

VERSCHLINGUNG IN BAUM-MANNIGFALTIGKEITEN

Sei $B = (E(B), K(B))$ ein Baum mit Eckenmenge $E(B)$ und Kantenmenge $K(B)$. Eine Bewertung von B ist eine Abbildung $w: E(B) \rightarrow \mathbb{Z}$ in die ganzen Zahlen. Zu einem bewerteten Baum (B, w) gehört bekanntlich eine geschlossene $(4m - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $M = M(B, w)$, die daraus entsteht, daß man orientierte $2m$ -dimensionale Vektorraumbündel $V(w(b)) \rightarrow S^{2m}$, $b \in E(B)$, mit Eulerzahl $-w(b)$ geeignet 'kreuzweise' verheftet (plumbing) und den Rand der so gewonnenen Mannigfaltigkeit nimmt (siehe etwa Hirzebruch und Mayer [1]). Das Sphärenbündel $SV(w(b))$ von $V(w(b))$ liefert Fasern $S(b) \subset M$. Wir geben eine Formel für die Verschlingungszahl $v(e, f)$ von Fasern $S(e)$ und $S(f)$ in M an (Satz 1). Falls $e = f$ ist, verwenden wir disjunkte Fasern.

Sei $L(e, f)$ der kürzeste Weg in B von e nach f , betrachtet als linearer Teilbaum. Das Komplement $B \setminus L(e, f)$ zerfalle in die Bäume $B_1, \dots, B_r$, d.h. $E(B_1) \cup \dots \cup E(B_r)$ ist gleich $E(B) \setminus EL(e, f)$ und $K(B_1) \cup \dots \cup K(B_r)$ enthält diejenigen Kanten von $K(B)$, die mit keiner Ecke von $L(e, f)$ inzidieren. Wir bezeichnen allgemein mit $d(B) = d(B, w)$ die Determinante der Schnittmatrix des bewerteten Baumes. Die Schnittmatrix $(b_{ij} | i, j \in E(B))$ ist durch

$$\begin{aligned} b_{ii} &= w(i) \\ b_{ij} &= 1 \quad i \neq j, i \text{ und } j \text{ durch eine Kante verbunden} \\ b_{ij} &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

definiert. Wir setzen im folgenden voraus, daß alle auftretenden $M(B_i)$, $M(B)$ etc. rationale Homologiesphären sind, also nicht verschwindende Determinante $d(B_i)$, $d(B)$ etc. haben. Unter diesen Voraussetzungen gilt

SATZ 1. *Die Verschlingungszahl $v(e, f)$ zweier Fasern in $M(B, w)$ ist durch*

$$-d(B)^{-1} \prod_{i=1}^r d(B_i) \in \mathbb{Q}$$

gegeben. (Die Determinante eines leeren Baumes ist als 1 zu lesen.)

Der Rest der Arbeit ist dem Beweis dieses Satzes gewidmet. Zunächst untersuchen wir allgemein, wie sich Verschlingungszahlen beim Zusammen setzen von rationalen Homologiesphären verhalten (Sätze 2 und 3). Danach beschreiben wir den bekannten Fall eines Sphärenbündels (eines einpunktigen

Baumes), um die Bezeichnungen festzulegen. Ein allgemeines Resultat über die Berechnung von Baumdeterminanten folgt (Satz 4). Die soweit gewonnenen Ergebnisse werden zum induktiven Beweis von Satz 1 verwendet.

Seien X_1 und X_2 rationale orientierte Homologiesphären der Dimension $2n - 1$, $n \geq 2$, gerade. Seien

$$a_i: S^{n-1} \times D^n \rightarrow X_i, \quad b_i: S^{n-1} \times D^n \rightarrow X_i$$

disjunkte orientierungserhaltende Einbettungen. Dabei seien für die D^n Standardorientierungen gewählt. Es orientiere die geordnete Basis $(c_1, \dots, c_{n-1})$ den Tangentialraum $T_x S^{n-1}$, wenn mit dem äußeren Normalenvektor c das System $(c, c_1, \dots, c_{n-1})$ die Orientierung von $T_x D^n$ beschreibt. Es trage $S^{n-1} \times D^n$ die Produktorientierung. Wir setzen

$$S_i = a_i(S^{n-1} \times 0), \quad T_i = b_i(S^{n-1} \times 0).$$

Sei

$$X'_i = X_i \setminus b_i(S^{n-1} \times \mathring{D}^n).$$

Wir verheften $X'_1 + X'_2$ entlang der Ränder durch

$$b_1(u, v) \sim b_2(v, u), \quad (u, v) \in S^{n-1} \times S^{n-1}.$$

Sei X das Resultat. Für gerades n ändert die Verheftung die Orientierung. Deshalb können wir X'_i als eine orientierte Untermannigfaltigkeit von X betrachten.

Es soll im folgenden die Verschlingungszahl von S_1 und S_2 in X berechnet werden, sofern X wieder eine rationale Homologiesphäre ist. Für die Verschlingungszahl verwenden wir die folgende Definition. Man betrachte das nächste Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{a_{1*}} & H_{n-1}(X \setminus S_2) \\ \downarrow V & & \uparrow d \\ & & H_n(X, X \setminus S_2) \\ & & \uparrow a_{2*} \\ H_n(D^n, D^n \setminus 0) & \xrightarrow{i_*} & H_n(S^{n-1} \times (D^n, D^n \setminus 0)) \end{array}$$

Darin ist i die Inklusion einer Faser, d der Randoperator und V macht das Diagramm kommutativ. Wenn X eine rationale Homologiesphäre ist, sind alle Abbildungen Isomorphismen, sofern Homologie mit rationalen Koeffizienten verwendet wird. Die Orientierungen liefern kanonische Erzeugende $z(S^{n-1})$ und $z(D^n, D^n \setminus 0)$, und die Verschlingungszahl $v(S_1, S_2) \in \mathbb{Q}$ von S_1 und

S_2 in X ist durch

$$Vz(S^{n-1}) = v(S_1, S_2)z(D^n, D^n \setminus 0)$$

definiert. Da n gerade ist, gilt $v(S_1, S_2) = v(S_2, S_1)$.

Zur Berechnung von $v(S_1, S_2)$ beschreiben wir die Homologie von X bzw. $S \setminus S_2$ durch die Mayer–Vietoris–Folge:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) &\rightarrow H_{n-1}(X'_1) \oplus H_{n-1}(X'_2 \setminus S_2) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{n-1}(X \setminus S_2) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Wir beschreiben Homologieelemente durch orientierte Untermannigfaltigkeiten. Es wird $H_{n-1}(X'_1)$ durch $x = b_1(1 \times S^{n-1})$ erzeugt. Eine Basis von $H_{n-1}(X_2 \setminus S_2)$ wird durch $y = a_2(1 \times S^{n-1})$ und $z = b_2(1 \times S^{n-1})$ gegeben. Eine Basis von $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ wird durch $e_1 = S^{n-1} \times 1$ und $e_2 = 1 \times S^{n-1}$ gegeben. Die durch b_i induzierten Abbildungen haben die Gestalt

$$\begin{aligned} b_{1*}e_2 &= x, b_{1*}e_1 = v(T_1, T_1)x \\ b_{2*}e_2 &= y, b_{2*}e_1 = v(T_2, T_2)z + v(S_2, T_2)y. \end{aligned}$$

Dabei ist $v(T_i, T_i) = w_i$ als Selbstverschlingung von T_i bezüglich b_i in X_i anzusehen, d.h. gleich der Verschlingungszahl von $b_i(S^{n-1} \times 0)$ und $b_i(S^{n-1} \times 1)$ und ebenso $v(S_2, T_2) = v_2$ die Verschlingungszahl in X_2 . Bei der Identifizierung werden e_1 und e_2 vertauscht. Deshalb ist $H_{n-1}(X \setminus S_2)$ gleich dem Kokern von

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto (w_1x, z) \\ e_2 &\mapsto (x, w_2z + v_2y). \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man zunächst die

NOTIZ. X ist genau dann eine rationale Homologiesphäre, wenn $w_1w_2 \neq 1$ ist. $\square$

Aus einer Gleichung

$$x = u(w_1x + z) + v(x + w_2z + v_2y) + wy$$

folgt $w = v_2(w_1w_2 - 1)^{-1}$, d.h. x ist im Kokern gleich wz und deshalb S_1 im Kokern gleich $v_1v_2(w_1w_2 - 1)^{-1}$. Damit haben wir erhalten:

SATZ 2. Die Verschlingungszahl von S_1 und S_2 in X ist gleich $v_1v_2(w_1w_2 - 1)^{-1}$. $\square$

Wir bestimmen nun, wie sich die Verschlingungszahl zweier $(n-1)$ -Sphären S_2, S'_2 in $X \setminus T_2$ beim Übergang von X_2 zu X ändert.

SATZ 3. Es gilt

$$v(S_2, S'_2; X) = v(S_2, S'_2; X_2) - \frac{v(T_1, T_1)v(S_2, T_2)v(S'_2, T_2)}{w_1 w_2^{-1}}$$

Dabei sind die Verschlingungszahlen, die in dem Bruch auftreten, alle in X_2 zu nehmen.

Beweis. Mit dem Ansatz $S'_2 = zr + sy$ und

$$rz + sy = u(w_1x + z) + v(x + w_2z + v_2y) + wy$$

errechnet man für $w = (S_1, S'_2; X)$ den angegebenen Wert. $\square$

Sei $p: E \rightarrow S^n$ ein orientiertes n -dimensionales Vektorraumbündel ($n \geq 2$ gerade) und $SE \rightarrow S^n$ das zugehörige Sphärenbündel. Die Eulerzahl $e = e(p)$ des Bündels sei von Null verschieden. Dann gilt bekanntlich:

PROPOSITION 1. SE ist eine rationale Homologiesphäre, und die Verschlingungszahl zweier Fasern ist e^{-1} .

Beweis. Damit die Behauptung sinnvoll ist, müssen wir noch die Orientierungen festlegen. Wir denken uns das Bündel SE durch Verheftung zweier trivialer Bündel $D^n \times S^{n-1} \rightarrow D^n$ gegeben: Die Verheftung geschieht durch einen Automorphismus

$$F: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}, \quad (x, y) \mapsto (x, f(x)(y)).$$

Dabei ist $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine orientierungserhaltende orthogonale Abbildung.

Homologisch hat F den Effekt

$$F * e_1 = e_1 - ee_2, \quad e \in \mathbb{Z}$$

$$F * e_2 = e_2$$

und kann deshalb durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Da F die Orientierung erhält, bekommen wir

$$SE = D_0^n \times S_0^{n-1} \bigcup_F D_1^n \times S_1^{n-1}$$

als orientierte Mannigfaltigkeit, indem wir $D_0^n \times S_0^{n-1} = D^n \times S^{n-1}$ die Produktorientierung der Standardorientierungen von D^n und S^{n-1} geben und in $D_1^n \times S_1^{n-1} = D^n \times S^{n-1}$ die Orientierung von D^n ändern. Wir verwenden die Fasern

$$S_0 = 0 \times S_0^{n-1} \quad \text{und} \quad S_1 = 0 \times S_1^{n-1}.$$

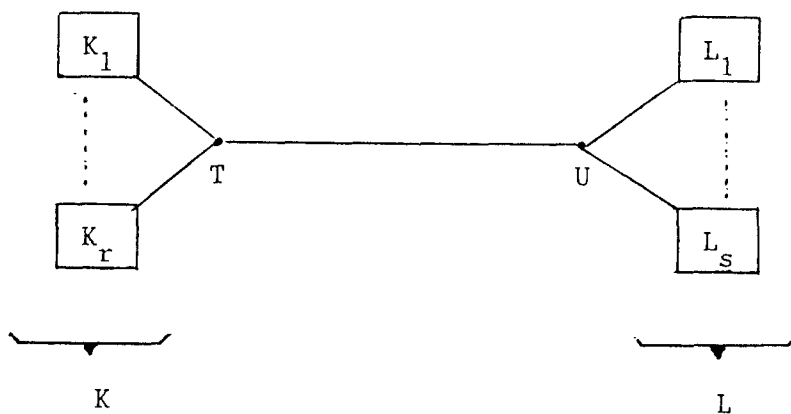
Dann ist $S_1 \rightarrow SE \setminus S_0$ eine Homotopieäquivalenz. Da $D_0^n \times S_0^{n-1} \subset SE$ die Orientierung erhält, berechnen wir die Verschlingungszahl mit der orientierungserhaltenden Abbildung $S_0^{n-1} \times (-D_0^n) \xrightarrow{\text{Twist}} D_0^n \times S_0^{n-1}$. Das Bild des Erzeugers $-z(D_0^n, D_0^n \setminus 0)$ in $H_{n-1}(SE \setminus S_0)$ ist dann

$$-F(S_0^{n-1} \times 1) = -[S_1^{n-1} \times 1] + e[1 \times S_1^{n-1}] = e[0 \times S_1^{n-1}].$$

Also ist $v(S_1, S_0) = 1/e$.

Die Abbildung $f_1: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \alpha(x)(1)$ ist $-e$. Die Eulerzahl des Bündels ist der Grad der Abbildung $f_1: -S_1^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ (Schnittthindernis über der orientierten Zelle $-D_1^n \subset S^n$). Deshalb ist e eine Eulerzahl. $\square$

Zum Beweis von Satz 1 wird das folgende Resultat über die Berechnung von Baumdeterminanten benötigt. Seien T und U zwei benachbarte Ecken von B . Seien $K_1, \dots, K_r$ die Komponenten von $B \setminus TU$, die mit T , und $L_1, \dots, L_s$ die Komponenten, die mit U verbunden sind, wie in der Figur 1 angedeutet.



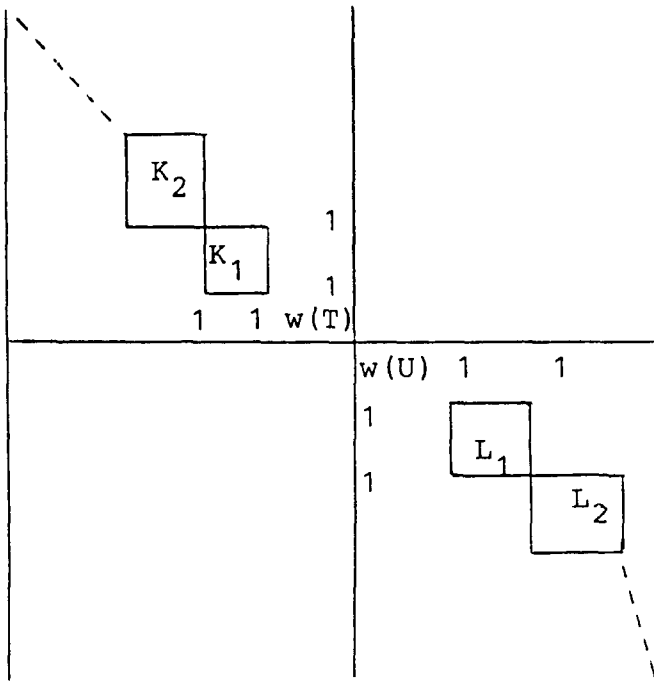
Figur 1.

Sei K der Baum, der aus $K_1, \dots, K_r$ und T besteht, und L der Baum, der aus $L_1, \dots, L_s$ und U besteht. (Wiederum dürfen einige der Bäume leer sein.) Dann gilt:

SATZ 4.

$$d(B) = d(K)d(L) - \left(\prod_i d(K_i) \right) \left(\prod_j d(L_j) \right).$$

Beweis. Der Beweis wird durch eine geeignete Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes geführt. Die Determinante von B hat nämlich die Form (Figur 2).



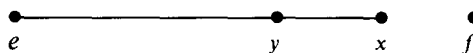
Figur 2.

Dabei enthält das K_i -Kästchen die Schnittmatrix von K_i . Das große Quadrat links oben enthält die Matrix von K . Entsprechend für L und L_i . Alle nicht gefüllten Plätze enthalten Nullen. Man entwickelt nach den zu K gehörenden Zeilen, und der Entwicklungssatz liefert die Behauptung. $\square$

Beweis von Satz 1. Induktion nach der Anzahl der Komponenten und der Eckenzahl. Sei zunächst $B = L(e, f)$ ein linearer Baum:



Wir wenden Satz 2 auf



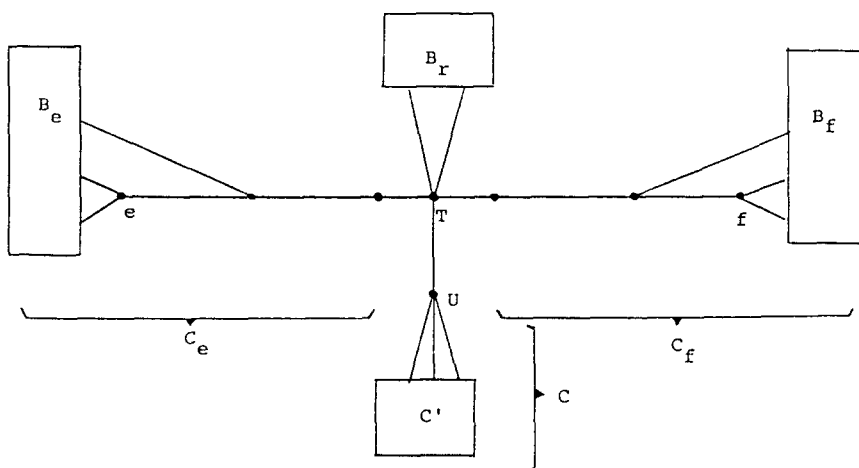
an und auf $e \xrightarrow{x}$ die Induktionsvoraussetzung und erhalten mittels

Satz 4

$$\begin{aligned}
 v(e, f) &= \frac{v(e, x)v(f, f)}{v(x, x)v(f, f) - 1} \\
 &= \frac{\frac{-1}{d(e, x)} \cdot \frac{-1}{w(f)}}{\frac{-d(e, y)}{d(e, x)} \cdot \frac{-1}{w(f)} - 1} \\
 &= \frac{1}{d(e, y) - d(e, x)w(f)} = -\frac{1}{d(e, f)}.
 \end{aligned}$$

(Man hat zu beachten, in welchen Mannigfaltigkeiten jeweils die Verschlingungszahlen zu nehmen sind.)

Sei die Aussage richtig für r Komponenten von $B \setminus L(e, f)$, $r \geq 0$. Wir fügen einen weiteren 'Ast' hinzu und bestimmen die resultierende Verschlingungszahl nach Satz 3. Die Struktur der Situation werde durch die Figur 3 veranschaulicht.



Figur 3.

Ein neuer Zweig C werde bei T angesetzt. Ferner sind an der Stelle T vielleicht weitere Zweige schon vorhanden, die in B_r zusammengefaßt werden. Die restlichen Komponenten von $B \setminus L(e, f)$ werden in B_e bzw. B_f zusammengefaßt, je nachdem, ob sie an $L(e, T)$ oder $L(f, T)$ angrenzen. Hier ist der

Fall betrachtet, daß C an der Verbindung $L(e, f)$ angesetzt ist. Es genügt, diesen Fall zu betrachten; $T = e$ oder $T = f$ ist natürlich erlaubt. Weiter haben wir noch die beiden Teibäume C_e und C_f zu betrachten, die als Komponenten bei der Beseitigung von T auftreten. Für $e = T$ ist natürlich $C_e = B_e$. Als Determinante einer disjunkten Vereinigung von Bäumen verwenden wir das Produkt der Determinanten der Komponenten. Sei B' der gesamte Baum. Die Mannigfaltigkeiten, in denen wir Verschlingungszahlen betrachten, werden durch die zugehörigen Bäume angedeutet. Nach Satz 3 ist die Differenz

$$v(e, f; B') - v(e, f; B)$$

gleich

$$-\frac{v(U, U; C)v(e, T; B)v(f, T; B)}{v(T, T; B)v(U, U; C) - 1}.$$

Alle darin auftretenden Verschlingungszahlen ersetzen wir durch Größen, denen sie nach Induktionsvoraussetzung gleich sein sollen. Wir erhalten:

$$\frac{\frac{d(C')}{d(C)} \cdot \frac{d(B_e)d(B_r)d(C_f)}{d(B)} \cdot \frac{d(C_e)d(B_r)d(B_r)}{d(B)}}{\frac{d(C')}{d(C)} \cdot \frac{d(C_e)d(C_f)d(B_r)}{d(B)} - 1}.$$

Nach Satz 4 ist

$$d(B') = d(B)d(C) - d(C')d(C_e)d(C_f)d(B_r).$$

Wir erweitern den großen Bruch mit $d(C)d(B)$ und setzen den Wert für $d(B')$ ein. Dann ergibt sich

$$-\frac{d(C')d(B_e)d(B_r)d(C_e)d(C_f)d(B_r)^2}{d(B')d(B)}.$$

Die Behauptung des Satzes besagt, daß $v(e, f; B') - v(e, f; B)$ gleich

$$\begin{aligned} & -\frac{d(C)d(B_e)d(B_r)d(B_f)}{d(B')} - \frac{d(B_e)d(B_r)d(B_f)}{d(B)} \\ &= -\frac{d(B_e)d(B_r)d(B_f)}{d(B')d(B)}(d(C)d(B) - d(B')) \\ &= -\frac{d(B_e)d(B_r)d(B_f)d(C')d(C_e)d(C_f)d(B_r)}{d(B')d(B)} \end{aligned}$$

sein soll (wir haben wieder Satz 4 verwendet).

Damit ist der Induktionsschritt durchgeführt. □

LITERATUR

1. Hirzebruch, F. und Mayer, K. H., 'O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten', *Lecture Notes in Math.* **57**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
2. von Randow, R., 'Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten', *Bonner Math. Schriften* **14** (1952).

Anschrift des Verfassers:

Tammo tom Dieck,
Universität Göttingen,
Mathematisches Institut,
Bunsenstraße 3–5,
D-3400 Göttingen,
F.R.G.

(Eingegangen am 26. Juli, 1989)