_{12} \oplus Z$ (nach 2.21), $\text{Koker } E_4^* \approx Z$ (nach 3.7 und 3.12) und da $\pi_{16k+2}(S^{8k+2}) = G_{8k}$ ist, folgt

$$\pi_{16k-2}(S^{8k-2})/Z_{12} \approx G_{8k}.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Extension zerfällt. Wegen $E([\nu_{8k-2}, \iota_{8k-2}]) = 0$ gilt nämlich erst recht $E^4([\nu_{8k-2}, \iota_{8k-2}]) = 0$, daher ist $[\nu_{8k-2}, \iota_{8k-2}] \in \text{Im } P_4$. Wegen 2.10 hat dieses Element die Ordnung 12, erzeugt also $\text{Im } P_4 = Z_{12}$. Der Homomorphismus

$$H: \pi_{16k-2}(S^{8k-2}) \rightarrow \pi_{16k-2}(S^{16k-5})$$

führt dieses Erzeugende in $2 \cdot v_{16k-5}$, also in das erzeugende Element von $\text{Im } H$ über. Nach 2.14 ist weiter $[v_{8k-3}, t_{8k-3}] \neq 0$, wenn k keine Zweierpotenz ist. In diesen Fällen existiert daher kein Element $\alpha \in \pi_{16k-2}(S^{8k-2})$ mit $H(\alpha) = v_{16k-5}$. Also ist Z_{12} direkter Summand in $\pi_{16k-2}(S^{8k-2})$ und es ist gezeigt:

3.28. Für alle natürlichen Zahlen k , die keine Zweierpotenz 2^j , $j \geq 0$, sind, gilt im $(8k)$ -Stamm

$$G_{8k}^{-4} = \pi_{16k-2}(S^{8k-2}) \approx G_{8k} \oplus Z_{12}([v_{8k-2}, t_{8k-2}]).$$

Wie wir soeben gesehen haben, ist $H([v_{8k-2}, t_{8k-2}]) = 2 \cdot v_{16k-5}$. Die Anwendung von Hilfssatz 2.23 liefert

$$\mathbf{3.29.} \quad \pi_{16k-2}(S^{8k-2}) \approx \pi_{16k-3}(S^{8k-3}) \oplus Z_{12}([v_{8k-2}, t_{8k-2}]).$$

Da E_5 ein Isomorphismus ist, folgt durch Vergleich mit 3.28.

3.30. Für alle natürlichen Zahlen k , die keine Zweierpotenz 2^j , $j \geq 0$, sind, gilt im $(8k)$ -Stamm

$$G_{8k}^{-5} = \pi_{16k-3}(S^{8k-3}) \approx G_{8k}^{-6} = \pi_{16k-4}(S^{8k-4}) \approx G_{8k}.$$

Zusammenfassung von 3.24, 3.28 und 3.30 liefert die volle Aussage von Satz 1.1 über den $(8k)$ -Stamm.

Uns verbleibt jetzt noch die Erörterung des r -Stammes für $r \equiv 2 \pmod{4}$. Zunächst betrachten wir den $(8k+2)$ -Stamm, dessen letzte unstabile Gruppen folgendermaßen heißen:

$$\begin{aligned} \pi_{16k}(S^{8k-2}) &\xrightarrow{E_5} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_4} \pi_{16k+2}(S^{8k}) \xrightarrow{E_3} \pi_{16k+3}(S^{8k+1}) \xrightarrow{E_2} \\ &\xrightarrow{E_1} \pi_{16k+4}(S^{8k+2}) \xrightarrow{E_0} \pi_{16k+5}(S^{8k+3}) \xrightarrow{E_0} \pi_{16k+6}(S^{8k+4}) \approx G_{8k+2}. \end{aligned}$$

Da E_0 nach 2.3 und 2.4 für $k \geq 1$ ein Epimorphismus mit $\text{Ker } E_0 = Z_2(w_{8k+3})$ ist, gilt jedenfalls

$$\pi_{16k+5}(S^{8k+3})/Z_2 \approx G_{8k+2}.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Extension zerfällt. Dazu genügt es offenbar, die Existenz eines Homomorphismus $f: \pi_{16k+5}(S^{8k+3}) \rightarrow Z_2$ mit $f(w_{8k+3}) \neq 0$ nachzuweisen. Dazu betrachte man die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) &\xrightarrow{E^4} \pi_{16k+5}(S^{8k+3}) \xrightarrow{H_4} \pi_{8k+2}(V_{8k+3,4}) \xrightarrow{P_4} \\ &\xrightarrow{P_4} \pi_{16k}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_*^4} \pi_{16k+4}(S^{8k+3}). \end{aligned}$$

Da $\pi_{8k+2}(V_{8k+3,4}) = Z_2 \oplus Z_2$ und w_{8k+3} ein genau dreifach eingehängtes Element ist, folgt $w_{8k+3} \notin \text{Im } E^4$, also auch $H_4(w_{8k+3}) \neq 0$. Da weiter nach 3.12 $\text{Ker } E_*^4 \approx Z_2$ ist, folgt mithin $\text{Im } H_4 \approx Z_2$ und somit ist in H_4 der gesuchte Homomorphismus f gefunden. Also gilt

3.31. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+2)$ -Stamm

$$G_{8k+2}^{-1} = \pi_{16k+5}(S^{8k+3}) \approx G_{8k+2} \oplus Z_2(w_{8k+3}).$$

Betrachten wir nun die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \pi_{16k+5}(S^{8k+2}) &\xrightarrow{E^4} \pi_{16k+8}(S^{8k+5}) \xrightarrow{H_5} \pi_{8k+3}(V_{8k+5,3}) \xrightarrow{P_5} \\ &\xrightarrow{P_5} \pi_{16k+4}(S^{8k+2}) \xrightarrow{E_*^4} \pi_{16k+7}(S^{8k+5}) \xrightarrow{H_*^5} \pi_{8k+2}(V_{8k+5,3}). \end{aligned}$$

Wegen $\pi_{8k+2}(V_{8k+5,3}) = Z$ folgt $\text{Im } H_3^* = 0$ und E_3^* ist somit ein Epimorphismus. Da E^3 ein Isomorphismus ist, muß P_3 monomorph sein und wegen $\pi_{8k+3}(V_{8k+5,3}) = Z_4$ hat man die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_4 \xrightarrow{P_3} \pi_{16k+4}(S^{8k+2}) \xrightarrow{E_3^*} G_{8k+2} \rightarrow 0.$$

Das Bild des erzeugenden Elementes dieser Z_4 unter P_3 heiße β . Natürlich ist $2\beta = [\eta_{8k+2}, \iota_{8k+2}]$. Würde diese kurze Sequenz nicht zerfallen, so könnte offenbar kein Homomorphismus $f: \pi_{16k+4}(S^{8k+2}) \rightarrow Z_2$ mit $f(\beta) \neq 0$ existieren, denn es gäbe ein Element $\beta' \in \pi_{16k+4}(S^{8k+2})$ mit $\beta = 2\beta'$. Daraus aber folgte $f(\beta) = f(2\beta') = 0$ für jeden solchen Homomorphismus. Für die exakte Sequenz

$$\pi_{16k+6}(S^{16k+5}) \xrightarrow{P} \pi_{16k+4}(S^{8k+2}) \xrightarrow{E} \pi_{16k+5}(S^{8k+3})$$

gilt aber $\beta \notin \text{Im } P$, da $o(\beta) \geq 4$ und $\pi_{16k+6}(S^{16k+5}) = Z_2$. Weil aber $E^3(\beta) = 0$ ist, muß wegen 3.31 $E(\beta) = w_{8k+3}$ sein. Damit gibt es also einen Homomorphismus f , nämlich $f = E$, und es ist gezeigt:

3.32. *Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+2)$ -Stamm*

$$G_{8k+2}^{-2} = \pi_{16k+4}(S^{8k+2}) \approx G_{8k+2} \oplus Z_4.$$

Entsprechend findet man die Struktur der drittletzten unstabilen Gruppe G_{8k+2}^{-3} . Die hier zu betrachtende exakte Folge

$$\begin{aligned} \pi_{16k+4}(S^{8k+1}) \xrightarrow{E^4} \pi_{16k+8}(S^{8k+5}) \xrightarrow{H_4} \pi_{8k+3}(V_{8k+5,4}) \xrightarrow{P_4} \\ \xrightarrow{P_4} \pi_{16k+3}(S^{8k+1}) \xrightarrow{E_4^*} \pi_{16k+7}(S^{8k+5}) \end{aligned}$$

verkürzt sich, da E^4 und E_4^* epimorph sind, auf die Sequenz

$$0 \rightarrow Z_8 \xrightarrow{P_4} \pi_{16k+3}(S^{8k+1}) \xrightarrow{E_4^*} G_{8k+2} \rightarrow 0,$$

von der wiederum gezeigt werden soll, daß sie zerfällt. Genau wie eben führt man diesen Nachweis, indem man zeigt, daß ein Homomorphismus $f: \pi_{16k+3}(S^{8k+1}) \rightarrow Z_4$ mit $f(2\alpha) \neq 0$ existiert, wobei diesmal α das Bild des Erzeugenden der Z_8 unter P_4 bezeichnet. Auch hier leistet die Einhängung E wieder das Gewünschte, wie man rasch einsieht. Damit haben wir:

3.33. *Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+2)$ -Stamm*

$$G_{8k+2}^{-3} = \pi_{16k+3}(S^{8k+1}) \approx G_{8k+2} \oplus Z_8.$$

Den letzten größeren Beweisschritt erfordert nun noch der Nachweis, daß auch die fnftletzte unstabile Gruppe G_{8k+2}^{-5} die Struktur $G_{8k+2} \oplus Z_8$ hat. Dazu betrachte man die Folge

$$\begin{aligned} \pi_{16k+2}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E^6} \pi_{16k+8}(S^{8k+5}) \xrightarrow{H_6} \pi_{8k+3}(V_{8k+5,6}) \xrightarrow{P_6} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_6^*} \\ \xrightarrow{E_6^*} \pi_{16k+7}(S^{8k+5}) \xrightarrow{H_6^*} \pi_{8k+2}(V_{8k+5,6}) \xrightarrow{P_6^*} \pi_{16k}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_6^{**}} \pi_{16k+6}(S^{8k+5}). \end{aligned}$$

Wie schon weiter oben bewiesen wurde, ist $\text{Ker } E_6^{**} = Z_2$. Daraus ergibt sich, daß E_6^* ein Epimorphismus ist. Andererseits folgt aus unseren Ergebnissen über den $(8k+3)$ -Stamm, daß E^6 ebenfalls epimorph ist. Also haben wir

wieder eine kurze exakte Sequenz, nämlich

$$0 \rightarrow Z_8 \xrightarrow{P_*} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_*^6} G_{8k+2} \rightarrow 0.$$

Auch hier soll das Zerfallen der Folge nachgewiesen werden und wie oben genügt es zu zeigen, daß ein Homomorphismus $f: \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \rightarrow Z_4$ mit $f(2\alpha) \neq 0$ existiert, wo unter α wieder das Bild eines Erzeugenden der Z_8 unter P_6 verstanden wird. Es ist also $E_*^6(\alpha) = 0$. Andererseits erhält man aus der Sequenz

$$\begin{aligned} \pi_{16k+2}(S^{8k-1}) &\xrightarrow{E_*^{2**}} \pi_{16k+4}(S^{8k+1}) \xrightarrow{H_2^{**}} \pi_{8k+3}(V_{8k+1,2}) \xrightarrow{P_2^{**}} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E^*} \\ &\xrightarrow{E^*} \pi_{16k+3}(S^{8k+1}) \xrightarrow{H_1} \pi_{8k+2}(V_{8k+1,2}) \xrightarrow{P_1} \pi_{16k}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E_*^2} \pi_{16k+2}(S^{8k+1}) \end{aligned}$$

die exakte Folge

$$0 \rightarrow Z_2 \xrightarrow{P_2^{**}} \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \xrightarrow{E^*} G_{8k+2} \oplus Z_8 \xrightarrow{H_1} Z_2 \rightarrow 0,$$

da E_*^2 nach unseren Aussagen über den $(8k+3)$ -Stamm ein Isomorphismus und $\text{Ker } E_*^2 = Z_2$ nach 3.7 und 3.12 ist. Wir bezeichnen ein Erzeugendes des direkten Summanden Z_8 in $G_{8k+2} \oplus Z_8$ mit β . Unser obiges Element α wird durch E^2 notwendig auf ein Vielfaches von β abgebildet, es ist also $E^2(\alpha) \in \langle Z_8(\beta) \rangle$. Davon liegt nach dem oben Gesagten aber nur die Untergruppe $Z_4(2\beta)$ in $\text{Im } E^2$. Da $\text{Ker } E^2$ wegen der Exaktheit eine Z_2 ist, folgt aus $o(\alpha) = 8$ jedenfalls $o(E^2(\alpha)) = 4$. Alle in $\text{Im } P_2^{**}$ gelegenen Elemente haben jedoch die Ordnung 1 oder 2. Daher folgt $2\alpha \notin \text{Im } P_2^{**}$ und somit $E^2(2\alpha) \neq 0$. Also ist $f = E^2$ ein Homomorphismus mit den geforderten Eigenschaften. Damit ist gezeigt:

3.34. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+2)$ -Stamm

$$G_{8k+2}^{-5} = \pi_{16k+1}(S^{8k-1}) \approx G_{8k+2} \oplus Z_8.$$

Wegen 2.14, Hilfssatz 2.23 und der Isomorphie von E_5 für $k \geq 2$ folgt hieraus sofort:

3.35. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+2)$ -Stamm

$$G_{8k+2}^{-4} = \pi_{16k+2}(S^{8k}) \approx G_{8k+2} \oplus Z_8 \oplus Z_{24}.$$

3.36. Für alle $k \geq 2$ gilt im $(8k+2)$ -Stamm

$$G_{8k+2}^{-6} = \pi_{16k}(S^{8k-2}) \approx G_{8k+2}^{-4} \approx G_{8k+2} \oplus Z_8.$$

Durch Zusammenfassung von 3.31 bis 3.36 ergibt sich gerade der Inhalt von Satz 1.3.

Wir kommen nun zur Betrachtung des letzten noch unbehandelten Falles, des $(8k+6)$ -Stammes. Dieser Stamm paßt insofern nicht völlig in das Schema unserer Ergebnisse, als wir in diesem Falle nicht alle entsprechenden Aussagen wie in den anderen Sätzen ohne weitere Voraussetzungen beweisen können. Zwar ist auch hier $\text{Ker } E_0 = Z_2(w_{8k+7})$, woraus

$$\pi_{16k+13}(S^{8k+7})/Z_2 \approx G_{8k+6}$$

folgt. Das Zerfallen dieser Extension können wir jedoch nicht ohne weiteres erschließen. Daher folgt lediglich

3.37. Für alle $k > 1$, für welche das Element w_{8k+7} in $\pi_{16k+13}(S^{8k+7})$ nicht halbirbar ist, gilt im $(8k+6)$ -Stamm

$$G_{8k+6}^{-1} = \pi_{16k+13}(S^{8k+7}) \approx G_{8k+6} \oplus Z_2(w_{8k+7}).$$

Hieraus allerdings schließt man ganz entsprechend wie oben bei 3.32 und 3.33:

3.38. Für alle $k > 1$, für welche das Element w_{8k+7} in $\pi_{16k+13}(S^{8k+7})$ nicht halbirbar ist, gilt im $(8k+6)$ -Stamm:

$$(a) \quad G_{8k+6}^{-2} = \pi_{16k+12}(S^{8k+6}) \approx G_{8k+6} \oplus Z_4$$

$$(b) \quad G_{8k+6}^{-3} = \pi_{16k+11}(S^{8k+5}) \approx G_{8k+6} \oplus Z_8.$$

Unabhängig von der Voraussetzung der Nichthalbirbarkeit von w_{8k+7} folgt jedoch aus 2.3, 2.4, 2.12 und 2.13 über die Ordnung der letzten unstabilen Gruppen im $(8k+6)$ -Stamm:

3.39. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+6)$ -Stamm:

$$(a) \quad o(G_{8k+6}^{-1}) = 2 \cdot o(G_{8k+6})$$

$$(b) \quad o(G_{8k+6}^{-2}) = 4 \cdot o(G_{8k+6})$$

$$(c) \quad o(G_{8k+6}^{-3}) = 8 \cdot o(G_{8k+6}).$$

Ebenso folgt wegen 2.14 weiter

3.40. Für alle natürlichen Zahlen k , für welche $(k+1)$ keine Zweierpotenz 2^j , $j \geq 1$, ist, gilt im $(8k+6)$ -Stamm:

$$(a) \quad o(G_{8k+6}^{-4}) = 192 \cdot o(G_{8k+6})$$

$$(b) \quad o(G_{8k+6}^{-5}) = o(G_{8k+6}^{-6}) = 16 \cdot o(G_{8k+6}).$$

Außerdem ist natürlich E_5 , wie in allen Stämmen, auch hier ein Isomorphismus und daher gilt noch

3.41. Für alle $k \geq 1$ gilt im $(8k+6)$ -Stamm

$$G_{8k+6}^{-6} = \pi_{16k+8}(S^{8k+2}) \approx G_{8k+6}^{-5} = \pi_{16k+9}(S^{8k+3}).$$

Den Inhalt von Satz 1.7 erhält man wiederum durch Zusammenfassung, diesmal der Aussagen 3.37 bis 3.41. Damit sind die Sätze 1.1 bis 1.8 vollständig bewiesen.

§ 4

In diesem Paragraphen sollen die Beweise der übrigen Aussagen von § 1 geführt werden. Wir beginnen mit dem Beweis der Sätze 1.11 und 1.12 und betrachten dazu die folgenden beiden für $l \geq 0$ exakten Sequenzen:

$$\begin{aligned} \pi_{8l+5}(S^{4l+2}) \xrightarrow{E^3} \pi_{8l+8}(S^{4l+5}) \xrightarrow{H_2} \pi_{4l+3}(V_{4l+5,3}) \xrightarrow{P_2} \\ \xrightarrow{P_2} \pi_{8l+4}(S^{4l+2}) \xrightarrow{E_*^3} \pi_{8l+7}(S^{4l+5}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \pi_{8l+5}(S^{4l+2}) \xrightarrow{E^2} \pi_{8l+7}(S^{4l+4}) \xrightarrow{H_2} \pi_{4l+3}(V_{4l+4,2}) \xrightarrow{P_2} \\ \xrightarrow{P_2} \pi_{8l+4}(S^{4l+2}) \xrightarrow{E_*^2} \pi_{8l+6}(S^{4l+4}). \end{aligned}$$

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß die hier auftretenden Homomorphismen E^3, E_*^3, E_*^2 Epimorphismen sind. Außerdem wissen wir, daß $\text{Koker } E^2 \approx Z$ ist. Daher sind P_3 und P_2 Monomorphismen. Es sei nun zur Abkürzung $\pi_{8l+4}(S^{4l+2}) = A$ gesetzt. Da $\pi_{8l+7}(S^{4l+5}) \approx G_{4l+2}$ ist, folgt

4.1. Für alle $l \geq 1$ gilt $A/Z_4 \approx G_{4l+2}$.

Weiter schließt man aus der zweiten Folge, daß $\text{Im } H_2 \approx Z_2$ ist. Der Kokern von H_2 muß also die Ordnung 4 haben. Da nach 2.21 für $l \geq 1$ gilt $\pi_{4l+3}(V_{4l+4,2}) = Z_2 \oplus Z$, muß daher

$$\text{Koker } H_2 = Z_2 \oplus Z / \text{Im } H_2$$

isomorph zu $Z_2 \oplus Z_2$ sein und somit muß gelten:

4.2. Für alle $l \geq 1$ ist $A/(Z_2 \oplus Z_2) \approx G_{4l+2}$.

Aus 4.1 und 4.2 folgt, daß die 2-Komponente von A aus mindestens zwei direkten Summanden besteht, deren Ordnungen aufeinanderfolgende Zweierpotenzen sind, daß A also von der Form

$$A \approx Z_{2^j} \oplus Z_{2^{j+1}} \oplus \cdots \quad \text{mit } j \geq 1$$

ist. Insbesondere folgt also über die stabile Gruppe G_{4l+2} :

4.3. Für alle $l \geq 1$ ist die 2-Komponente von G_{4l+2} ungleich Null.

Weiß man darüber hinaus, daß $\text{Ker } E_*^2 = Z_4$ in A direkter Summand ist, so muß also $j = 1$ sein und G_{4l+2} enthält dann eine zyklische Gruppe Z_2 der Ordnung 2 als direkten Summanden. Nach unseren Ergebnissen 3.32 und 3.38 ist dies der Fall für alle geraden k und für diejenigen ungeraden k , für welche das Element w_{4l+3} nicht halbierbar ist. Damit ist 1.11 und 1.12 bewiesen.

Es bezeichne $\varrho(n)$ nun wieder diejenige nichtnegative ganze Zahl, die angibt, ein wie oft eingehängtes Element das Whiteheadprodukt $w_n = [\iota_n, \iota_n] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ ist (es sei im folgenden $n > 15$). Das Element w_n liegt also im Bild der $\varrho(n)$ -fach iterierten Einhängung

$$E^{\varrho(n)} : \pi_{2n-\varrho(n)-1}(S^{n-\varrho(n)}) \rightarrow \pi_{2n-1}(S^n),$$

aber nicht im Bild der $(\varrho(n) + 1)$ -fach iterierten Einhängung

$$E^{\varrho(n)+1} : \pi_{2n-\varrho(n)-2}(S^{n-\varrho(n)-1}) \rightarrow \pi_{2n-1}(S^n).$$

Daher ist die Einhängung

$$E : \pi_{2n-\varrho(n)-2}(S^{n-\varrho(n)-1}) \rightarrow \pi_{2n-\varrho(n)-1}(S^{n-\varrho(n)})$$

kein Epimorphismus. Wegen der Exaktheit der EHP -Sequenz

$$\pi_{2n-\varrho(n)-2}(S^{n-\varrho(n)-1}) \xrightarrow{E} \pi_{2n-\varrho(n)-1}(S^{n-\varrho(n)}) \xrightarrow{H} \pi_{2n-\varrho(n)-1}(S^{2n-2\varrho(n)-1})$$

für $n \geq 2 \cdot \varrho(n) + 3$, d. h. nach 2.22 für $n > 15$, ist also $\text{Im } H \neq 0$. Nach einem Ergebnis von I. M. JAMES (vgl. [10], Satz 3.5) existiert also ein Element α in der Gruppe $\pi_{2n-\varrho(n)-1}(S^{2n-2\varrho(n)-1})$ mit gerader Ordnung. Diese Gruppe ist jedoch isomorph zur stabilen Gruppe $G_{\varrho(n)}$, falls $3(\varrho(n) + 1) \leq 2n$, also nach 2.22 insbesondere für $n > 15$. Damit ist gezeigt:

4.4. Existiert zu der natürlichen Zahl r eine natürliche Zahl $n > 15$ derart, daß $r = \varrho(n)$ ist, so ist die 2-Komponente der stabilen Gruppe G_r des r -Stammes nicht Null.

Wie man aus der Definition der Funktion $\varrho(n)$ sofort ersieht (vgl. 2.22), ist für alle natürlichen Zahlen r mit $r \equiv 0, 1, 3$ und 7 (modulo 8) die Voraussetzung von 4.4 erfüllt. Dies, zusammen mit 4.3, stellt genau den Inhalt von Satz 1.9 dar, der somit ebenfalls bewiesen ist.

Wir wenden uns nun den verbliebenen Fällen $r \equiv 4, 5 \pmod{8}$ und damit Satz 1.10 zu. Das gewünschte Ergebnis erhält man sofort aus 2.25 auf folgende Weise. Setzt man dort nämlich $s = 0$ und $t = 2$, so ergibt sich: Die p -Komponente von G_r , $r = 4p(p-1) - 4$, ist für alle ungeraden Primzahlen p von Null verschieden. Setzt man stattdessen $s = 0$ und $t = 1$, so hat man: Die p -Komponente von G_r , $r = 2(p-1)(p+1) - 3$, ist für alle ungeraden Primzahlen p von Null verschieden. Diese beiden Aussagen zusammen stellen den Inhalt von 1.10 dar.

Wir kommen nun zu den Sätzen 1.13, 1.14 und 1.15. Die Bernoullischen Zahlen B_k ($B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ...) schreiben wir in der Form

$$B_k = \frac{z_k}{n_k} \quad \text{mit} \quad (z_k, n_k) = 1.$$

Nach einem bekannten Satz von v. STAUDT und CLAUSEN (vgl. [16]) folgt, daß der Nenner n_k der k -ten Bernoullischen Zahl gleich dem Produkt aller Primzahlen p_i mit $(p_i - 1) | 2k$ ist (wie üblich schreiben wir $a | b$ für „ a ist Teiler von b “). Es gilt also:

4.5. (a) Die Primzahl p teilt n_k dann und nur dann, wenn $(p-1) | 2k$ ist.

(b) n_k ist quadratfrei.

Im Hinblick auf 2.26 (a) interessiert man sich für die gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen z_k , $(2^{2k-1} - 1)$; n_k , k . Man beweist leicht:

4.6. Für alle natürlichen Zahlen k gilt

$$(n_k, (2^{2k-1} - 1)) = 1.$$

Da nun $o(\Theta_{4k-1})$ jedenfalls eine natürliche Zahl ist, folgt hieraus wegen 2.26, daß jede ungerade Primzahl p mit $p | n_k$ Teiler der Ordnung von G_{4k-1} sein muß. Zusammen mit 4.5 folgt daraus 1.13.

Sei jetzt p eine ungerade Primzahl mit $(p-1) | 2k$ und $p^i | k$ für eine nicht-negative ganze Zahl i . Wegen 4.5 und 4.6 ergibt sich sofort 1.14.

Es seien nun t , k natürliche Zahlen, t ungerade, mit $\varphi(t) | 2k$ (φ bezeichne die Eulersche φ -Funktion). Weiter sei

$$t = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$$

die kanonische Zerlegung von t , dann ist bekanntlich

$$\varphi(t) = \prod_i (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}).$$

Aus $\varphi(t) | 2k$ folgt also für alle $1 \leq i \leq l$:

$$\frac{1}{2} \cdot \varphi(p_i^{\alpha_i}) | k,$$

und daher nach 1.14, daß $p_i^{\alpha_i} | o(G_{4k-1})$ für alle i , also auch

$$\prod_i p_i^{\alpha_i} = t | o(G_{4k-1}).$$

Für $2k = m$ ist dies die Aussage von 1.15.

Eine weitere zahlentheoretische Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen ist die folgende (vgl. etwa [16], Seite 137):

4.7. Wenn $p | k$ und $p \nmid n_k$, dann gilt $p | z_k$.

Daher ist $N = o(G_{4k-1}) \cdot 2^k \cdot \frac{B_k}{k}$ eine natürliche Zahl und wegen 2.26 folgt für $k \geq 4$:

$$o(\Theta_{4k-1}) = 2^{k-4} \cdot (2^{2k-1} - 1) \cdot a_k \cdot N \geq 8^{k-2}.$$

Dieses starke Anwachsen von $o(\Theta_{4k-1})$ für zunehmende k impliziert insbesondere die Aussage von 1.18 für die Fälle $r \equiv 3, 7 \pmod{8}$. Weiter ergibt sich aus 1.22 (b), daß wegen 2.26 (c) die Ordnung von Θ_{8k+1} für alle $k \geq 1$ gerade ist. Schließlich ersieht man aus 2.26 auch, daß für ungerade Primzahlen p und für $r \not\equiv 3 \pmod{4}$ p dann und nur dann Teiler von $o(\Theta_r)$ ist, wenn p auch Teiler von $o(G_r)$ ist. In den Fällen $r \equiv 4, 5 \pmod{8}$ haben wir darüber bereits die Aussage von 1.10 hergeleitet. Entsprechend folgt aus 2.25, daß auch unter den G_{8k} , G_{8k+2} bzw. G_{8k+6} jeweils unendlich viele Gruppen eine Ordnung > 1 haben, die keine Zweierpotenz ist. Damit hat man dann die gesamte Aussage von 1.18.

Ehe wir uns jetzt den letzten beiden Sätzen 1.20 und 1.21 zuwenden, zitieren wir noch ein Ergebnis, das wir in [19] bewiesen haben und das hier benutzt wird. Es bezeichne dazu $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ die aufsteigend geordnete Folge aller Primzahlen und P_m sei das Produkt

$$P_m = \prod_{i=1}^m p_i.$$

Weiter sei $\mathcal{P}_m$ die Klasse aller endlichen abelschen Gruppen, deren Ordnung Teiler einer Potenz von P_m ist. (Über Klassen abelscher Gruppen vgl. [17].) Dann gilt der folgende Satz:

4.8. Für alle natürlichen Zahlen n und m und alle ganzen Zahlen r gilt

$$\pi_{n+r}(S^n)^{\mathcal{P}_m} \approx \begin{cases} G_r + G_{r-n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade und wenn } r \leq n(p_{m+1} - 1) - 3, \\ G_r, & \text{falls } n \text{ ungerade und wenn } r \leq (n+1)(p_{m+1} - 1) - 3. \end{cases}$$

Mit $\mathcal{P}_m$ -Isomorphie ist dabei natürlich die Existenz eines $\mathcal{P}_m$ -Isomorphismus im Sinne von SERRE [17] gemeint.

Sei nun $r = 4k - 1$ und p eine ungerade Primzahl mit $(p-1) | 2k$. Nach 1.13 folgt $p | o(G_r)$, also gilt wegen 4.8, daß p Teiler der Ordnung von $\pi_{n+4k-1}(S^n)$ ist, wenn entweder n gerade und $4k-1 \leq n(p-1) - 3$ oder wenn n ungerade und $4k-1 \leq (n+1)(p-1) - 3$ ist. Nach Umformung der Ungleichungen ist dies aber genau die Aussage von 1.20. Entsprechend folgt auch 1.21.

Literatur

- [1] ADAMS, J. F.: On the nonexistence of elements of Hopf-invariant one. *Ann. Math.* **72**, 20—104 (1960).
- [2] — Vector fields on spheres. *Ann. Math.* **75**, 603—632 (1962).
- [3] BARRATT, M. G., and P. J. HILTON: On join operations in homotopy groups. *Proc. London Math. Soc.* **3**, 430—445 (1953).
- [4] FREUDENTHAL, H.: Über die Klassen der Sphärenabbildungen. *Compositio Math.* **5**, 299—314 (1937).
- [5] HILTON, P. J.: On the Hopfinvariant of a composition element. *J. London Math. Soc.* **29**, 165—171 (1954).
- [6] — Suspension theorems and the generalized Hopfinvariant. *Proc. London Math. Soc.* **1**, 462—493 (1951).
- [7] — A note on the P -homomorphism in homotopy groups of spheres. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **51**, 230—233 (1955).
- [8] —, and J. H. C. WHITEHEAD: Note on the Whitehead-product. *Ann. Math.* **58**, 429—441 (1953).
- [9] JAMES, I. M.: On the iterated suspension. *Quart. J. Math. Oxford* **5**, 1—10 (1954).
- [10] — Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **53**, 817—820 (1957).
- [11] — On the suspension sequence. *Ann. Math.* **65**, 74—107 (1957).
- [12] KERVAIRE, M. A.: Differentiable structures on spheres and homotopy. *Proc. Intern. Congress of Math.*, Stockholm, 1962.
- [13] —, and J. W. MILNOR: Groups of homotopy spheres. *Ann. Math.* **77**, 504—537 (1963).
- [14] MAHOWALD, M. E.: Some Whitehead products in S^n . *Notices Am. Math. Soc.* **11**, 306 (1964).
- [15] PAECHTER, G. F.: On the groups $II_r(V_{n,m})$, I—V. *Quart. J. Math. Oxford* **7**, 249—268 (1956); **9**, 8—27 (1958); **10**, 17—37 (1959); **10**, 241—260 (1959); **11**, 1—16 (1960).
- [16] SAALSCHÜTZ, L.: Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin: Springer 1893.
- [17] SERRE, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. Math.* **58**, 258—294 (1953).
- [18] SMALE, S.: On the structure of manifolds. *Am. J. Math.* **84**, 387—399 (1962).
- [19] THOMEIER, S.: Über eine Beziehung zwischen unstabilen und stabilen Homotopiegruppen von Sphären. *Arch. Math.* **15**, 351—353 (1964).
- [20] TODA, H.: p -primary components of homotopy groups III. *Mem. Coll. Sci. Kyoto, Ser. A* **81**, 191—210 (1958).
- [21] — Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres. *Ann. Math. Studies* No. 49. Princeton: University Press 1963.
- [22] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. *Ann. Math.* **47**, 461—475 (1946).
- [23] — A generalisation of the Hopf invariant. *Ann. Math.* **51**, 192—237 (1950).
- [24] — On the Freudenthal theorems. *Ann. Math.* **57**, 209—228 (1953).

(Eingegangen am 5. April 1965)