

Faserbündel mit Gruppenoperation

Von

TAMMO TOM DIECK

Wir übertragen einige der wichtigsten Sätze über die Konstruktion und Charakterisierung universeller Bündel von der gewöhnlichen Bündeltheorie auf Faserbündel mit Gruppenoperation. Darunter fallen insbesondere die „reellen“ Vektorraumbündel im Sinne von АТИЯН [1]. Zum Schluß geben wir eine Anwendung auf charakteristische Klassen.

1. Definition der Bündel.

1.1. Sei Γ eine kompakte Liesche Gruppe, G eine topologische Gruppe und $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$ ein Homomorphismus von Γ in die Gruppe der Automorphismen von G . Das Bild von γ bei α werde mit α_γ bezeichnet. Wir verlangen, daß die durch $(\gamma, g) \rightarrow \alpha_\gamma(g)$ gegebene Abbildung $\Gamma \times G \rightarrow G$ stetig ist. Im folgenden sollen topologische Räume und Gruppen stets Hausdorff-Räume sein.

Definition. Ein (Γ, α, G) -Bündel besteht aus einem lokal trivialen G -Prinzipalbündel $p: E \rightarrow B$ und einer stetigen Linksoperation von Γ auf E und B , so daß folgendes gilt:

- (A 1) p ist Γ -äquivariant (d.h. für alle $e \in E$, $\gamma \in \Gamma$ gilt $p(\gamma e) = \gamma p(e)$).
- (A 2) Für alle $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$ und $e \in E$ gilt $\gamma(eg) = (\gamma e)\alpha_\gamma(g)$.

(Wir nehmen wie üblich an, daß G von rechts auf E operiert.) Wir bezeichnen ein (Γ, α, G) -Bündel meist nur durch die zugrunde liegende Abbildung $p: E \rightarrow B$. Ist α trivial, dann operiert Γ als Gruppe von Bündelautomorphismen; es handelt sich um Γ -äquivariante Bündel im eigentlichen Sinne (vgl. АТИЯН-СЕГАЛ [2]).

Eine Bündelabbildung von (Γ, α, G) -Bündeln ist eine Bündelabbildung der zugrunde liegenden G -Prinzipalbündel, die mit der Operation von Γ verträglich ist. Eine Γ -Abbildung $f: C \rightarrow B$ induziert von einem (Γ, α, G) -Bündel über B eines über C . Eine Bündelabbildung ist eine Äquivalenz in der Kategorie der (Γ, α, G) -Bündel, falls in der Basis ein Homöomorphismus induziert wird.

Assoziierte Faserbündel: Ist F ein Raum auf dem Γ und G von links so operieren, daß $\gamma(gf) = \alpha_\gamma(g)(\gamma f)$ gilt, so hat das zu $p: E \rightarrow B$ assoziierte Bündel mit Faser F eine kanonische Γ -Operation.

1.2. Die Bestimmungsstücke Γ , α und G liefern ein semi-direktes Produkt $\Gamma \rtimes_\alpha G$ in folgender Weise: Auf dem topologischen Produkt $\Gamma \times G$ erklären wir eine Verknüpfung durch

$$(\gamma, g)(\gamma', g') = (\gamma\gamma', \alpha_\gamma g' \cdot g).$$

Unter den genannten Voraussetzungen über α erhalten wir damit eine topologische Gruppe, die wir mit $\Gamma \times_{\alpha} G$ bezeichnen. $\Gamma \times_{\alpha} G$ operiert stetig von links auf dem Totalraum E eines (Γ, α, G) -Bündels durch die Festsetzung $(\gamma, g)e = (\gamma e)g$. Umgekehrt liefert jeder $\Gamma \times_{\alpha} G$ -Raum E einen Raum mit Γ - und G -Operation, so daß (A 2) gilt.

1.3. Beispiele. Sei $\alpha: Z_2 \rightarrow \text{Aut}(U(n))$ der Homomorphismus, der dem nicht-trivialen Element von Z_2 den Übergang von einer unitären Matrix g aus $U(n)$ zur konjugiert-komplexen $\bar{g}$ zuordnet. Die $(Z_2, \alpha, U(n))$ -Bündel sind die Prinzipalbündel, die zu den reellen Vektorraumbündeln über reellen Räumen gehören („reell“ im Sinne von ATIYAH [1]). Oder:

$$\alpha': \Gamma \xrightarrow{\beta} Z_2 \xrightarrow{\alpha} \text{Aut}(U(n)),$$

β stetig, α wie oben.

2. Lokale Objekte.

2.1. Sei A abgeschlossene Untergruppe von Γ . Der Raum Γ/A der Klassen γA ist ein Γ -Raum vermöge Linkstranslation.

Definition. Ein (Γ, α, G) -Bündel über Γ/A heiße lokales Objekt.

Wir wollen die lokalen Objekte klassifizieren. Sei $p: E \rightarrow \Gamma/A$ ein lokales Objekt und $x \in E$ ein Punkt mit $px = A$. Sei $H_x \subset \Gamma \times_{\alpha} G$ die Standgruppe im Punkte x . H_x ist abgeschlossen, da E Hausdorff-Raum ist. Wir fassen H_x als Untermenge von $\Gamma \times G$ auf. Ist $(\gamma, g) \in H_x$, so ist $\gamma \in A$, denn aus $(\gamma x)g = x$ folgt $A = px = p((\gamma x)g) = \gamma A$. Sind (γ, g) und (γ, h) aus H_x , so gilt $g = h$, weil G frei auf E operiert. H_x ist also Graph einer Abbildung $t: A \rightarrow G$; es gilt $t(\lambda\lambda') = \alpha_{\lambda}(t\lambda') \cdot t\lambda$. Falls α trivial ist, wird t ein Antihomomorphismus. t ist ferner stetig, da p als lokal triviales G -Prinzipalbündel vorausgesetzt wurde. Die durch $u \rightarrow ux$ vermittelte Abbildung $f: \Gamma \times_{\alpha} G/H_x \rightarrow E$ ist mit der Operation von $\Gamma \times_{\alpha} G$ verträglich. f ist ein Homöomorphismus, wie man mit Hilfe des folgenden Lemmas erkennt.

Lemma. Sei die abgeschlossene Untergruppe H von $\Gamma \times_{\alpha} G$ Graph einer stetigen Abbildung $t: A \rightarrow G$. Dann ist

$$r: \Gamma \times_{\alpha} G/H \rightarrow \Gamma/A,$$

betrachtet als G -Prinzipalbündel, lokal trivial.

Beweis. Wesentlich ist die Tatsache, daß $q: \Gamma \rightarrow \Gamma/A$ lokale Schnitte besitzt. Sei $s: U \rightarrow \Gamma$ ein Schnitt von q über der offenen Menge $U \subset \Gamma/A$. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}U \times G & \xrightleftharpoons[p]{\phi} & U \times A \times G \\ \downarrow a & & \downarrow b \\ r^{-1}U & \xleftarrow[\varphi]{} & U \times G \end{array}$$

mit den Abbildungen: $b(u, \lambda, g) = (u, g)$, $\varphi(u, g) = a(su, g)$, a Einschränkung von $\Gamma \times G \rightarrow \Gamma \times_{\alpha} G/H$, und

$$\Phi(u, \lambda, g) = (su \cdot \lambda, \alpha_{s(u)}(t\lambda) \cdot g),$$

$$\Psi(x, y) = (qx, (sqx)^{-1}x, \alpha_{sqx}^{-1}t((sqx)^{-1}x) \cdot y).$$

Dann ist $\alpha\Phi = \varphi b$. Ferner ist $\Phi\Psi = \text{id}$ und $\Psi\Phi = \text{id}$. φ ist also ein mit der Rechtsoperation von G verträglicher Homöomorphismus über U .

2.2. Sind H und K zwei Untergruppen von $\Gamma \times_{\alpha} G$ wie sie oben betrachtet wurden, so gibt es eine Bündelabbildung der zugehörigen (Γ, α, G) -Bündel (über einem Γ -Isomorphismus von Γ/A) genau dann, wenn H und K in $\Gamma \times_{\alpha} G$ konjugiert sind. Wir nennen die betreffenden Objekte dann isomorph.

Satz. *Sei G eine Liesche Gruppe mit endlich vielen Komponenten. Dann gibt es bis auf Isomorphie nur abzählbar viele lokale Objekte (bei festem Γ, α, G).*

Beweis. $\Gamma \times_{\alpha} G$ ist eine Liesche Gruppe. Sie hat nur abzählbar viele Konjugationsklassen kompakter Untergruppen (PALAIS [9], 1.7.27; in Verbindung mit HOCHSCHILD [6], Theorem 3.1, S. 180). Nur solche müssen wir aber nach 2.1 und den Vorbemerkungen zum Satz zählen.

Bemerkung. Allgemeiner könnten wir im voranstehenden Satz G als Limes einer Folge $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ von Lieschen Gruppen mit endlich vielen Komponenten voraussetzen.

2.3. Definition. Ein (Γ, α, G) -Bündel $p: E \rightarrow B$ heiße lokal trivial, wenn B eine offene Überdeckung $U = (U_j | j \in J)$ mit folgenden Eigenschaften hat:

(T 1) Die U_j sind Γ -invariant (als Menge).

(T 2) Die Einschränkung $p^{-1}U_j \rightarrow U_j$ besitzt eine (Γ, α, G) -Bündelabbildung in ein lokales Objekt.

Das lokale Objekt in (T 2) ist nicht eindeutig bestimmt. Ein lokal triviales (Γ, α, G) -Bündel heiße numerierbar, wenn U eine untergeordnete lokal endliche Zerlegung der Eins besitzt. Da Γ kompakt ist, können wir über die Gruppe integrieren und von den Funktionen einer Zerlegung der Eins annehmen, daß sie Γ -invariant sind.

Satz. *Sei G eine kompakte Liesche Gruppe. Sei $p: E \rightarrow B$ ein (Γ, α, G) -Bündel mit vollständig regulärem Totalraum E . Dann ist das Bündel lokal trivial im eben genannten Sinn.*

Beweis. Sei $x \in E$ gegeben. Dann gibt es eine $(\Gamma \times_{\alpha} G)$ -Umgebung U von x und eine äquivariante Abbildung $f: U \rightarrow (\Gamma \times_{\alpha} G)/H_x$. Das entnimmt man PALAIS [9], 1.7.7, 1.7.19. Die Abbildung f liefert die gewünschte Bündelabbildung in ein lokales Objekt.

3. Konstruktion universeller Bündel.

3.1. Wie zuvor seien Γ, α und G gegeben. Sei $p_j: X_j \rightarrow Y_j, j \in J$, eine Familie von lokalen Objekten, so daß jedes lokale Objekt zu einem dieser Familie isomorph (vgl. 2.2) ist. Sei $E_j = X_j * X_j * \dots$ der Join von abzählbar unendlich vielen Exemplaren X_j . Die Topologie von E_j sei in der üblichen Weise die größte, für die alle „Koordinatenabbildungen“ stetig sind (MILNOR [8]). Ferner bilden wir

$$E(\Gamma, \alpha, G) = *_{j \in J} E_j,$$

den Join der E_j , mit der ebenso erklärten Topologie. $E(\Gamma, \alpha, G)$ und die E_j sind in

kanonischer Weise $\Gamma \times_{\alpha} G$ -Räume. Wir setzen $B(\Gamma, \alpha, G) = E(\Gamma, \alpha, G)/G$ und erhalten in der Quotientabbildung $p: E(\Gamma, \alpha, G) \rightarrow B(\Gamma, \alpha, G)$ eine Γ -Abbildung.

Satz. (a) p ist ein lokal triviales (Γ, α, G) -Bündel.

(b) Jedes numerierbare (Γ, α, G) -Bündel gestattet eine Bündelabbildung in p . Je zwei solche Bündelabbildungen sind homotop als (Γ, α, G) -Bündelabbildungen.

(c) Ist J abzählbar, so ist p numerierbar (vgl. 2.3).

Beweis. (a) (Vgl. MILNOR [8]). Man hat Koordinatenfunktionen $t_{j,n}: E(\Gamma, \alpha, G) \rightarrow [0, 1]$, $j \in J$, $n = 1, 2, \dots$ (die n -te t -Koordinate von E_j). Sei $V_{j,n}$ das Urbild von $[0, 1]$ bei $t_{j,n}$. $V_{j,n} \rightarrow V_{j,n}/G$ gestattet eine Bündelabbildung in p_j . $V_{j,n}$ ist offen und Γ -invariant in $B(\Gamma, \alpha, G)$.

(b) Die Existenz einer Bündelabbildung zeigt man wie in [4], 5. (Die Definition von „lokal trivial“ in 2.3 ist gerade darauf zugeschnitten.) Um eine Homotopie zwischen zwei Bündelabbildungen zu konstruieren, wende man die Beweismethode von [4], 6. auf jedes E_j getrennt an. Dann ist die Homotopie mit der (Γ, α, G) -Struktur verträglich.

(c) Siehe DOLD [5], p. 251.

3.2. Sei weiterhin $E = E(\Gamma, \alpha, G)$ und $q: X \rightarrow \Gamma/\Lambda$ ein lokales Objekt. Die zu q assoziierte Faserung $f_q: (X \times E)/G \rightarrow \Gamma/\Lambda$ mit Faser E ist eine Γ -Abbildung. Wir sagen: f_q ist Γ -schrumpfbar (DOLD [5], p. 225), wenn es einen Γ -Schnitt $s: \Gamma/\Lambda \rightarrow (X \times E)/G$ von f_q gibt, so daß sf_q über Γ/Λ (d. h. faserweise) Γ -homotop zur Identität von $(X \times E)/G$ ist.

Satz. Für jedes lokale Objekt q ist f_q Γ -schrumpfbar.

Beweis. Punkte von E beschreiben wir durch Familien $(a_{j,n} | j \in J, n = 1, 2, \dots)$, wobei $a_{j,n} = t_{j,n}x_{j,n}$, $t_{j,n} \in I$, $x_{j,n} \in X_j$; ferner sind nur endlich viele $t_{j,n}$ von Null verschieden und $\sum t_{j,n} = 1$. Sei $q: X \rightarrow \Gamma/\Lambda$ isomorph zu $X_0 \rightarrow Y_0$, $0 \in J$. Wir nehmen $X = X_0$ an. Es ist X von der Form $(\Gamma \times_{\alpha} G)/H$. Deshalb beschreiben wir Punkte aus X durch ihre Repräsentanten in $\Gamma \times G$.

Einen Schnitt s definieren wir durch

$$s(\gamma \Lambda) = ((\gamma, e), a_{j,n}(\gamma)),$$

wobei $a_{0,1}(\gamma) = 1(\gamma, e)$ ist und $a_{j,n}(\gamma) = 0(\gamma, e)$ für $(j, n) \neq (0, 1)$; $e \in G$ neutrales Element. s ist wohldefiniert, Γ -Abbildung und Schnitt.

Die gewünschte Γ -Homotopie von sf zur Identität konstruieren wir wie folgt: Sei $H_t: (X \times E)/G \rightarrow (X \times E)/G$ erklärt durch

$$a_{j,n} = \begin{cases} tt_{j,n}x_{j,n} & \text{für } j \neq 0, \\ tt_{0,n-1}x_{0,n-1} & \text{für } j = 0, n > 1, \\ (1-t)(\gamma, g) & \text{für } j = 0, n = 1. \end{cases}$$

Dann ist $H_0 = sf$ und H_1 schon beinahe die Identität, nämlich in den Koordinaten mit $j \neq 0$. Jetzt konstruieren wir ähnlich wie in [4], 6. in unendlich vielen Schritten eine Homotopie, die $(0x_1, t_1x_1, t_2x_2, \dots) \in E_0$ mit $(t_1x_1, t_2x_2, \dots) \in E_0$ verbindet und setzen sie zu einer Homotopie von H_1 zur Identität von $(X \times E)/G$ fort. Man

bestätigt, daß alle diese Homotopien mit der Operation von Γ verträglich sind und über Γ/A liegen.

3.3. Man kann auf die beschriebene Art auch universelle Bündel für eine eingeschränkte Kategorie von (Γ, α, G) -Bündeln konstruieren. Zum Beispiel: Triviale Γ -Operation auf der Basis der Bündel; oder die Basis hat nur endliche Orbits; oder die Γ -Operation auf der Basis läßt sich über eine bestimmte Faktorgruppe von Γ faktorisieren. Natürlich „enthält“ der Join im allgemeinen nicht nur die lokalen Objekte, aus denen er gebildet ist. Deshalb ist der reduzierte Join (im Sinne von PALAIS [9], 1.3.6) zu verwenden.

Man muß zur Konstruktion der universellen Bündel auch nicht von allen Isomorphietypen lokaler Objekte ausgehen. Man kann sich auf eine Menge von lokalen Objekten beschränken, so daß sich jedes lokale Objekt in eines dieser Menge abbilden läßt.

4. Der Homotopiesatz. Sei $p: X \rightarrow B \times I$ ein numerierbares (Γ, α, G) -Bündel. Sei $r: B \times I \rightarrow B \times I$ die Abbildung $r(b, t) = (b, 1)$.

Satz. *Unter den folgenden Voraussetzungen gibt es eine (Γ, α, G) -Bündelabbildung $p \rightarrow p$, die über r liegt:*

(a) *B hat nur Orbits, die aus endlich vielen Punkten bestehen (zum Beispiel: Γ ist eine endliche Gruppe).*

(b) *B ist Limes einer Folge $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ von kompakten Γ -Räumen B_i und G eine kompakte Liesche Gruppe.*

Folgerung. Sei $p: X \rightarrow C$ ein (Γ, α, G) -Bündel und $H: B \times I \rightarrow C$ eine Γ -Homotopie (d. h.: H_t ist für jedes $t \in I$ eine Γ -Abbildung). Sei das von p durch H induzierte Bündel $H^*(p)$ numerierbar (etwa: p sei numerierbar). Dann ist unter der Voraussetzung (a) oder (b) des Satzes das Bündel $H^*(p)$ äquivalent zum Produktbündel $H_0^*(p) \times I$. Insbesondere sind $H_0^*(p)$ und $H_1^*(p)$ äquivalent.

Beweis des Satzes. (a) In diesem Fall läßt sich der in [7], p. 48–50 aufgezeichnete Beweis fast wörtlich übertragen — im wesentlichen deshalb, weil Homotopien in die Basis der fraglichen lokalen Objekte konstant sind. Nennen wir ein Bündel trivial, wenn es eine Abbildung in ein lokales Objekt besitzt, so hat man sich nur einen etwas anderen Beweis von [7], 4.9.4 Lemma, p. 49, zu überlegen.

(b) Sei zunächst B kompakt. Sei $r_t: B \times I \rightarrow B \times I$ durch $r_t(b, s) = (b, t)$ gegeben, also $r = r_1$. Sei $g_t: B \times I \rightarrow (B \times I) \times (B \times I)$ durch $g_t(u) = (u, r_t u)$ gegeben und sei $q_t: Y_t \rightarrow B \times I$ die vom Produkt $p \times p$ durch g_t induzierte Abbildung. q_t ist in kanonischer Weise ein $(\Gamma, \alpha', G \times G)$ -Bündel, wenn $\alpha': \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G \times G)$ durch $\alpha'_\gamma(g, h) = (\alpha_\gamma(g), \alpha_\gamma(h))$ gegeben ist. Sei $K = \Gamma \times_{\alpha'} (G \times G)$. Wir haben auf G eine Rechtsoperation von $G \times G$ durch $x(g, h) = g^{-1} x h$ und eine Linksoperation von Γ durch $\gamma x = \alpha_\gamma(x)$. Es gilt

$$\gamma(x(g, h)) = (\gamma x) \cdot \alpha'_\gamma(g, h).$$

Damit wird G ein K -Raum. Bündelabbildungen $p \rightarrow p$ über r_t entsprechen den Γ -Schnitten von q_t und diese den K -Abbildungen $f: Y_t \rightarrow G$ (vgl. [7], 4.8, p. 46–47). Sei $Y(t)$ der über $B \times \{t\}$ liegende Teil von Y_t . Wir haben schon eine K -Abbildung

$\alpha: Y(t) \rightarrow G$. Sie läßt sich auf eine Umgebung von $Y(t)$ in Y_t erweitern, PALAIS [9], 1.6. Wegen der Kompaktheit von B gibt es also eine Umgebung $[a_t, b_t]$ von t in I , so daß eine Bündelabbildung von p , eingeschränkt auf $p^{-1}(B \times [a_t, b_t])$, über r_t , eingeschränkt auf $B \times [a_t, b_t]$, existiert, die über $B \times \{t\}$ die Identität ist. Also ist $p^{-1}(B \times [a_t, b_t])$ über $B \times [a_t, b_t]$ K -isomorph zu $p^{-1}(B \times \{t\}) \times [a_t, b_t]$. Es folgt leicht die Behauptung.

Für eine Folge (B_i) von kompakten Γ -Räumen konstruiert man die Bündelabbildung mit dem schon Bewiesenen induktiv über $B_i \times I \cup \lim B_i \times 0$. Wir gehen darauf nicht näher ein.

5. Charakterisierung universeller Bündel.

5.1. Satz. Sei $p: E \rightarrow B$ ein (Γ, α, G) -Bündel, so daß für jedes lokale Objekt $q: X \rightarrow \Gamma/A$ das assoziierte Bündel $(X \times E)/G \rightarrow \Gamma/A$ Γ -schrumpfbar ist. Dann gestattet jedes numerierbare (Γ, α, G) -Bündel eine Bündelabbildung in p und je zwei dieser Bündelabbildungen sind homotop.

Beweis. Sei $V \rightarrow Y$ ein numerierbares (Γ, α, G) -Bündel. Wir betrachten das assoziierte Bündel $(V \times E)/G \rightarrow Y$.

Behauptung: Es hat die Γ -Schnittterweiterungseigenschaft (Γ -SEE). Nach DOLD [5], 2.8 genügt es zu zeigen, daß lokal die Γ -SEE gilt. Lokal wird aber das Bündel von einem Γ -schrumpfbaaren induziert, hat also nach DOLD [5], 3.1 die Γ -SEE. Der weitere Beweis verläuft wie bei DOLD [5], p. 249.

5.2. Satz. Sei Γ endlich und G Limes einer Folge $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ Liescher Gruppen mit endlich vielen Komponenten. Ein numerierbares (Γ, α, G) -Bündel $E \rightarrow B$ ist genau dann universell, wenn für alle lokalen Objekte $X \rightarrow \Gamma/A$ die assoziierten Bündel $(X \times E)/G \rightarrow \Gamma/A$ Γ -schrumpfbar sind.

Beweis. Nach 2.2, 3.1 und 3.2 gibt es universelle numerierbare (Γ, α, G) -Bündel, für die alle Bündel $(X \times E)/G \rightarrow \Gamma/A$ Γ -schrumpfbar sind. Mit 4. und 5.1 wird nun der Beweis wie bei DOLD [5], p. 249 für Satz 7.5 geführt.

Bemerkung. „Universell“ schließt hier die Gültigkeit des Homotopiesatzes ein.

5.3. Beispiel. Für $(Z_2, \alpha, U(n))$ -Bündel (vgl. 1.3) gibt es bis auf Isomorphie zwei lokale Objekte. Mit Bezeichnungen aus 2.1: $A = \{0\}$ und t trivial; $A = Z_2$ und t trivial. Für die Konstruktion des universellen Bündels kann man sich auf $U(n)$ über einem Punkt mit Konjugation als Z_2 -Operation beschränken (Schlußbemerkung in 3.3). Der klassifizierende Raum für diese Bündel ist also $BU(n)$ mit der durch Konjugation induzierten Involution.

6. Charakteristische Klassen.

6.1. Auf dem universellen G -Prinzipalbündel $EG \rightarrow BG$ von MILNOR operiert Γ durch die Festsetzung

$$\gamma \cdot (t_1 g_1, t_2 g_2, \dots) = (t_1 \alpha_\gamma(g_1), t_2 \alpha_\gamma(g_2), \dots).$$

Das so gegebene (Γ, α, G) -Bündel bezeichnen wir mit $p_0: E_0 \rightarrow B_0$. Sei $j: B_0 \rightarrow B(\Gamma, \alpha, G)$ eine klassifizierende Abbildung von p_0 . Sei $J = \text{id} \times_{\Gamma} j: E\Gamma \times_{\Gamma} B_0 \rightarrow E\Gamma \times_{\Gamma} B(\Gamma, \alpha, G)$. Wir nehmen an, daß das universelle (Γ, α, G) -Bündel numerierbar ist (vgl. 3.1 Satz).

Satz. J und j (nach Vergessen der Γ -Struktur) sind Homotopieäquivalenzen.

Beweis. Aus 3.2 folgt, daß $E(\Gamma, \alpha, G)$ zusammenziehbar ist. Also ist p bei Vergessen der Γ -Struktur ein universelles G -Prinzipalbündel. Da j ein universelles G -Prinzipalbündel von einem anderen induziert, muß j eine Homotopieäquivalenz sein. Die Behauptung über J folgt jetzt aus DOLD [5], Theorem 6.3.

6.2. Sei α trivial und in allen Bezeichnungen unterdrückt. Wir gehen aus von einem numerierbaren (Γ, G) -Bündel $p: V \rightarrow X$ über einem freien Γ -Raum X mit numerierbarem Quotientbündel $q: X \rightarrow X/\Gamma$. Seien $k: X \rightarrow B(\Gamma, G)$, $k': X/\Gamma \rightarrow BG$, $(L, l): (X, X/\Gamma) \rightarrow (E\Gamma, B\Gamma)$ klassifizierende Abbildungen von p , $p/\Gamma: V/\Gamma \rightarrow X/\Gamma$, q . Die assoziierte Faserung $r: E\Gamma \times_{\Gamma} X \rightarrow X/\Gamma$ ist eine Homotopieäquivalenz, da die Faser zusammenziehbar ist. Eine inverse Äquivalenz $s: X/\Gamma \rightarrow E\Gamma \times_{\Gamma} X$ wird durch $s(\Gamma x) = (Lx, x) \bmod \Gamma$ geliefert.

Satz. Das folgende Diagramm ist bis auf Homotopie kommutativ

$$\begin{array}{ccc} E\Gamma \times_{\Gamma} X & \xrightarrow{\text{id} \times_{\Gamma} k} & E\Gamma \times_{\Gamma} B(\Gamma, G) \\ \downarrow r & & \uparrow J \\ X/\Gamma & \xrightarrow{[l, k']} & B\Gamma \times BG \end{array}$$

Beweis. Zunächst ist $j k' q$ Γ -homotop zu k , da beide Abbildungen dasselbe (Γ, G) -Bündel über X induzieren. Also ist $\text{id} \times_{\Gamma} j k' q$ homotop zu $\text{id} \times_{\Gamma} k$. Setzen wir $\text{id} \times_{\Gamma} k' q$ mit s zusammen, so erhalten wir $[l, k']$. Da s und r inverse Homotopieäquivalenzen sind, folgt die Behauptung.

6.3. Ist k ein Funktor, definiert auf der Kategorie der topologischen Räume, so erhalten wir daraus einen Funktor ${}_r k$, definiert auf der Kategorie der Γ -Räume, indem wir setzen

$${}_r k(X) = k(E\Gamma \times_{\Gamma} X).$$

Wir fragen nach charakteristischen Klassen für $(\Gamma, O(n))$ -Bündel mit Werten in der Kohomologie ${}_r H^*$. Die universellen Klassen sind dann Elemente aus ${}_r H^*(B(\Gamma, O(n)))$ oder — wegen der Homotopieäquivalenz aus 6.1 — Elemente aus $H^*(B\Gamma \times BO(n))$.

Charakteristische Klassen für Bündel über freien Γ -Räumen wurden von CONNER und FLOYD betrachtet (z.B. [3], p. 91). Das Bindeglied zwischen den dort und hier betrachteten Klassen ist der Satz aus 6.2, der eine noch weitergehende Zerspaltung der Klassen als 6.1 besagt. Verwenden wir zum Beispiel Kohomologie mit Koeffizienten in einem Körper L , damit wir die Künneth-Formel

$$H^*(B\Gamma \times BO(n); L) \cong H^*(B\Gamma; L) \otimes H^*(BO(n); L)$$

zur Verfügung haben, so sind alle charakteristischen Klassen von $V \rightarrow X$ Polynome in charakteristischen Klassen von $X \rightarrow X/\Gamma$ und $V/\Gamma \rightarrow X/\Gamma$.

Zusatz bei der Korrektur (24. 3. 1969): Der Homotopiesatz 4 (und damit auch Satz 5.2) gelten allgemein für kompakte Liesche Gruppen Γ . Der Beweis von 4 (a) läßt sich „induktiv über Γ “ durchführen, wenn man folgendes beachtet: Sei $p: X \rightarrow B \times [0, 1]$ durch $f: B \times [0, 1] \rightarrow \Gamma/A$ von einem lokalen Objekt induziert. Dann ist B von der Form $\Gamma \times_{\Lambda} Y$ mit $Y = f_0^{-1}(A)$ (PALAIS [9], 1. 7. 9). Die Einschränkung p' von p auf $Y \times [0, 1]$ ist äquivalent zu $p'_0 \times \text{id}$ (klar für $\Gamma = A$; sonst nach Induktion, [9], 1. 8. 1). Dann ist $p = \Gamma \times_{\Lambda} p' = (\Gamma \times p'_0) \times \text{id}$. Der Satz gilt somit lokal. Man beendet den Beweis wie üblich.

Literaturverzeichnis

- [1] M. F. ATIYAH, *K*-Theory and reality. Quart. J. Math., Oxford, II. Ser. **17**, 367—386 (1966).
- [2] M. F. ATIYAH and G. B. SEGAL, *Equivariant K-theory*. University of Warwick, Coventry 1965 (vervielfältigt).
- [3] P. E. CONNER and E. E. FLOYD, *Differentiable periodic maps*. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.
- [4] T. TOM DIECK, Klassifikation numerierbarer Bündel. Arch. Math. **17**, 395—399 (1966).
- [5] A. DOLD, Partitions of unity in the theory of fibrations. Ann. of Math., II. Ser. **78**, 223—255 (1963).
- [6] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie groups*. San Francisco, London, Amsterdam 1965.
- [7] D. HUSEMOLLER, *Fibre bundles*. New York 1966.
- [8] J. MILNOR, Constructions of universal bundles, II. Ann. of Math., II. Ser. **63**, 430—436 (1956).
- [9] R. PALAIS, The classification of G -spaces. Mem. Amer. Math. Soc. **36** (1960).

Eingegangen am 2. 2. 1968

Anschrift des Autors:

Tammo tom Dieck
 Mathematisches Institut der Universität
 69 Heidelberg, Tiergartenstraße