# Glättung äquivarianter Homotopiemengen

Von

TAMMO TOM DIECK

Sei $G$ eine topologische Gruppe. Es kommt in der Praxis vor, daß für $G$-Räume definierte Kohomologiegruppen für freie $G$-Räume $X$ nur vom Orbitraum $X/G$ abhängen. Das ist etwa für die gewöhnliche Kohomologie oder für die $K$-Theorie der Fall. Wir untersuchen homotopie-theoretisch die Voraussetzungen, unter denen diese Situation eintritt. Dabei stellen wir Beziehungen zu sogenannten Glättungs-Transformationen her (2., Definition (A)). Wir wenden die Ergebnisse auf klassifizierende Räume und Thom-Räume an. An anderer Stelle zeigen wir ihre grundlegende Bedeutung für die Kobordismen-Theorie der Transformationsgruppen (s. auch 12.).

**1. Bezeichnungen.** Sei $G$ eine topologische Gruppe. $T^0(G)$ sei die Kategorie der punktierten $G$-Räume; d.h. die *Objekte* sind punktierte topologische Räume zusammen mit einer stetigen Linksoperation von $G$, wobei der Grundpunkt 0 stationärer Punkt der Operation ist ($g0 = 0$ für $g \in G$); die *Morphismen* sind punktierte äquivariante Abbildungen. Wir haben in $T^0(G)$ einen Homotopiebegriff: Eine Homotopie $f_t\colon X \to Y$, $t \in I$, ist eine Schar von Morphismen $f_t$ aus $T^0(G)$, die außerdem eine gewöhnliche Homotopie ist. $[X, Y]_G^0$ sei die Menge der $G$-Homotopieklassen von punktierten $G$-Abbildungen $X \to Y$. Wir verwenden auch die entsprechenden Begriffe „ohne Grundpunkt" (bzw. „ohne Gruppe"); das wird in den Bezeichnungen durch Auslassen der Ziffer 0 (bzw. des Buchstaben $G$) vermerkt.

Die Klasse der Objekte einer Kategorie $K$ bezeichnen wir mit $|K|$. Ein $X \in |T(G)|$ heiße $G$-Bündel, genau wenn die Operation von $G$ auf $X$ frei ist und die Projektion $q = q_X\colon X \to X/G$ auf den Orbitraum numerierbar lokal trivial ist (DOLD [2], p. 226). Sei $F(G)$ die volle Unterkategorie von $T(G)$ der $G$-Bündel. Speziell enthält $F(G)$ universelle Objekte $EG$, z.B. die Milnorkonstruktion (DOLD [2], p. 251. $EG$ ist bis auf h-Äquivalenz (= Homotopie-Äquivalenz) in $F(G)$ bestimmt und im folgenden fest gewählt).

Wir haben natürliche Transformationen

$$Q\colon F(G) \to T, \quad P\colon T(G) \to T, \quad P^0\colon T^0(G) \to T^0,$$

die auf den Objekten wie folgt erklärt sind: $Q(X) = X/G$, $P(Y) = (EG \times Y)/G$, $P^0(Z) = (EG \times Z/EG \times 0)/G$ [1]). Die Projektionen $EG \times X \to X$, $EG \times X \to EG$ geben uns Abbildungen $r_X\colon P(X) \to X/G$, $p_X\colon P(X) \to BG$. Für $X \in |F(G)|$ ist $r_X$

---

[1]) Wir benutzen den Schrägstrich in zweierlei Bedeutung!

eine Homotopieäquivalenz (nämlich eine Faserung mit zusammenziehbarer Faser), $s_X\colon X/G \to P(X)$ sei h-invers. Für $X \in |T(G)|$ ist $X^+ \in |T^0(G)|$ der Raum $X$ mit separatem stationärem Grundpunkt.

Für Begriffe, Sätze und Methoden aus der Homotopietheorie verweisen wir auf Puppe [4].

**2. Glättungen.** Falls im folgenden von Räumen $M_G \in |T^0(G)|$ bzw. $M \in |T^0|$ die Rede ist, so nehmen wir an, daß die Inklusion des Grundpunktes eine h-Cofaserung (= WHEP in Puppe [3], p. 84) in $T(G)$ bzw. $T$ ist (d.h. die Räume h-wohlpunktiert sind. Vgl. Puppe [4]).

**(A) Definition.** Sei $M_G \in |T(G)|$, $M \in |T|$. Eine natürliche Transformation

$$\alpha\colon [-, M_G]_G \to [-, M] \circ P$$

(von Funktoren $T(G) \to$ Mengen) heiße *Glättung* von $M_G$, wenn $\alpha(X)$ für $X \in |F(G)|$ bijektiv ist.

Sei $M_G \in |T^0(G)|$, $M \in |T^0|$. Eine natürliche Transformation

$$\alpha\colon [-, M_G]_G^0 \to [-, M]^0 \circ P^0$$

(von Funktoren $T^0(G) \to$ punktierte Mengen) heiße *punktierte Glättung* von $M_G$, wenn $\alpha(X^+)$ für $X \in |F(G)|$ bijektiv ist.

Sei $A(M_G, M)$ (bzw. $A^0(M_G, M)$) die Menge der Glättungen (bzw. punktierten Glättungen) von $M_G$.

**(B) Definition.** Sei $M_G \in |T(G)|$, $M \in |T|$. Eine natürliche Transformation

$$\beta\colon [-, M_G]_G \to [-, M] \circ Q$$

(von Funktoren $F(G) \to$ Mengen) heiße *Vereinfachung* von $M_G$, wenn $\beta(X)$ für jedes $X \in |F(G)|$ bijektiv ist. Sei $B(M_G, M)$ die Menge der Vereinfachungen von $M_G$.

**(C) Definition.** Sei $M_G \in |T(G)|$, $M \in |T|$. Eine Homotopieäquivalenz

$$\gamma\colon P(M_G) \to BG \times M$$

heiße *Reproduktion* von $M_G$, wenn die Zusammensetzung von $\gamma$ mit der Projektion $BG \times M \to BG$ gleich $p_{M_G}$ ist (d.h. $\gamma$ eine Abbildung „über $BG$" ist). Ein $\gamma$ wie oben heiße *punktierte Reproduktion* von $M_G \in |T^0(G)|$, wenn außerdem $(EG \times 0)/G$ nach $BG \times 0$ abgebildet wird. Sei $C(M_G, M)$ (bzw. $C^0(M_G, M)$) die Menge der Homotopieklassen in der Kategorie der Räume über $BG$ (bzw. die Menge der Homotopieklassen in der Kategorie von Raumpaaren über $BG$) von Reproduktionen von $M_G$.

Wir fassen $M \in |T^0|$ als Objekt von $T^0(G)$ mit trivialer $G$-Operation auf. Ein Morphismus $j\colon M \to M_G$ aus $T^0(G)$ heiße *starke Reproduktion* von $M_G$, wenn

$$J = \mathrm{id} \times j\colon EG \times M \to EG \times M_G$$

eine Homotopieäquivalenz in $T(G)$ ist.

**3. Hauptsätze.**

**Satz 1.** *Sei* $M_G \in |T(G)|$, $M \in |T|$. *Es gibt kanonische Bijektionen*

$$A(M_G, M) \cong B(M_G, M) \cong C(M_G, M).$$

*Ist* $A(M_G, M) \neq \emptyset$, *so ist* $M$ *homotopieäquivalent zum Raum* $M_G$ *nach Vergessen der* $G$*-Struktur (so daß die drei Mengen bei gegebenem* $M_G$ *im wesentlichen unabhängig von* $M$ *sind).*

Wir geben die Bijektionen im Verlaufe des Beweises von Satz 1 an.

**Satz 2.** (a) *Sei* $M_G \in |T^0(G)|$, $M \in |T^0|$. *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$A^0(M_G, M) \cong C^0(M_G, M).$$

$M$ *ist punktiert homotopieäquivalent zu* $M_G$ *nach Vergessen der* $G$*-Struktur, falls*

$$A^0(M_G, M) \neq \emptyset.$$

(b) *Sei* $(F, F')$ *ein Paar aus* $F(G)$, *so daß* $F' \subset F$ *eine h-Cofaserung in* $T(G)$ *ist. Sei* $j$ *eine starke Reproduktion von* $M_G$ *und* $\alpha$ *die (nach* (a)*) dazugehörige punktierte Glättung. Dann ist* $\alpha(F/F')$ *bijektiv.*

Seien jetzt $G$ und $H$ kompakte Liesche Gruppen. Sei $B(G, H) \in |T(G)|$ der klassifizierende Raum für $(G, H)$-Bündel (im Sinne von [1]). Sei $M(G, V) \in |T^0(G)|$ der mit einem Darstellungsraum $V$ von $H$ aus $E(G, H) \times_H V$ gebildete Thom-Raum.

**Satz 3.** $B(G, H)$ *und* $M(G, V)$ *haben kanonische (starke) Reproduktionen.*

Einzelheiten erfährt der Leser aus dem Beweis von Satz 3. Die Abschnitte 4 bis 8 dienen zum Beweis von Satz 1, 9 und 10 zum Beweis von Satz 2. Satz 3 wird in 11. bewiesen.

**4. Lemma 1.** *Sei* $\gamma$ *eine (punktierte) Reproduktion. Dann ist* $M$ *(punktiert) homotopieäquivalent zu* $M_G$ *nach Vergessen der* $G$*-Struktur.*

Beweis. $\gamma$ ist nach Voraussetzung eine Abbildung über $BG$, und zwar zwischen numerierbar lokal trivialen Abbildungen, also Faserungen (Dold [2], p. 236, 4.8). $\gamma$ ist eine h-Äquivalenz, also eine fasernweise h-Äquivalenz (Dold [2], p. 243, 6.1). Das erledigt den unpunktierten Fall. Für den punktierten bemerken wir, daß $0 \to M_G$ eine h-Cofaserung in $T$ ist (weil sogar in $T(G)$) und eine punktierte Abbildung zwischen h-wohlpunktierten Räumen eine h-Äquivalenz in $T^0$ ist, falls sie es in $T$ ist (Puppe [4]).

Sei $\gamma$ wie oben. Es gibt eine eindeutig bestimmte $G$-Abbildung

$$\gamma_1\colon EG \times M_G \to EG \times M$$

($M$ als trivialer $G$-Raum aufgefaßt), die über $EG$ liegt und $Q(\gamma_1) = \gamma$ erfüllt.

Das folgende Lemma zeigt unter anderem

(4.1) $\gamma_1$ *ist eine h-Äquivalenz in* $F(G)$.

**Lemma 2.** *Seien* $F_1$ *und* $F_2$ *aus* $|F(G)|$. *Sei* $\gamma_1\colon F_1 \to F_2$ *eine* $G$*-Abbildung und sei* $\gamma = Q(\gamma_1)$ *eine h-Äquivalenz. Dann ist* $\gamma_1$ *eine h-Äquivalenz in* $F(G)$.

Bemerkung. Lemma 2 läßt sich anwenden, falls $\gamma_1$ von der Form

$$\mathrm{id} \times f\colon EG \times M_1 \to EG \times M_2$$

ist und $f\colon M_1 \to M_2$ eine $G$-Abbildung, die nach Vergessen der $G$-Struktur eine h-Äquivalenz ist. Dann ist nämlich $Q(\gamma_1)$ eine Abbildung über $BG$, die auf jeder Faser eine h-Äquivalenz ist. Also ist $Q(\gamma_1)$ eine h-Äquivalenz (Dold [2], 6.3).

Beweis von Lemma 2. $(\gamma_1, \gamma)$ ist eine Bündelabbildung zwischen numerierbaren $G$-Prinzipalbündeln. Ist $\lambda$ h-invers zu $\gamma$ und $\lambda_1$ eine $G$-Abbildung über $\lambda$, so läßt sich eine Homotopie $\gamma\lambda \simeq \mathrm{id}$ zu einer $G$-Homotopie von Bündelabbildungen $\gamma_1\lambda_1 \simeq \sigma$ hochheben (Dold [2], p. 250, 7.8). $\sigma$ liegt über der Identität, ist also ein Isomorphismus. Man sieht, daß $\gamma_1$ ein h-Rechtsinverses $\lambda_1\sigma^{-1}$ in $T(G)$ hat.

5. Wir definieren eine Abbildung $a\colon A(M_G, M) \to B(M_G, M)$ wie folgt. Sei $\alpha \in A(M_G, M)$. Wir setzen

$$a(\alpha)(X)\colon [X, M_G]_G \xrightarrow[\alpha]{} [P(X), M] \xrightarrow[s_X^*]{} [X/G, M].$$

$a(\alpha) \in B(M_G, M)$ ist klar.

6. Wir definieren eine Abbildung $b\colon B(M_G, M) \to C(M_G, M)$ wie folgt. Sei $\beta \in B(M_G, M)$. Es ist $EG \times M_G \in |F(G)|$. Die Abbildung $f\colon P(M_G) \to M$ repräsentiere das Bild der Projektion $EG \times M_G \to M_G$ bei $\beta$. Sei $\gamma\colon P(M_G) \to BG \times M$ die Abbildung mit den Komponenten $p_{M_G}$ und $f$; dann ist $\gamma$ eine Abbildung über $BG$. Das folgende Lemma zeigt, daß wir $b$ durch $b(\beta) = [\gamma]$ definieren können.

**Lemma 3.** *$\gamma$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Wir zeigen, daß für jeden topologischen Raum $Y$

$$\gamma_*\colon [Y, P(M_G)] \to [Y, BG \times M]$$

bijektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] {[Y, P(M_G)]} \arrow[rr, "\gamma_*"'] \arrow[dr] & & {[Y, BG \times M]} \arrow[dl] \\ & {[Y, BG]} & \end{tikzcd}$$

$\gamma_*$ „fasernweise“ bijektiv ist. Sei $[f] \in [Y, BG]$. $f$ induziert einen Raum $Y_f \in |F(G)|$ über $Y$. Sei $\xi$ die Zusammensetzung

$$[Y_f, M_G]_G \xrightarrow{\cong} [Y_f, EG \times M_G]_G \xrightarrow{Q} [Y, P(M_G)].$$

Zu $[g] \in [Y, P(M_G)]$ über $[f]$ gibt es $[g_1] \in [Y_f, EG \times M_G]_G$ mit $Qg_1 = g$. Es ist $\xi[\mathrm{pr}_2 \circ g_1] = [g]$. Also geht $\xi$ surjektiv auf die „Faser“ über $[f]$. Aus der Natürlichkeit von $\beta$ folgt, daß

$$\begin{tikzcd} {[Y_f, M_G]_G} \arrow[r, "\cong", "\beta"'] \arrow[d, "\xi"] & {[Y, M]} \\ {[Y, P(M_G)]} \arrow[r, "\gamma_*"'] & {[Y, BG \times M]} \arrow[u, "\mathrm{pr}_*"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. $\mathrm{pr}_*$ bildet die Faser über $[f]$ bijektiv auf $[Y, M]$ ab. Es folgt, daß $\gamma_*$ die Faser über $[f]$ bijektiv abbildet.

7. Wir definieren eine Abbildung $c\colon C(M_G, M) \to A(M_G, M)$ wie folgt. Sei $[\gamma] \in C(M_G, M)$. Dazu gehört nach Lemma 2 eine $G$-Homotopieäquivalenz

$$\gamma_1\colon EG \times M_G \to EG \times M .$$

Wir betrachten die Zusammensetzung $\alpha(X)$

$$[X, M_G]_G \xrightarrow[\mathrm{pr}^*]{} [EG \times X, M_G]_G \cong [EG \times X, EG \times M_G]_G \cong [EG \times X, EG \times M]_G \cong \cong [EG \times X, M]_G \cong [P(X), M] .$$

$\alpha$ ist eine natürliche Transformation. Das folgende Lemma zeigt, daß $\alpha$ eine Glättung ist. Wir definieren $c[\gamma] = \alpha$.

**Lemma 4.** *Für $X \in |F(G)|$ ist die Projektion $EG \times X \to X$ eine h-Äquivalenz in $F(G)$.*

Beweis. Nach Übergang zu den Orbiträumen erhält man die h-Äquivalenz $r_X$. Man wende Lemma 2 an.

8. Man verifiziert, daß $cba$, $acb$ und $bac$ identische Abbildungen sind. Damit ist Satz 1 bewiesen. Zum Nachweis kann man die folgende Bemerkung benutzen:

$$\alpha(\mathrm{id}(M_G)) = a(\beta)(\mathrm{pr}\colon EG \times M_G \to M_G) .$$

Diese Beziehung folgt aus der Natürlichkeit von $\alpha$ und

$$P(\mathrm{pr}) \circ s_{EG \times M_G} \simeq r_{EG \times M_G} \circ s_{EG \times M_G} \simeq \mathrm{id} .$$

Die Abbildung $ba$ ordnet also einem $\alpha$ die Klasse mit den Komponenten $[p_{M_G}]$ und $\alpha(\mathrm{id}(M_G))$ zu.

9. Zum Beweis von Satz 2 (a) geben wir inverse Abbildungen

$$a^0\colon A^0(M_G, M) \to C^0(M_G, M), \quad c^0\colon C^0(M_G, M) \to A^0(M_G, M)$$

an.

Ist $\alpha \in A^0(M_G, M)$, so werde $a^0(\alpha)$ wie folgt konstruiert. Sei $i\colon M_G^+ \to M_G$ die punktierte Abbildung, die auf dem Summanden $M_G$ die Identität ist. Es ist

$$P^0(M_G^+) \cong P(M_G)^+ .$$

Aus $\alpha(i)$ erhalten wir eine Abbildung $\gamma'\colon P(M_G) \to M$. Wenden wir $i^*[\mathrm{id}] = [i]$ und die Natürlichkeit von $\alpha$ an, so erkennen wir, daß für $\gamma'$ eine Abbildung gewählt werden kann, die $(EG \times 0)/G$ in den Grundpunkt abbildet. Sei $\gamma\colon P(M_G) \to BG \times M$ die Abbildung mit den Komponenten $p_{M_G}$ und $\gamma'$. Wir müssen zeigen, daß $\gamma$ eine h-Äquivalenz ist. Nun wird aber durch

$$[X, M_G] \cong [X^+, M_G]_G^0 \to [P^0(X^+), M]^0 \cong [P(X), M]$$

eine Glättung definiert, etwa $\alpha'$. Aus 8. entnimmt man $ba(\alpha') = [\gamma]$ und dann aus Lemma 3, daß $\gamma$ eine h-Äquivalenz ist.

Ist $\gamma\colon P(M_G) \to BG \times M$ eine punktierte Reproduktion, so induziert $\mathrm{pr}_2 \circ \gamma$ eine punktierte Abbildung $f\colon P^0(M_G) \to M$. Damit bilden wir für $X \in |T^0(G)|$

$$[X, M_G]_G^0 \xrightarrow{P^0} [P^0(X), P^0(M_G)]^0 \xrightarrow{f_*} [P^0(X), M]^0.$$

Die dadurch gegebene natürliche Transformation sei $c^0(\gamma)$.

**10.** Beweis von Satz 2 (b).

**Lemma 5.** *Unter den Voraussetzungen von Satz* 2 (b) *ist die kanonische Abbildung*

$$R\colon (EG \times F/F')/EG \times 0 \to F/F'$$

*eine h-Äquivalenz in* $T^0(G)$.

Beweis. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} EG \times F & \xrightarrow[R_F]{} & F \\ \uparrow & & \uparrow \\ EG \times F' & \xrightarrow[R_{F'}]{} & F'. \end{array}$$

Die senkrechten Abbildungen sind h-Cofaserungen in $T(G)$ (und insbesondere auch Einbettungen; vgl. Puppe [4]). Aus Lemma 3 entnimmt man, daß die Projektionen $R_F$ und $R_{F'}$ einzeln h-Äquivalenzen in $F(G)$ sind. Also ist $(R_F, R_{F'})$ eine h-Äquivalenz in der Kategorie der Paare (Puppe [4]) und mithin die Quotientabbildung

$$R_F/R_{F'}\colon (EG \times F)/(EG \times F') \to F/F'$$

eine h-Äquivalenz in $T^0(G)$. Die stetige bijektive Abbildung

$$EG \times F/EG \times F' \to (EG \times F/F')/EG \times 0$$

ist vielleicht kein Homöomorphismus, doch immer eine punktierte h-Äquivalenz. Das folgt durch eine sinnreiche Anwendung von Puppe [5], Hilfssatz 18 (in äquivarianter Form). Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Sei $j\colon M \to M_G$ eine starke Reproduktion. Da $M$ und $M_G$ h-wohlpunktiert sind, ist

$$J\colon (EG \times M, EG \times 0) \to (EG \times M_G, EG \times 0)$$

eine h-Äquivalenz von Paaren in $T(G)$. Aus einem Inversen erhalten wir

$$U\colon EG \times M_G/EG \times 0 \to EG \times M/EG \times 0$$

und nach Übergang zu den Orbiträumen

$$u\colon P^0(M_G) \to P^0(M).$$

Mit der kanonischen Projektion $\mathrm{pr}\colon P^0(M) \to M$ bilden wir $v = \mathrm{pr} \circ u$. Die zu $j$ gehörige Glättung $\alpha$ ist durch $[f] \to [v \circ P^0(f)]$ gegeben.

Sei $S$ h-invers zu $R$ und $s = Q(S)$. Wir definieren eine zu $\alpha(F/F')$ inverse Abbildung $\alpha'$ wie folgt

$$[P^0(F/F'), M]^0 \xrightarrow[s_*]{} [(F/F')/G, M]^0 \xrightarrow[q_*]{} [F/F', M]_G^0 \xrightarrow[j_*]{} [F/F', M_G]_G^0.$$

Wir weisen nur $\alpha'\alpha = \mathrm{id}$ nach. $\alpha\alpha' = \mathrm{id}$ ist leichter einzusehen. Wenn wir die Definitionen einsetzen, so erkennen wir, daß $\alpha'\alpha = \mathrm{id}$ mit

$$f \simeq j \circ v \circ P^0(f) \circ s \circ q$$

(punktierte $G$-Homotopie) gleichwertig ist, hier durchläuft $f$ die Abbildungen $f\colon F/F' \to M_G$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Q(F/F') \arrow[r, "s"'] & P^0(F/F') \arrow[r, "P^0(f)"'] & P^0(M_G) \arrow[r, "v"'] & M \arrow[d, "j"] \\
F/F' \arrow[r, "S"'] \arrow[u, "q"] & \dfrac{EG \times F/F'}{EG \times 0} \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"'] \arrow[u, "q"] & \dfrac{EG \times M_G}{EG \times 0} \arrow[r, "\mathrm{pr}"'] \arrow[u, "q"] & M_G
\end{tikzcd}$$

sind das linke und das mittlere Quadrat kommutativ und die untere Zeile ist homotop zu $f$. Es bleibt die Kommutativität des rechten Quadrates zu zeigen:

$$jvq \simeq j \circ \mathrm{pr} \circ U \simeq \mathrm{pr} \circ J \circ U \simeq \mathrm{pr}\,.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkung. Unter geeigneten Voraussetzungen lokaler Art über das Paar $(F, F')$ ist für eine beliebige Glättung $\alpha(F/F')$ bijektiv. Wir sind an Satz 2 (b) hauptsächlich in Verbindung mit Satz 3 interessiert.

**11.** Beweis von Satz 3. Seien $G$ und $H$ kompakte Liesche Gruppen. Sei $B(G, H)$ der klassifizierende Raum für $H$-Prinzipalbündel mit $G$-Operation. In [1], Satz in 6.1, haben wir eine Homotopieäquivalenz (in $T$) $j\colon BH \to B(G, H)$ angegeben, die nach dem zitierten Satz als eine (unpunktierte) starke Reproduktion bezeichnet werden kann (s. Bemerkung nach Lemma 2). Für einen stetigen, endlich-dimensionalen reellen $H$-Modul $V$ induziert $j$ eine Bündelabbildung

$$j_V\colon EH \times_H V \to E(G, H) \times_H V$$

und eine Abbildung der zugehörigen Thom-Räume

$$m = M(j_V)\colon M(V) \to M(G, V)\,.$$

$m$ ist dann nach Vergessen der $G$-Struktur eine h-Äquivalenz und folglich

$$\mathrm{id} \times m\colon EG \times M(V) \to EG \times M(G, V)$$

eine h-Äquivalenz in $T(G)$ (s. Bemerkung nach Lemma 2). Es ist klar, daß Thom-Räume h-wohlpunktiert sind (s. PUPPE [3], 7. Satz 3). Damit ist Satz 3 bewiesen.

**12.** Wir werden die Ergebnisse dieser Arbeit auf die äquivariante unitäre Kobordismen-Theorie $U_G^*(X)$ anwenden. Sie gestatten die Konstruktion einer natürlichen Transformation

$$\alpha\colon U_G^*(X) \to U^*((EG \times X)/G)\,,$$

die für freie $G$-Räume $X$ ein Isomorphismus ist. Ist $X$ ein Punkt, so erhalten wir speziell Invarianten für unitäre $G$-Mannigfaltigkeiten, die in $U^*(BG)$ liegen. Die Berechnung dieser Invarianten liefert zum Beispiel weitreichende algebraische Beziehungen zwischen einer $G$-Mannigfaltigkeit und ihrer Fixpunktstruktur. Wir gewinnen daraus Existenzsätze für Fixpunkte.

### Literaturverzeichnis

[1] T. TOM DIECK, Faserbündel mit Gruppenoperation. Arch. Math. **20**, 136–143 (1969).
[2] A. DOLD, Partitions of unity in the theory of fibrations. Ann. of Math., II. Ser. **78**, 223–255 (1963).
[3] D. PUPPE, Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. **18**, 81–88 (1967).
[4] D. PUPPE, Homotopietheorie. Vorlesungsausarbeitung. Erscheint in den Lecture Notes, Springer Verlag.
[5] D. PUPPE, Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I. Math. Z. **69**, 299–344 (1958).

Eingegangen am 25. 4. 1968

Anschrift des Autors:
Tammo tom Dieck
Mathematisches Institut der Universität
69 Heidelberg, Tiergartenstraße