Orbittypen und äquivariante Homologie II

Von

Tammo tom Dieck

1. Einleitung. Die in [8] eingeführten klassifizierenden Räume für Familien von Orbittypen sind grundlegend für die Untersuchung von äquivarianten Homologie-Theorien. Die Methode der Induktion über benachbarte Familien von Orbittypen wurde besonders in der Bordismentheorie erfolgreich angewendet (Conner und Floyd [4], Stong [26], Wasserman [27]). Wir formulieren in Satz 1 dieser Arbeit eine allgemeine homotopie-theoretische Version des Induktionsschrittes. Bemerkenswert an diesem Satz scheint mir, daß man nicht im stabilen Bereich arbeiten muß.

Wir wenden Satz 1 an, um einen Zerspaltungssatz (Satz 2) für äquivariante stabile Homotopiemengen zu beweisen. Die Ergebnisse werden für die Analyse des Burnside-Ringes einer kompakten Lieschen Gruppe G verwendet [9]. Dieser Satz wurde für endliche G von Segal [25] angekündigt und kürzlich auf anderem Wege auch von Hauschild [16] bewiesen.

Als weitere Anwendungen von Satz 1 geben wir einen neuen Beweis (Satz 5) für einen Satz von Wasserman [27] an, nämlich eine homotopie-theoretische Beschreibung der geometrischen äquivarianten Bordismentheorie. Als Anwendung davon zeigen wir, daß die sogenannte multiplikative Induktion mit der Bordismenrelation verträglich ist (Satz 6).

2. Benachbarte Familien von Orbittypen. Sei G eine kompakte Liesche Gruppe. Seien F_1 und F_2 Familien von Untergruppen von G (immer abgeschlossen vorausgesetzt), die um H benachbart sind; das soll heißen: $F_2 \subset F_1$ und $F_1 - F_2$ besteht aus der Menge (H) der zu H konjugierten Untergruppen. Wir haben in [8] einer solchen Familie F_1 einen universellen G-Raum EF_1 zugeordnet. Wir wollen in dieser Arbeit statt EF_1 nur F_1 schreiben, da aus dem Zusammenhang hervorgeht, ob die Familie oder der Raum gemeint ist. Wir setzen immer voraus, daß $F_2 \subset F_1$ eine abgeschlossene G-Kofaserung ist. Insbesondere können wir nach [8] für F_1 das Modell

$$(1) \qquad F_1 = (G \times_N EW) * F_2$$

verwenden. Dabei haben wir in (1) folgende Bezeichnungen verwendet: $W = N/H$, N Normalisator von H in G; es ist EW wie üblich ein numerierbarer freier W-Raum, der kontrahierbar ist (Dold [11]); es bezeichnet $*$ den Join mit der Milnor-Topologie

(Milnor [20], Brown [3], 5.7). Verwenden wir das Modell (1) für F_1, so sehen wir, daß die H-Fixpunktmenge F_1^H von F_1 die Gestalt $F_1^H = EW$ hat (mit den Identifizierungen $EW = N \times_N EW \subset G \times_N EW \subset F_1$; vgl. Brown [3], 5.7.3). Generell ist die H-Fixpunktmenge N-invariante Teilmenge, trägt also eine induzierte N/H-Operation. Der Übergang zu H-Fixpunkten liefert also auf der Ebene der punktierten äquivarianten Homotopiemengen eine Abbildung

$$b\colon [X, F_1/F_2 \wedge Y]_G^0 \to [X^H, EW^+ \wedge Y^H]_W^0 \tag{2}$$

bei Verwendung folgender Bezeichnungen: $[X, Y]_G^0$ ist die Menge der punktierten G-Homotopieklassen $X \to Y$ für punktierte G-Räume X und Y; es ist Z^+ generell der Raum Z mit hinzugefügtem separatem Grundpunkt; es ist $A \wedge B$ das smashed-Produkt (Brown [3], Seite 165) der punktierten Räume A und B.

Unser Anliegen ist die Frage: Wann ist b bijektiv? Wir zeigen, daß b im wesentlichen immer bijektiv ist. Aus beweistechnischen Gründen müssen wir gewisse topologische Voraussetzungen über X und Y machen, die sich wohl reduzieren, aber nicht vollständig beseitigen lassen.

Zunächst überlegen wir uns, daß wir von vornherein nur eine eingeschränkte Klasse von Räumen X betrachten müssen. Da nämlich F_1/F_2 nach obiger Wahl von F_1 außerhalb des Grundpunktes F_2 nur den Isotropietyp (H) hat oder kleinere (bezüglich Inklusion bis auf Konjugation; in Zeichen $<$) in F_2 liegende, so wird von X ein Orbit mit einem Isotropietyp, der nicht kleinergleich (H) ist, auf den Grundpunkt abgebildet. Dividieren wir die abgeschlossene Menge X_0 (falls X vollständig regulär ist; siehe Palais [21], 1.7.21) dieser Orbits heraus, so ist die kanonische Abbildung

$$[X/X_0, F_1/F_2 \wedge Y]_G^0 \to [X, F_1/F_2 \wedge Y]_G^0,$$

die durch die Quotientabbildung $X \to X/X_0$ induziert wird, bijektiv. Wir können und wollen deshalb für den folgenden Satz annehmen, daß X außerhalb des Grundpunktes nur Isotropiegruppen in F_1 hat. Dann ist $X(H) := \{x \in X \mid (H) < (G_x)\}$ eine abgeschlossene G-Teilmenge von X, wobei G_x die Isotropiegruppe im Punkt x bezeichnet.

Satz 1. *Sei X wie eben beschrieben. Seien offene Teilmengen von X und $X \times [0,1]$ parakompakt. Seien $X(H) \subset X$ und $X(H) \times [0,1] \cup X \times \{0,1\} \subset X \times [0,1]$ G-Umgebungsretrakte. Sei die Inklusion des Grundpunktes in Y eine G-Kofaserung. Dann ist b bijektiv.*

Der Beweis des Satzes erfolgt in mehreren Schritten und nimmt den Rest des Abschnittes ein.

(a) Die abgeschlossene G-Teilmenge D von X umfasse $X(H)$ und sei G-Umgebungsretrakt. Dann läßt sich jede G-Abbildung $f\colon D \to F_1/F_2 \wedge Y$ auf X erweitern.

Beweis. Da D G-Umgebungsretrakt ist, gibt es eine Erweiterung von f auf eine offene G-Umgebung U von D in X, etwa f_1. Da $X - D$ eine offene Teilmenge von X ist, also auch parakompakt, und nur Isotropiegruppen in F_2 hat, gibt es wegen der universellen Eigenschaft des Raumes F_2 eine G-Abbildung $f_0\colon X - D \to F_2$. Die offene Überdeckung $(X - D, U)$ von X ist numerierbar. Sei (t_0, t_1) eine Numerierung durch G-invariante Funktionen. Dann ist

$$h\colon X \to F_2 * (F_1/F_2 \wedge Y),$$
$$x \mapsto t_0(x)\, f_0(x) + t_1(x)\, f_1(x)$$

eine G-Abbildung, die f erweitert (Verwendung der Koordinatenschreibweise für den Join, Brown [3], Seite 158, und der kanonischen Einbettung [3], 5.7.3).

Geben wir dem Join $A * B$ zweier Räume A und B vermöge

$$A \times I \times B \to A * B\colon (a, t, b) \mapsto t\, a + (1 - t)\, b$$

die Quotienttopologie und bezeichnen das Ergebnis mit $A \bar{*} B$, so ist die mengentheoretische Identität $A \bar{*} B \to A * B$ stetig und eine Homotopieäquivalenz. Ein Homotopieinverses kann auf den kanonischen Teilräumen A und B als Identität angenommen werden; so ist zum Beispiel

$$t\, a + (1 - t)\, b \to \alpha(t)\, a + (1 - \alpha(t))\, b$$

geeignet, wenn $\alpha\colon I \to I$ das Intervall $[0, 1/3]$ auf 0, $[2/3, 1]$ auf 1 und $[1/3, 2/3]$ linear auf $[0, 1]$ abbildet. Diese Überlegungen zeigen, daß man f auch zu einer Abbildung

$$h\colon X \to F_2 \bar{*} (F_1/F_2 \wedge Y)$$

erweitern kann.

Bezeichnet $CA = I \times A/\{0\} \times A$ den Kegel über A mit Teilraum $A = \{1\} \times A$, so haben wir eine stetige Abbildung

$$A \bar{*} B \to (CA/A) \wedge B,$$

die auf Repräsentanten durch $ta + (1 - t)b \mapsto (t, a, b)$ gegeben ist. Setzen wir mit einer solchen Abbildung zusammen, so erhalten wir aus h eine Abbildung

$$k\colon X \to CF_2/F_2 \wedge (F_1/F_2 \wedge Y).$$

Mit der Einbettung

$$i\colon B \to CA/A \wedge B\colon b \mapsto (0, *, b)$$

können wir sie immer noch als Erweiterung von f auffassen.

Wir werden gleich unter (b) zeigen, daß die Einbettung

$$i\colon F_1/F_2 \wedge Y \to CF_2/F_2 \wedge (F_1/F_2 \wedge Y)$$

eine G-Homotopieäquivalenz ist. Da es sich außerdem um eine G-Kofaserung handelt (wie man etwa aus den äquivarianten Versionen von [10] 3.9, 3.26 entnimmt), ist i ein starker G-Deformationsretrakt ([10], Satz 2.29). Man erhält also aus k die gewünschte Erweiterung von f.

(b) Da Y nach Voraussetzung einen nichtausgearteten Grundpunkt hat (und CF_2/F_2 und F_1/F_2 auch, siehe [10] 7.3) können wir nach der äquivarianten Version von Puppe [22], Satz 18 und Beweis, auch die i entsprechende Abbildung

$$F_1/F_2 \wedge Y \to (CF_2/F_2 \wedge F_1/F_2) \wedge Y$$

betrachten, d.h. es genügt zu zeigen, daß

$$i\colon F_1/F_2 \to CF_2/F_2 \wedge F_1/F_2$$

eine G-Homotopieäquivalenz ist. Die Abbildung wird aber durch eine Abbildung von Raumpaaren

$$j\colon (F_1, F_2) \to (CF_2 \times F_1, F_2 \times F_1 \cup CF_2 \times F_2)$$

induziert. Nach der äquivarianten Version von [10], 2.32 genügt es zu zeigen, daß die zu j gehörenden Abbildungen der einzelnen Räume G-Homotopieäquivalenzen sind. Für $j\colon F_1 \to CF_2 \times F_1$ ist das klar, da CF_2 zusammenziehbar ist. Für

$$j\colon F_2 \to F_2 \times F_1 \cup CF_2 \times F_2$$

bemerken wir zunächst, daß diese Abbildung offenbar homotop zu der durch die Diagonale $d\colon F_2 \to F_2 \times F_2$ gegebenen Abbildung ist. Nun sind aber die Teilabbildungen

$$d\colon F_2 \to F_2 \times F_1,$$
$$d\colon F_2 \to CF_2 \times F_2,$$
$$d\colon F_2 \to F_2 \times F_1 \cap CF_2 \times F_2 = F_2 \times F_2$$

Homotopieäquivalenzen: Die erste und dritte wegen der universellen Eigenschaft von F_2 bzw. F_1, die zweite wegen der Zusammenziehbarkeit von CF_2. Also ist auch $d\colon F_2 \to F_2 \times F_1 \cup CF_2 \times F_2$ eine Homotopieäquivalenz, was man etwa mittels [3], 7.5.7 zeigt.

(c) Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem eigentlichen Beweis des Satzes zu. Wir zeigen zunächst, daß b surjektiv ist. Sei $f_0\colon X^H \to EW^+ \wedge Y^H$ gegeben. Wir setzen mit der Inklusion $EW^+ \wedge Y^H \subset F_1/F_2 \wedge Y$ zusammen. Es gibt eine eindeutig bestimmte Erweiterung von f_0 zu einer G-Abbildung $f\colon X(H) \to F_1/F_2 \wedge Y$ (siehe Bredon [1] I. Theorem 3.3, II. Theorem 5.9). Da nach Voraussetzung $X(H)$ ein G-Umgebungsretrakt von X ist, läßt sich nach Teil (a) f auf X erweitern.

(d) Wir zeigen, daß b injektiv ist. Seien $f_0, f_1\colon X \to F_1/F_2 \wedge Y$ zwei G-Abbildungen, deren Einschränkungen auf X^H N-homotop sind, deren Einschränkungen auf $X(H)$ also G-homotop sind. Eine Homotopie zusammen mit den Abbildungen f_0 und f_1 liefert eine G-Abbildung $f\colon X(H) \times I \cup X \times \{0, 1\} \to F_1/F_2 \wedge Y$.

Wir wenden jetzt wiederum das unter (a) Bewiesene an, wobei wir X durch $X \times I$ ersetzen und als D die Teilmenge $X(H) \times I \cup X \times \{0, 1\}$ verwenden. Es läßt sich also f auf $X \times I$ erweitern und liefert damit die gewünschte G-Homotopie zwischen f_0 und f_1.

Bemerkung. In den Anwendungen wird die Abbildung (2) meist für den Fall gebraucht, daß X eine differenzierbare kompakte G-Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall läßt sich Satz 1 anwenden. Das folgt zum Beispiel daraus, daß X ein äquivarianter CW-Komplex ist (Illman [17]).

3. Zerspaltung der äquivarianten Homotopie. Wir definieren zunächst die fraglichen Homotopiegruppen und die Abbildung, die später den Zerspaltungsisomorphismus liefert.

Sei wieder G eine kompakte Liesche Gruppe und X ein punktierter G-Raum. Die Gruppe $\omega_n^G(X)$ wird definiert als direkter Limes (= Kolimes)

(3) $$\operatorname{kolim}\,[V^c \wedge S^n, V^c \wedge X]_G^0$$

über G-äquivariante punktierte Homotopiemengen. In (3) verwenden wir folgende Bezeichnungen: $V^c = V \cup \{\infty\}$ ist die Einpunkt-Kompaktifizierung des G-Moduls V mit Grundpunkt ∞; es ist S^n die n-Sphäre. Der Kolimes wird über die Kategorie der komplexen G-Moduln und linearen G-Einbettungen unter Verwendung von Einhängungen definiert: Ist $f\colon V \to W$ eine solche Einbettung, so wähle man eine direkte Zerlegung $W = U \oplus fV$ und definiere den Kolimes mittels der Abbildungen

$$[V^c \wedge S^n, V^c \wedge X]_G^0 \xrightarrow[U^c \wedge]{} [U^c \wedge V^c \wedge S^n, U^c \wedge V^c \wedge X]_G^0 \cong$$
$$\cong [W^c \wedge S^n, W^c \wedge X]_G^0 .$$

Das ist analog zu Konstruktionen in [7].

Eine eingehendere Diskussion zeigt, daß man auf diese Weise eine Homologie-Theorie erhält, die über dem reellen Darstellungsring $RO(G)$ graduiert ist (siehe Segal [25], Kosniowski [18], Hauschild [15]). Das ist nicht wichtig für uns. Wir erlauben aber in $\omega_n^G(x)$ auch negative Werte von n. Die fraglichen Gruppen werden so definiert, daß der übliche Einhängungs-Isomorphismus gilt. Der Einfachheit halber verwenden wir nur punktierte G-Räume, für die die Inklusion des Grundpunktes eine G-Kofaserung ist. Für eine G-Cofaserung $A \subset X$ benutzen wir auch die Bezeichnung $\omega_n^G(X/A) =: \omega_n^G(X, A)$.

Wir definieren nun eine natürliche Transformation von Homologie-Theorien. Sei $H < G$ (d.h. abgeschlossene Untergruppe), sei $N = NH$ der Normalisator von G in H, sei $W = WH = N/H$. Sei L der Tangentialraum von G/N an der Restklasse N, versehen mit der N-Operation, die durch Linkstranslation von N auf G/N induziert wird. Sei ζ_H die Zusammensetzung der folgenden Abbildungen, die wir sogleich erläutern

$$\begin{aligned}
&\omega_n^W(EW^+ \wedge X^H) && \xrightarrow[(1)]{} \\
&\omega_n^N(L^c \wedge EW^+ \wedge X) && \xrightarrow[(2)]{} \\
&\omega_n^G((G \times_N EW)^+ \wedge X) && \xrightarrow[(3)]{} \\
&\omega_n^G(X) .
\end{aligned}$$

Die Abbildung (1) wird durch die Inklusionen $X^H \subset X$ und $EW^+ \to L^c \wedge EW^+$: $e \mapsto (0, e)$ induziert; außerdem werden W-Räume vermöge der Quotientabbildung $N \to W$ als N-Räume aufgefaßt. Die Abbildung (2) ist der in Wirthmüller [28], Theorem 2.1, konstruierte Extensions-Isomorphismus. Die Abbildung (3) wird durch Projektion auf X induziert.

Sei $\zeta = (\zeta_H)$ die Summe der Homomorphismen ζ_H, wobei H ein vollständiges System von paarweise nicht-konjugierten Untergruppen von G durchläuft. Es dürfte klar sein, wie ζ als natürliche Transformation von äquivarianten Homologie-Theorien aufzufassen ist.

Satz 2. *Die natürliche Transformation*

$$\zeta\colon \bigoplus_{(H)} \omega_n^{WH}(EWH^+ \wedge X^H) \to \omega_n^G(X)$$

ist ein Isomorphismus.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

(a) Da ζ eine natürliche Transformation von Homologie-Theorien ist, genügt es, die Isomorphie für benachbarte Familien von Isotropie-Gruppen nachzuweisen, also für $F_1/F_2 \wedge Y$ wie sie in Abschnitt 2 betrachtet wurden. Einen Beweis für diese Behauptung findet man ausgeführt bei Hauschild [15]. Wir zeigen deshalb im folgenden, daß die Abbildungen (1) und (3) in der Definition von ζ für Räume der Form $F_1/F_2 \wedge Y$ Isomorphismen sind. Zunächst sehen wir, daß in diesem Fall nur höchstens eine der Abbildungen ζ_H von Null verschieden ist.

(b) Seien F_1 und F_2 K-benachbart. Dann gilt: Die Gruppen

$$\omega_n^{WN}(EW^+ \wedge F_1^H/F_1^H \wedge Y^H)$$

sind höchstens dann ungleich Null, wenn $(H) = (K)$.

Beweis. Wenn die Gruppe ungleich Null ist, so ist speziell F_1^H nicht-leer, also H in F_1 enthalten. Wäre sogar $H \in F_2$, so wären F_1 und F_2 als H-Räume homotopieäquivalent (nämlich zusammenziehbar); also wären auch ihre Fixpunktmengen homotopieäquivalent und das würde die besagte Gruppe zu Null machen. Bleibt nur der Fall $H \in F_1 - F_2$ übrig, also $(H) = (K)$.

(c) Seien F_1 und F_2 H-benachbart. Wir zeigen, daß

$$\mathrm{pr}_*\colon \omega_n^G(Z^+ \wedge F_1/F_2 \wedge Y) \to \omega_n^G(F_1/F_2 \wedge Y)$$

ein Isomorphismus ist ($Z := G \times_{NH} E(WH)$).

Beweis. Wir unterdrücken das unwesentliche Y in den Bezeichnungen und setzen $\omega = \omega_n^G$. Wir gehen aus von folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\omega(Z \times F_1, Z \times F_2) & \xrightarrow[p]{} & \omega(Z \times CF_2, Z \times F_2) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} \\
\omega(F_1, F_2) & \xrightarrow[r]{} & \omega(CZ \times F_2 \cup Z \times CF_2, CZ \times F_2)\,.
\end{array}$$

Diskussion! Nach [8], Satz 4, können wir für F_1 den Raum $(CZ \times F_2) \cup (Z \times CF_2)$ verwenden; die Inklusion $F_2 \subset F_1$ ist dann durch die Abbildung $F_2 \to CZ \times F_2$ gegeben, deren erste Komponente alles auf den Kegelpunkt wirft und deren zweite Komponente die Identität ist. Mit diesen Vereinbarungen wird r durch die Identität induziert und q durch die Inklusion. Die Abbildung p wird durch eine Abbildung induziert, die auf Z die Identität ist, während auf dem zweiten Faktor irgendeine Erweiterung von $F_2 \subset CF_2$ auf $F_1 \to CF_2$ gewählt wird. Dann ist q ein Isomorphismus nach dem Ausschneidungssatz. Es ist p ein Isomorphismus, weil die beiden Abbildungen $Z \times F_1 \to Z \times CF_2$ und $Z \times F_2 \to Z \times F_2$ Homotopieäquivalenzen sind; das ist klar für die zweite; für die erste folgt es daraus, daß CF_2 zusammenziehbar ist, und für jeden numerierbaren Raum Z mit Isotropiegruppen in F_1 die Projektion $Z \times F_1 \to Z$ eine Homotopieäquivalenz ist, wegen der universellen Eigenschaft von F_1. Wenn wir nachweisen, daß das Diagramm kommutativ ist, haben wir somit gezeigt, daß pr_* ein Isomorphismus ist. Wir zeigen, daß die beiden Wege des Diagrammes durch homotope Abbildungen induziert werden. Beide Abbildungen haben nämlich die folgende Form: Die Abbildungen $Z \times F_2 \to CZ \times F_2$ sind offenbar homotop. Die Abbildungen $Z \times F_1 \to (CZ \times F_2) \cup (Z \times CF_2) = F_1$ sind jeweils durch die universelle Eigenschaft von F_1 bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Daß die fraglichen Abbildungen als Abbildungen von Raumpaaren homotop sind, folgt jetzt so: Für eine G-Kofaserung $A \subset B$ von F_1-numerierbaren Räumen (zum Begriff siehe [8]) läßt sich jede Abbildung $A \to F_1$ auf B erweitern.

(d) Wir zeigen nun, daß die Abbildung (1)

$$\omega_n^W(EW^+ \wedge X^H) \to \omega_n^N(L^c \wedge EW^+ \wedge X)$$

in der Definition von ζ_H ein Isomorphismus ist für $X = F_1/F_2 \wedge Y$ und H-benachbarte F_1, F_2 und beenden damit den Beweis von Satz 2. Eine inverse Abbildung wird auf repräsentierenden Homotopiemengen durch Beschränkung auf die H-Fixpunktmenge gegeben, und diese Abbildung ist nach Satz 1 bijektiv. Man beachte für die Anwendung von Satz 1, daß nur der Nullpunkt von L ein H-Fixpunkt ist, da die Komponente von G/N^H, die die Restklasse N enthält, nur aus einem Punkt besteht, was etwa aus Conner und Floyd [5], 38.1, folgt.

Bemerkung. Für endliche G und X die Nullsphäre wird die Zerlegung von Satz 2 bei Segal [25] angekündigt (siehe auch Kosniowski [18] und dazu Hauschild [15].) Für beliebige kompakte Liesche Gruppen, $n = 0$ und X die Nullsphäre entnimmt man die Zerlegung von $\omega_0^G(X)$ der Dissertation von Rubinsztein [23], wo allgemeiner unstabile äquivariante Homotopiemengen zerlegt werden. Kürzlich konnte Hauschild [16] das Satz 2 entsprechende Ergebnis für unstabile Homotopiemengen durch Transversalitätsmethoden beweisen. Obgleich das Ergebnis von Hauschild allgemeiner ist als unser Satz 2, scheint mir die elementare Zurückführung auf den grundlegenden Hilfssatz Satz 1 methodisch von Interesse. Offen bleibt die Frage, ob man das Ergebnis von Hauschild auch homotopie-theoretisch herleiten kann, etwa durch Verfeinerung der hier verwendeten Methoden.

4. Transfer und ω_0^G. Für die Anwendungen auf den Burnside-Ring ist es wichtig, die durch Satz 2 gegebene Zerlegung von ω_0^G geometrisch genauer zu beschreiben.

Zur Berechnung der Gruppen $\omega_0^W(EW^+ \wedge Y)$ erinnern wir daran, daß der Raum EW als geometrische Realisierung eines simplizialen Raumes erhalten werden kann, dessen n-Simplex-Raum W^{n+1} ist (Segal [24]).

Die Gerüst-Filterung führt in jeder Homologie-Theorie zu einer Spektralsequenz, deren E^1-Term für die Theorie ω_*^G isomorph zu

$$E_{p,q}^1 \cong \omega_q^W((W^{p+1})^+ \wedge Y), \quad p \geqq 0,$$

ist. Diese Gruppen sind nach dem schon zitierten Isomorphismus von Wirthmüller [28], Theorem 2.1., isomorph zu $\omega_q(M^c \wedge (W^p)^+ \wedge Y)$, wobei ω_q gewöhnliche stabile Homotopie bezeichnet und M der Tangentialraum von W im neutralen Element ist. Für $n = p + q = 0$ und $\dim M > 0$ sind also diese Gruppen Null, also ist in diesem Fall auch $\omega_0^W(EW^+ \wedge Y) = 0$. Ist dagegen W endlich, so bleibt für $n = p + q = 0$ einzig $E_{0,0}^2$ als von Null verschiedene Gruppe übrig; der E^2-Term ist in diesem Fall aber die Homologie der Gruppe W mit Koeffizienten im W-Modul $\omega_*(Y)$. (Der E_1-Komplex ist die Bar-Konstruktion, s. MacLane [19].) Ist speziell Y die Nullsphäre, so haben wir damit das folgende Ergebnis erhalten.

Satz 3. *Es ist*

$$\omega_0^W(EW^+) \cong \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \dim W > 0\,, \\ \mathbb{Z} & \textit{falls} \quad \dim W = 0\,. \end{cases}$$

In der Zerlegung von $\omega_0^G := \omega_0^G(P^+)$, P ein Punkt, bleiben somit nur die $\omega_0^{WH}(EWH^+)$ übrig, für die WH endlich ist.

Wir wollen das Bild der $1 = 1_H$ bei $\zeta_H\colon \mathbb{Z} \cong \omega_0^{WH}(EWH^+) \to \omega_0^G$ genauer beschreiben. Bei dem Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong \omega_0(P^+) \cong \omega_0^W(W^+) \to \omega_0^W(EW^+)$$

wird 1_H auf folgendes Element abgebildet: Man wähle eine W-Einbettung $j\colon W \to V$ in einen komplexen W-Modul V und bilde damit eine Transfer-Abbildung

$$j'\colon V^c \to W^+ \wedge V^c\,.$$

Mit „Transfer-Abbildung" meinen wir dabei eine Abbildung, die bei Anwendung einer Homologie-Theorie den kürzlich von Dold eingehend untersuchten Fixpunkt-Transfer induziert (Dold [13]) und die sich für den Spezialfall der Abbildung einer kompakten differenzierbaren G-Mannigfaltigkeit C auf einen Punkt so erhalten läßt: Sei $C \subset V$ eine G-Einbettung in einen G-Modul V mit Normalenbündel ν. Sei $V^c \to M(\nu)$ die in der Pontrjagin-Thom-Konstruktion übliche Abbildung auf den Thom-Raum, die alles außerhalb einer tubularen Umgebung auf einen Punkt wirft. Sei

$$M(\nu) \to M(\tau \oplus \nu) \cong M^+ \wedge V^c$$

durch den Nullschnitt des Tangentialbündels von M und die Isomorphie

$$\tau \oplus \nu \cong M \times V$$

induziert. Eine Abbildung vom Typ $V^c \to M(\nu) \to M^+ \wedge V^c$, die so konstruiert wurde, nennen wir Transfer-Abbildung. Zusammensetzung mit der Projektion $M^+ \wedge V^c \to V^c$ liefert eine Abbildung $V^c \to V^c$, deren stabile Klasse in ω_0^G den äquivarianten Fixpunkt-Index für $M \to$ Punkt im Sinne von Dold [12] repräsentiert.

Satz 4. *Das Bild von $1_H \in \mathbb{Z} \cong \omega_0^{WH}(EWH^+)$ in ω_0^G bei ζ_H ist der Fixpunkt-Index von $G/H \to$* Punkt.

Beweis. Ein Repräsentant von $1_H \in \omega_0^{WH}(EWH^+)$ ist

$$V^c \to W^+ \wedge V^c \to EW^+ \wedge V^c\,,$$

gebildet mit der oben beschriebenen Transfer-Abbildung j' und einer Inklusion $W \to EW$. Wir schließen die durch $\{0\} \subset L$ induzierte Abbildung an und verwenden dann den Isomorphismus von Wirthmüller. Der Leser verifiziere, daß dabei folgendes Ergebnis entsteht: Sei die N-Operation auf V Einschränkung einer G-Operation. Sei $i\colon G/N \subset U$ eine G-Einbettung in einen G-Modul U und $i'\colon U^c \to G^+ \wedge_N U^c$ eine resultierende Transfer-Abbildung. Dann wird das fragliche Element repräsentiert durch

$$U^c \wedge V^c \xrightarrow[i' \wedge V^c]{} (G^+ \wedge_N U^c) \wedge V^c \cong G^+ \wedge_N (U^c \wedge V^c)$$
$$\xrightarrow[G^+ \wedge_N (U^c \wedge j')]{} G^+ \wedge_N (U^c \wedge W^+ \wedge V^c) \to (G^+ \wedge_N EW^+) \wedge U^c \wedge V^c\,,$$

und diese Abbildung geht aus einer Transfer-Abbildung von G/H zur Einbettung

$$G/H \cong G \times_N N/H \to U \times V\,,$$
$$(g, n) \mapsto (ig, gjn)$$

hervor (unter Benutzung von $G \times_N W \subset G \times_N EW$). (Mit dieser letzten Behauptung hat man übrigens in einem Spezialfall die Transitivität der Transfer-Konstruktion nachgerechnet.)

5. Der Transversalitätssatz von Wasserman. Sei $\mathfrak{N}_k^G(X, Y)$ für ein G-Raumpaar (X, Y) die Bordismengruppe der k-dimensionalen differenzierbaren singulären G-Mannigfaltigkeiten $(M, \partial M) \to (X, Y)$, die zum Beispiel von Stong in [26] ausführlich untersucht wurde. Für endliche oder abelsche G und $(X, Y) = (\text{Punkt}, \emptyset)$ hat Wasserman [27] eine homotopie-theoretische Beschreibung von $\mathfrak{N}_k^G$ angegeben. Wir wollen für den allgemeineren Fall der Gruppen $\mathfrak{N}_k^G(X, Y)$ ein analoges Ergebnis von neuem herleiten, insbesondere um die grundlegende Rolle von Satz 1 hervorzuheben.

Zunächst definieren wir die benötigten Homotopiemengen. Sei V ein G-Modul. Das kanonische k-dimensionale Bündel $\gamma_k(V)$ über der Graßmannschen Mannigfaltigkeit $G_k(V)$ der k-dimensionalen Unterräume in V habe $M_k(V)$ als Thom-Raum. Für einen punktierten G-Raum X betrachten wir einen direkten Limes über Homotopiemengen der Form

$$[W^c, M_{|W|-k}(W \oplus \mathbb{R}^n) \wedge X]_G^0\,,$$

wobei W ein komplexer G-Modul mit reeller Dimension $|W|$ ist. Der Limes wird über die folgende Kategorie gebildet: Objekte sind Paare (W, n), W komplexer G-Modul und n natürliche Zahl und ein Morphismus $\varphi\colon (V, m) \to (W, n)$ ist nur für $m \leqq n$ gegeben, und zwar durch eine lineare G-Einbettung $\varphi\colon V \to W$.

Mit einem Komplement U von φV in W bildet man die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi'\colon\ & [V^c, M_{|V|-k}(V \oplus \mathbb{R}^m) \wedge X]_G^0 \xrightarrow[(1)]{} \\ & [U^c \wedge V^c, U^c \wedge M_{|V|-k}(V \oplus \mathbb{R}^m) \wedge X]_G^0 \xrightarrow[(2)]{} \\ & [W^c, M_{|W|-k}(W \oplus \mathbb{R}^m) \wedge X]_G^0 \xrightarrow[(3)]{} \\ & [W^c, M_{|W|-k}(W \oplus \mathbb{R}^n) \wedge X]_G^0\,.\end{aligned}$$

Darin ist (1) das smashed-Produkt mit U^c. (2) wird durch $U^c \wedge V^c \cong W^c$ und die Abbildung

$$U^c \wedge M_{|V|-k}(V \oplus \mathbb{R}^m) \to M_{|W|-k}(W \oplus \mathbb{R}^m)$$

induziert, die durch die kanonische klassifizierende Abbildung

$$\gamma_{|V|-k}(V \oplus \mathbb{R}^m) \oplus U \to \gamma_{|W|-k}(W \oplus \mathbb{R}^m)$$

und Übergang zu Thom-Räumen gegeben wird. (3) wird durch die Abbildung der Thom-Räume induziert, die dadurch gegeben wird, daß jedem Unterraum von

$W \oplus \mathbb{R}^m$ der entsprechende Unterraum in $W \oplus \mathbb{R}^n$ zugeordnet wird. Der direkte Limes über die φ' werde mit

$$\tilde{n}_k^G(X)$$

bezeichnet. Für eine G-Kofaserung $A \subset X$ setzen wir

$$n_k^G(X, A) := \tilde{n}_k^G(X/A).$$

Das System $\tilde{n}_k^G(-)$, $k \in \mathbb{Z}$, der so auf punktierten G-Räumen definierten Funktoren läßt sich leicht zu einer Homologie-Theorie ergänzen. Es gilt nämlich das

Lemma. *Für eine punktierte Abbildung $f\colon X \to Y$ und die kanonische Inklusion $Pf\colon Y \to C_f$ in den Abbildungskegel ist die Sequenz*

$$\tilde{n}_k^G(X) \xrightarrow[f_*]{} \tilde{n}_k^G(Y) \xrightarrow[(Pf)_*]{} \tilde{n}_k^G(C_f)$$

exakt. Es gibt kanonische Isomorphismen

$$\tilde{n}_{k-1}^G(X) \cong \tilde{n}_k^G(S^1 \wedge X).$$

Beweis. Ein Beweis läßt sich fast wörtlich wie in [2], Seite 44—47, führen und muß deshalb hier nicht aufgezeichnet werden. Wenn man den Beweis des Einhängungs-Isomorphismus nachvollzieht, erkennt man, warum wir abweichend von Wasserman [27] die Gruppe $\tilde{n}_k^G(X)$ durch einen Limes definiert haben.

Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion [2], III.1, definiert eine natürliche Transformation von Homologie-Theorien

$$\pi\colon \mathfrak{N}_k^G(X, Y) \to n_k^G(X, Y).$$

Es ist wichtig, folgende Besonderheit dieser Konstruktion in unserem äquivarianten Fall im Auge zu behalten: Ist M eine G-Mannigfaltigkeit, eingebettet in den G-Modul V, so besitzt das Normalenbündel ν dieser Einbettung eine klassifizierende Abbildung nach $\gamma_k(V)$, $k = \dim \nu$. Das durch die Pontrjagin-Thom-Konstruktion gelieferte Element liegt also in $[V^c, M_k(V)]_G^0$. Analoges gilt für singuläre Mannigfaltigkeiten $f\colon (M, \partial M) \to (X, Y)$.

Satz 5. *Sei G endlich. Dann ist die Abbildung*

$$\pi\colon \mathfrak{N}_k^G(X, Y) \to n_k^G(X, Y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wie schon beim Beweis von Satz 2 genügt es, die Isomorphie für Raumpaare $(F_1 \times X, F_2 \times X)$ nachzuweisen, wobei F_1 und F_2 H-benachbarte Familien sind. In diesem Fall können wir n_k^G mittels Satz 1 berechnen, während sich $\mathfrak{N}_k^G(X, Y)$ geometrisch bestimmen läßt (Stong [26], 5.). Wir wenden Satz 1 auf die repräsentierenden Homotopiemengen

$$[V^c, M_r(V \oplus \mathbb{R}^n) \wedge F_1/F_2 \wedge X^+]_G^0$$

an. Wir benötigen eine Beschreibung der Fixpunktmenge $M_r(V \oplus \mathbb{R}^n)^H$. Wir zerlegen als H-Modul $V \oplus \mathbb{R}^n = V_0 \oplus V_1$ in einen trivialen Anteil V_0 und einen nicht-trivialen V_1. Dann ist

$$(3) \qquad M_r(V \oplus \mathbb{R}^n)^H = \bigvee M_a(V_0) \wedge G_b(V_1)^{H+},$$

wobei die punktierte Summe (= wedge) $\bigvee$ über alle (a, b) mit $a + b = r$ erstreckt wird. Man hat einen G-Diffeomorphismus $G_b(V_1) \cong G_{|V_1|-b}(V_1)$, der nach Wahl eines G-invarianten Skalarproduktes durch Übergang zum orthogonalen Komplement gegeben wird; diesen setzen wir in (3) ein, damit die Beschränkung auf die H-Fixpunktmenge mit der Limesbildung zur Definition von n_k^G verträglich ist. Die Bijektionen (nach Satz 1)

$$[V^c, M_{|V|-k}(V \oplus \mathbb{R}^n) \wedge F_1/F_2 \wedge X^+]_G^0 \to$$
$$[(V^H)^c, \bigvee_{a+b=|V|-k} M_a(V_0) \wedge G_{|V_1|-b}(V_1)^{H+} \wedge EW^+ \wedge X^{H+}]_W^0$$

liefern nach Übergang zum direkten Limes einen Isomorphismus

$$n_k^G(F_1 \times X, F_2 \times X) \cong \bigoplus_{n+v=k} n_u^w(EW \times X^H \times F'_H(BO_v)).$$

Dabei ist $F'_H(BO_v)$ die Bezeichnung von Stong [26], Seite 10, für den klassifizierenden Raum von v-dimensionalen N-Vektorraumbündeln mit trivialer H-Operation auf der Basis und ohne trivialen H-Summanden in einer Faser. Ein entsprechender Isomorphismus wird in Stong [26], Corollary 5.2 (Seite 21) für $\mathfrak{N}$ anstelle von n nachgewiesen. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion ist mit diesen Isomorphismen verträglich, was man aus einer zum Beweis von [7], Proposition 4.1, analogen Rechnung erkennt. Für freie W-Mannigfaltigkeiten gilt aber der Transversalitätssatz in der üblichen Form (für Verallgemeinerungen siehe Hauschild [16]), so daß dafür die Pontrjagin-Thom-Konstruktion in bekannter Weise einen Isomorphismus von der geometrischen zur homotopischen Bordismentheorie induziert. Damit ist Satz 5 bewiesen.

6. Multiplikative Induktion. Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Der Funktor von G-Räumen zu H-Räumen, der durch Einschränkung der Gruppenoperation entsteht, hat einen Rechtsadjungierten, den wir multiplikative Induktion nennen und der folgendermaßen explizit beschrieben werden kann: Ist X ein H-Raum, so wird der Raum $\mathrm{Hom}_H(G, X)$ der H-Abbildungen durch Rechtstranslation auf G ein G-Raum und $X \to \mathrm{Hom}_H(G, X)$ ist der fragliche Funktor auf Objekten. Als topologischer Raum ist $\mathrm{Hom}_H(G, X)$ einfach $\prod_{G/H} X$, das kartesische Produkt von $|G/H|$ Exemplaren X, wobei $|G/H|$ der Index von H in G ist. Wir erhalten einen Funktor von punktierten H-Räumen zu punktierten G-Räumen, indem wir Y den Raum $\bigwedge_{G/H} Y$ zuordnen und die G-Operation auf dem smashed-Produkt „genauso" definieren wie auf dem Produkt bei der multiplikativen Induktion. (Für eine formale Fassung dieser Definition siehe Dress [14], Seite 36.) Als eine wichtige Anwendung von Satz 5 beweisen wir, daß die multiplikative Induktion mit der Bordismenrelation verträglich ist. Für eine singuläre H-Mannigfaltigkeit $f\colon M \to X$ ist

$$\mathrm{Hom}_H(G, f)\colon \mathrm{Hom}_H(G, M) \to \mathrm{Hom}_H(G, X)$$

eine singuläre G-Mannigfaltigkeit.

Satz 6. *Die multiplikative Induktion induziert eine Abbildung*

$$\mathfrak{N}_k^H(X) \to \mathfrak{N}_{k|G/H|}^G(\mathrm{Hom}_H(G, X)).$$

Beweis. Seien $f_i\colon M_i \to X$, $i = 0, 1$, bordante H-Mannigfaltigkeiten. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion liefert daraus Abbildungen $h_i\colon V^c \to M_r(V) \wedge X^+$, die (für einen geeignet reichhaltigen Modul V) H-homotop sind. Wenden wir darauf den oben beschriebenen Funktor von punktierten H-Räumen zu punktierten G-Räumen an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Hom}_H(G, V))^c \cong \bigwedge_{G/H} V^c \to \bigwedge_{G/H} (M_r(V) \wedge X^+) \\ &\xrightarrow[\cong]{} \bigwedge_{G/H} M_r(V) \wedge \mathrm{Hom}_H(G, X)^+ \\ &\xrightarrow[(1)\wedge \mathrm{id}]{} M_{r|G/H|}(\mathrm{Hom}_H(G, V)) \wedge \mathrm{Hom}_H(G, X)^+, \end{aligned}$$

wobei (1) die klassifizierende Abbildung ist. Es ist $\mathrm{Hom}_H(G, V)$ übrigens die von V induzierte Darstellung im Sinne der Darstellungstheorie von Gruppen. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion, angewendet auf die Einbettungen

$$\mathrm{Hom}_H(G, M_i) \subset \mathrm{Hom}_H(G, V),$$

liefert gerade die oben aus den h_i konstruierten Abbildungen, die G-homotop sind, weil die h_i H-homotop waren. Wegen Satz 5 sind also die singulären G-Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Hom}_H(G, f_i)$ G-bordant.

Bemerkung. Ein Spezialfall der multiplikativen Induktion ist die Zuordnung der r-ten Potenz M^r mit Operation der symmetrischen Gruppe zu M oder die geometrische Form der äußeren Steenrod-Operation ([6]). Aus allgemeinen Gründen (Dress [14], § 7) folgt, daß die multiplikative Induktion die Mackey-Eigenschaft hat.

Literaturverzeichnis

[1] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups. New York-London 1972.
[2] Th. Bröcker und T. tom Dieck, Kobordismentheorie. Lect. Notes Math. **178**, Berlin-Heidelberg-New York 1970.
[3] R. Brown, Elements of modern topology. London 1968.
[4] P. E. Conner and E. E. Floyd, Maps of odd period. Ann. of Math. **84**, 132–156 (1966).
[5] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable periodic maps. Berlin-Heidelberg-New York 1964.
[6] T. tom Dieck, Steenrod-Operationen in Kobordismen-Theorien. Math. Z. **107**, 380–401 (1968).
[7] T. tom Dieck, Bordism of G-manifolds and integrality theorems. Topology **9**, 345–358 (1970).
[8] T. tom Dieck, Orbittypen und äquivariante Homologie. I. Arch. Math. **23**, 307–317 (1972).
[9] T. tom Dieck, The Burnside ring of a compact Lie group. I and II. Erscheint Math. Ann.
[10] T. tom Dieck, K. H. Kamps und D. Puppe, Homotopietheorie. Lect. Notes Math. **157**, Berlin-Heidelberg-New York 1970.
[11] A. Dold, Partitions of unity in the theory of fibrations. Ann. of Math. **78**, 223–255 (1963).
[12] A. Dold, The fixed point index of fibre-preserving maps. Invent. math. **25**, 281–297 (1974).
[13] A. Dold, Transfert des points fixes d'une famille continue d'applications. C. R. Acad. Sci. Paris **278**, 1291–1293 (1974).

[14] A. DRESS, Contributions to the theory of induced representations. In: Algebraic K-theory II. Lect. Notes Math. **342**, pp. 183—240. Berlin-Heidelberg-New York 1973.
[15] H. HAUSCHILD, Bordismentheorie stabil gerahmter G-Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **139**, 165—171 (1974).
[16] H. HAUSCHILD, Allgemeine Lage und äquivariante Homotopie. Math. Z. **143**, 155—164 (1975).
[17] S. ILLMAN, Equivariant singular homology and cohomology for actions of compact Lie groups. In: Proc. Second Conf. Comp. Transformation Groups, Part I, pp. 403—415. Berlin-Heidelberg-New York 1972.
[18] C. KOSNIOWSKI, Equivariant cohomology and stable cohomotopy. Math. Ann. **210**, 83—104 (1974).
[19] S. MACLANE, Homology. Berlin-Heidelberg-New York 1963.
[20] J. MILNOR, Construction of universal bundles. II. Ann. of Math. **63**, 430—436 (1956).
[21] R. PALAIS, The classification of G-spaces. Mem. Amer. Math. Soc. **36** (1960).
[22] D. PUPPE, Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I. Math. Z. **69**, 299—344 (1958).
[23] R. L. RUBINSZTEIN, On the equivariant homotopy of spheres. Inst. of Math., Polish Acad. Sci. Preprint no. 58 (1973).
[24] G. SEGAL, Classifying spaces and spectral sequences. Publ. math. I. H.E.S. **34**, 105—112 (1968).
[25] G. SEGAL, Equivariant stable homotopy. In: Congrès intern. Math. 1970, Tome 2, pp. 59—63.
[26] R. E. STONG, Unoriented bordism and actions of finite groups. Mem. Amer. Math. Soc. **103** (1970).
[27] A. G. WASSERMAN, Equivariant differential topology. Topology 8, 127—150 (1969).
[28] K. WIRTHMÜLLER, Equivariant homology and duality. Manuscripta math. **11**, 373—390 (1974).

Eingegangen am 4. 2. 1974 *)

Anschrift des Autors:

Tammo tom Dieck
Fachbereich Mathematik der Universität
D-34 Göttingen
Bunsenstraße 3—5

*) Eine Neufassung ging am 27. 9. 1974 ein.