ZUR DIFFEOMORPHIEKLASSIFIKATION

VOLLSTÄNDIGER DURCHSCHNITTE

Diplomarbeit

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik

an der Johannes Gutenberg Universität Mainz

von Claudia Traving

Referent ist Matthias Kreck.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis...1

Einleitung...2

§ 0 Konventionen, Definitionen und ein Programm
zur Klassifikation von Mannigfaltigkeiten.................10

§ 1 Der Normalentyp der vollständigen Durchschnitte...........21

§ 2 Rationale Bestimmung der B-Bordismusklassen
vollständiger Durchschnitte...............................32

§ 3 Die Adams-Filtrierung vollständiger Durchschnitte.........43

§ 4 Die Filtrierung der Torsion in
$\pi_*(M(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p))$................................ 57

§ 5 Das Kürzungsproblem für vollständige Durchschnitte
gerader komplexer Dimension...............................70

§ 6 Das Kürzungsproblem für vollständige Durchschnitte
ungerader komplexer Dimension.............................82

Literaturverzeichnis...95

Einleitung

Vollständige Durchschnitte der komplexen Dimension n sind komplexe Untermannigfaltigkeiten des komplex projektiven Raumes $\mathbb{CP}^{n+r}$. Sie sind der transversale Schnitt von r nichtsingulären Hyperflächen, die gegeben sind durch homogene Polynome vom Grad $d_1,\dots,d_r$ mit linear unabhängigen Gradienten. In den fünfzigern bemerkte Thom, daß die Diffeomorphieklasse eines vollständigen Durchschnittes X der komplexen Dimension n nur von dem Multigrad $(\underline{d})$, dem ungeordneten r-Tupel $(d_1,\dots,d_r)$, abhängt. Tatsächlich bestimmen n und $(\underline{d})$ bereits die Isotopieklasse der Einbettung von X in $\mathbb{CP}^{n+r}$ ([Libgober & Wood 3,thm.8.1]). Wir bezeichnen daher den so gegebenen vollständigen Durchschnitt mit $X_n(d_1,\dots,d_r)$ oder kurz $X_n(\underline{d})$.
Da verschiedene Multigrade zu diffeomorphen vollständigen Durchschnitten gehörenkönnten, ist eine natürliche Frage, welche Invarianten, berechenbar aus der Dimension und dem Multigrad, den Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes bestimmen. Das Ergebnis im Fall n=1 ist wohlbekannt: $X_1(\underline{d})$ ist diffeomorph zu einer zusammenhängenden Summe von Tori, wobei die Anzahl der Summanden durch die Euler-Charakteristik $e(X_1(\underline{d}))$ bestimmt ist, mit $e(X_1(\underline{d})) = d(2 - (d_1-1) - \cdots - (d_r-1))$. Dabei bezeichnet $d = d_1\cdot\cdots\cdot d_r$ den Totalgrad von $X_1(\underline{d})$.

Mit obiger Fragestellung haben sich vor allem A.Libgober und J.Wood in einer Reihe von Artikeln seit Ende der siebziger Jahre beschäftigt (vgl.[Libgober & Wood 1,2,3 und 4] und [Wood]). Zu nennen ist ebenfalls W. Browder ([Browder 3]). Der letzte Artikel von Libgober und Wood beinhaltet im wesentlichen eine Zusammenfassung ihrer vorangegangenen Arbeiten und gibt daher einen gute Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung, den ich im folgenden kurz umreißen will.

Da viele der von Libgober und Wood verwendeten Methoden in reeller Dimension 4 nicht funktionieren, möchte ich zuvor noch für Diffeomorphieuntersuchungen bei vollständigen Durchschnitten der komplexen Dimension 2 auf ein Resultat von [Mandelbaum & Moishezon,thm.2] hinweisen. Mit Hilfe von Methoden aus der algebraischen Geometrie zeigen sie, daß es eine differenzierbare Zerlegung nach stabilisieren mit einen $\mathbb{CP}^2$ der folgenden Gestalt gibt : $X_2(\underline{d}) \# \mathbb{CP}^2 = k\, \mathbb{CP}^2 \# k'\, \overline{\mathbb{CP}}^2$, wobei $\overline{\mathbb{CP}}^2$ den komplex projektiven Raum mit der Nichtstandartorientierung bezeichnet.
Sei im folgenden stets $X_n(\underline{d})$ ein vollständiger Durchschnitt der komplexen Dimension $n \geq 3$.

Nach dem Satz von Lefschetz über Hyperflächenschnitte ([Bott, §2]) ist die Inklusion i: $X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^{n+r}$ eine n-Äquivalenz. Mit Poincaré-Dualität folgt, daß die Homologiegruppen von $X_n(\underline{d})$ und $\mathbb{C}P^n$ isomorph sind, außer in der mittleren Dimension, wo $H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul von i.a. wesentlich größerem Rang als 1 ist. Ein Studium der auf $H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ erklärten Schnittform ([Browder 3] für n ungerade, [Libgober & Wood 2] für n gerade) führt zu Zerlegungen von $X_n(d)$ in der differenzierbaren und der topologischen Kategorie als zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten :

$X_n(\underline{d}) = M \# N$, so daß N eine (n-1)-zusammenhängende, fast parallelisierbare Mannigfaltigkeit ist und $H_n(M,\mathbb{Z})$ minimalen Rang hat. Diese Zerlegungen sind für Libgober und Wood der erste Schritt zur Bestimmung des Homotopie- bzw. Diffeomorphietyps von $X_n(\underline{d})$. Sie nennen M ein Kernstück (engl. "core") von $X_n(\underline{d})$ im topologischen Fall, ein glattes Kernstück im differenzierbaren Fall. Sie zeigen:

(1) Ist <u>n ungerade</u>, so ist der minimale Rang von $H_n(M,\mathbb{Z})$ in einer differenzierbaren Zerlegung 0 oder 2. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Kervaire-Invariante von $X_n(\underline{d})$ definiert und nichttrivial ist. (Diese ist vollständig in [Browder 3] geklärt.)
In der topologischen Kategorie hat man stets eine Zerlegung mit Rang $H_n(M,\mathbb{Z}) = 0$. Die Cohomologiestruktur von M ist dann gegeben durch
$H^*(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x,y] / \{ x^m = dy \ , \ y^2 = 0 \}$, wobei $2m+1=\cancel{m}\,n$ ist.

Ein einfach zusammenhängender CW-Komplex mit dieser Cohomologiestruktur heißt d-getwisteter Homologie-$\mathbb{C}P^n$. Für d=1 ist ein solcher Raum homotopieäquivalnet zu $\mathbb{C}P^n$.

Die Situation im Fall <u>n gerade</u> ist völlig anders. Da nicht alle Homologieklassen in $H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ sphärisch sind, kann Rang $H_n(M,\mathbb{Z})$ nie null sein. Libgober und Wood konstruieren die folgende orthogonale Zerlegung :

(2) $H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}) = A \oplus B$, wobei alle Klassen in B sphärisch sind und Rang A kleiner oder geich 5 ist. Dem entspricht eine topologische Zerlegung $X_n(\underline{d}) = M \# N$, mit $H_n(M,\mathbb{Z}) = A$ und $H_n(N,\mathbb{Z}) = B$.
Geeignetes Verschieben von Summanden in N nach M liefert eine differenzierbare Zerlegung.

Mittels dieser Zerlegungen untersuchen Libgober und Wood den Homotopietyp von $X_n(\underline{d})$. Ist n ungerade, so ist das Kernstück ein d-getwisteter Homologie-$\mathbb{C}P^n$. Unter der Voraussetzung, daß d keine kleinen Teiler hat zeigen Libgober und Wood :

(3) Folgt aus $p|d$ $2p \geq n+3$, so sind je zwei d-getwistete Homologie-$\mathbb{C}P^n$ homotopieäquivalent und somit ist der Homotopietyp von $X_n(\underline{d})$ durch n, d und die Euler-Charakteristik bestimmt (n ungerade).

Da sich all diese Invarianten aus $H^*(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ ergeben, äußern Libgober und Wood die folgende Vermutung für beliebige $n \geq 3$:

Wenn aus $p|d$ $2p \geq n+3$ folgt, so ist der Homotopietyp von $X_n(\underline{d})$ und seinem Kernstück durch der ganzzahligen Cohomologiering von $X_n(\underline{d})$ bestimmt.

Eine Vermutung von Browder ist, daß der Homotopietyp eines vollständigen Durchschnittes durch den ganzzahligen Cohomologiering und den Typ des Sphärenbündels des Tangentialbündels als sphärische Faserung bestimmt ist.

Diese Vermutungen liegen auf einer Linie mit einem Satz von Sullivan, der sich ergibt aus der Tatsache, daß Kähler-Mannigfaltigkeiten formal sind ([Deligne,Morgan,Griffiths & Sullivan]):

Theorem ([Sullivan,thm.12.5] 1977):

Der Diffeomorphietyp einer einfach zusammenhängenden Kähler-Mannigfaltigkeit ist bis auf endliche Unbestimmtheit durch den ganzzahligen Cohomologiering und die Pontrjagin-Klassen bestimmt.

Da vollständige Durchschnitte als komplexe Untermannigfaltigkeiten der Komplex projektiven Räume Kähler-Mannigfaltigkeiten sind ([Hirzebruch,§18, 18.1]), ist dieser Satz auf vollständige Durchschnitte anwendbar. Zur Definition von Kaehler-Mannigfaltigkeiten vgl. etwa [Hirzebruch,§15,15.6] .

Ein weiteres Ergebnis von Libgober und Wood über den Homotopietyp vollständiger Durchschnitte ist das folgende :

(4) Haben $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ jeweils paarweise teilerfremde Einträge im Multigrad, d.h. $(d_i,d_j)=1$ und $(d'_i,d'_j)=1$ für $i \neq j$, so haben sie genau dann homotopieäquivalente Kernstücke, wenn sie gleichen Totalgrad haben.

Weitere Aussagen von Libgober und Wood zeigen, daß die Voraussetzungen von (3) und (4) notwendig sind. Mit Hilfe von Cohomologieoperationen beweisen sie, daß für $2p \leq n+2$ $X_n(p,p)$ und $X_n(p^2)$ nicht homotopieäquivalente Kernstücke besitzen. Mit dieser Methode lassen sich allerdings keine Gegenbeispiele zu ihrer Vermutung konstruieren, denn sie zeigen, daß die Operation der Steenrod-Algebra unter der Voraussetzung $p|d$ impliziert $2p \geq n+3$ durch $H^*(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ bestimmt ist.

Neben den Zerlegungen und den Resultaten über den Homotopietyp sind die folgenden Aussagen über die Existenz von diffeomorphen vollständigen Durchschnitten mit verschiedenen Multigraden und über die Eindeutigkeit des Multigrads in kleiner Codimension zentral in der Arbeit von Libgober und Wood. Sie werden durch Anwenden der langen exakten Surgery-Sequenz und durch ein Abzählargument bewiesen.

(5) Die Zahl der Diffeomorphieklassen vollständiger Durchschnitte der komplexen Dimension n mit gegebenen Invarianten Totalgrad, Euler-Charakteristik, Pontrjagin-Klassen und einem Kernstück von gegebenem Homotopietyp ist kleiner als eine Schranke, die nur von n abhängt.

Es folgt:

(6) In jeder Dimension $n \neq 2$ und für jede Zahl k gibt es k verschiedene Multigrade, so daß die zugehörigen vollständigen Durchschnitte alle diffeomorph sind.

(7) Ist die Codimension von $X_n(\underline{d}) \subseteq \mathbb{C}P^{n+r}$ $r \leq [n/2]$, $d_i > 1$ für alle $i=1,\ldots,r$ und $n>2$, so bestimmen d und die Pontrjagin-Klassen von $X_n(\underline{d})$ r und $d_1,\ldots,d_r$ eindeutig.

<u>In komplexer Dimension n=3</u> liefern die Ergebnisse von [Wall 1], [Jupp] und [Žubr] eine vollständige Diffeomorphieklassifikation von einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeiten. Libgober und Wood führen diese für vollständige Durchschnitte als Beispiel für die gewünschte Klassifikation in höheren Dimensionen aus.

(i) $X_3(\underline{d}) = M \# k(S^3 \times S^3)$, wobei M ein glatter d-getwisteter Homologie-$\mathbb{C}P^3$ ist und k durch die Euler-Charakteristik bestimmt wird.

(ii) Zwei d-getwistete Homologie-$\mathbb{C}P^3$ mit gleicher Stiefel-Whitney-Klasse w_2 und gleicher Pontrjagin-Klasse p_1 sind diffeomorph.

(iii) Diese Invarianten erfüllen :

$w_2 = 0$ impliziert $p_1 \equiv 4d \mod 24$,

$w_2 \neq 0$ impliziert $p_1 \equiv d \mod 48$.

(p_1 bezeichnet hier den Wert $\langle p_1 \cup i^* c_1(H), [X_3(\underline{d})] \rangle$.)

(iv) Zu gegebenem d, w_2 und p_1, die (iii) erfüllen, existiert ein glatter d-getwisteter Homologie-$\mathbb{C}P^3$ mit den gegebenen Invarianten.

(v) Der Homotopietyp von M ist bestimmt durch d und w_2, und falls d und w_2 beide gerade sind, durch d, w_2 und p_1 mod 48.

(vi) Für einen vollständigen Durchschnitt mit einer Zerlegung wie in (i) ist der Homotopietyp von M stets durch w_2 und d bestimmt.

Der Diffeomorphietyp von M ist durch p_1 und d bestimmt. Libgober und Wood geben unter anderem die folgenden, mittels Computer gefundenen Beispiele an :

$X_3(15,14,3,3,2)$ ist homotopieäquivalent zu $X_3(18,7,6,5)$,

$X_3(12,10) = X_3(15,4,2) \# (13440)(S^3 \times S^3)$,

$X_3(16,10,7,7,2,2,2) = X_3(14,14,5,4,4,4)$.

Problemstellung dieser Arbeit ist ebenfalls ein Invariantesystem anzugeben, das den Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes bestimmt. Ein klassischer Ansatz zur Lösung ist das Drei-Schritt-Surgery-Verfahren von Browder, Novikov und Wall. Allerdings bereitet schon der erste Schritt, in dem es darum geht, den Normalenhomotopietyp zu bestimmen, erhebliche Schwierigkeiten: Libgober und Wood können den Homotopietyp nicht in allen Fällen bestimmen. In (3) bestimmen sie ihn für ungerade komplexe Dimension n unter der Voraussetzung, daß der Totalgrad d keine kleinen Teiler besitzt, in (4) für vollständige Durchschnitte mit paarweise teilerfremden Einträgen im Multigrad.

Erinnern wir uns daran, daß die Inclusion i: $X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{CP}^{n+r}$ nach Lefschetz eine n-Äquivalenz ist. Tatsächlich kann man sogar $\mathbb{CP}^{n+r}$ aus $X_n(\underline{d})$ durch Anheften von Zellen der Dimension echt größer als n erhalten ([Bott]). Das bedeutet, daß die vollständigen Durchschnitte unterhalb der mittleren Dimension die Topologie des komplex projektiven Raumes tragen. Daher sind sie hervorragend geeignete Objekte für eine von M.Kreck entwickelte Verallgemeinerung des Browder-Novikov-Wall-Verfahrens ([Kreck 2]). Es handelt sich hierbei ebenfalls um ein Drei-Schritt-Verfahren, das im ersten Schritt lediglich Informationen über die Topologie bis zur mittleren Dimension und das Normalenbündel verlangt. Nach dem eben Bemerkten läßt dies den ersten Schritt für vollständige Durchschnitte sehr einfach werden, da das Normalenbündel ebenfalls bekannt ist. In dieser Arbeit ist das Programm von M.Kreck für vollständige Durchschnitte durchgeführt worden. Das Hauptresultat ist das folgende :

Für einen vollständigen Durchschnitt $X_n(\underline{d})$ bezeichne $\nu_p(d)$ den Exponenten der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung der Totalgrades d :
$d = d_1 \cdot \dots \cdot d_r = \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p(d)}$.
$\xi(n,\underline{d})$ sei das folgende komplexe Bündel über $\mathbb{CP}^\infty$, gegeben als Polynom im Hopfbündel H : $\xi(n,d) = -(n+r+1)H + H^{d_1} + \dots + H^{d_r}$. Dann gilt :

Theorem:

Ist $n \geq 3$ und die folgende Bedingung (*) erfüllt

(*) $\nu_p(d) \geq \frac{2n+1}{2(p-1)} + 1$ für alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$,

so ist ein vollständiges Invariantensystem für den Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$ gegeben durch den Totalgrad, die Pontrjagin-Klassen von $\xi(n,\underline{d})$ auf $\mathbb{C}P^n$ und die Euler-Charakteristik :

(i) $d = d_1 \cdot \dots \cdot d_r$

(ii) $p_i(\xi(n,\underline{d}))$ für $i = 1, \dots, [n/2]$

(iii) $e(X_n(\underline{d}))$.

Das heißt: Zwei vollständige Durchschnitte der komplexen Dimension $n \geq 3$, deren Totalgrade der Bedingung (*) genügen, sind genau dann diffeomorph, wenn ihre Invarianten nach (i),(ii) und (iii) übereinstimmen.

Da sich die Pontrjagin-Klassen und die Euler-Charakteristik aus der Dimension und dem Multigrad berechnen lassen (siehe [Hirzebruch,p.160] bzw. [Chen] oder [Libgober & Wood 3,§7]), ist dieses Resultat bis auf die Bedingung (*) ein befriedigendes Ergebnis.

Auffällig ist, daß (*) fast komplementär zu der Bedingung ist, die Libgober und Wood in (3) voraussetzen um den Homotopietyp von $X_n(\underline{d})$ für ungerades n zu bestimmen. Während (*) sichert, daß d genügend oft von allen kleinen Primzahlen geteilt wird, verlangen Libgober und Wood, daß d keine kleinen Teiler besitzt. Für sie ergibt sich diese Beschränkung beim Argumentieren mit der $\mathbb{Z}$-Cohomologie des Eilenberg-MacLane-Raumes $K(\mathbb{Z}_d,n)$, wohingegen (*) bedeutet, daß $X_n(\underline{d})$ ein Element genügend hoher Adams-Filtrierung in der Homotopie eines gewissen Thom-Spektrums repräsentiert.

$X_n(\underline{d})$ ist in offensichtlicher Weise in $\mathbb{C}P^\infty$ eingebettet. Sei $i: X_n(d) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ diese Einbettung. Da $i^*\xi(n,\underline{d})$ ein Vertreter des stabilen Normalenbündels von $X_n(\underline{d})$ ist, und $i^*: H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X_n(\underline{d}), \mathbb{Z})$ bis zur Dimension 2n einschließlich injektiv ist, bestimmen die Klassen $p_i(\xi(n,\underline{d}))$ mit $i=1,\dots,[n/2]$, die Pontrjagin-Klassen von $X_n(\underline{d})$ und umgekehrt.
Wegen $\langle i^*c_1(H)^n, [X_n(\underline{d})] \rangle = d$ ist der Totalgrad und natürlich auch die Euler-Charakteristik von $X_n(\underline{d})$ durch $H^*(X_n(\underline{d}), \mathbb{Z})$ bestimmt.
Damit können wir das Resultat auch wiefolgt formulieren (vgl [Sullivan]):

Theorem':

Der Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes der komplexen Dimension $n \geq 3$, der der Bedingung (*) genügt, ist durch den ganzzahligen Cohomologiering und die Pontrjagin-Klassen eindeutig bestimmt.

Der Aufbau der Arbeit folgt dem Programm von M.Kreck, das in §0 kurz dargestellt wird. Untersucht werden generell nur vollständige Durchschnitte der komplexen Dimension $n \geq 3$.

§1 beinhaltet den ersten Schritt des Programms, die Bestimmung des Normalentyps von $X_n(\underline{d})$. Er ist gegeben durch die folgende Faserung (B,p) über BO: $(\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle))$. Dabei klassifiziert die Abbildung $p(n,\underline{d})\colon \mathbb{C}P^{\infty} \longrightarrow BO\langle n+1\rangle$ das Bündel $\xi(n,\underline{d})$, $p\langle n+1\rangle\colon BO\langle n+1\rangle \longrightarrow BO$ bezeichnet das n-zusammenhängende Cover über BO und $\mu\colon BO \times BO \longrightarrow BO$ die der Whitney-Summe entsprechende H-Raumstruktur. Die KO-Theorie der complex projektiven Räume liefert eine Charakterisierung des Normalentyps durch die Pontrjagin-Klassen von $\xi(n,\underline{d})$ auf $\mathbb{C}P^{[n/2]}$ modulo einer Unbestimmtheit in $\mathbb{Z}_2$, die jedoch durch höhere Pontrjagin-Klassen aufgehoben wird.

Im zweiten Schritt des Programms ist die B-Bordismusklasse zu bestimmen. Rational, d.h. modulo Torsion, ist diese durch die rationalen B-Bordismuszahlen bestimmt, die in §2 berechnet werden. Sie entsprechen dem Totalgrad und den Pontrjagin-Klassen von $\xi(n,\underline{d})$ auf $\mathbb{C}P^n$ oberhalb der mittleren Dimension.

Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion übersetzt das B-Bordismusproblem in ein Problem der stabilen Homotopietheorie, d.h. sie liefert einen Isomorphismus zwishcen der Gruppe der B-Bordismusklassen von (B,p)-Mannigfaltigkeiten $\Omega_*^{(B,p)}$ und der Homotopie des zur Faserung (B,p) assoziierten Thomspektrums $M(B,p)$. Die Methode zur Berechnung stabiler Homotopie, d.h. Homotopie von Spektren, ist die Adams-Spektralsequenz, die die Grundlage für die Betrachtungen in den Paragraphen 3 und 4 bildet. Da die Adams-Filtrierung von Torsionselementen unter günstigen Bedingungen durch eine lineare Funktion in der Dimension beschränkt ist, ist für Elemente genügend hoher Adams-Filtrierung in einem solchen Fall die B-Bordismusklasse bereits durch die rationale B-Bordismusklasse festgelegt.

In §3 wird die mod p -Adams-Filtrierung von $X_n(\underline{d})$ als der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung des Totalgrades, also als $\nu_p(d)$ bestimmt, indem die durch $X_n(\underline{d})$ vermöge der Pontrjagin-Thom-Konstruktion gegebenen Abbildung $S^{2n} \longrightarrow M(B,p)$ durch Ausnutzen der Geometrie von $X_n(\underline{d})$ als vollständiger

Durchschnitt geeignet faktorisiert wird.
Zusammen mit der Untersuchung der Filtrierung der Torsion von $\pi_*(M(B,p))$ in §4 mittels des Zusammenhangs zwischen Adams-Spektralsequenz und Bockstein-Spektralsequenz ergibt sich die Bedingung (*), die sicherstellt, daß die Adams-Filtrierung von $X_n(\underline{d})$ größer als die der entsprechenden Torsion ist.

Nach M.Kreck ist nun der stabile Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes, der der Bedingung (*) genügt, durch die Invarianten nach (i) und (ii) bestimmt. Dabei heißen zwei Mannigfaltigkeiten M und M' der Dimension 2n stabil diffeomorph, wenn es natürliche Zahlen k und k' gibt, so daß $M \# k(S^n \times S^n)$ und $M' \# k'(S^n \times S^n)$ diffeomorph sind, d.h. es gilt: $M \# k(S^n \times S^n) = M' \# k'(S^n \times S^n)$. Die Paragraphen 5 und 6 befassen sich mit dem Kürzungsproblem, d.h. unter welchen Bedingungen aus der obigen Gleichung $M = M'$ folgt. Notwendig ist offensichtlich, daß M und M' gleiche Euler-Charakteristik haben. Dies liefert die Bedingung (iii). Es zeigt sich, daß man bei vollständigen Durchschnitten der komplexen Dimension $n \geq 3$, die (*) erfüllen, kürzen kann. Ist n ungerade, so ist dies bereits unter der wesentlich schwächeren Voraussetzung, daß die Kervaire-Invariante nicht definiert oder trivial ist, möglich. Dieses Resultat benutzt die Ergebnisse von Libgober, Wood und Browder über die mittlere Homologie von $X_n(\underline{d})$ und die sich daraus ergebenden differenzierbaren Zerlegungen (vgl.(1) und (2)).

Die Arbeit setzt Grundkenntnisse in algebraischer Topologie und Differentialtopologie voraus, wie sie durch Bücher wie [Spanier], [Milnor & Stasheff] und [Hirsch] abgedeckt werden, sowie den Begriff des Spektrums. Ebenso werden Inhalte aus [Switzer], von einigen Ausnahmen abgesehen, ohne Angabe der Quelle benutzt.

§ 0 Konventionen, Definitionen und ein Programm zur Klassifikation von Mannigfaltigkeiten

0.1 Konventionen und Bezeichnungen

Alle Räume sind mit Basispunkten versehen und die Abbildungen respektieren die gegebenenfalls im Basispunkt gewählten Orientierungen. Gleichheit, symbolisiert durch "=", bedeutet stets Gleichheit in der jeweils gemeinten Kategorie. Sofern nichts anderes gesagt wird, sind die betrachteten Mannigfaltigkeiten glatte kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension 2n. Stets sei $n \geq 3$. Sie sind eingebettet in $\mathbb{R}^N$ mit N groß gegen die Dimension der Mannigfaltigkeit. Bezüglich dieser Einbettung werden wir von der Normalen-Gauß-Abbildung sprechen.

Sind M und N Mannigfaltigkeiten so bezeichne :

$\nu_M: M \longrightarrow BO$	die Normalen-Gauß-Abbildung
$\nu(M)$	das (instabile) Normalenbündel der eingebetteten Mannigfaltigkeit
$M \# N$	die zusammenhängende Summe im Basispunkt
kM	die zusammenhängende Summe von k Kopien von M
$M \cup_f N$	die Mannigfaltigkeit, die durch Verkleben von M und N längs des Randes durch einen Diffeomorphismus $f: \partial M \longrightarrow \partial N$ entsteht
$M = N$	bedeutet M und N sind diffeomorph
$M \cong N$	bedeutet M und N sind homeomorph

Zum folgenden Abschnitt über Bündel vergleiche 1.1.

Wir bezeichnen mit :

$\gamma \longrightarrow BO$	das universelle Bündel über BO
$\mu: BO \times BO \longrightarrow BO$	die der Whitney-Summe entsprechende H-Raumstruktur
$\gamma(k) \longrightarrow BO(k)$	das universelle k-dimensionale Bündel über BO(k)
$p\langle k+1\rangle: BO\langle k+1\rangle \longrightarrow BO$	das k-zusammenhängende Cover über BO
$\gamma\langle k+1\rangle \longrightarrow BO\langle k+1\rangle$	das universelle k-zusammenhängende Bündel über $BO\langle k+1\rangle$, d.h. $\gamma\langle k+1\rangle = p\langle k+1\rangle^* \gamma$

Für einen topologischen Raum X, α und β Bündel über X und Abbildungen $f,g: X \longrightarrow BO$ bezeichne :

$\Delta : X \longrightarrow X \times X$	die Diagonaleinbettung
$p(\xi): X \longrightarrow BO$	eine klassifizierende Abbildung von ξ, d.h.

$p(\xi)^* \gamma = \xi$ in $\widetilde{KO}(X)$

$\alpha + \beta$	die Whitneysumme von α und β
$f + g$	die Komposition

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} BO \times BO \xrightarrow{\mu} BO$$

Insbesondere ist $p(\alpha) + p(\beta)$ klassifizierende Abbildung von $\alpha + \beta$.
Ist α ein k-dimensionales, mit einer Metrik versehenes Vektorbündel über X, so bezeichne :

$E(\alpha)$	den Totalraum von α
$E_0(\alpha)$	den Totalraum ohne den Nullschnitt $X \subseteq E(\alpha)$
$D(\alpha)$	das Scheibenbündel
$S(\alpha)$	das Sphärenbündel
$T(\alpha)$	den Thom-Raum $T(\alpha) = D(\alpha)/S(\alpha)$

Sind X und Y topologische Räume, $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so können wir das Paar (X,f) in eine Faserung (I^f,p) mit $p\colon I^f \longrightarrow Y$ verwandeln, so daß I^f homotopieäquivalent zu X ist. Ist (X,f) bereits eine Faserung, so ist (I^f,p) vom gleichen Faserhomotopietyp (vergleiche hierzu 1.5). Wird im folgenden von einem Paar (X,f) als von einer Faserung gesprochen, so ist damit die Faserung (I^f,p) gemeint.
Sei nun (B,p) eine Faserung über BO, d.h. $p\colon B \longrightarrow BO$. Mit $M(B,p)$ bezeichnen wir das durch diese Faserung gegebene Thom-Spektrum. Ist $f\colon B \longrightarrow B'$ eine Abbildung der Faserungen (B,p) und (B',p') über BO, d.h. $p = p'f$, so bezeichnen wir die von f zwischen den Thom-Spektren induzierte Abbildung mit $M(f)\colon M(B,p) \longrightarrow M(B',p')$.
Wenn nötig identifizieren wir Räume mit ihren Suspensionsspektren.

0.2 Spezielle Notationen

Für einen vollständigen Durchschnitt $X_n(d_1,\dots,d_r)$ bezeichne :

n	die (komplexe) <u>Dimension</u>
$m := [n/2]$	d.h. $n = 2m$ oder $n = 2m + 1$
r	die (komplexe) <u>Codimension</u> ($X_n(d_1,\dots,d_r) \in \mathbb{C}P^{n+r}$)
$(\underline{d}) := (d_1,\dots,d_r)$	den <u>Multigrad</u>
$d := d_1 \cdot \dots \cdot d_r$	den <u>Totalgrad</u>
$\nu_p(d)$	den Exponenten der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von $d = \prod_p p^{\nu_p(d)}$
s	die Anzahl der geraden Einträge im Multigrad $(\underline{d})$

Wir definieren das zu $X_n(\underline{d})$ assoziierte komplexe Bündel über $\mathbb{C}P^\infty$ als das folgende Polynom in dem Hopf-Bündel H, dem universellen komplexen Linienbündel :

$$\xi(n,\underline{d}) := \xi(n,d_1,\dots,d_r) := -(n+r+1)H + H^{d_1} + \cdots + H^{d_r} \in K(\mathbb{C}P^\infty).$$

$p(n,\underline{d})\colon \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow BO$ bezeichne eine klassifizierende Abbildung von $\xi(n,\underline{d})$ als reelles Bündel.

Ein weiterer vollständiger Durchschnitt $X_n(\underline{d}')$ hat analog die Daten $(\underline{d}') = (d'_1,\dots,d'_{r'})$, r', d', s',....

Der Rest des Paragraphen gibt eine Skitze des Programms von Matthias Kreck zur Klassifikation von Mannigfaltigkeiten [M.Kreck: An Extension of Results of Browder, Novikov and Wall about Surgery on Compact Manifolds, Preprint, Mainz 1984].

Dies beinhaltet die Einführung der wesentlichen Begriffe und die Formulierung der in dieser Arbeit zur Anwendung kommenden Aussagen. Der Einfachheit halber habe ich auf die Darstellung des Kürzungsproblems für den nicht einfach zusammenhängenden Fall verzichtet.

0.3 B-Mannigfaltigkeiten und B-Bordismus

Zu diesem Abschnitt vergleiche [Stong 2, chap.2].

Sei (B,p) eine Faserung über BO, so daß B zusammenhängend ist und den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat. Wir betrachten eine nicht notwendig einfach zusammenhängende m-dimensionale Mannigfaltigkeit $(M,\partial M)$, die in $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \{0\} \times \mathbb{R}^N)$, $N \gg 2m$, eingebettet ist, so daß ∂M $\{0\} \times \mathbb{R}^N$ transversal trifft.

Eine Homotopiehochhebung der Normalen-Gauß-Abbildung ν_M ist eine Äquivalenzklasse von Lifts $q\colon M \longrightarrow B$ von ν_M über (B,p), d.h. von kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "\nu_M"'] & BO \end{tikzcd}$$

Dabei heißen zwei Lifte äquivalent, wenn sie homotop über ν_M sind, d.h. eine Homotopie $H\colon M \times I \longrightarrow B$ erfüllt $pH(x,t) = \nu_M(x)$ für alle $x \in M \times I$.

I bezeichnet das Einheitsintervall.
Haben wir eine weitere Einbettung von $(M, \partial M)$ in $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \{0\} \times \mathbb{R}^N)$, so können wir die beiden Einbettungen durch eine Isotopie verbinden. Diese Isotopie liefert eine Homotopie zwischen ν_M und ν'_M, der Normalen-Gauß-Abbildung der zweiten Einbettung. Heben wir diese Homotopie bezüglich eines Liftes q von ν_M hoch und schränken auf $M \times \{1\}$ ein, so erhalten wir eine Homotopiehochhebung von ν'_M. Da zwei Isotopieen zwischen Einbettungen ihrerseits isotop sind, erhalten wir so eine Abbildung von den Homotopiehochhebungen von ν_M in die Homotopiehochhebungen von ν'_M, die eine Bijektion ist.
Eine <u>B-Struktur auf M</u> ist eine Äquivalenzklasse solcher Homotopiehochhebungen, wobei zwei Homotopiehochhebungen von ν_M und ν'_M äquivalent heißen, wenn sie sich unter der oben definierten Abbildung entsprechen. Wir identifizieren eine B-Struktur auf M mit einem Repräsentanten $q: M \longrightarrow B$. Ist q eine B-Struktur auf M, so heißt das Paar (M,q) <u>B-Mannigfaltigkeit</u>.

<u>Bemerkung:</u>
Manchmal ist es nützlich, mit der folgenden äquivalenten Beschreibung von B-Mannigfaltigkeiten zu arbeiten :
Zu der Faserung $p: B \longrightarrow BO$ betrachten wir die Folge der Faserungen $p_N: B|_{BO(N)} \longrightarrow BO(N)$. Eine B-Struktur auf M kann beschrieben werden als eine Folge von Paaren (f_N, α_N), N>>dim M, mit $f_N: M \longrightarrow BO(N)$ und einer Trivialisierung α_N von $\nu_N(M) - f_N{}^*p_N{}^*\gamma(N)$, so daß die Folge mit den folgenden Diagrammen verträglich ist :

$$\begin{array}{ccc} B|_{BO(N)} & \longrightarrow & B|_{BO(N+1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO(N) & \longrightarrow & BO(N+1) \end{array}$$

Dabei ist $\nu_N(M)$ das N-dimensionale Normalenbündel von M.
Die Folge (f_N) liefert eine Abbildung $f: M \longrightarrow B := \varinjlim B|_{BO(N)}$. Die Trivialisierung α_N ist äquivalent zu einem Isomorphismus zwischen $\nu_N(M)$ und $f_N{}^*p_N{}^*\gamma(N)$, der eine explizite Homotopie zwischen der N-dimensionalen Normalen-Gauß-Abbildung $\nu_{M,N}$ von M und p_Nf_N liefert. Hochheben dieser Homotopie und Einschränken auf die $\nu_{M,N}$ überdeckende Abbildung ergibt eine Folge von Hochhebungen von $\nu_{M,N}$ in $B|_{BO(N)}$, die eine eindeutig

bestimmte B-Struktur $q: M \longrightarrow B$ induziert (vgl. [Kreck, pp. 15-16]).

Ist (M,q) eine B-Mannigfaltigkeit, M' eine weitere Mannigfaltigkeit und $f: M' \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus, so induziert f eine B-Struktur auf M', nämlich $f^*q := qf$.
Die Einschränkung einer B-Struktur q auf den Rand der Mannigfaltigkeit M definiert eine B-Mannigfaltigkeit $\partial(M,q) := (\partial M, q_{|\partial M})$.
Eine B-Struktur q auf $M \times \{0\} \subseteq M \times I$ kann in offensichtlicher Weise auf $M \times I$ fortgesetzt werden. Die Einschränkung dieser B-Struktur auf $M \times \{1\}$ wird als Inverse von q mit $-q$ bezeichnet. Für $(M,-q)$ schreiben wir auch $-(M,q)$. Zwei geschlossene B-Mannigfaltigkeiten (M,q) und (M',q') heißen <u>B-bordant</u>, wenn es eine kompakte B-Mannigfaltigkeit (W,h) gibt mit $\partial W = M \cup M'$, $h_{|M} = q$ und $h_{|M'} = -q'$. Die Menge der B-Bordismusklassen m-dimensionaler B-Mannigfaltigkeiten bildet eine Gruppe, die wir mit $\Omega_m^{(B,p)}$ bezeichnen. Für B-Bordismus gilt die Pontrjagin-Thom-Konstruktion, die eine Isomorphismus zwischen den B-Bordismusgruppen und den Homotopiegruppen des zu der Faserung (B,p) assoziierten Thom-Spektrums $M(B,p)$ liefert: $PT : \Omega_m^{(B,p)} \longrightarrow \pi_m(M(B,p))$. Diese lassen sich in günstigen Fällen mittels B-Bordismuszahlen und Adams-Spektralsequenz berechnen.
Zwei B-Mannigfaltigkeiten (M,q) und (M',q') heißen <u>s-cobordant</u>, wenn es einen B-Bordismus (W,h) gibt, der ein s-Cobordismus ist, d.h. die Inklusionen $M \longrightarrow W$ und $M' \longrightarrow W$ sind einfache Homotopieäquivalenzen.

0.4 k-Normalensmoothings und k-Normalentyp

Sei (M,q) eine m-dimensionale B-Mannigfaltigkeit. Ist q eine $(k+1)$-Äquivalenz, so nennen wir das Paar (M,q) ein <u>m-dimensionales k-Normalensmoothing von (B,p)</u>. Die Menge der s-Cobordismusklassen m-dimensionaler k-Normalensmoothings von (B,p) bezeichnen wir mit $NS_{m,k}^{(B,p)}$. Wir haben die offensichtliche Abbildung : $NS_{m,k}^{(B,p)} \longrightarrow \Omega_m^{(B,p)}$.

Die folgende Begriffsbildung ist zental in der Arbeit von [M.Kreck] :

<u>Definition:</u>

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Faserung (B,p) über BO heißt <u>k-Normalentyp von M</u>, falls ein Lift q der Normalen-Gauß-Abbildung ν_M über (B,p) existiert, so daß das folgende Diagramm eine $(k+1)$-Postnikov-Zerlegung von ν_M ist :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "\nu_M"'] & BO \end{tikzcd}$$

Das heißt :

(i) Das Diagramm kommutiert

(ii) (B,p) ist $(k+1)$-anti-zusammenhängend, d.h. für die Faser F gilt $\pi_i(F)=0$ für $i \geq k+1$.

(iii) q ist eine $(k+1)$-Äquivalenz.

In diesem Falle heißt q eine k-Normalenstruktur auf M.
Für uns interessant ist der Fall $m = 2(k+1)$. Dann nennen wir (B,p) den Normalentyp von M und q eine Normalenstruktur.

Der Normalentyp einer Mannigfaltigkeit ist eine Diffeomorphieinvariante und ist bis auf Faserhomotopieäquivalenz eindeutig.

0.5 Klassifikation der k-Normalenstrukturen auf M

Ist q eine k-Normalenstruktur auf M in (B,p), so liefert eine Faserhomotopieselbstäquivalenz h von (B,p) eine weitere k-Normalenstruktur hq. Wir werden sehen, daß wir auf diese Weise alle k-Normalenstrukturen auf M erhalten. Für eine Faserung (B,p) über BO bezeichnet $\mathrm{Aut}(B,p)$ die Gruppe der Homotopieklassen (über p) von Faserhomotopieselbstäquivalenzen von (B,p). $\mathrm{Aut}(B,p)$ operiert auf $NS_{m,k}^{(B,p)}$ und $\Omega_m^{(B,p)}$ durch Komposition. Dabei ist die Operation auf den B-Bordismusklassen linear.

Proposition [Kreck, Proposition 7.4] :

Sei (M,q) ein festes k-Normalensmoothing der $(k+1)$-antizusammenhängenden Faserung (B,p) über BO.
Die Abbildung $h \longrightarrow hq$ definiert eine Bijektion zwischen $\mathrm{Aut}(B,p)$ und den verschiedenen k-Normalenstrukturen auf M, d.h. es gilt :

$$NS_{m,k}^{(B,p)} \Big/ \mathrm{Aut}(B,p) \cong \mathfrak{M}_{m,k}^{(B,p)}$$

$\mathfrak{M}_{m,k}^{(B,p)}$ bezeichnet dabei die s-Cobordismusklassen von m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die k-Normalentyp (B,p) haben.

0.6 Klassifikation bis auf stabile Diffeomorphie

Zwei Mannigfaltigkeiten M und M' der Dimension $m=2n$ heißen stabil diffeomorph, wenn es natürliche Zahlen r und r' gibt, so daß gilt :

$M \# r(S^n \times S^n) = M' \# r'(S^n \times S^n)$. Die Differenz r-r' wird durch die Euler-Charakteristik gemessen. Ist ein Diffeomorphismus $f\colon \partial M \longrightarrow \partial M'$ gegeben, so sagen wir f ist stabil fortsetzbar, wenn es einen Diffeomorphismus von $M \# r(S^n \times S^n)$ auf $M' \# r'(S^n \times S^n)$ gibt, der f fortsetzt. Die Menge der stabilen Diffeomorphieklassen von 2n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten vom Normalentyp (B,p) bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}St_{2n}^{(B,p)}$.

Theorem [Kreck, Theorem 2.1, 7.5] :

Seien M und M' 2n-dimensionale Mannigfaltigkeiten vom Normalentyp (B,p). Sei $n \geq 2$.

(i) Genau dann sind M und M' stabil diffeomorph, wenn es Normalenstrukturen q auf M und q' auf M' gibt, so daß (M,q) und (M',q') B-bordant sind, d.h. es gilt :

$$\mathfrak{M}St_{2n}^{(B,p)} \cong \Omega_{2n}^{(B,p)} / \mathrm{Aut}(B,p)$$

(ii) Ist $f\colon \partial M \longrightarrow \partial M'$ ein Diffeomorphismus, so läßt sich f genau dann stabil fortsetzen, wenn die entlang des Randes von M und M' verklebte Mannigfaltigkeit $M \cup_f M'$ bezüglich einer geeigneten B-Struktur, deren Einschränkungen auf M und M' Normalenstrukturen sind, B-nullbordant ist.

Mit diesen Resultaten kann man das Problem angegen, ob zwei Mannigfaltigkeiten M und M' der Dimension 2n diffeomorph sind. Als ersten Schritt bestimmt man die Normalentypen von M und M'. Stimmen diese überein, so untersucht man als zweiten Schritt, ob M und M' zusammen mit geeigneten Normalenstrukturen B-bordant sind, oder äquivalent, ob M und M', versehen mit Normalenstrukturen, Elemente der selben Bahn von Aut(B,p) in $\Omega_{2n}^{(B,p)}$ repräsentieren. Ist dies der Fall, so sind M und M' nach dem obigen Theorem stabil diffeomorph, d.h. für geeignete Zahlen r und r' gilt :
$M \# r(S^n \times S^n) = M' \# r'(S^n \times S^n)$.
Als dritten und letzten Schritt des Programms gilt es das Kürzungsproblem zu studieren. Darunter verstehen wir das Problem, wann man in der obigen Gleichung die stabilisierenden Summanden $r(S^n \times S^n)$ und $r'(S^n \times S^n)$ gegeneinander kürzen kann, d.h. wann M = M' folgt. Der Rest des Paragraphen beschäftigt sich mit dieser Fragestellung. Da es sich bei vollständigen Durchschnitten um einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten handelt, stelle ich der Einfachheit halber den dritten Schritt des Programmes nur

für diesen Fall dar.

0.7 Schnittzahl und Selbstdurchdringungszahl

Für den Rest des Paragraphen sei stets M eine einfach zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension 2n.

Dann vereinfachen sich die für das Kürzungsproblem wesentlichen Begriffe der Schnittzahl λ und der Selbstdurchdringungszahl μ, die in [Wall 2, §5] für den allgemeinen Fall definiert sind.

Seien $i: N \longrightarrow M$ und $i': N' \longrightarrow M$ Inklusionen von orientierten n-dimensionalen geschlossenen Untermannigfaltigkeiten, die o.B.d.A. transversal zueinander sind. Die geometrische Schnittzahl $\lambda(iN, i'N')$ zählt die Anzahl der Schnittpunkte, die mit einem Vorzeichen versehen werden entsprechend dem Orientierungsverhalten von iN und i'N' relativ zu der Orientierung von M (zur Schnittzahl vgl. [Browder, chap. V, §1]):

$$\lambda(iN, i'N') := \sum_{x \in iN \cap i'N'} \operatorname{sgn}(x) \in \mathbb{Z}$$

Es gilt : $\lambda(iN, i'N') = i_*[N] \cdot i'_*[N']$. Dabei ist rechts das durch Poincaré-Dualität auf $H_n(M, \mathbb{Z})$ gegebene Produkt gemeint, $[\ ]$ bezeichnet die Fundamentalklasse. Wir erklären die Schnittzahl λ auf $\pi_n(M)$ wiefolgt :

$$\begin{aligned} \lambda : \pi_n(M) \times \pi_n(M) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (f, g) &\longrightarrow f_*[S^n] \cdot g_*[S^n] . \end{aligned}$$

Da man nach [Haeflinger] jedes Element von $\pi_n(M)$ für $n \geq 3$ durch eine Einbettung repräsentieren kann, stimmt diese Definition mit der geometrischen überein.

Die Selbstdurchdringungszahl μ ist ähnlich definiert. Sei $j: N \longrightarrow M$ die Immersion einer n-dimensionalen orientierten geschlossenen Mannigfaltigkeit, so daß O.B.d.A. das Bild $j(N)$ in allgemeiner Lage ist. Die Selbstdurchdringungszahl $\mu(j(N))$ zählt die Selbstdurchdringungspunkte, die analog wie bei der Schnittzahl mit einem Orientierungsvorzeichen versehen werden können, wenn man eine Reihenfolge auf den beiden Ästen in einem Selbstdurchdringungspunkt festlegt. Ist n gerade, so ändert sich das Signum bei einem Wechsel der Reihenfolge nicht, während dies für ungerades n der Fall ist. Wir definieren also die Selbstdurchdringungszahl μ mit Werten in $\mathbb{Z}$ für gerades n, mit Werten in $\mathbb{Z}_2$ für ungerades n wiefolgt :

$$\mu(j(N)) := \sum_{x \text{ Selbstd.pkt.}} \operatorname{sign}(x) \in \mathbb{Z}/(1-(-1)^n)\mathbb{Z}$$

Die Selbstdurchdringungszahl ist auf regulären Homotopieklassen von Immersionen wohldefiniert ([Wall, §5]). Dabei versteht man unter einer

regulären Homotopie eine Homotopie $H\colon N \times I \longrightarrow M$, so daß $H(\ ,t)\colon N \longrightarrow M$ eine Immersion für alle $t \in I$ ist. Also ist μ auf der Gruppe der regulären Homotopieklassen von Immersionen der n-dimensionalen Sphäre in M definiert, die wir mit $I_n(M)$ bezeichnen. Ist $n \neq 1,3$ oder 7, so kann jedes Element aus $\pi_n(M)$ mit stabil trivialem Normalenbündel durch eine bis auf reguläre Homotopie eindeutige Immersion mit trivialem (instabilen) Normalenbündel repräsentiert werden. Genau dann hat ein Element aus $\pi_n(M)$ stabil triviales Normalenbündel, wenn es im Kern der Normalen-Gauß-Abbildung liegt, den wir mit $K\pi_n(M) := \mathrm{Kern}(\nu_{M*}\colon \pi_n(M) \longrightarrow \pi_n(BO))$ bezeichnen. Mit dieser Überlegung ist also die Selbstdurchdringungszahl μ auf $K\pi_n(M)$ erklärt für $n \neq 1,3$ oder 7. Ist $n = 1,3$ oder 7, so ist die Abbildung von den regulären Homotopieklassen von Immersionen mit trivialem Normalenbündel nach $K\pi_n(M)$ splitsurjektiv mit Kern $\mathbb{Z}_2$. Um in diesem Fall μ auf $K\pi_n(M)$ zu erklären, muß man einen geeigneten Split wählen. Da wir im Fall $n = 1,3$ oder 7 nie explizit mit μ rechnen werden, verzichte ich auf die Darstellung der Details.
Damit sind λ und μ auf $K\pi_n(M)$ erklärt und da sie die Spezifikation der in [Wall, §5] erklärten Abbildungen λ und μ sind, gilt :

Proposition (Wall)

Für die Schnittzahl $\lambda : K\pi_n(M) \times K\pi_n(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$, und die Selbstdurchdringungszahl $\mu : K\pi_n(M) \longrightarrow \mathbb{Z}/(1-(-1)^n)\mathbb{Z}$ gelten :

(i) λ ist ein bilineare Abbildung

(ii) $\lambda(x,y) = (-1)^n \lambda(y,x)$

(iii) $\lambda(x,x) = \mu(x) + (-1)^n \mu(x) + e(\nu(x,M))$
Dabei ist der rechte Term in $\mathbb{Z}$ auch für ungerades n wohldefiniert.

(iv) $\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y) + [\lambda(x,y)]$

(v) Ist $f\colon S^n \longrightarrow M$ eine Einbettung mit stabil trivialem Normalenbündel und $n \geq 3$, so ist f genau dann homotop zu einer Einbettung mit trivialem Normalenbündel, wenn μ auf f verschwindet, d.h. $\mu(f) = 0$.

0.8 Das Kürzungsproblem für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten

Seien nun M und M' stabil diffeomorphe Mannigfaltigkeiten, d.h. es gibt natürliche Zahlen r und r', so daß $M \# r(S^n \times S^n) = M' \# r'(S^n \times S^n)$.
Da die Differenz r-r' offensichtlich durch die Euler-Charakteristik von M

und M' gemessen wird ist eine notwendige Bedingung für das Kürzen deren Gleichheit. Sei also $e(M) = e(M')$ und $f\colon M \# r(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# r(S^n \times S^n)$ ein Diffeomorphismus. Die Frage, ob f einen Diffeomorphismus von M auf M' induziert, d.h. ob f gegebenenfalls nach Komponieren mit einem geeigneten Diffeomorphismus von $M \# r(S^n \times S^n)$ einen s-Cobordismus zwischen M und M' induziert, kann durch das Studium der folgenden Abbildung untersucht werden. Wir definieren $\vartheta(f)$ als die Komposition

$$\vartheta(f)\colon \pi_n(r(S^n \times S^n)) \xrightarrow{i} \pi_n(M \# r(S^n \times S^n)) \xrightarrow{f_*}$$
$$\pi_n(M' \# r(S^n \times S^n)) \xrightarrow{p} \pi_n(r(S^n \times S^n)) \quad .$$

Dabei bezeichnet i die Inklusion, p die Projektion auf den direkten Summanden bezüglich der natürlichen Zerlegungen

$\pi_n(M \# r(S^n \times S^n)) = \pi_n(M) \oplus \pi_n(r(S^n \times S^n))$, und

$\pi_n(M' \# r(S^n \times S^n)) = \pi_n(M') \oplus \pi_n(r(S^n \times S^n))$.

Theorem [Kreck, Theorem 3.1]

Seien M und M' einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension 2n, $n \geq 3$, gleicher Euler-Charakteristik.
Sei $f\colon M \# r(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# r(S^n \times S^n)$ ein Diffeomorphismus.
Ist $\vartheta(f)$ eine Isometrie bezüglich λ und μ , so sind M und M' diffeomorph vermöge eines Diffeomorphismus $F\colon M \longrightarrow M'$, der $f|_{\partial M}\colon \partial M \longrightarrow \partial M'$ fortsetzt.
(Für n=2 gilt die analoge Aussage mit Diffeomorphismus ersetzt durch s-Cobordismus relativ Rand.)

Bemerkung

In seiner Arbeit hat M.Kreck diesen Satz für nicht notwendig einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten formuliert. In diesem allgemeinen Fall muß untersucht werden, ob $\vartheta(f)$ bezüglich der in [Wall, §5] definierten $\mathbb{Z}\pi_1(M)$-wertigen Schnittzahl und der entsprechenden Selbstdurchdringungszahl mit Werten in einem Quotienten des Gruppenringes $\mathbb{Z}\pi_1(M)$ eine Isometrie ist. Ist dies der Fall, so muß zusätzlich die Whitehead-Torsion $\tau(f) \in Wh(\pi_1(M))$ verschwinden, sowie das von $\vartheta(f)$ in einer ungeraden Wall-Gruppe repräsentierte Element $[\vartheta(f)] \in L^s_{2n+1}(\pi_1(M), w_1(M))$. Wegen $Wh(\{e\}) = 0$ und $L^s_{2n+1}(\{e\}, 0) = 0$ ([Milnor, Corr.6.5], [Wall 2, §13.4]) entfällt dies im einfach zusammenhängenden Fall.

Die Bedingung, daß $\vartheta(f)$ eine Isometrie ist, ist in manchen Fällen leicht nachprüfbar. Die folgende Proposition stellt einige Kriterien zusammen.

Proposition [Kreck, Proposition 3.2]

(i) Verschwinden λ und μ auf $K\pi_n(M)$ und $K\pi_n(M')$, so ist für jeden Diffeomorphismus $f: M \# r(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# r(S^n \times S^n)$ $\vartheta(f)$ eine Isometrie.

(ii) Ist $n = 3$ oder 7, so genügt im einfach zusammenhängenden Fall in (i) das Verschwinden von λ auf $K\pi_n(M)$ und $K\pi_n(M')$.

(iii) Ist die von der Inklusion des Randes induzierte Abbildung $i_* : K\pi_n(\partial M) \longrightarrow K\pi_n(M)$ surjektiv, so verschwindet λ auf $K\pi_n(M)$.

(iv) Aus der Proposition in 0.7 ergibt sich :
Ist n gerade, so verschwindet μ wenn λ verschwindet.

§ 1 Der Normalentyp der vollständigen Durchschnitte

Da nach dem Satz von Lefschetz über Hyperflächenschnitte die Inklusion $X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^{n+r}$ eine n-Äquivalenz ist ([Bott §2]), sind die komplexen projektiven Räume für die Klassifikation vollständiger Durchschnitte von Bedeutung. Wir stellen uns den unendlich dimensionalen komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^{\infty}$ als den direkten Limes der $\mathbb{C}P^k$ bezüglich der linearen Einbettung vor. Mit linearer Einbettung ist die Einbettung $\mathbb{C}P^{k-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^k$ als Nullstellenmenge des homogenen Polynoms $x_k \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_k]$ gemeint. Wir versehen $\mathbb{C}P^{\infty}$ mit dem üblichen CW-Aufbau, bei dem in jeder geraden Dimension eine Zelle angeheftet wird, so daß das n-Gerüst von $\mathbb{C}P^{\infty}$ gerade $\mathbb{C}P^m$ mit $m=[n/2]$ ist.

Eine wichtige Rolle bei der Klassifikation vollständiger Durchschnitte spielt ein Bündel $\xi(n,\underline{d})$ über $\mathbb{C}P^{\infty}$, dessen Einschränkung auf $X_n(\underline{d})$ das stabile Normalenbündel $\nu(X_n(\underline{d}))$ ist und das die volle Information über den Diffeomorphietyp von $X_n(\underline{d})$ in Form der Dimension und des Multigrades trägt. Aus diesem Grund wollen wir uns zunächst mit der komplexen und reellen K-Theorie der komplexen projektiven Räume vertraut machen.

1.1 Bemerkungen zur K-Theorie :

(zu diesem Abschnitt vgl. [Adams 4,§6], [Boardman,chap.5§1], sowie [Switzer,chap.11])

Für einen CW-Komplex X erklärt man die komplexe K-Theorie $K^*(X)$, bzw. die reduzierte komplexe K-Theorie $\widetilde{K}^*(X)$, als die zu dem K-Theorie Spektrum K, dem klassischen BU-Spektrum, assoziierte Cohomologietheorie. Analog definiert man die reelle K-Theorie $KO^*(X)$, bzw. die reduzierte reelle K-Theorie $\widetilde{KO}^*(X)$, als die zu dem KO-Theorie Spektrum KO, dem klassischen BO-Spektrum, assoziierte Cohomologietheorie. Wir werden uns nur für die Funktoren K^0 und KO^0 bzw. $\widetilde{K}^0$ und $\widetilde{KO}^0$ interessieren. Es gilt :

$$K(X) := K^0(X) := [X \,;\, \mathbb{Z}\times BU] \,,$$

$$\widetilde{K}(X) := \widetilde{K}^0(X) := [X,x_0 \,;\, \mathbb{Z}\times BU,(0,*)]$$ (Basispunkt-erhaltende Abbildungen), bzw. analog :

$$KO(X) := KO^0(X) := [X \,;\, \mathbb{Z}\times BO]$$

$$\widetilde{KO}(X) := \widetilde{KO}^0(X) := [X,x_0 \,;\, \mathbb{Z}\times BO,(0,*)] \,.$$

Es ist bekannt, daß diese Definitionen für einen endlichen CW-Komplex X mit denen übereinstimmen, die [Atiyah & Hirzebruch] gegeben haben. Sie definieren K(X) als die Grothendiek-Gruppe der unreduzierten stabilen Isomorphieklassen, $\widetilde{K}(X)$ als die Gruppe der stabilen Isomorphieklassen von komplexen Vektorraumbündeln über X. Analog definieren sie KO(X) und $\widetilde{KO}(X)$ mittels reellen Vektorraumbündeln über X. Dabei heißen zwei Bündel α und β über X stabil isomorph, wenn es triviale Bündel ε und ε' über X gibt, so daß gilt : $\alpha + \varepsilon = \beta + \varepsilon'$. Haben zusätzlich α und β gleich Dimension, so heißen α und β unreduziert stabil isomorph.

Wir nennen die Elemente der K-Theorie virtuelle Bündel oder einfach Bündel. Zur Vereinfachung von Rechnungen werden wir oft auch nicht mit Homotopieklassen von Abbildungen nach BO rechnen, sondern mit Zurückziehungen des universellen Bündels γ über BO, das der Identität auf BO entspricht. Dies ist durch [Boardman, chap.5, 1.10] gerechtfertigt, der $\gamma \longrightarrow BO$ das universelle virtuelle Bündel über BO vom Rang 0 nennt. Dabei ist der Rang eines Bündels $[f] \in [X, \mathbb{Z} \times BO]$ definiert als Komposition von f mit der Projektion auf $\mathbb{Z}$. Jedes reelle Bündel von Rang 0 ist die Zurückziehung von γ unter der, bis auf Homotopie eindeutigen, klassifizierenden Abbildung. Insbesondere gilt dies für die Bündel $\alpha \in \widetilde{KO}(X)$, wenn X einfach zusammenhängend ist.

Die Whitney-Summe und das Tensorprudukt über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ induzieren auf der komplexen bzw. reellen K-Theorie die Struktur eines Ringes, im unreduzierten Fall die eines Ringes mit 1. Diesen algebraischen Strukturen entsprechen H-Raumstrukturen der klassifizierenden Räume, von denen uns die der Whitney-Summe entsprechende H-Raumstruktur auf BO interessiert. Wir bezeichnen sie mit $\mu : BO \times BO \longrightarrow BO$.

Wir haben als offensichtliche Abbildung die Reduktion $K(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ und $KO(X) \longrightarrow \widetilde{KO}(X)$, sowie die durch das Komlpexifizieren vermöge tensorieren mit $\mathbb{C}$ und das Vergessen der komplexen Struktur induzierten Abbildungen

$$c : KO(X) \longrightarrow K(X) \qquad \text{und} \qquad r : K(X) \longrightarrow KO(X)$$
$$\alpha \longrightarrow \alpha \otimes \mathbb{C} \qquad\qquad \alpha \longrightarrow \alpha_{\mathbb{R}} .$$

Im folgenden werden wir, falls Verwechselungen ausgeschlossen sind, mit $\alpha \in K(X)$ die Äquivalenzklasse von α in $\widetilde{K}(X)$ oder auch die von $r\alpha$ in $\widetilde{KO}(X)$ bezeichnen.

Sanderson hat die K-Theorie der komplex projektiven Räume untersucht.

1.2 Theorem [Sanderson, thm 3.9, 3.10] :

Mit H bezeichnen wir das Hopfbündel über $\mathbb{C}P^\infty$ sowie seine Einschränkungen auf die endlichen Gerüste $\mathbb{C}P^m$ von $\mathbb{C}P^\infty$.

1 bezeichne das triviale komplexe Linienbündel.

Sei $x := H-1$, $y := r(H-1)$. Dann gilt :

$K(\mathbb{C}P^m)$ ist der Quotient des Polynomringes $\mathbb{Z}[x]$ nach dem von x^{m+1} erzeugten Ideal.

$KO(\mathbb{C}P^m)$ ist ein Quotient von $\mathbb{Z}[y]$ nach einem Ideal, das erzeugt wird von : (i) y^{k+1} für $m = 2k$

(ii) $2y^{2k+1}$ und y^{2k+2} für $m = 4k+1$

(iii) y^{2k+2} für $m = 4k+3$

1.3 Theorem:

Mit den Bezeichnungen aus 1.1 gilt :

$K(\mathbb{C}P^\infty)$ ist der formale Potenzreihenring in x über $\mathbb{Z}$:

$$K(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[[x]].$$

Dies ist nach [Adams 4,11.1] ein Ergebnis von Atiyah und Todd.

1.4 Definition und Bemerkung:

Gegeben sei ein r-Tupel $(d_1,\ldots,d_r) \in \mathbb{N}^r$. Wir definieren das Bündel $\xi(n,\underline{d}) \in K(\mathbb{C}P^\infty)$ wiefolgt :

$$\xi(n,\underline{d}) := -(n+r+1)H + H^{d_1} + \cdots + H^{d_r}.$$

$p(n,\underline{d}) : \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow BO$ sei klassifizierende Abbildung von $\xi(n,\underline{d})$ als stabiles reelles Bündel.

Da das Tangentialbündel von $\mathbb{C}P^{n+r}$ stabil isomorph zu der Einschränkung von $(n+r+1)H$ auf $\mathbb{C}P^{n+r}$ ist und das Normalenbündel von $X_n(\underline{d})$ in $\mathbb{C}P^{n+r}$ gegeben ist durch die Einschränkung von $(H^{d_1} + \cdots + H^{d_r})$ auf $X_n(\underline{d})$ (vgl. etwa 3.6 und 3.8 oder [Libgober & Wood 3,p.476]), folgt aus der Gleichung

$$i^*\tau(\mathbb{C}P^{n+r}) = \tau(X_n(\underline{d})) + \nu(X_n(\underline{d}),\mathbb{C}P^{n+r}) \quad ,$$

daß die Einschränkung von $\xi(n,\underline{d})$ auf $X_n(\underline{d})$ gerade das stabile Normalenbündel von $X_n(\underline{d})$ ist :

$$i^*\xi(n,\underline{d}) = \nu(X_n(\underline{d})) \quad \text{in } \widetilde{KO}(X_n(\underline{d})).$$

Dabei bezeichnet $i: X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion von $X_n(\underline{d})$ als Untermannigfaltigkeit des $2(n+r)$-Gerüstes $\mathbb{C}P^{n+r}$.

1.5 Bemerkung zu Faserungen:

Nach [Whitehead,pp.42-44] kann man eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ durch eine explizite Konstruktion in eine Faserung $p: I^f \longrightarrow Y$ verwandeln, so daß gilt:

(i) Es gibt Homotopieäquivalenzen $j: X \longrightarrow I^f$ und $r: I^f \longrightarrow X$ mit $jr = id_X$ und $pj = f$.

(ii) Der Faserhomotopietyp von (I^f,p) hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

(iii) Ist (X,f) bereits eine Faserung, so ist (I^f,p) vom selben Faserhomotopietyp.

Um unsere Bezeichnungen im Hinblick auf den Normalentyp der vollständigen Durchschnitte zu vereinfachen, werden wir ab jetzt für eine Abbildung $f: X \longrightarrow BO$ die Faserung (I^f,p) mit (X,f) bezeichnen. Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Normalen-Gauß-Abbildung ν_M und $g: M \longrightarrow X$ eine Abbildung mit $\nu_M = fg$, so liefert das Komponieren mit j eine (I^f,p)-Struktur auf M, nämlich jg (vgl. (i)). Konsistent mit der obigen vereinfachenden Konvention bezeichnen wir die so gegebene I^f-Mannigfaltigkeit mit (M,g).

Wir können nun den Normalentyp eines vollständigen Durchschnittes angeben: Ist $i: X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$ die Inklusion, so gilt nach 1.4 für das stabile Normalenbündel von $X_n(\underline{d})$:

$$\nu(X_n(\underline{d})) = i^* \xi(n,\underline{d}) = i^* p(n,\underline{d})^* \gamma .$$

Also ist die Normalen-Gauß-Abbildung von $X_n(\underline{d})$ homotop zu $p(n,\underline{d})i$. Da nach Lefschetz die Inklusion i eine n-Äquivalenz ist, werden wir den Normalentyp durch kreuzen von $\mathbb{CP}^\infty$ mit dem Totalraum einer geeigneten n-antizusammenhängenden Faserung konstruieren, so daß die Inklusion von $\mathbb{CP}^\infty$ als Faktor in das Kreuzprodukt eine n-Äquivalenz ist.
Eine solche Faserung ist das n-zusammenhängende Cover über BO, das wir mit $p\langle n+1\rangle : BO\langle n+1\rangle \longrightarrow BO$ bezeichnen. $BO\langle n+1\rangle$ ist n-zusammenhängend und $p\langle n+1\rangle^*: \pi_k(BO\langle n+1\rangle) \longrightarrow \pi_n(BO)$ ist ein Isomorphismus für $k \geq n+1$.
$BO\langle n+1\rangle$ ist klassifizierender Raum für Bündel, deren Einschränkung auf das n-Gerüst trivial ist. In diesem Sinne ist $\gamma\langle n+1\rangle := p\langle n+1\rangle^* \gamma$ das universelle n-zusammenhängende Bündel.
$BO\langle n+1\rangle$ ist homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, der in jeder Dimension nur endlich viele Zellen besitzt und dessen n-Gerüst aus einem Punkt besteht. Wenn wir von dem k-Gerüst von $BO\langle n+1\rangle$ sprechen, meinen wir das k-Gerüst dieses CW-Komplexes.

Wir benutzen in 1.6 die folgenden Bezeichnungen :

$i : X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$	ist die Inklusion
$i_1: \mathbb{CP}^\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty \times BO\langle n+1\rangle$	ist die Inklusion des ersten Faktors

$p(n,\underline{d}) : \mathbb{CP}^\infty \longrightarrow BO$ klassifiziet $\xi(n,\underline{d})$

$p\langle n+1\rangle : BO\langle n+1\rangle \longrightarrow BO$ ist das n-zusammenhängende Cover

$\mu : BO \times BO \longrightarrow BO$ ist die H-Raumsrtuktur bzgl. + .

Dann ist $\mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)$ klassifizierende Abbildung des Bündels $\xi(n,\underline{d}) \times \gamma\langle n+1\rangle \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty \times BO\langle n+1\rangle$ und es gilt :

1.6 Proposition:

Mit den Bezeichnungen aus 1.5 gilt :

Der Normalentyp eines vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$ der komplexen Dimension $n \geq 3$ ist $(\mathbb{CP}^\infty \times BO\langle n+1\rangle , \mu(p(n,\underline{d}) \cdot \times p\langle n+1\rangle))$ und die Komposition $i_1 i : X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty \times BO\langle n+1\rangle$ ist homotop zu einer Normalenstruktur.

Beweis:

Setze $X := \mathbb{CP}^\infty \times BO\langle n+1\rangle$

$f := \mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)$

Nach 1.4 gilt $\nu(X_n(\underline{d})) = i^* \xi(n,\underline{d})$. Da $p(n,\underline{d})$ klassifizierende Abbildung von $\xi(n,\underline{d})$ ist, ist die Komposition $p(n,\underline{d})i = fi_1 i$ homotop zu der Normalen-Gauß-Abbildung ν von $X_n(\underline{d})$. Wegen der Homotopiehochhebungseigenschaft der Faserung (I^f,p) (vgl.1.5) gibt es eine Abbildung $H : X_n(\underline{d}) \times I \longrightarrow I^f$ mit $H(\ ,0) = j\, i_1 i$, $pH(\ ,0) = fi_1 i$ und $pH(\ ,1) = \nu$.
Offensichtlich ist $H(\ ,1)$ eine (I^f,p)-Struktur auf $X_n(\underline{d})$, homotop zu $ji_1 i$.
Also ist $H(\ ,1)$ auch eine n-Äquivalenz,denn j ist eine Homotopieäquivalenz, i_1 eine n-Äquivalenz, da $BO\langle n+1\rangle$ n-zusammenhängend ist, und i ist eine n-Äquivalenz nach dem Lefschetz'schen Satz über Hyperflächenschnitte ([Bott]).
Also ist nach der Definition in 0.4 nur noch zu zeigen, daß (I^f,p) n-antizusammenhängend ist.

$p\langle n+1\rangle_* : \pi_k(BO\langle n+1\rangle) \longrightarrow \pi_k(BO)$ ist ein Isomorphismus für $k \geq n+1$.
Weiter ist $\pi_k(\mathbb{CP}^\infty) = 0$ für $k \geq 3$, also ist $\pi_n(I^f) = 0$ $(n \geq 3)$.
Da die H-Raumstruktur μ der Whitney-Summe entspricht, gilt in Homotopie (vgl. [Whitehead,thm.5.12]) :

$$
\begin{aligned}
p_* &= f_*\, j_*^{-1} \\
&= \mu_*\, (p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)_*\, j_*^{-1} \\
&= (\, p(n,\underline{d})_* + p\langle n+1\rangle_*)\, j_*^{-1}
\end{aligned}
$$

Also ist $p_* : \pi_k(I^f) \longrightarrow \pi_k(BO)$ ein Isomorphismus für $k \geq n+1$. Mit der langen exakten Faserhomotopiesequenz ergibt sich damit für die Homotopiegruppen der Faser F von (I^f,p) $\pi_k(F) = 0$ für $k \geq n$. □

Als nächstes stellt sich die Frage, wann zwei vollständige Durchschnitte vom selben Normalentyp sind, d.h. wann ihre Normalentypen nach 1.5 faserhomotopieäquivalent sind.

1.7 Proposition:

Seien ξ und $\xi' \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{\infty})$ Bündel mit klassifizierenden Abbildungen $p(\xi)$ und $p(\xi') : \mathbb{C}P^{\infty} \longrightarrow BO$. Sei $i: \mathbb{C}P^{m} \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ die Inklusion des n-Gerüstes, also $m=[n/2]$.

Genau dann sind die Faserungen $(\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle))$ und $(\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle)$ faserhomotopieäquivalent, wenn gilt:

$$i^* (\xi - \xi') = 0 \quad \text{in } \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{m}) \quad .$$

Beweis:

Sei zunächst $i^*(\xi - \xi') = 0$ in $\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{m})$.
Wir werden eine Faserhomotopieäquivalenz konstruieren.
Es bezeichne :

$i_1 : \mathbb{C}P^{\infty} \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle$ die Inklusion des ersten Faktors,

$p_1 : \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ die Projektion auf den ersten Faktor.

Wegen $i^*(\xi - \xi') = 0$, ist das Bündel $p_1^*(\xi - \xi') \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle)$ trivial auf dem n-Gerüst $\mathbb{C}P^{m} \times \{*\}$ von $\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle$. Also existiert ein Lift der klassifizierenden Abbildung von $p_1^*(\xi - \xi')$ über $(BO\langle n+1\rangle, p\langle n+1\rangle)$. Sei dies $g: \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \longrightarrow BO\langle n+1\rangle$. Wir betrachten die Komposition h:

$$\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \xrightarrow{\Delta \times id} \mathbb{C}P^{\infty} \times \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \xrightarrow{id \times g} \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \quad ,$$

wobei $\Delta : \mathbb{C}P^{\infty} \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty} \times \mathbb{C}P^{\infty}$ die Diagonaleinbettung bezeichnet.

Wegen $hi_1 = (id \times (gi_1))\Delta$ gilt :

$$(hi_1)^*(\mu(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle))^* \gamma = (hi_1)^*(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle)^* \gamma \times \gamma$$
$$= (hi_1)^*(\xi' \times \gamma\langle n+1\rangle) = \xi' + (gi_1)^* \gamma\langle n+1\rangle = \xi' + (\xi - \xi') = \xi .$$

Also ist $\mu(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle)hi_1$ ebenfalls eine klassifizierende Abbildung von ξ und somit homotop zu $p(\xi)$. Folglich haben wir das homotopiekommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle)"'] & & \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \arrow[dl, "\mu(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle)"] \\
& BO &
\end{tikzcd}$$

Setzen wir $X := \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle$,

$f := \mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle)$ und $f' := \mu(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle)$, so erhalten wir mit den Bezeichnungen aus 1.5 das homotopiekommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} I^f \arrow[rr, "j'hr"] \arrow[dr, "p"'] & & I^{f'} \arrow[dl, "p'"] \\ & BO & \end{tikzcd}$$

Dabei waren $r\colon I^f \longrightarrow X$ und $j'\colon X \longrightarrow I^{f'}$ Homotopieäquivalenzen.
Wegen der Homotopiehochhebungseigenschaft der Faserung $(I^{f'}, p')$ können wir eine Homotopie zwischen p und $p'j'hr$ hochheben zu einer Abbildung $H : I^f \times I \longrightarrow I^{f'}$, mit $H(\ ,0) = j'hr$ und $p'H(\ ,1) = p$. Also ist $\hat{h} := H(\ ,1)$ eine Abbildung der Faserungen homotop zu $j'hr$. Ist gezeigt, daß $j'hr$ eine Homotopieäquivalenz ist, so ist nach [Dold, §2] $\hat{h}$ eine Faserhomotopieäquivalenz und die Faserungen aus Proposition 1.7 stimmen in diesem Sinne überein.
Da die klassifizierende Abbildung von $p_1{}^*(\xi - \xi')$, i.e. $g : \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \longrightarrow BO\langle n+1\rangle$, auf dem n-Gerüst nullhomotop ist, ist die Einschränkung von h auf $\mathbb{C}P^m$ homotop zur Einbettung des n-Gerüstes. Also ist h und somit auch $j'hr$ eine n-Äquivalenz. Da die Faserungen (I^f, p) und $(I^{f'}, p')$ ebenso wie die Normalentypen n-dimensionaler vollständiger Durchschnitte n-antizusammenhängend sind (vgl.den Beweis von 1.6), folgt aus der Faserhomotopiesequenz, daß $p_* : \pi_k(I^f) \longrightarrow \pi_k(BO)$ und $p'_* : \pi_k(I^{f'}) \longrightarrow \pi_k(BO)$ Isomorphismen für $k > n$ und Injektionen für $k=n$ sind. Wegen $p_* = p'_*(j'hr)_*$ gilt dies auch für $j'hr_*$. Also ist $j'hr$ eine Homotopieäquivalenz und die eine Richtung von Proposition 1.7 ist bewiesen.

Seien nun umgekehrt die Faserungen $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle))$ und $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(\xi')\ \ p\langle n+1\rangle))$ von selben Faserhomotopietyp und $\hat{h}\colon I^f \longrightarrow I^{f'}$ eine Faserhomotopieäquivalenz.
Dann macht $h := r'\hat{h}j$ das folgende Diagramm homotopiekommutativ :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mu(p(\ )\ \ p\langle n+1\rangle)"'] & & \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \arrow[dl, "\mu(p(\ ')\ \ p\langle n+1\rangle)"] \\ & BO & \end{tikzcd}$$

O.B.d.A. liegt das Bild des n-Gerüstes unter h im n-Gerüst $\mathbb{C}P^m$ von $\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$. Wegen $\mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle)|_{\mathbb{C}P^m} = p(\xi)|_{\mathbb{C}P^m}$ und analog $\mu(p(\xi') \times p\langle n+1\rangle)|_{\mathbb{C}P^m} = p(\xi')|_{\mathbb{C}P^m}$, folgt aus der Homotopiekommutativität

des Diagrammes $h^*_{|\mathbb{C}P^m}(i^* \xi') = i^* \xi$.
Wir werden zeigen, daß $h_{|\mathbb{C}P^m}$ die Identität auf $\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^m)$ induziert. Dann folgt $i^* \xi = h^*_{|\mathbb{C}P^m}(i^* \xi') = i^* \xi'$ und die Proposition ist bewiesen.
Wegen $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ für alle $k \geq 3$, läßt sich $h_{|\mathbb{C}P^m} : \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ zu einer Abbildung $g: \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ fortsetzen ($n \geq 3$). Da $\mathbb{C}P^\infty$ der Eilenberg-MacLane-Raum $K(\mathbb{Z},2)$ ist, ist die Homotopieklasse einer Abbildung von $\mathbb{C}P^\infty$ in sich durch den in $H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ induzierten Homomorphismus bestimmt. Da mit $\hat{h}$ auch h eine Homotopieäquivalenz ist, induziert g einen Isomorphismus auf $H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$. $H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul, erzeugt von der ersten Chern-Klasse des Hopfbündels.Also ist $\mathrm{Aut}(H^2(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_2$ und der Erzeuger wird durch die Spiegelung sp auf $\mathbb{C}P^\infty$ induziert. Diese ist durch das komplexe Konjugieren auf $\mathbb{C}^\infty$ gegeben, und somit gilt :

$$sp^* c_1(H) = c_1(sp^* H) = c_1(\bar{H}) = -c_1(H) .$$

Da dem komplex konjugierten Bündel $\bar{H}$ dasselbe reelle Bündel unterliegt wie H, induziert die Spiegelung die Identität auf $KO(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}\left[(H-1)_{\mathbb{R}}\right]$ (1.2). Also induziert g und somit auch $h_{|\mathbb{C}P^m} = g_{|\mathbb{C}P^m}$ die Identität in reeller K-Theorie. Dies gilt insbesondere auch reduziert. $\square$

Als nächstes wollen wir entscheiden, wann die Einschränkung eines Bündels $\xi \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^\infty)$ auf $\mathbb{C}P^m$ trivial ist. Lemma 1.2 gibt zwar genaue Bedingungen hierfür an, ist aber nur auf solche Bündel direkt anwendbar, die als Polynom in $(H-1)_{\mathbb{R}}$ oder $H_{\mathbb{R}}$ gegeben sind. Die von uns betrachteten Bündel $\xi(n,\underline{d})$ sind jedoch Polynome in H und das Vergessen der komplexen Struktur ist kein Ringhomomorphismus. Das folgende Lemma klärt, wann $i^* \xi = 0$ in $\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^m)$ gilt, in Form von Bedingungen an die charakteristischen Klassen von ξ.

<u>1.8 Lemma:</u>

Sei $i: \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Einbettung des n-Gerüstes, d.h. $m = [n/2]$.
Sei $\xi \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^\infty)$ ein reelles Bündel.

(i) Für $n \not\equiv 2$ oder 3 mod 8 gilt :
Genau dann ist die Einschränkung von ξ auf das n-Gerüst trivial, d.h. $i^* \xi = 0 \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^m)$, wenn die Pontrjagin-Klassen von ξ auf $\mathbb{C}P^m$ verschwinden, d.h. falls gilt :

$$(*) \qquad p_i(\xi) = 0 \qquad \text{für } i = 1,\dots,[n/4]$$

(ii) Für n=8k+2 und n=8k+3 ist (*) notwendig aber nicht hinreichend.

Genau dann ist die Einschränkung von ξ auf das n-Gerüst trivial, wenn zusätzlich zu (*) gilt :

(**) $w_{8k+2}(\xi) = 0$.

Beweis:

Zum Beweis benötigen wir die folgenden Aussagen:

$H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ ist der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in der ersten Chern-Klasse des Hopfbündels $c_1(H) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$. Die von der Inklusion i induzierte Abbildung ist die Projektion $\mathbb{Z}[c_1(H)] \longrightarrow \mathbb{Z}[c_1(H)] / c_1(H)^{m+1}\mathbb{Z}[c_1(H)]$, wobei wir den Quotienten mit der Cohomologie von $\mathbb{C}P^m$ identifizieren.

Sei ch : $K(\mathbb{C}P^m) \longrightarrow H^*(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Q})$ der Chern-Charakter (zu Definition und Eigenschaften vgl. [Atiyah & Hirzebruch]). Der Chern-Charakter ist eine natürliche Transformation von Cohomologietheorien. Da $H^*(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z})$ torsionsfrei ist, ist ch injektiv ([Atiyah & Hirzebruch,2.5]).

Seien c und r nach 1.1 das Komplexifizieren und das Vergessen der komlpexen Struktur. Wir betrachten die Komposition ch c : $KO(\mathbb{C}P^m) \longrightarrow H^*(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Q})$.

Da rc : $KO(\mathbb{C}P^m) \longrightarrow KO(\mathbb{C}P^m)$ Multiplikation mit 2 ist, folgt mit Thm.1.2 :

Für $m \not\equiv 1 \bmod 4$ ist ch c injektiv und

für $m \equiv 1 \bmod 4$ ist Kern(ch c) $= \{0, y^{2k+1}\}$.

Bemerkung: $m \equiv 1 \bmod 4$ genau dann wenn $n \equiv 2$ oder $3 \bmod 8$.

$ch(ci^*\xi)$ ist ein Polynom in den Chern-KLassen von $c\xi$. Da die ungeraden Chern-Klassen von $c\xi$ Elemente der Ordnung 2, also trivial sind, ist $ch(ci^*\xi)$ ein Polynom in den Pontrjagin-Klassen $p_i(\xi) \in H^{4i}(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$.

Ist $p_i(\xi) = 0$ für alle $i=1,\ldots,[m/2]$, so ist $ch(ci^*\xi) \in H^0(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Q})$ und somit $ci^*\xi = 0 \in \widetilde{K}(\mathbb{C}P^m)$.

Für $m \not\equiv 1 \bmod 4$ ist damit die Behauptung bewiesen.

Sei nun $m = 4k+1$. Dann ist $i^*\xi \in \{0, y^{2k+1}\}$, insbesondere ist in diesem Fall (*) notwendig aber nicht hinreichend. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben : $w_{8k+2}(y^{2k+1}) \neq 0$.

Da y^{2k+1} auf $\mathbb{C}P^{4k}$ trivial ist, liefert y^{2k+1} ein nichttriviales Bündel auf $S^{8k+2} = \mathbb{C}P^{4k+1} / \mathbb{C}P^{4k}$ (vgl.CW-Aufbau von $\mathbb{C}P^\infty$), das wir mit α bezeichnen. Dieses repräsentiert den Erzeuger von $\pi_{8k+2}(BO) = \mathbb{Z}_2$.

Sei g: $S^{8k+2} \longrightarrow BO$ klassifizierende Abbildung von α . Diese besitzt nach den Eigenschaften des (8k+1)-zusammenhängenden Covers einen Lift $\tilde{g}$ über $(BO\langle 8k+2\rangle, p\langle 8k+2\rangle)$, d.h. $g = p\langle 8k+2\rangle\tilde{g}$. Da $p\langle 8k+2\rangle_*: \pi_s(BO\langle 8k+2\rangle) \longrightarrow \pi_s(BO)$ ein Isomorphismus für $s \geq 8k+2$ ist, ist $\tilde{g}$ der Erzeuger von $\pi_{8k+2}(BO\langle 8k+2\rangle) = \pi_{8k+2}(BO) = \mathbb{Z}_2$. Da $BO\langle 8k+2\rangle$ (8k+1)-zusammenhängend ist, ist $\tilde{g}$ somit eine n-Äquivalenz. Mit Whitehead und universellem Koeffiziententheorem folgt, daß $\tilde{g}^* : H^{8k+2}(BO\langle 8k+2\rangle, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{8k+2}(S^{8k+2}, \mathbb{Z}_2)$ injektiv ist. Nach [Stong 1] ist $H^{8k+2}(BO\langle 8k+2\rangle, \mathbb{Z}_2)$ erzeugt von $p\langle 8k+2\rangle^* w_{8k+2}(\gamma) \neq 0$. Also gilt :

$$w_{8k+2}(\alpha) = w_{8k+2}(g^*\gamma) = \tilde{g}^* p\langle 8k+2\rangle^* w_{8k+2}(\gamma) \neq 0 \quad .$$

Da die Projektion $p\colon \mathbb{C}P^{4k+1} \longrightarrow S^{8k+1}$ einen Isomorphismus in $H^{8k+2}(\;, \mathbb{Z}_2)$ induziert (siehe z.B. Zellkettenkomplex), gilt also auch :

$$w_{8k+2}(y^{2k+1}) = w_{8k+2}(p^*\alpha) \neq 0 \quad .$$

□

Aus 1.7 und 1.8 ergibt sich als abschließendes Ergebnis :

1.9 Theorem:

Genau dann haben die vollständigen Durchschnitte $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ der Dimension $n \geq 3$ den selben Normalentyp, wenn gilt :

(*) $\qquad p_i(\xi(n,\underline{d})) = p_i(\xi(n,\underline{d}')) \qquad$ für $i = 1,\dots,[n/4]$,

und wenn im Falle $n = 8k+2$ oder $n = 8k+3$ zusätzlich gilt :

(**) $\qquad w_{8k+2}(\xi(n,\underline{d})) = w_{8k+2}(\xi(n,\underline{d}')) \quad .$

Hinreichend für $n \equiv 2$ oder 3 mod 8 ist die Bedingung

(***) $\qquad p_i(\xi(n,\underline{d})) = p_i(\xi(n,\underline{d}')) \qquad$ für $i = 1,\dots,[n/4] + 1$.

Dabei bezeichnet $\xi(n,\underline{d})$, und analog $\xi(n,\underline{d}')$, das folgende Bündel:
$\xi(n,\underline{d}) := -(n+r+1)H + H^{d_1} + \cdots + H^{d_r}$.

Beweis:

Sei (*) erfüllt und für $n \equiv 2$ oder 3 mod 8 zusätzlich (**) bzw. (***).
Sei $i\colon \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Einbettung des n-Gerüstes, d.h. $m = [n/2]$.
Dann stimmen die totalen Pontrjagin-Klassen der unter i zurückgezogenen Bündel überein und es gilt :

$$p(i^*\xi(n,\underline{d}) - i^*\xi(n,\underline{d}')) = p(i^*\xi(n,\underline{d}))\, p(i^*\xi(n,\underline{d}'))^{-1} = 1 \ .$$

Also gilt : $p_i(\xi(n,\underline{d}) - \xi(n,\underline{d}')) = 0 \quad$ für $i = 1,\dots,[n/4]$. Somit ist nach 1.8 für $n \not\equiv 2$ oder 3 mod 8 die Einschränkung von $\xi(n,\underline{d}) - \xi(n,\underline{d}')$ auf $\mathbb{C}P^m$ trivial, d.h. $i^*(\xi(n,\underline{d}) - \xi(n,\underline{d}')) = 0 \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^m)$. Für $n \equiv 2$ oder 3 mod 8 ist die Einschränkung von $\xi(n,\underline{d}) - \xi(n,\underline{d}')$ auf $\mathbb{C}P^{m-1}$ trivial und der Unterschied zwischen $i^*\xi(n,\underline{d})$ und $i^*\xi(n,\underline{d}')$ wird gerade durch die (8k+2)-te Stiefel-Whitney-Klasse gemessen. Aus (***) folgt in diesem

Fall, daß bereits die Einschränkung von $\xi(n,\underline{d}) - \xi(n,\underline{d}')$ auf $\mathbb{C}P^{m+1}$ trivial ist. In jedem Fall erfüllen die in 1.6 bestimmten Normalentypen von $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ die Vorraussetzungen von 1.7 und sind somit faserhomotopieäquivalent.

Seien umgekehrt $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ vom selben Normalentyp, d.h. ihre in 1.6 beschriebenen Normalentypen sind faserhomotopieäquivalent. Dann gilt nach 1.7 : $i^*(\xi(n,\underline{d}) - \xi(n,\underline{d}')) = 0 \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^m)$. Mit obiger Rechnung ist dies nach 1.8 äquivalent zu (*), bzw. für $n \equiv 2$ oder 3 mod 8 zu (*) und (**). $\square$

§ 2 Rationale Bestimmung der B-Bordismusklassen vollständiger Durchschnitte

Nachdem die Frage, wann zwei vollständige Durchschnitte vom selben Normalentyp sind, befriedigend beantwortet ist, wenden wir uns dem Problem zu, unter welchen Bedingungen an die Multigrade zwei vollständige Durchschnitte vom selben Normalentyp (B,p) zusammen mit geeigneten Normalenstrukturen B-bordant sind. Allgemeiner lautet die Frage : Wann gibt es zu zwei B-Mannigfaltigkeiten (M,q) und (M',q') eine kompakte B-Mannigfaltigkeit (W,h) mit der Eigenschaft $\partial(W,h) = (M,q) \cup -(M',q')$ (vgl. 0.3).

Ein erster Schritt zur Lösung dieses Problems ist die Unterscheidung von (M,q) und (M',q') durch B-Bordismusinvarianten, etwa durch B-Bordismuszahlen. Diese werden definiert als Werte, die unter $q: M \longrightarrow B$ zurückgezogene Cohmologieklassen auf einem geeigneten Erzeuger von $H_m(M,R)$ annehmen. Dabei ist R ein geeigneter Ring, m die Dimension von M. Für eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension m bedeutet die Wahl eins Erzeugers von $H_m(M,\mathbb{Z})$ das Festlegen einer Fundamentalklasse und damit die Wahl einer Orientierung auf M. Für eine B-Mannigfaltigkeit (M,q) ist diese nicht frei wählbar, sondern festgelegt durch die B-Struktur q und eine Orientierung der Faserung (B,p). Was dies genau bedeutet werde ich im folgenden konkretisieren.

Sei $w_1 = w_1(\gamma) \in H^1(BO,\mathbb{Z}_2)$ die erste universelle Stiefel-Whitney-Klasse. Ist (B,p) eine Faserung mit $p^*w_1 = 0$, so existiert ein Lift von p in die universelle Überlagerung (BSO,p<2>) von BO, d.h. eine Abbildung $\tilde{p}: B \longrightarrow BSO$ mit $p\langle 2\rangle\tilde{p} = p$. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer solchen Hochhebung $p^*w_1 = 0$. Die Zurückziehung eines Erzeugers von $H^0(MSO,\mathbb{Z})$ unter der von $\tilde{p}$ induzierten Spektrenabbildung $M(\tilde{p}): M(B,p) \longrightarrow M(BSO,p\langle 2\rangle) =: MSO$ liefert einen Erzeuger von $H^0(M(B,p),\mathbb{Z})$, den wir Thom-Klasse nennen.

2.1 Definition:

Sei (B,p) eine Faserung über BO mit $p^*w_1 = 0$.
Eine Orientierung von (B,p) ist eine Thom-Klasse U, d.h. ein Erzeuger von $H^0(M(B,p),\mathbb{Z}) = U\mathbb{Z}$.

Sei nun (B,p) eine mit U orientierte Faserung, (M,q) eine geschlossene B-Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Normalen-Gauß-Abbildung ν_M.

Wir werden aus diesen Daten einen Erzeuger von $H_m(M,\mathbb{Z})$ konstruieren (vgl. [Stong 2, chap. 3] und [Browder 2, chap. 2, §2]):
Sei M eingebettet in eine Sphäre S^{m+k}. Die Identifikation einer Tubenumgebung von M in S^{m+k} mit dem Normalenbündel von M in S^{m+k} $\nu(M,S^{m+k})$ liefert eine Abbildung von S^{m+k} in dem Thomraum $T(\nu(M,S^{m+k}))$. Diese induziert eine Spektrenabbildung vom Suspensionsspektrum der S^m in das Thom-Spektrum des Normalenbündels $\nu(M)$, die wir mit $T_M\colon S^m \longrightarrow M(M,\nu_M)$ bezeichnen. Ist $M(q)\colon M(M,\nu_M) \longrightarrow M(B,p)$ die von der B-Struktur q zwischen den Thomspektren induzierte Abbildung, so ist die Verknüpfung $M(q)T_M$ gerade das durch die Pontrjagin-Thom-Konstruktion aus (M,q) gewonnene Element in $\pi_m(M(B,p))$. Sei $h\colon \pi_m(M(B,p)) \longrightarrow H_m(M(B,p),\mathbb{Z})$ der stabile Hurewicz-Homomorphismus.

<u>2.2 Definition:</u>

Sei (B,p) eine mit U orientierte Faserung über BO.
Für eine geschlossene m-dimensionale B-Mannigfaltigkeit (M,q) definieren wir die <u>Fundamentalklasse $[M,q]$</u> wiefolgt :

$$[M,q] := h(T_M) \cap M(q)^*U \quad .$$

Tatsächlich ist $[M,q]$ ein Erzeuger von $H_m(M,\mathbb{Z})$, da $M(q)^*U \in H^0(M(M,\nu_M),\mathbb{Z})$ Thom-Klasse ist und somit das Cappen $\cap M(q)^*U : H_m(M(M,\nu_M),\mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(M,\mathbb{Z})$ einen Isomorphismus liefert. $h(T_M)$ ist offensichtlich ein Erzeuger von $H_m(M(M,\nu_M),\mathbb{Z})$.

Nun sind wir in der Lage B-Bordismuszahlen zu definieren. Da alle von uns betrachteten Faserungen (B,p) von der Gestalt $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p)$ sind, gilt stets $p^*w_1 = 0$. Also sind alle betrachteten Faserungen orientierbar und ich werde mich bei der Definition aus Gründen der Einfachheit auf diesen Fall beschränken.

<u>2.3 Definition:</u>

Sei (B,p) eine mit U orientierte Faserung über BO, (M,q) eine B-Mannigfaltigkeit der Dimension m. Für $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ mit einer Primzahl p oder $R = \mathbb{Q}$ bezeichne $[M,q] \in H_m(M,R)$ die Fundamentalklasse von (M,q), bzw. das Bild der Fundamentalklasse unter der Reduktion mod p bzw. der Lokalisierung bei 0.
Jede Cohomologieklasse $x \in H^m(B,R)$ definiert eine B-Bordismusinvariante, d.h. einen Gruppenhomomorphismus von den B-Bordismusklassen m-dimensionaler B-Mannigfaltigkeiten nach R :

$$x : \Omega_m^{(B,p)} \longrightarrow R$$
$$(M,q) \longrightarrow \langle q^*x, [M,q] \rangle ,$$

die zu x gehörige R-wertige B-Bordismuszahl.

Ein vollständiger Durchschnitt $X_n(\underline{d})$ ist nach 1.6 eine $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)) =: (B,p)$-Mannigfaltigkeit und $i_1 i$ ist homotop zu einer B-Struktur. Für den Totalgrad d von $X_n(\underline{d})$ gilt ([Libgober & Wood 3,§7]):

$d = \langle i^* c_1(H)^n, [X_n(\underline{d})] \rangle = \langle (i_1 i)^* c_1(H)^n, [X_n(\underline{d}), i_1 i] \rangle$, bezüglich einer geeignet gewählten Orientierung U der Faserung (B,p). Da diese Orientierung vermöge $i_1 i$ die Standatrorientierung auf $X_n(\underline{d})$ als komplexer Mannigfaltigkeit induziert, nennen wir sie Standartorientierung von (B,p). Also ist der Totalgrad eines vollständigen Durchschnittes zusammen mit einer geeigneten B-Struktur die zu $c_1(H)^n$ gehörige $\mathbb{Z}$-wertige B-Bordismuszahl. Diese ist stets nicht trivial und somit repräsentiert $X_n(\underline{d})$ zusammen mit der zu $i_1 i$ homotopen Normalenstruktur ein Element unendlicher Ordnung in $\Omega_{2n}^{(B,p)}$. Daher ist es sinnvoll die rationale B-Bordismusklasse vollständiger Durchschnitte, d.h. ihre Klasse in $\Omega_{2n}^{(B,p)} \otimes \mathbb{Q}$ zu bestimmen.

Es ist allgemein bekannt, daß die rationalen B-Bordismusklassen eindeutig durch die rationalen, d.h. die $\mathbb{Q}$-wertigen B-Bordismuszahlen bestimmt werden. Die sieht man leicht an folgender Zusammenstellung von Resultaten, die im wesentlichen auf Ergebnisse von [Serre 2] und deren Zusammenstellung in [Milnor & Stasheff] zurückgehen.

Sei (B,p) eine Faserung über BO. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion übersetzt das Bordismusproblem in ein Problem der stabilen Homotopietheorie, d.h. sie liefert einen Isomorphismus ([Stong 2,chap.2]) :

$$PT : \Omega_m^{(B,p)} \longrightarrow \pi_m(M(B,p))$$
$$(M,q) \longrightarrow M(q)\, T_M \quad .$$

Der Hurewicz-Homomorphismus $h : \pi_m(\ ) \longrightarrow H_m(\ ,\mathbb{Z})$ ist für Thom-Räume k-dimensionaler Bündel ein Isomorphismus modulo endlicher abelscher Gruppen für $m < 2k-1$, d.h. Kern und Cokern haben endliche Ordnung. Für Thom-Spektren überträgt sich diese Eigenschaft im direkten Limes von Homologie- und Homotopiegruppen und liefert einen Isomorphismus :

$$h : \pi_m(M(B,p)) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_m(M(B,p), \mathbb{Q})$$

für alle m, den stabilen rationalen Hurewicz-Homomorphismus. $H_m(M(B,p), \mathbb{Q})$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $H^m(M(B,p), \mathbb{Q})$ der Dualraum vermöge Auswertung. Daher ist eine Homologieklasse a eindeutig durch das Tupel von Werten in

$\mathbb{Q}$ bestimmt, das die Auswertung einer $\mathbb{Q}$-Basis von $H^m(M(B,p), \mathbb{Q})$ auf a ergibt. Ist (B,p) eine mit U orientierte Faserung, so hat vermöge des Thom-Isomorphismus für Thomspektren jedes Element aus $H^m(M(B,p), \mathbb{Q})$ die Gestalt xU mit $x \in H^m(B, \mathbb{Q})$. Eine leichte Rechnung zeigt :

$$\langle xU, h(M(q)T_M)\rangle = \langle q^*x, [M,q]\rangle .$$

Damit haben wir die folgende allgemein bekannte Tatsache gezeigt :

2.4 Theorem:

Sei (B,p) eine orientierte Faserung über BO. Sei $\{x_i \mid i \in I\}$ eine $\mathbb{Q}$-Bais von $H^m(B, \mathbb{Q})$.

Dann bilden die zu den x_i, $i \in I$, gehörigen rationalen B-Bordismuszahlen ein vollständiges rationales Invariantensystem für $\Omega_m^{(B,p)}$, d.h. jede Klasse in $\Omega_m^{(B,p)} \otimes \mathbb{Q}$ ist eindeutig durch die obigen B-Bordismuszahlen bestimmt.

Daher ist das nächste Ziel die Berechnung der rationalen Cohomologie von $\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$.

2.5 Lemma:

$H^*(BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q})$ ist ein Polynomring in den Pontrjagin-Klassen des universellen n-zusammenhängenden Bündels $\gamma\langle n+1\rangle$ über $BO\langle n+1\rangle$, i.e. $p_i := p_i(\gamma\langle n+1\rangle) \in H^{4i}(BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q})$ mit $i \in \mathbb{N}$, $i \geq [(n+1)/4]$.
Diese sind in dem angegebenen Bereich algebraisch unabhängig.
$H^*(BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\left[p_{k+j} \mid j \in \mathbb{N}_0 ,\ 4k \geq n+1 > 4k-4\right]$

Beweis:

Da wir nur an rationaler Information interessiert sind, betrachten wir die Räume $BO\langle n+1\rangle$ lokalisiert bei 0. Bezeichnet $BO\langle n+1\rangle_{(0)}$ die Lokalisierung von $BO\langle n+1\rangle$ bei 0, so gilt wegen $\pi_n(BO_{(0)}) = \pi_n(BO) \otimes \mathbb{Q} = 0$ für $n \not\equiv 0 \bmod 4$: $BO\langle n+1\rangle_{(0)} = BO\langle 4k\rangle_{(0)}$ für alle n mit $4k \geq n+1 > 4k-4$.
Der Beweis verläuft per Induktion nach k mittels der folgenden Faserung (vgl. [Stong 1]) :

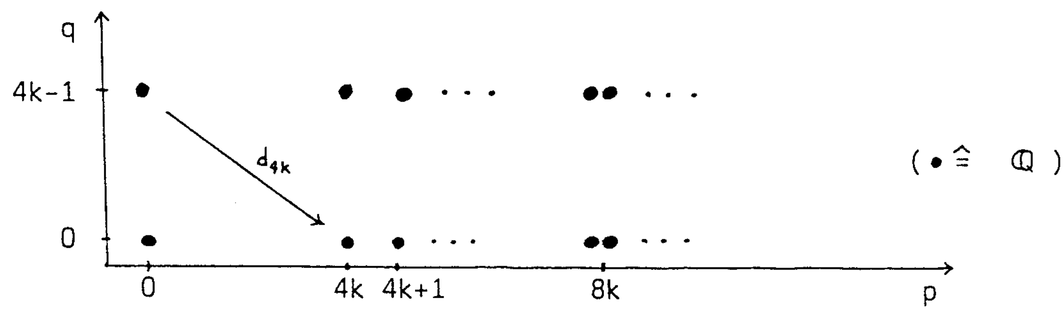
$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Z},4k-1) & \longrightarrow & BO\langle 4k+1\rangle \\ & & \downarrow p \\ & & BO\langle 4k\rangle \end{array} .$$

Für k=0 ist $BO\langle 0\rangle = BO$ und die Induktionsbasis ist die bekannte Tatsache,

daß $H^*(BO, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_i \mid i \in \mathbb{N}]$, der Polynomring in den universellen Pontrjagin-Klassen $p_i = p_i(\gamma) \in H^{4i}(BO, \mathbb{Q})$ ist.
Sei bereits $H^*(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q})$ wie behauptet bestimmt. Der Induktionsschritt wird geführt mit Hilfe der Leray-Serre-Spektralsequenz [Switzer chap.15], analog zu [Switzer 15.30,15.31].
Der E_2-Term der Leray-Serre-Spektralsequenz ist in unserem Fall gegeben durch : $E_2^{p,q} = H^p(\, BO\langle 4k\rangle \,,\, H^q(K(\mathbb{Z},4k-1), \mathbb{Q})\,)$. $H^*(K(\mathbb{Z},4k-1), \mathbb{Q})$ ist eine äußere Algebra über $\mathbb{Q}$ in einem Erzeuger $\iota_{4k-1} \in H^{4k-1}(K(\mathbb{Z},4k-1), \mathbb{Q})$ [Serre 1,chap.6,§3]. Also gilt :

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq 0 \text{ oder } n \text{ ; } p \not\equiv 0 \bmod 4 \text{ ; } p < 4n \\ \bigoplus_{a(s)} \mathbb{Q} & \text{für } q = 0 \text{ oder } n \text{ ; } p = 4s \text{ mit } s \geq n \end{cases},$$

wobei a(s) die Anzahl der möglichen Darstellungen $s = s_0 k + s_1(k+1) + s_2(k+2) + \cdots$ mit $s_i \in \mathbb{N}_0$ ist. Graphisch hat der E_2-Term folgende Gestalt :



Da die Differentiale der Leray-Serre-Spektralsequenz wiefolgt laufen : $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$, sind offensichtlich alle Differentiale bis auf d_{4k} trivial, der E_2-Term ist der E_{4k}-Term und wir können d_{4k} in das obige Tableau eintragen.
Wegen $H^{2j+1}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q}) = 0$ zerfällt die exakte Sequenz [Switzer 15.31] in die folgenden exakten Sequenzen :

$$0 \xrightarrow{p^*} H^{2m-1}(BO\langle 4k+1\rangle, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\Phi} H^{2m-4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q}) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{d_{4k}} H^{2m}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q}) \xrightarrow{p^*} H^{2m}(BO\langle 4k+1\rangle, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

Da $BO\langle 4k+1\rangle$ 4k-zusammenhängend ist, verschwindet die reduzierte Homologie in diesem Bereich, und mit universellem Koeffiziententheorem auch die reduzierte rationale Cohomologie. Insbesondere ist $H^{4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q})$ trivial.
Also ist $p^* p_k = 0$ und wegen der Exaktheit der Sequenz liegt $p_k H^{2m-4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q})$ im Bild von d_{4k}. Da die $\mathbb{Q}$-Vektorräume $H^{2m-4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q})$ und $p_k H^{2m-4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q})$ gleich Dimension haben, folgt, daß d_{4k} injektiv

und durch Multiplikation mit einem Vielfachen von p_k gegeben ist. Also ist Φ trivial und es folgt, daß p^* surjektiv ist. Somit gilt : $H^j(BO\langle 4k+1\rangle, \mathbb{Q}) = 0$ für $j \not\equiv 0 \bmod 4$ und $j \leq 4k$, $j \neq 0$. Wir erhalten die folgende Sequenz :

$$0 \longrightarrow H^{4m-4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q}) \xrightarrow{d_{4k}} H^{4m}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q}) \xrightarrow{p^*} H^{4m}(BO\langle 4k+1\rangle, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0,$$

und wegen Bild $d_{4k} = p_k H^{4m-4k}(BO\langle 4k\rangle, \mathbb{Q})$ folgt : $H^*(BO\langle 4k+1\rangle, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\left[p_{k+j} \mid j \in \mathbb{N}\right]$. Wegen $p\, p\langle 4k\rangle = p\langle 4k+1\rangle$ ist $p^* \gamma\langle 4k\rangle = \gamma\langle 4k+1\rangle$ und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Damit sind wir in der Lage, ein vollständiges rationales Invariantensystem in Form der zu einer $\mathbb{Q}$-Basis von $H^*(B, \mathbb{Q})$ gehörigen rationalen B-Bordismuszahlen aufzustellen (Erinnerung: $B = \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$). Ist (M,q) eine B-Mannigfaltigkeit ungerader Dimension, so repräsentiert (M,q) das triviale Element in der entsprechenden Gruppe von rationalen B-Bordismusklassen. Ist $\dim M = 2m$, so ist die rationale B-Bordismusklasse von (M,q) eindeutig durch die folgenden Zahlen bestimmt :

$$(*) \qquad \langle q^* c_1(H)^{m-2i} p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j}\, , [M,q]\rangle ,$$

$$\text{mit } i_1 + \dots + i_j = i\, ,\ i_k \geq [(n+1)/4]\, ,\ j \in \mathbb{N}_0\, , \text{ und}$$
$$i \in \{ [(n+1)/4], \dots, [m/2], 0 \} .$$

Wir werden sehen, daß für (n-1)-Normalensmoothings (*) bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der (n-1)-Normalenstruktur ist, wenn (B,p) von der Gestalt $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p)$ ist und p ein Bündel $\xi \times \gamma\langle n+1\rangle$ mit $\xi \in \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^\infty)$ klassifiziert. Das bedeutet für die rationale B-Bordismusklasse zweier (n-1)-Normalensmoothings über derselben Mannigfaltigkeit M:

$$[(M,q)] = \pm [(M,q')] \quad \text{in } \Omega_*^{(B,p)} \otimes \mathbb{Q} .$$

Nach 1.6 sind insbesondere die Normalentypen n-dimensionaler vollständiger Durchschnitte wegen $\mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)^* \gamma = \xi(n,\underline{d}) \times \gamma\langle n+1\rangle$ von dieser Gestalt.

2.6 Lemma:

Seien p bzw. p' : $\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \longrightarrow BO$ klassifizierende Abbildungen der Bündel $\xi \times \gamma\langle n+1\rangle$ bzw. $\xi' \times \gamma\langle n+1\rangle$. Für die Pontrjagin-Klassen von ξ und ξ' gelte : $p_i(\xi) = p_i(\xi')$ für $i = [n/4]+1, \dots, j$. Sei h eine Homotopieäquivalenz, die das folgende Diagramm homotopiekommutativ macht :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle \arrow[dl, "p'"] \\
& BO &
\end{tikzcd}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 2.5 in $H^*(\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q})$:

$$h^*c_1(H) = \pm c_1(H) \quad \text{und} \quad h^*p_i = p_i \quad \text{für alle } i \leq j .$$

Insbesondere gilt:

Sind p und p' homotop und $h^*c_1(H) = c_1(H)$, so induziert h die Identität in rationaler Cohomologie.

Beweis:

Da h eine Homotopieäquivalenz ist, induziert h einen Isomorphismus in $\mathbb{Z}$-Cohomologie. Wegen $n \geq 3$ ist $H^2(\mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{C}P^{\infty}, \mathbb{Z}) = c_1(H)\mathbb{Z}$. Also gilt $h^*c_1(H) = \pm c_1(H)$. Insbesondere läßt h^* die Pontrjagin-Klassen von ξ und ξ' fest, da diese Polynome in $c_1(H)^2$ sind.
Sei $i: \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle$ die Inklusion des n-Gerüstes, d.h. $m = [n/2]$. O.B.d.A. sei h zellulär. Dann ist $hi = ih$ auf $\mathbb{C}P^m$. Wegen der Homotopiekommutativität des Diagramms ist sowohl pi als auch $p'hi$ klassifizierende Abbildung von $i^*\xi$. Also gilt für $i \leq [n/4]$:

$$p_i(\xi) = p_i(i^*\xi) = p_i(h^*i^*\xi') = h^*p_i(\xi') = p_i(\xi') .$$

Zusammen mit der Vorraussetzung stimmen die Pontrjagin-KLassen von ξ und ξ' bis zu j-ten einschließlich überein.
Wir zeigen nun per Induktion $h^*p_i = p_i$ für alle $i \leq j$.
Ist $0 < i < [(n+1)/4]$, so ist nach 2.5 $p_i = p_i(\gamma\langle n+1\rangle) = 0$ und die Behauptung gilt trivialerweise. Sei nun $[(n+1)/4] \leq i \leq j$ und $h^*p_k = p_k$ für alle $k < i$.
Die Inklusion des zweiten Faktors $i_2: BO\langle n+1\rangle \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle$ induziert in rationaler Cohomologie Projektion auf den $\mathbb{Q}$-Unterraum $H^*(BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q})$. Wegen $i_2^*(\xi \times \gamma\langle n+1\rangle) = \gamma\langle n+1\rangle$ gilt $i_2^*p_i(\xi \times \gamma\langle n+1\rangle) = p_i$.
$p_i(\xi \times \gamma\langle n+1\rangle)$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 4i in den Pontrjaginklassen von ξ und $\gamma\langle n+1\rangle$, d.h. in $c_1(H)^2$ und p_k mit $k \leq i$. Dieses hat nach der Überlegung zu i_2 die folgende Gestalt :

$$p_i(\xi \times \gamma\langle n+1\rangle) = f(c_1(H)^2, p_1, \ldots, p_{i-1}) + p_i \quad .$$

Da die Pontrjagin-Klassen von ξ und ξ' bis zur j-ten übereinstimmen, erhalten wir ebenso :

$$p_i(\xi' \times \gamma\langle n+1\rangle) = f(c_1(H)^2, p_1, \ldots, p_{i-1}) + p_i \quad .$$

Wegen der Homotopiekommutativität des Diagramms gilt
$h^*(\xi' \times \gamma\langle n+1\rangle) = \xi \times \gamma\langle n+1\rangle$. Es folgt mit der Induktionsannahme :

$$f(c_1(H)^2, p_1, \dots, p_{i-1}) + p_i$$
$$= h^*(f(c_1(H)^2, p_1, \dots, p_{i-1})) + h^*p_i = f(c_1(H)^2, p_1, \dots, p_{i-1}) + h^*p_i \ .$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung $h^*p_i = p_i$. □

2.7 Corollar :

Sei (B,p) eine Faserung über BO von der Gestalt $(B,p) = (\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle))$, wobei $p(\xi)$ das Bündel ξ aus $\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^\infty)$ klassifiziert.
Dann ist die rationale B-Bordismusklasse eines (n-1)-Normalensmoothings von (B,p) bis auf Orientierung unabhängig von der Wahl der (n-1)-Normalenstruktur. D.h. für zwei (n-1)-Normalensmoothings (M,q) und (M,q') gilt in $\Omega_*^{(B,p)} \otimes \mathbb{Q}$:

$$[(M,q)] = \pm [(M,q')] = [(M, \pm q')] \ .$$

Beweis:

Nach 0.5 operiert die Gruppe der Homotopieklassen von Faserhomotopieselbstäquivalenzen $\mathrm{Aut}(B,p)$ transitiv auf den (n-1)-Normalenstrukturen auf M. Also existiert eine Faserhomotopieselbstäquivalenz $g: B \longrightarrow B$ mit $gq = q'$. Nach der Konvention über Faserungen 1.5 liefert g eine Homotopieäquivalenz $h: \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$, so daß $\mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle)$ homotop zu $\mu(p(\xi) \times p\langle n+1\rangle)h$ ist. Also erfüllt h die Vorraussetzungen von 2.6 und es gilt: Ist $h^*c_1(H) = c_1(H)$, so induziert h die Identität auf $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q})$, ist $h^*c_1(H) = -c_1(H)$, so induziert h die Multiplikation mit -1 auf $H^{4k+2}(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Q})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die Identität sonst. Da die rationale Cohomologie in ungeraden Dimensionen verschwindet, ist die Aussage für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension trivial.
Sei M eine 2m-dimensionale Mannigfaltigkeit, so daß (M,q) und (M,q') (n-1)-Normalensmoothings von (B,p) sind. Dann gilt :

$$\langle q'^*c_1(H)^{m-2i} p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j} , [M,q'] \rangle$$
$$= \langle q^*h^*c_1(H)^{m-2i} p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j}, \pm [M,q] \rangle$$
$$= \pm \langle q^*c_1(H)^{m-2i} p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j}, [M,q] \rangle$$

für $i_1 + \dots + i_j = i$, $i_k \geq [(n+1)/4]$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$, und $i = [(n+1)/4], \dots, [m/2]$.

Also ist nach 2.4 und 2.5 $[(M,q)] = \pm [(M,q')]$ in $\Omega_*^{(B,p)} \otimes \mathbb{Q}$.
Nach 0.3 ist $-[(M,q')] = [(M,-q')]$. $\square$

<u>2.8 Theorem:</u>

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ zwei vollständige Durchschnitte vom selben Normalentyp (B,p).

Genau dann repräsentieren $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ zusammen mit beliebigen Normalenstrukturen bis auf Orientierung dieselbe rationale B-Bordismusklasse, wenn gilt :

(i) $\quad d = d'$ und

(ii) $\quad p_i(\xi(n,\underline{d})) = p_i(\xi(n,\underline{d}'))$ für $i = [n/4]+1,\dots,[n/2]$.

D.h. wenn die Totalgrade und die Pontrjagin-Klassen der zu $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ assoziierten Bündel $\xi(n,\underline{d})$ und $\xi(n,\underline{d}')$ im angegebenen Bereich übereinstimmen. Dabei ist $\xi(n,\underline{d})$, und analog $\xi(n,\underline{d}')$ wiefolgt definiert : $\xi(n,\underline{d}) := -(n+r+1)H + H^{d_1} + \quad + H^{d_r}$.

<u>Beweis:</u>

Nach 1.6 ist $X_n(\underline{d})$ vom Normalentyp $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle))$ und analog $X_n(\underline{d}')$ vom Normalentyp $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(n,\underline{d}') \times p\langle n+1\rangle))$.
Setze $p := \mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)$ und $p' := \mu(p(n,\underline{d}') \times p\langle n+1\rangle)$.
Da $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ nach Vorraussetzung vom selben Normalentyp sind, gibt es eine Homotopieäquivalenz h, die das folgende Diagramm homotopiekommutativ macht :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p'"'] & & \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \arrow[dl, "p"] \\
& BO &
\end{tikzcd}$$

Seien $i\colon X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ und $i'\colon X_n(\underline{d}')$ die Inklusionen, i_1 die Inklusion von $\mathbb{C}P^\infty$ in das Kreuzprodukt $\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$ als erster Faktor. Nach 1.6 ist $i_1 i$ homotop zu einer $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p)$-Normalenstruktur auf $X_n(\underline{d})$ und $hi_1 i'$ homotop zu einer solchen auf $X_n(\underline{d}')$. Bezüglich dieser Normalenstrukturen werden wir die B-Bordismuszahlen von $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ berechnen.

Seien die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.
Wegen $d = \langle i^* c_1(H)^n, [X_n(\underline{d})]\rangle = \langle i^* i_1^* c_1(H)^n, [X_n(\underline{d}), i_1 i]\rangle$ ([Libgober & Wood 3,§7]) bezüglich der Standartorientierung des Normalentyps, die wir ab jetzt vorraussetzen wollen, ist der Totalgrad die zu $c_1(H)$ gehörige

rationale B-Bordismuszahl von $(X_n(\underline{d}), i_1 i)$. Da i_1 in rationaler Cohomologie Projektion auf den $\mathbb{Q}$-Unterraum $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Q})$ induziert, gilt :

$$i^* i_1^*(c_1(H)^{n-2i} p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_k}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq i = i_1 + \dots + i_k \leq [n/2].$$

Somit verschwinden alle weiteren rationalen B-Bordismuszahlen von $X_n(\underline{d})$ (vgl.2.5). Die Homotopieäquivalenz h erfüllt die Vorraussetzungen von 2.6 mit $j = [n/2]$ nach Vorraussetzung (ii) und läßt somit alle p_i mit $i \leq [n/2]$ fest. Folglich gilt :

$$\langle (hi_1 i')^* c_1(H)^{n-2i} p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_k}, [X_n(\underline{d}'), hi_1 i'] \rangle = \begin{cases} \pm d & \text{für } i=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt nach Vorraussetzung (i) in $\Omega_{2n}^{(B,p)}$:

$[(X_n(\underline{d}), q)] = \pm [(X_n(\underline{d}'), q')]$, wobei q und q' zu $i_1 i$ und $hi_1 i'$ homotope Normalenstrukturen sind. Corollar 2.7 leistet die Verallgemeinerung auf beliebige Normalenstrukturen. Somit sind (i) und (ii) hinreichend.

Seien nun umgekehrt $(X_n(\underline{d}), q)$ und $(X_n(\underline{d}'), q')$ bordant in $\Omega_{2n}^{(B,p)} \otimes \mathbb{Q}$ bis auf Orientierung. Nach 2.7 sei O.B.d.A. q homotop zu $i_1 i$, q' homotop zu $hi_1 i'$ ($B = \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$).

Sei $p_1 : \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Projektion auf den ersten Faktor. p_1 induziert einen Homomorphismus von Bordismusgruppen :

$$\begin{aligned} p_{1*} : \Omega_{2n}^{(B,p)} &\longrightarrow \Omega_{2n}^{BSO}(\mathbb{C}P^\infty) \\ [(M,g)] &\longrightarrow [(M, p_1 g)] \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\Omega_*^{BSO}(\mathbb{C}P^\infty)$ den singulären orientierten Bordismus (vgl. [Stong], [Conner & Floyd]). Da $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ torsionsfrei ist, wird Ω_*^{BSO} vollständig durch singuläre Stiefel-Whitney-Zahlen und singuläre Pontrjagin-Zahlen bestimmt ([Conner & Floyd]). Diese sind insbesondere Invarianten des singulären orientierten Bordismus. Da das stabile Normalenbündel von $X_n(\underline{d})$ durch die Zurückziehung von $\xi(n,\underline{d})$ gegeben ist, gilt $p_i(\nu(X_n(\underline{d}))) = i^* p_i(\xi(n,\underline{d}))$. Somit sind die folgenden Zahlen singuläre Pontrjagin-Zahlen von $(X_n(\underline{d}), p_1 q)) = (X_n(\underline{d}), i)$ in $\Omega_{2n}^{BSO}(\mathbb{C}P^\infty)$:

$$\langle i^* c_1(H)^{n-2i} p_i(\xi(n,\underline{d})), [X_n(\underline{d})] \rangle$$

$$= \langle a_i(n,\underline{d})\, i^* c_1(H)^n, [X_n(\underline{d})] \rangle = a_i(n,\underline{d})\, d \qquad \text{für } i = 0, \dots, [n/2],$$

wobei $a_i(n,\underline{d})$ durch die Gleichung $a_i(n,\underline{d}) c_1(H)^{2i} = p_i(\xi(n,\underline{d}))$ definiert ist. Wegen $q'^* c_1(H) = (p_1 hi_1 i')^* c_1(H) = \pm c_1(H)$ sind auch die zu $c_1(H)^{n-2i}$ gehörige singuläre Pontrjagin-Zahl von $(X_n(\underline{d}'), p_1 q')$ das Produkt von Totalgrad und dem Koeffizienten $a_i(n,\underline{d}')$ für alle $i = 0, \dots, [n/2]$,bis eventuell auf ein globales Vorzeichen. Da $(X_n(\underline{d}), q)$ und $(X_n(\underline{d}'), q')$ o.B.d.A.

B-bordant sind (ersetze gegebenenfalls q' durch -q'), sind $(X_n(\underline{d}), p_1 q)$ und $(X_n(\underline{d}'), p_1 q')$ orientiert singulär bordant, und somit gilt : $d = d'$ und $a_i(n,\underline{d}) = a_i(n,\underline{d}')$, d.h. $p_i(\xi(n,\underline{d})) = p_i(\xi(n,\underline{d}'))$ für alle $i \leq [n/2]$. Also sind (i) und (ii) notwendig. $\square$

§ 3 Die Adams-Filtrierung vollständiger Durchschnitte

In §2 wurde bestimmt, wann zwei vollständige Durchschnitte vom Normalentyp (B,p) zusammen mit geeigneten Nornalenstrukturen rational B-bordant sind, d.h. B-bordant modulo Torsion in $\Omega_*^{(B,p)}$. Die folgenden beiden Paragraphen werden sich damit beschäftigen, unter welchen Bedingungen an die Multigrade und die Dimension dies bereits hinreichend für B-Bordanz ist. Die Überlegungen basieren hauptsächlich auf der Adams-Spektralsequenz als Verfahren zur Berechnung der Homotopie von Spektren. Das wesentliche Argument wird sein, daß die Adams-Filtrierung von Torsionselementen einer festen Dimension in unserem Fall nicht beliebig hoch sein kann (vgl. §4). Daher ist es sinnvoll, die Adams-Filtrierung der vollständigen Durchschnitte möglichst gut nach unten abzuschätzen. Wir werden die Adams-Filtrierung exakt bestimmen können.

3.1 Definition und Eigenschaften der Adams-Spektralsequenz:

Zu diesem Abschnitt vgl. [Adams 1] und [Adams 4, §15].

(1) Sei X ein Spektrum.

Eine <u>mod p -Adamsauflösung</u> von X ist ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X =: X_0 \arrow[dr, "f_0"'] & & X_1 \arrow[ll, "q_0"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & X_2 \arrow[ll, "q_1"'] \arrow[dr, "f_2"'] & & X_3 \arrow[ll, "q_2"'] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ll, "q_3"'] \\
& K_0 \arrow[ur, "p_0"'] & & K_1 \arrow[ur, "p_1"'] & & K_2 \arrow[ur, "p_2"'] & & K_3 & \cdots
\end{tikzcd}$$

mit den folgenden Eigenschaften :

(i) Die K_s sind verallgemeinerte Eilenberg-MacLane-Spektren, d.h. $K_s = \bigvee_{i \in I_s} \Sigma^{s_i} K\mathbb{Z}_p$.

(ii) Die Abbildungen $f_s^* : H^*(K_s,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X_s,\mathbb{Z}_p)$ sind surjektiv.

(iii) Die Dreiecke

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[dr, "f_s"'] & & X_{s+1} \arrow[ll, "q_s"'] \\
& K_s \arrow[ur, "p_s"'] &
\end{tikzcd}$$

sind Cofaserdreiecke mit $X_{s+1} = C_{f_s}$, der Cofaser von f_s.

(2) Sei X ein Spektrum mit mod p -Adams-Auflösüng gemäß (1).
Diese induziert eine Filtrierung der Homotopie von X :

$$\pi_t(X) = F^{0,t} \supseteq F^{1,t+1} \supseteq F^{2,t+2} \supseteq \cdots \supseteq F^{s,t+s} \supseteq \cdots ,$$

mit $F^{s,t+s} := \mathrm{Bild}((q_0 q_1 \cdots q_{s-1})_* : \pi_{t+s}(X_s) \longrightarrow \pi_t(X_0))$.

Diese Filtrierung ist unabhängig von der Wahl der mod p -Adams-Auflösung und heißt <u>mod p -Adams-Filtrierung</u>. Ist $a \in \pi_t(X)$, $a \in F^{s,t+s}$, $a \notin F^{s+1,t+s+1}$, so sagen wir <u>a hat mod p -Adamsfiltrierung s</u> und schreiben $F_p(a) = s$. Liegt a im Durchschnitt aller $F^{s,t+s}$ für $s \in \mathbb{N}_0$, so definieren wir $F_p(a) := \infty$.

(3) Sei X ein Spektrum mit mod p -Adams-Auflösung gemäß (1).
Dann ist das folgende bigraduierte Dreieck exakt :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{s,t} \pi_t(X_s) \arrow[dr, "\bigoplus_{s,t} f_*^{s,t}"', "{(0,0)}"] & & \bigoplus_{s,t} \pi_t(X_s) \arrow[ll, "\bigoplus_{s,t} q_*^{s,t}"', "{(-1,-1)}"] \\
& \bigoplus_{s,t} \pi_t(K_s) \arrow[ur, "{(1,0)}", "\bigoplus_{s,t} p_*^{s,t}"'] &
\end{tikzcd}$$

Die zu diesem exakten Dreieck assoziierte Spektralsequenz $(E_r, d_r)_{r \in \mathbb{N}}$ ist bigraduiert und heißt <u>mod p -Adams-Spektralsequenz</u>.
Wir schreiben $E_r^{**} = \bigoplus_{s,t} E_r^{s,t}$.

(4) Es gilt:

(i) $E_2^{**}(X) = \mathrm{Ext}_A^{**}(H^*(X,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$, wobei A die mod p -Steenrod-Algebra bezeichnet. Der Isomorphismus ist natürlich bezüglich Spektrenabbildungen.

(ii) Der E_∞-Term ist natürlich isomorph zu den Filtrierungsquotienten : $E_\infty^{s,t} = F^{s,t} / F^{s+1,t+s+1}$.

(iii) $\bigcap_s F^{s,t+s}$ ist die Untergruppe der Elemente aus $\pi_t(X)$ mit Ordnung prim zu p .

<u>3.2 Bemerkung und Generalvoraussetzung:</u>

Sei X ein Spektrum das den folgenden Bedingungen genügt :

(i) Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{Z}$, so daß $\pi_t(X) = 0$ für alle $t \leq t_0$, d.h. X ist <u>t_0-zusammenhängend</u> .

(ii) $H^q(X,\mathbb{Z})$ ist endlich erzeugt für alle $q \in \mathbb{Z}$, d.h. die ganzzahlige Cohomologie von X ist von endlichem Typ.

Dann besitzt X eine mod p -Adams-Auflösung ([Adams 4,§15]).
Die von uns betrachteten Spektren erfüllen alle die Bedingungen (i) und (ii). Sei also im folgenden X stets ein Spektrum, das den Bedingungen (i) und (ii) genügt.

Vermöge der Pontrjagin-Thom-Konstruktion repräsentieren B-Mannigfaltigkeiten Elemente in der Homotopie des zu der Faserung (B,p) assoziierten Thom-Spektrums. Daher können wir von der Adams-Filtrierung von B-Mannigfaltigkeiten sprechen. Das nächste Lemma zeigt, daß die Adams-Filtrierung eines (k-1)-Normalensmoothings unabhängig von der Wahl der (k-1)-Normalenstruktur ist, falls B k-antizusammenhängend ist.

3.3 Lemma:

Seien X und Y Spektren gemäß 3.2 , $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Spektrenabbildung. Dann erhöht oder erhält f die mod p -Adams-Filtrierung, d.h. es gilt:

$$F_p(f_*(a)) \geq F_p(a) \quad \text{für alle } a \in \pi_*(X) \text{ und alle Primzahlen } p.$$

Ist insbesondere f eine Homotopieäquivalenz, so ist f filtrierungserhaltend.

Beweis:
Seien $X=X_0 \xleftarrow{q_0} X_1 \xleftarrow{q_1} X_2 \longleftarrow \cdots$ und $Y=Y_0 \xleftarrow{q_0'} Y_1 \xleftarrow{q_1'} Y_2 \longleftarrow \cdots$ mod p -Adams-Auflösungen von X und Y.
Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Spektrenabbildung, so existiert eine Familie von Spektrenabbildungen $\{f_s\colon X_s \longrightarrow Y_s \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ mit $f_0 = f$ und $f_s q_s = q'_s f_{s+1}$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$.
Seien $\{F^{s,t}(X)\}$ und $\{F^{s,t}(Y)\}$ die mod p -Adams-Filtrierungen von $\pi_*(X)$ und $\pi_*(Y)$. Dann gilt wegen $f_s q_s = q_s' f_{s+1}$ $f_*(F^{s,t}(X)) \subseteq F^{s,t}(Y)$, d.h. $F_p(f_*(a)) \geq F_p(a)$ für alle $a \in \pi_*(X)$.
Ist $g\colon Y \longrightarrow X$ die Homotopieinverse von f, so ist analog $g_*(F^{s,t}(Y))$ in $F^{s,t}(X)$ enthalten, und es folgt $F_p(a) = F_p(g_*f_*(a)) \geq F_p(f_*(a)) \geq F_p(a)$.
Also gilt überall Gleichheit und f ist filtrierungserhaltend. □

3.4 Corollar :

Sei (B,p) eine k-antizusammenhängende Faserung über BO, M eine Mannigfaltigkeit vom (k-1)-Normalentyp (B,p) und q und $q'\colon M \longrightarrow BO$ zwei (k-1)-Normalenstrukturen auf M.

Dann gilt $F_p(M,q) = F_p(M,q')$ für alle Primzahlen p .

Beweis:

Nach 0.5 operiert die Gruppe der Homotopieklassen von Faserhomotopieselbstäquivalenzen Aut(B,p) transitiv auf den (k-1)-Normalenstrukturen auf M. Also existiert eine Faserhomotopieselbstäquivalenz $h: B \longrightarrow B$ mit $q' = hq$. h induziert eine Homotopieselbstäquivalenz des zu (B,p) assoziierten Thom-Spektrums $M(h) : M(B,p) \longrightarrow M(B,p)$, und es gilt :

$$PT(M,q') = M(q')T_M = M(h)M(q)T_M = M(h)_*M(q)T_M = M(h)_*PT(M,q) \quad .$$

Dabei bezeichnet PT wieder die Pontrjagin-Thom-Konstruktion. Die Behauptung folgt mit 3.3. □

Um Aussagen über die Adams-Filtrierung der vollständigen Durchschnitte (zusammen mit einer Normalenstruktur) zu machen, werden wir zeigen, daß sie im Bild von filtrierungserhöhenden Spektrenabbildungen liegen.

3.5 Lemma:

Seien X und Y Spektren, $f: X \longrightarrow Y$ eine Spektrenabbildung.
Ist $f^* : H^*(Y,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ die Nullabbildung, so erhöht f die mod p -Adams-Filtrierung, d.h. es gilt $F_p(f_*(a)) > F_p(a)$ für alle $a \in \pi_*(X)$.

Beweis:

f induziert eine Abbildung der mod p -Adams-Spektralsequenzen von X und Y $f_r : (E_r(X),d_r) \longrightarrow (E_r(Y),d_r)$. Dabei ist $f_2: E_2(X) \longrightarrow E_2(Y)$ über die natürliche Identifikation von $E_2(\ )$ mit $\mathrm{Ext}_A(H^*(\ ,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$ (vgl.3.1) das Bild von $f^*: H^*(Y,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ unter dem Funktor $\mathrm{Ext}_A(\ ,\mathbb{Z}_p)$. Das f^* trivial ist, ist auch f_2 trivial und somit $f_\infty: E_\infty(X) \longrightarrow E_\infty(Y)$. Vermöge der Identifikation des E_∞-Termes mit den Filtrierungsquotienten einer mod p -Adams-Auflösung gilt somit :

$$f_*(F^{s,t}(X)) \,/\, F^{s+1,t+1}(Y) = 0 \quad , \text{ d.h. } \quad f_*(F^{s,t}(X)) \subseteq F^{s+1,t+1}(Y) \quad .$$

Also ist $F_p(f_*(a)) > F_p(a)$ für alle $a \in \pi_*(X)$. □

Nach Definition ist ein vollständiger Durchschnitt $X_n(\underline{d})$ der transversale Schnitt von r Hyperflächen im $\mathbb{C}P^{n+r}$. Dem Schneiden mit einer Hyperfläche entspricht in Bordismustheorie eine Abbildung $\Omega_*^{(B,p)} \longrightarrow \Omega_{*-2}^{(B',p')}$, deren homotopietheoretische Interpretation eine Abschätzung der Adams-Filtrierugn des Bildes liefern wird.

3.6 Konstruktion und Definition:

Sei X ein CW-Komplex. Zwei reelle Bündel α und β über X seien gegeben durch die Abbildungen : $p(\alpha) : X \longrightarrow BO$

$$p(\beta) : X \xrightarrow{p_k(\beta)} BO(k) \xrightarrow{j} BO \quad .$$

Dabei ist $j: BO(k) \longrightarrow BO$ die klassifizierend Abbildung des universellen k-dimensionalen Bündels $\gamma(k)$.

Wir setzen : $\alpha := p(\alpha)^* \gamma$ und $\beta := p_k(\beta)^* \gamma(k)$. Also ist α ein Element von $\widetilde{KO}(X)$, β ein k-dimensionales Vektorbündel über X.

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Normaler-Gauß-Abbildung $\nu_M: M \longrightarrow BO$, $q: M \longrightarrow X$ ein Lift von ν_M über $(X,p(\alpha))$, d.h. $\nu_M = p(\alpha)q$.

Wir wählen einen Schnitt $s: M \longrightarrow q^*\beta$ transversal zum Nullschnitt M.

(zu Transversalität,Definition und Eigenschaften,vgl. [Hirsch,chap.3])

Dann ist $N := s^{-1}(M) = s(M) \cap M$ eine k-codimensionale Untermannigfaltigkeit von M, und für das Normalenbündel von N in M gilt :

$$\nu(N,M) = ds_{|N}^{-1}\ \nu(M,q^*\beta)_{|N} = ds_{|N}^{-1}\ q^*\beta_{|N} \quad .$$

Also gilt für das Normalenbündel von N bezüglich der Einbettung von N in M:

$\nu(N) = \nu(M)_{|N} + \nu(N,M) \cong q_{|N}^*\alpha + q_{|N}^*\beta$, und wir erhalten einen expliziten Isomorphismus, nämlich $id + ds_{|N}^{-1}$. Offensichtlich liefert dieser Isomorphismus zusammen mit $q_{|N}$ eine Folge von Paaren (f_s, α_s) wie sie in der Bemerkung in 0.3 beschrieben werden, und damit nach 0.3 eine eindeutig bestimmte $(X,p(\alpha+\beta))$-Struktur auf N, die homotop zu $q_{|N}$ ist. Wir bezeichnen sie mit q_{ds} . Dabei ist $p(\alpha+\beta)$ die folgende Komposition :

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{p(\alpha) \times p(\beta)} BO \times BO \xrightarrow{\mu} BO$$, also klassifizierende Abbildung der Whitney-Summe $\alpha + \beta$.

Die $(X,p(\alpha+\beta))$-Bordismusklasse von (N,q_{ds}) ist unabhängig von der Wahl des Schnittes s. Denn ist $s': M \longrightarrow q^*\beta$ ein weiterer Schnitt, so ist s' homotop zu s. Man kann eine Homotopie $H: M \times I \longrightarrow q^*\beta$ so wählen, daß sie transversal zum Nullschnitt ist und $H(\ ,t): M \longrightarrow q^*\beta$ einen Schnitt für alle $t \in I$ darstellt. Ist $p: M \times I \longrightarrow M$ die Projektion auf den ersten Faktor, so können wir H in offensichtlicher Weise als einen Schnitt in das Bündel $p^*q^*\beta$ über $M \times I$ auffassen. $(M \times I, qp)$ ist eine $(X,p(\alpha))$-Mannigfaltigkeit und die obige Konstruktion liefert eine $(X,p(\alpha+\beta))$-Mannigfaltigkeit $(H^{-1}(M\times I), qp_{dH})$ mit Rand. Wie man leicht sieht gilt :

$$\partial(H^{-1}(M\times I), qp_{dH}) = (s^{-1}(M), q_{ds}) \cup -(s'^{-1}(M), q_{ds'}) \quad .$$

Somit ist die $(X, p(\alpha+\beta))$-Bordismusklasse von (N, q_{sd}) unabhängig von der Wahl des Schnittes und wir können die folgende Abbildung definieren :

$$\begin{aligned} s(\beta) : \Omega_*^{(X,p(\alpha))} &\longrightarrow \Omega_{*-k}^{(X,p(\alpha+\beta))} \\ [(M,q)] &\longrightarrow [(s^{-1}(M), q_{ds})] \end{aligned}$$

Dabei ist k die Dimension von β, $p(\alpha+\beta)$ klassifiziert $\alpha+\beta$.

Seien nun wie in 3.6 α und β reelle Bündel über X, dim $\beta = k$.
α_j bezeichne die Zurückziehung des universellen j-dimensionalen Bündels über BO(j) unter der Einschränkung von $p(\alpha)$ auf $p(\alpha)^{-1}(BO(j)) =: X_j$.
Da $p(\alpha+\beta)$ die Whitney-Summe $\alpha+\beta$ klassifiziert, liefert die Inklusion der Thom-Räume über X_j $T(\alpha_j) \longrightarrow T(\alpha_j + \beta_{|X_j})$ eine Spektrenabbildung :

$$f(\beta) : M(X, p(\alpha)) \longrightarrow \Sigma^k M(X, p(\alpha+\beta)) \quad .$$

$f(\beta)$ ist die homotopietheoretische Interpretation der Konstruktion $s(\beta)$ in 3.6, denn es gilt :

<u>3.7 Lemma:</u>

Mit den Bezeichnungen aus 3.6 gilt :
Die durch die Inklusion der Thom-Räume induzierte Spektrenabbildung $f(\beta) : M(X,p(\alpha)) \longrightarrow \Sigma^k M(X,p(\alpha+\beta))$, ($k = \dim \beta$), macht das folgende Diagramm kommutativ :

$$\begin{tikzcd} \Omega_*^{(X,p(\alpha))} \arrow[r, "s(\beta)"] \arrow[d, "PT"] & \Omega_{*-k}^{(X,p(\alpha+\beta))} \arrow[d, "PT"] \\ \pi_*(M(X,p(\alpha))) \arrow[r, "f(\beta)_*"'] & \pi_{*-k}(M(X,p(\alpha+\beta))) \end{tikzcd}$$

Dabei sind die senkrechten Pfeile durch die Pontrjagin-Thom-Konstruktion PT, $[(M,q)] \longmapsto M(q)T_M$, gegeben, $p(\alpha+\beta)$ bezeichnet die Komposition

$$X \xrightarrow{\Delta} X\times X \xrightarrow{p(\alpha)\times p(\beta)} BO\times BO \xrightarrow{\mu} BO \ .$$

<u>Beweis:</u>

Sei (M,q) eine $(X,p(\alpha))$-Mannigfaltigkeit.

Es existiert ein Schnitt $\tilde{s}: X \longrightarrow \beta$, so daß der zurückgezogene Schnitt $s := q^*\tilde{s} : M \longrightarrow q^*\beta$ transversal zum Nullschnitt ist. (Wähle etwa $\tilde{s}$ als Zurückziehung eines Schnittes in $\gamma(k) \longrightarrow BO(k)$ unter $p_k(\beta)$, der transversal zum Nullschnitt über einem CW-Gerüst genügend großer Dimension ist.)
Wir definieren die Spektrenabbildung $\tilde{f}(\beta): M(X,p(\alpha)) \longrightarrow \Sigma^k M(X,p(\alpha+\beta))$ als Verwacklung von $f(\beta)$ mittels $\tilde{s}$ wiefolgt :
Bezeichne wieder α_j die Zurückziehung von $\gamma(j) \rightarrow BO(j)$ unter der Einschränkung von $p(\alpha)$ auf $p(\alpha)^{-1}(BO(j)) =: X_j$. Wir fassen die Thom-Räume als Quotienten Totalraum des Bündels modulo dem Komplement des offenen Scheibenbündels vermöge der von $\mathbb{R}^\infty$ auf $\alpha_j \subseteq X \times \mathbb{R}^\infty$ und $\alpha_j + \beta|X_j \subseteq X \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ induzierten Metrik auf.
Dann liefert die mit $\tilde{s}$ verwackelte Inklusion der Totalräume eine Abbildung der Thom-Räume :

$$T(\alpha_j) \longrightarrow T(\alpha_j + \beta|X_j)$$
$$(x,v) \longrightarrow (x,v,\tilde{s}(x)) .$$

Wir definieren $\tilde{f}(\beta)$ als die von dieser Thom-Raumabbildung induzierte Spektrenabbildung. Da $\tilde{s}$ homotop zur Einbettung des Nullschnittes ist, ist $\tilde{f}(\beta)$ homotop zu $f(\beta)$. Nach Definition der Pontrjagin-Thom-Konstruktion PT gilt $(M(q)T_M)^{-1}(X) = M$ und somit $(\tilde{f}(\beta)M(q)T_M)^{-1}(X) = (q^*\tilde{s})^{-1}(M) = s^{-1}(M)$.
$s^{-1}(M)$ ist eine k-codimensionale Untermannigfaltigkeit von M und für das Normalenbündel von $s^{-1}(M)$ in M gilt :

$$\nu(s^{-1}(M),M) = d(q^*\tilde{s}|_{s^{-1}(M)})^{-1} q^*\beta|_{s^{-1}(M)} .$$

Es folgt : $f(\beta)M(q)T_M \simeq \tilde{f}(\beta)M(q)T_M \simeq M(q_{ds})T_{s^{-1}(M)}$, und damit $f(\beta)_* PT = PT\, s(\beta)$. $\square$

Da das stabile Normalenbündel eines vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$ durch die Einschränkung des Bündels $\xi(n,\underline{d})$ über $\mathbb{C}P^\infty$ gegeben ist, mit $\xi(n,\underline{d}) = -(n+r+1)H + H^{d_1} + \cdots + H^{d_r}$, ist die Inklusion $i: X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ homotop zu einer $(\mathbb{C}P^\infty, p(n,\underline{d}))$-Struktur q. wir werden sehen, daß $[(X_n(\underline{d}),q)]$ im Bild einer ganzen Reihe von nacheinander ausgeführten $s(\beta_i)$ liegt.

<u>3.8 Lemma:</u>

Sei $X := \mathbb{C}P^\infty$, $j \in \mathbb{N}$.
Wir setzen $\alpha := \xi(n+r-j+1, d_1, \ldots, d_{j-1}) = -(n+r+1)H + H^{d_1} + \cdots + H^{d_{j-1}}$
$\beta := H^{d_j}$.
Für j=1 setzen wir $X_{n+r}(\emptyset) := \mathbb{C}P^{n+r}$.

Für einen fest gewählten Isomorphismus φ zwischen $\nu(\mathbb{C}P^{n+r})$ und $-(n+r+1)H_{|\mathbb{C}P^{n+r}}$ sei q_0: $\mathbb{C}P^{n+r} \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ die nach der Bemerkung in 0.3 eindeutig bestimmte $(\mathbb{C}P^{\infty}, p(n+r, \emptyset))$-Struktur.
Dann gilt für $j = 1,\dots,r$ mit den bezeichnungen aus 3.6 :

$$s(H^{d_j})\left[(X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1}),q_{j-1})\right] = \left[(X_{n+r-j}(d_1,\dots,d_j),q_j)\right],$$

Wobei $q_j := (q_{j-1})_{ds}$ eine zur Inklusion i: $X_{n+r-j}(d_1,\dots,d_j) \longrightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$ homotope, durch φ eindeutig bestimmte $(\mathbb{C}P^{\infty}, p(n+r-j, d_1,\dots,d_j))$-Struktur ist.

Beweis:

Sei $X_{n+r-1}(d_j) \subseteq \mathbb{C}P^{n+r}$ eine geeignete Hyperfläche, $X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1})$ ein geeigneter vollständiger Durchschnitt, so daß gilt :

$X_{n+r-j}(d_1,\dots,d_j) = X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1}) \pitchfork X_{n+r-1}(d_j)$.

Dabei bezeichnet $\pitchfork$ den transversalen Schnitt. Diese existieren nach Definition vollständiger Durchschnitte.

Sei $X_{n+r-1}(d_j)$ Nullstellenmenge des Polynoms $f \in \mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n+r}]$, f homogen vom Grad d_j. Wir benutzen f um zunächst einen Schnitt von $\mathbb{C}P^{n+r}$ in das d_j-fache Tensorprodukt des Hopfbündels über $\mathbb{C}P^{n+r}$ $i^*H^{d_j}$ zu konstruieren.

Wir stellen Punkte in $\mathbb{C}P^{n+r}$ in homogenen Koordinaten dar.

Ist $[x] = [x_0,\dots,x_{n+r}] \in \mathbb{C}P^{n+r}$, so ist die Faser über $[x]$ in H^{d_j} als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt von d_j-fachen Tensorprodukt von $x \in \mathbb{C}^{n+r+1}$.

Betrachten wir die folgende Abbildung :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{C}^{n+r+1} \setminus f^{-1}(0) &\longrightarrow i^*H^{d_j} \subseteq \mathbb{C}P^{n+r} \times (\mathbb{C}^{n+r+1} \otimes \overset{d_j}{\cdots} \otimes \mathbb{C}^{n+r+1}) \\ x &\longrightarrow ([x], f(x)^{-1}\, x \otimes \cdots \otimes x) \end{aligned}$$

Da f homogen vom Grad d_j ist, gilt für $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda x) &= ([\lambda x], f(\lambda x)^{-1}\, \lambda x \otimes \cdots \otimes \lambda x) \\ &= ([x], \lambda^{-d_j} f(x)^{-1} \lambda^{d_j} x \otimes \cdots \otimes x) = ([x], f(x)^{-1}\, x \otimes \cdots \otimes x) \end{aligned}$$

Also faktorisiert $\tilde{f}$ über $\mathbb{C}P^{n+r}$ und liefert einen Schnitt :

$$\tilde{s}' : \mathbb{C}P^{n+r} \setminus X_{n+r-1}(d_j) \longrightarrow i^*H^{d_j} .$$

Nach Normieren und geeignetem Homotopieren von $\tilde{s}'$ auf einer Tubenumgebung von $X_{n+r-1}(d_j)$ in $\mathbb{C}P^{n+r}$ können wir den homotopierten Schnitt durch den Nullschnitt auf $X_{n+r-1}(d_j)$ stetig differenzierbar fortsetzen und erhalten insgesamt einen stetig differenzierbaren Schnitt $\tilde{s}: \mathbb{C}P^{n+r} \longrightarrow i^*H^{d_j}$ mit

$\tilde{s}^{-1}(\mathbb{C}P^{n+r}) = X_{n+r-1}(d_j)$. Die Zurückziehung von $\tilde{s}$ auf $X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1})$ liefert einen Schnitt :

$$s := \tilde{s}|_{X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1})} : X_{n+r-1}(d_1,\dots,d_{j-1}) \longrightarrow i^*H^{d_j} \quad .$$

Dieser ist nach Konstruktion o.B.d.A. transversal zum Nullschnitt und es gilt:

$s^{-1}(X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1})) = X_{n+r-j}(d_1,\dots,d_j)$. Also ist nach 3.6

$s(H^{d_j})\,[(X_{n+r-j+1}(d_1,\dots,d_{j-1}),q_{j-1})] = [(X_{n+r-j}(d_1,\dots,d_j),q_j)]$. $\square$

3.9 Lemma:

Mit den Bezeichnungen aus 3.6 gilt :
Sind α und β orientierte Bündle, dim $\beta = k$, so induziert die Spektrenabbildung $f(\beta)\colon M(X,p(\alpha)) \longrightarrow \Sigma^k M(X,p(\alpha+\beta))$ in $\mathbb{Z}$-Cohomologie bezüglich der Thom-Klasse Multiplikation mit der Euler-Klasse $e(\beta) \in H^k(X,\mathbb{Z})$. D.h. $f(\beta)^*$ ist durch das Bild der Thom-Klasse $U(\alpha+\beta) := U(\alpha)U(\beta)$ wiefolgt bestimmt :

$$\begin{array}{rcl} f(\beta)^* : H^*(M(X,p(\alpha+\beta)),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{*+k}(M(X,p(\alpha)),\mathbb{Z}) \\ U(\alpha+\beta) & \longrightarrow & e(\beta)U(\alpha) \end{array}$$

Beweis:

Sei wieder α_j die Zurückziehung von $\gamma(j) \longrightarrow BO(j)$ unter der Einschränkung von $p(\alpha)$ auf $p(\alpha)^{-1}(BO(j) =: X_j$. Wir identifizieren die reduzierte Cohomologie des Thom-Raumes von α_j mit der Cohomologie des Paares (E,E_0), wobei E den Totalraum von α_j, E_0 den Totalraum von α_j ohne den Nullschnitt bezeichnet. Analog seien E' und E_0' für das Bündel $\alpha_j + \beta|_{X_j}$ definiert.

Vermöge Thom-Isomorphismus sind $H^*(E,E_0;\mathbb{Z})$ bzw. $H^*(E',E_0';\mathbb{Z})$ $H^*(X_j,\mathbb{Z})$-Moduln in einem Erzeuger, nämlich der Thom-Klasse $U(\alpha_j) \in H^j(E,E_0;\mathbb{Z})$, bzw. der Thom-Klasse $U(\alpha_j + \beta|_{X_j}) \in H^{j+k}(E',E_0';\mathbb{Z})$.

Die Inklusion der Thom-Räume, die $f(\beta)$ induziert, stammt von der Inklusion der Totalräume $i\colon E \longrightarrow E'$. Da die Einschränkung von i auf den Nullschnitt die Identität auf X_j ist, induziert i eine Inklusion von $E_0 \longrightarrow E_0'$ und damit der Paare $(E,E_0) \longrightarrow (E',E_0')$, die wir wieder mit i bezeichnen. Sind $p\colon E \longrightarrow X_j$ und $p'\colon E' \longrightarrow X_j$ die Projektionen auf die Basis, so gilt $p = p'i$. Wir können somit wiefolgt in den durch i verbundenen langen exakten Cohomologiesequenzen der Paare (E,E_0) und (E',E_0') rechnen :

$$i^*U(\alpha_j + \beta|_{X_j})|_{E'} = i^*p'^*e(\alpha_j + \beta|_{X_j})$$

$$= p^*(e(\beta|_{X_j})e(\alpha_j)) = (e(\beta|_{X_j})U(\alpha_j))|_E \quad .$$

Dies liefert $i^*U(\alpha_j + \beta|_{X_j}) = e(\beta|_{X_j})U(\alpha_j)$. Da dies für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir für die von i induzierte Spektrenabbildung $f(\beta)$:

$$f(\beta)^*U(\alpha+\beta) = e(\beta)U(\alpha) \quad . \qquad \square$$

Nun sind wir in der Lage eine erste Abschätzung der Adams-Filtrierung vollständiger Durchschnitte zu machen. Nach 3.7 und 3.8 gilt mit den dortigen Bezeichnungen :

$$[(X_n(\underline{d}),q_r)] = s(H^{d_r})\circ\cdots\circ s(H^{d_1})\,[(\mathbb{C}P^{n+r},q_0)] \quad \text{bzw.}$$
$$M(q_r)\; T_{X_n(\underline{d})} = f(H^{d_r})_*\circ\cdots\circ f(H^{d_1})_*\; M(q_0)\; T_{\mathbb{C}P^{n+r}} \quad .$$

$f(H^{d_j})^*$ ist in $\mathbb{Z}$-Cohomologie Multiplikation mit $e(H^{d_j}) = d_j c_1(H)$, also ist $f(H^{d_j})$ mod p -Adams-Filtrierungs-erhöhend, wenn $d_j \equiv 0$ mod p ist (3.9 und 3.5). Insgesamt ergibt sich :

$$F_p(X_n(\underline{d}),q_r) \geq \#\,\{\, d_j \equiv 0 \bmod p \mid j \in \{1,\dots,r\}\,\} \quad .$$

Leider ist die Güte dieser Abschätzung stark von der Streuung der Primfaktoren im Multigrad abhängig. Eine weitere Faktorisierung der Abbildungen $f(H^{d_j})$ wird dies beheben.

Sei wieder α_j die Zurückziehung von $\gamma(j) \longrightarrow BO(j)$ unter der Einschränkung von $p(\alpha) : X \longrightarrow BO$ auf $p(\alpha)^{-1}(BO(j)) =: X_j$. Sei β ein komplexes Linienbündel über X, β^a mit $a \in \mathbb{N}$ das a-fache Tensorprodukt von β über $\mathbb{C}$. $\alpha_j + \beta^a|_{X_j} \subseteq X_j \times \mathbb{R}^\infty \times \underbrace{\mathbb{C}^\infty \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^\infty}_{a}$ trage die von $\mathbb{R}^\infty$ und der folgenden Norm auf $\mathbb{C}^\infty \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^\infty$ induzierte Metrik :

Für $x_1,\dots,x_a \in \mathbb{C}^\infty$ sei $\| x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \| := \| x_1 \| \cdot \cdots \cdot \| x_a \|$.

Dann überführt die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \alpha_j + \beta|_{X_j} & \longrightarrow & \alpha_j + \beta^a|_{X_j} \\ (x,v,w) & \longrightarrow & (x,v,w\otimes\cdots\otimes w) \end{array}$$

Scheibenbündel in Scheibenbündel und Sphärenbündel in Sphärenbündel und liefert eine Abbildung der Thom-Räume, die wir uns als Quotienten Scheibenbündel modulo Sphärenbündel vorstellen :

$$\begin{array}{cccc} g_j : & T(\alpha_j + \beta|_{X_j}) & \longrightarrow & T(\alpha_j + \beta^a|_{X_j}) \\ & (x,v,w) & \longrightarrow & (x,v,w\otimes\cdots\otimes w) \end{array}$$

Wir definieren $g(\beta,a) : M(X,p(\alpha+\beta)) \longrightarrow M(X,p(\alpha+\beta^a))$ als die von den Abbildungen der Thom-Räume $g_j, j \in \mathbb{N}$, durch Übergang zum a-fachen Tensorprodukt auf β induzierte Spektrenabbildung.

Dabei sei $p(\alpha+\beta^a)$ für $a \in \mathbb{N}$ die Komposition

$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{p(\alpha)\times p(\beta^a)} BO \times BO \xrightarrow{\mu} BO$, $p(\beta^a)$ klassifizierende Abbildung von β^a als reelles zwei-dimensionales Bündel.

3.10 Lemma:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt für die durch Übergang zum a-fachen Tensorprodukt auf β induzierte Spektrenabbildung

$g(\beta,a) : M(X,p(\alpha+\beta)) \longrightarrow M(X,p(\alpha+\beta^a))$:

(i) Das folgende Diagramm ist homotopiekommutativ :

$$\begin{tikzcd} M(X,p(\alpha)) \arrow[rr, "f(\beta^a)"] \arrow[dr, "f(\beta)"'] & & M(X,p(\alpha+\beta^a)) \\ & M(X,p(\alpha+\beta)) \arrow[ur, "g(\beta,a)"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) Für $a,b,c \in \mathbb{N}$, mit $ab = c$, gilt $g(\beta,c) \simeq g(\beta^a,b)g(\beta,a)$.

(iii) Ist $(X,p(\alpha))$ eine orientierte Faserung, so induziert $g(\beta,a)$ in $\mathbb{Z}$-Cohomologie Multiplikation mit a bzgl. der Thom-Klassen

$$g(\beta,a): H^*(M(X,p(\alpha+\beta^a)),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(M(X,p(\alpha+\beta)),\mathbb{Z})$$
$$U(\alpha+\beta^a) \longrightarrow a\ (\alpha+\beta)$$

die entsprechend der Orientierung von $(X,p(\alpha))$ und der kanonischen Orientierung auf den komplexen Bündeln gewählt werden.

Beweis:

(i) und (ii) sind nach Definition von f( ) und g(,) trivial, da wir auf Thom-Raum-Niveau sogar echt kommutative Diagramme erhalten.

Es bleibt (iii) zu zeigen.

Wegen der offensichtlichen Homotopiekommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} M(X,p(\beta)) \arrow[r, "g(\beta,a)"] \arrow[d, "f(\alpha)"'] & M(X,p(\beta^a)) \arrow[d, "f(\alpha)"] \\ M(X,p(\alpha+\beta)) \arrow[r, "g(\beta,a)"] & M(X,p(\alpha+\beta^a)) \end{tikzcd}$$

genügt es, den Fall $\alpha = 0 \in \widetilde{KO}(X)$, d.h. o.B.d.A. $p(\alpha)$ konstant, zu untersuchen. Dann ist $g(\beta,a)$ die im Suspensionsspektrum von der Thom-Raumabbildung $g(\beta,a)$: $T(\beta) \longrightarrow T(\beta^a)$

$$(x,w) \longrightarrow (x,w\otimes\cdots\otimes w)$$ induzierte Abbildung.

Wir identifizieren die reduzierte Cohomologie des Thom-Raumes mit der Cohomologie des Paares (Scheibenbündel, Sphärenbündel), das wir mit $(D(\ ), S(\ ))$ bezeichnen.

Sei $i : (D(\beta_{|x}), S(\beta_{|x}) \longrightarrow (D(\beta), S(\beta))$, beziehungsweise

$i' : (D(\beta^a_{|x}), S(\beta^a_{|x}) \longrightarrow (D(\beta^a), S(\beta^a))$ die Inklusion der Faser in $x \in X$. Wegen der definierenden Eigenschaft der Thom-Klasse ist $g(\beta, a)^* U(\beta^a) \in H^2(D(\beta), S(\beta); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}U(\beta)$ durch die Einschränkung auf die Faser festgelegt. Wir identifizieren die Faser von β in x $\beta_{|x}$ als komplexen Vektorraum bezüglich eines normierten Vektors mit $\mathbb{C}$ und erhalten damit ebenfalls eine Identifikation der Faser von β^a in x $\beta^a_{|x}$ mit $\mathbb{C}$ als komplexer Vektorraum durch Weglassen der Tensorzeichen $w \otimes \cdots \otimes w \longrightarrow w^a$. Vermöge dieser Identifikation liefert die Komposition $g(\beta, a)i$ die Abbildung $g: (D(\mathbb{C}), S(\mathbb{C})) \longrightarrow (D(\mathbb{C}), S(\mathbb{C}))$, die durch Potenzieren mit a auf $\mathbb{C}$ gegeben ist. Da dies eine Abbildung vom Grad a ist, und $i'^*U(\beta^a)$ und $i^*U(\beta)$ Erzeuger der Cohomologie von $(D(\mathbb{C}), S(\mathbb{C}))$ sind gilt :

$i^*g(\beta, a)^*U(\beta^a) = g^*i'^*U(\beta^a) = ai^*U(\beta)$ und somit

$g(\beta, a)^*U(\beta^a) = aU(\beta)$.

Dabei wählen wir $U(\beta)$ und $U(\beta^a)$ als die der kanonischen Orientierung der komplexen Vektorbündel β und β^a entsprechenden Thom-Klassen. □

Durch Faktorisierungen gemäß 3.7 und 3.10 können wir jetzt alle Primfaktoren des Totalgrades zur Abschätzung der Adams-Filtrierung vollständiger Durchschnitte ausnutzen. Das nächste Lemma wird zeigen, daß diese Abschätzung optimal ist.

<u>3.11 Lemma:</u>

Sei (B,p) eine orientierbare Faserung über BO, (M,q) eine B-Mannigfaltigkeit.

Dann ist die mod p -Adams-Filtrierung von (M,q) nach oben beschränkt durch den minimalen Exponenten der Primzahl p in den Primfaktorzerlegungen der von Null verschiedenen $\mathbb{Z}$-wertigen B-Bordismuszahlen von (M,q). Das heißt explizit :

Sind $\{a_i \mid i \in I\}$ die $\mathbb{Z}$-wertigen B-Bordismuszahlen von (M,q) mit Primfaktorzerlegungen $|a_i| = \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p(a_i)}$, so gilt :

$$F_p(M,q) \leq \min \{ \nu_p(a_i) \mid i \in I \} .$$

<u>Bweis:</u>

Sei (M,q) eine B-Mannigfaltigkeit der Dimension t und $F_p(M,q) = F_p(M(q)T_M)$

größer oder gleich s. Dann ist $M(q)T_M \in F^{s,t+s}$ (vgl.3.1), wobei $F^{s,t+s} = \mathrm{Bild}(q_0 q_1 \cdots q_{s-1})_*\colon \pi_{t+s}(X_s) \longrightarrow \pi_t(X))$ aus einer mod p -Adams-Auflösung des zu (B,p) assoziierten Thom-Spektrums $X := M(B,p)$ stammt :

$$
\begin{tikzcd}
X =: X_0 \arrow[dr, "f_0"'] & & X_1 \arrow[ll, "q_0"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & X_2 \arrow[ll, "q_1"'] & \cdots\cdots \arrow[l] & X_s \cdots \arrow[l, "q_{s-1}"'] \\
& K_0 \arrow[ur, "p_0"'] & & K_1 \arrow[ur, "p_1"'] & \cdots\cdot
\end{tikzcd}
$$

Da die $f_i^*\colon H^*(K_i,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X_i,\mathbb{Z}_p)$ surjektiv sind, induzieren alle g_i die Nullabbildung in $\mathbb{Z}_p$-Cohomologie. Betrachten wir die von der kurzen exakten Koeffizientensequenz $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{red.}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$ induzierte lange exakte Sequenz in Cohomologie und das folgende kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^n(X_i,\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\beta"] & H^{n+1}(X_i,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot p"] & H^{n+1}(X_i,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\text{red.}"] & H^{n+1}(X_i,\mathbb{Z}_p) \\
\arrow[r] & H^{n-1}(X_{i-1},\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "g_i^*=0"'] & H^n(X_{i-1},\mathbb{Z}) \arrow[r, "p"] \arrow[u, "g_i^*"'] & H^n(X_{i-1},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\text{red.}"] \arrow[u, "g_i^*"'] & H^n(X_{i-1},\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "g_i^*"']
\end{tikzcd}
$$

Dabei bezeichnet β den zu der obigen Koeffizientensequenz gehörigen Bockstein- oder Verbindungshomomorphismus.

Da red $g_i^* = g_i^*$ red $= 0$ ist, liegt $\mathrm{Bild}(g_i^*\colon H^n(X_{i-1},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}(X_i,\mathbb{Z}))$ im Bild der Multiplikation mit p. Sei a die zu dem Element $x \in H^t(B,\mathbb{Z})$ gehörige B-Bordismuszahl. Dann gilt mit geeignetem $f \in \pi_{t+s}(X_s)$:

$$a = \langle q^*x, [M,q]\rangle = \langle xU, (M(q)T_M)_*[S^t]\rangle = \langle (q_0 q_1 \cdots q_{s-1} f)^* xU, [S^{t+s}]\rangle$$

$$\in p^s \langle H^{t+s}(S^{t+s},\mathbb{Z}), [S^{t+s}]\rangle = p^s\mathbb{Z}$$. Dabei ist U die Thomklasse.

Also sind alle $\mathbb{Z}$-wertigen B-Bordismuszahlen von (M,q) durch p^s teilbar. Ist dies für eine B-Mannigfaltigkeit nicht der Fall, so ist ihre mod p -Adams-Filtrierung notwendiger Weise echt kleiner als s, und die Behauptung folgt. □

3.12 Theorem:

Die mod p -Adams-Filtrierung eines vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$ bezüglich einer Normalenstruktur q ist genau der Exponent der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung des Totalgrades d. D.h. ist $d = d_1 \cdot \dots \cdot d_r = \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p(d)}$, so gilt $F_p(X_n(\underline{d}),q) = \nu_p(d)$.

Beweis:

Da der Normalentyp einer Mannigfaltigkeit bis auf Faserhomotopieäquivalenz eindeutig ist (0.4), die nach 3.3 die Adams-Filtrierung erhält, sei o.B.d.A. der Normalentyp von $X_n(\underline{d})$ nach 1.6 $(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mu(p(n,\underline{d}) \times p\langle n+1\rangle)$
Nach 3.4 ist die Adams-Filtrierung unabhängig von der Wahl der Normalenstruktur q. Wir berechnen daher $F_p(X_n(\underline{d}),q)$ für die Normalenstruktur q aus 1.6, die homotop zu $i_1 i$ ist, wobei $i\colon X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion, $i_1\colon \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle$ die Inklusion des ersten Faktors bezeichnet. Wegen $\langle i^*c_1(H), [X_n(\underline{d})]\rangle = d$ ([Libgober & Wood 3,§7]) ist der Totalgrad d eine B-Bordismuszahl.

Also gilt nach 3.11 : $F_p(X_n(\underline{d}),q) \leq \nu_p(d)$.

Nach 3.8 ist mit den dortigen Bezeichnungen
$[(X_n(\underline{d}),q_r)] = s(H^{d_r})\cdots s(H^{d_1})\,[(\mathbb{C}P^{n+r},q_0)]$. Dabei sind die zur jeweiligen Inklusion in $\mathbb{C}P^\infty$ homotopen Abbildungen q_0 bzw. q_r $(\mathbb{C}P^\infty, p(n+r,\emptyset))$- bzw. $(\mathbb{C}P^\infty, p(n,\underline{d}))$-Strukturen. Die Komposition $i_1 q_r$ ist homotop zu q. Sei O.B.d.A. $q = i_1 q_r$. Dann gilt nach 3.7 :

$$M(q)T_{X_n(\underline{d})} \simeq M(i_1)M(q_r)T_{X_n(\underline{d})} \simeq M(i_2)f(H^{d_r})\cdots f(H^{d_1})M(q_0)T_{\mathbb{C}P^{n+r}} .$$

Ist $d_i = p_1 \cdots p_k$ die Primfaktorzerlegung von d_i, so ist nach 3.10 :

$$f(H^{d_i}) = g(H^{p_1\cdots p_{k-1}}, p_k)\cdots g(H^{p_1},p_2)\, g(H,p_1)\, f(H)$$

Damit hat nach 3.10 (iii) und 3.5 das Bild von $f(H^{d_i})_*$ mindestens mod p - Adams-Filtrierung entsprechend dem Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von d_i. Da nach 3.3 $M(i_1)$ die Filtrierung erhöht oder erhält, ergibt sich $F_p(X_n(\underline{d}),q) = F(M(q)\,T_{X_n(\underline{d})}) \geq \nu_p(d_1)\cdots \nu_p(d_r) = \nu_p(d)$.
Die Behauptung folgt. $\square$

§ 4 Die Filtrierung der Torsion in $\pi_*(M(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p))$

Sei $M(B,p) := M(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p)$ das zum Normalentyp des vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$ nach 1.6 gehörige Thom-Spektrum. Es geht nun darum, die Adams-Filtrierung der Torsion in $\pi_{2n}(M(B,p))$ möglichst gut nach oben abzuschätzen. Zusammen mit den Resultaten aus § 3 sind wir dann in der Lage anzugeben, für welche vollständigen Durchschnitte vom Normalentyp (B,p) die B-Bordismusklasse bereits durch die rationale B-Bordismusklasse bestimmt ist. Dieses geometrische Problem wird durch die Adams-Spektralsequenz, insbesondere durch den E_2-Term algebraisiert und einer Lösung nähergebracht.

In § 4 gelte ebenfalls die Generalvoraussetzung 3.2, d.h. alle Spektren seinen nach unten beschränkt mit ganzzahliger Cohomologie von endlichem Typ.

4.1 Bemerkungen zur Torsion in der Adams-Spektralsequenz:

Sei X ein Spektrum gemäß 3.2 mit mod p -Adams-Spektralsequenz $\{E_s, d_s\}$. Ist $g: S \longrightarrow S$ eine Abbildung des Sphärenspektrums vom Grad p, so induziert Verknüpfen mit g in $\pi_*(X)$ Mutiplikation mit p. Es ist wohlbekannt, daß das von g in $\mathrm{Ext}_A^{**}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ repräsentierte Element ein Erzeuger von $\mathrm{Ext}_A^{1,1}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ ist. Wir bezeichnen dieses Element mit h_0.
Aus den in [Adams 1, §4] bewiesenen multiplikativen Eigenschaften der Adams-Spektralsequenz folgt :

(i) $\mathrm{Ext}_A^{**}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ ist eine graduierte $\mathbb{Z}_p$-Algebra .

(ii) Die von h_0 erzeugte Unteralgebra ist der Polynomring $\mathbb{Z}_p[h_0]$.

(iii) Die E_r-Terme der mod p -Adams-Spektralsequenz sind graduierte $\mathbb{Z}_p[h_0]$ -Moduln mit $h_0 E_r^{s,t} \subseteq E_r^{s+1,t+1}$ (Stets sei $r \geq 2$)
Die Differentiale sind $\mathbb{Z}_p[h_0]$ -Modulhomomorphismen.

(iv) Wir haben das folgende kommutative Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} F^{s,t} & \xrightarrow{\circ g} & F^{s+1,t+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\infty^{s,t} & \xrightarrow[h_0]{} & E_\infty^{s+1,t+1} \end{array}$$

Dabei sind die senkrechten Pfeile durch die Projektion auf die Faktorgruppen gegeben.

Da $H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ in jeder Graduierung endlich erzeugt ist, sind auch die Gruppen $\bigoplus_{s=0}^{\infty} \operatorname{Ext}_A^{s,t+s}(H^*(X,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$ endlich erzeugte $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Moduln und somit auch $\bigoplus_{s=0}^{\infty} E_r^{s,t+s}$ für alle $r \geq 2$. Also spaltet E_r als $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul direkt in den Torsionsmodul $TE_r := \{ a \in E_r \mid h_0^n a = 0$ für ein $n \in \mathbb{N} \}$ und einen freien $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul FE_r, d.h. es gilt : $E_r = TE_r \oplus FE_r$ als $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul. Wir werden diese Bezeichnungen beibehalten. Damit bedeutet (iv) gerade, daß die Filtrierungsquotienten der p-Torsion in $\pi_*(X)$ der $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Torsion, oder kurz $\underline{h_0\text{-Torsion}}$, im E_∞-Term entsprechen.

Seien ZE_2 die permanenten Zykel in E_2, d.h. alle Differentiale verschwinden auf denen von ihnen repräsentierten Klassen in der Adams-Spektralsequenz. Sei $p\colon ZE_2^{**} \longrightarrow E_\infty^{**}$ die natürliche Projektion (vgl.3.1).
Die naheliegende Frage ist, unter welchen Bedingungen die Abbildung $ZTE_2^{s,t} := ZE_2^{s,t} \cap TE_2^{s,t} \longrightarrow TE_\infty^{s,t}$, die duch Einschränkung von p gegeben ist, surjektiv ist. Ist dies der Fall für alle s und t, so liefert eine Abschätzung der Bigrade der Elemente in TE_2^{**} eine Abschätzung der Bigrade in TE_∞^{**} und damit eine Abschätzung der Adams-Filtrierung der p-Torsion in $\pi_t(X)$ für alle t. Eine Antwort auf diese Frage liefert die Bockstein-Spektralsequenz.

<u>4.2 Definition und Eigenschaften der Bockstein-Specktralsequenz:</u>
Zu diesem Abschnitt vergleiche [Browder 1,§1 und §4] .
Sei X ein t_0-zusammenhängendes Spektrum gemäß 3.2. Sei ∂_p der zu der exakten Sequenz $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$ gehörige Bockstein-Homomorphismus, $\partial_p\colon H^*(X,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{*+1}(X,\mathbb{Z})$. Dann haben wir das folgende exakte Dreieck :

$$\begin{tikzcd} H^*(X,\mathbb{Z}) \arrow[rr, "i^*"] & & H^*(X,\mathbb{Z}) \arrow[dl, "j^*"] \\ & H^*(X,\mathbb{Z}_p) \arrow[ul, "\partial_p"] \arrow[u, phantom, "(1)"] & \end{tikzcd}$$

Die zu diesem Dreieck assoziierte Spektralsequenz $\{ E_r, \beta_r \}$ heißt <u>mod p - Bockstein-Spektralsequenz</u>. Es gilt :

(i) $(E_1,\beta_1) = (H^*(X,\mathbb{Z}_p),\beta)$, wobei die Cohomologieoperation β der zu der exakten Sequenz $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$ assoziierte Bockstein-Homomorphismus ist.

(ii) $E_\infty \cong (H^*(X,\mathbb{Z}) / \text{Torsion}) \otimes \mathbb{Z}_p$

(iii) Die Graduierung von $H^*(X,\mathbb{Z})$ induziert eine Graduierung der E_r-Terme $E_r = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} E_r^t$, bezüglich der die Differentiale Grad 1 haben :
$\beta_r\colon E_r^t \longrightarrow E_r^{t+1}$.

Alle weiteren Überlegungen und Beweise basieren hauptsächlich auf dem Artikel von [May & Milgram] über die Bockstein- und die Adams-Spektralsequenz und dem folgenden ebenda bewiesenen Satz.

4.3 Theorem (May & Milgram 1980):

Sei X ein (m-1)-zusammenhängendes Spektrum mit $\mathbb{Z}$-Cohomologie von endlichem Typ. Sei $\{E_r, d_r\}$ die mod p -Adams-Spektralsequenz, $\{\bar{E}_r, \beta_r\}$ die mod p -Bockstein-Spektralsequenz von X.

Sei C_r, $r \geq 1$, eine Basis von $\bar{E}_r$, so daß $C_r = D_r \cup \beta_r D_r \cup C_{r+1}$ ist, wobei $\beta_r D_r = \{ \beta_r d \mid d \in D \}$ und C_{r+1} eine Menge von Zykeln bezüglich β_r ist, die auf die für E_{r+1} gewählte Basis projeziert.

Dann gilt :

(i) Die freien $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Erzeuger von FE_r , $2 \leq r \leq \infty$, entsprechen eineindeutig den Elementen der Basis C_r von $\bar{E}_r$.
Hat $c \in C_r$ Grad q und der korrespondierende freie $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Erzeuger Bigrad (s,t), so gilt $f(s)+m \leq q = t-s$.

(ii) Ist $d \in D_r$ und sind $a \in E_r^{s,t}$ und $b \in E_r^{u,v}$ mit $v-u=t-s-1$ die freien Erzeuger von FE_r, die d und $\beta_r d$ entsprechen, so gilt:

$$d_r(h_0^i\, a) = h_0^{i+r+s-u}\, b \quad \text{für } m+f(i+s) \geq t-s .$$

Dabei ist f wiefolgt definiert :

Für $p > 2$ ist $f(s) := 2(p-1)s$.

Für $p = 2$ ist $f(4k) := 8k+1$, $f(4k+1) := 8k+2$, $f(4k+2) := 8k+3$ und $f(4k+3) := 8k+5$.

4.4 Corollar:

Sei X ein Spektrum gemäß 3.2 mit mod p -Adams-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ und mod p -Bockstein-Spektralsequenz $\{\bar{E}_r, \beta_r\}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$.
Ist $\bar{E}_2^q = \bar{E}_\infty^q$ für alle $q \leq n$, so ist die Einschränkung der Projektion $p|_{ZTE_2}\colon ZTE_2^{s,t} \longrightarrow TE_\infty^{s,t}$ surjektiv für alle $t-s \leq n$.

Beweis:

Sei $p\colon ZE_2^{s,t} \longrightarrow E_\infty^{s,t}$ die Projektion der permanenten Zykel auf den E_∞-Term (vgl.3.1). Ist $p(ZTE_2^{s,t}) \neq TE_\infty^{s,t}$, so existiert wegen der Surjektivität von p ein $a \in ZFE_2^{s,t}$ mit $p(a) \in TE_\infty^{s,t}$, $t-s \leq n$. Dabei bezeichnte ZFE_2 den Schnitt $ZE_2 \cap FE_2$. Dies ist aber nach 4.3 ein Widerspruch zu der Voraussetzung $\bar{E}_2^q = \bar{E}_\infty^q$ für alle $q \leq n$. □

Nun wenden wir uns der Abschätzung der Adams-Filtrierung der h_0-Torsion in $E_2(X) = \mathrm{Ext}_A^{**}(H^*(X,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$ zu. Dazu benötigen wir ein vorbereitendes Lemma.

4.5 Lemma:

Seien X und Y Spektren, $f: X \longrightarrow Y$ eine Spektrenabbildung, so daß $f^* : H^*(Y,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ surjektiv ist.
Genau dann induziert f einen Isomorphismus auf den E_2-Termen der mod p Bockstein-Spektralsequenz $f_*: H_*(H^*(Y,\mathbb{Z}_p),\beta) \longrightarrow H_*(H^*(X,\mathbb{Z}_p),\beta)$, wenn die Cohomologie die Cofaser C_f $H^*(C_f,\mathbb{Z}_p)$ ein freier A_0-Modul ist.
Dabei bezeichnet A_0 die von $\beta \in A$ erzeugte Subhopfalgebra der Steenrod-Algebra A.

Beweis:

Nach Voraussetzung liefert die Cofaserung $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} C_f$ in $\mathbb{Z}_p$-Cohomologie die folgender kurze exakte Sequenz (stets $\mathbb{Z}_p$-Koeffizienten) :

$$0 \longleftarrow H^*(X) \xleftarrow{f^*} H^*(Y) \xleftarrow{p^*} H^*(C_f) \longleftarrow 0 \quad .$$

Die Cohomologieen sind A_0-Moduln und graduierte differentielle Gruppen bezüglich β , f^* und p^* sind A_0-Modulhomomorphismen. Also liefert die kurze exakte Sequenz eine lange exakte Sequenz in der Homologie der Kettenkomplexe $(H^*(\ ),\beta)$:

$$\longleftarrow H_{n+1}(H^*(C_f),\beta) \xleftarrow{\partial} H_n(H^*(X),\beta) \xleftarrow{f_*} H_n(H^*(Y),\beta) \xleftarrow{p_*} H_n(H^*(C_f),\beta) \longleftarrow$$

Genau dann ist f_* ein Isomorphismus, wenn $H_*(H^*(C_f),\beta) = 0$ ist , d.h. Kern β = Bild β , also wenn $H^*(C_f)$ ein freier A_0-Modul ist. □

Die nächste Proposition ergibt sich direkt aus dem Beweis von Theorem 4.3 in [May & Milgram] .

4.6 Proposition:

Sei X ein Spektrum gemäß 3.2, p eine Primzahl.
Dann existiert ein Spektrum K und eine Spektrenabbildung $f: X \to K$, so daß gilt:

(i) $f^*: H^*(K,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ ist surjektiv.

(ii) Die Cohomologie der Cofaser $H^*(C_f,\mathbb{Z}_p)$ ist ein freier A_0-Modul.

(iii) $\bigoplus_{s,t;s>0} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(K,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$ ist ein freier $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul.

Beweis([May & Milgram, proof of thm.5]):

Modulo Torsion prim zu p ist $H^n(X,\mathbb{Z})$ die direkte Summe von zyklischen Gruppen vo p-Potenzordnung und freien zyklischen Gruppen. Sei also mit der Bezeichnung $\mathbb{Z}_{(p)}$:= Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ bei der Primzahl p :

$$H^n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} = \bigoplus_{\substack{k=1\\ i\in I_k^n}}^{\infty} a_{i_k}^{(n)} \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \bigoplus_{i\in I_0^n} a_{i_0}^{(n)} \mathbb{Z}_{(p)} \quad ,$$

wobei $\left\{ a_{i_k}^{(n)} \mid i \in I_k^n ,\ k \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq H^n(X,\mathbb{Z})$ Erzeuger der zyklischen p-Gruppen bzw. der $\mathbb{Z}$-Summanden in $H^n(X,\mathbb{Z})$ sind $(n \in \mathbb{Z})$.

Wegen der Darstellbarkeit der Cohomologie mit $\mathbb{Z}$- und $\mathbb{Z}_{p^k}$-Koeffizienten liefern die $a_{i_0}^{(n)}$ und die Reduktionen der $a_{i_k}^{(n)}$ mod p^k Abbildungen in Eilenberg-MacLane-Spektren : $\varphi_{i_0}^{(n)} : X \longrightarrow \Sigma^{-n} K\mathbb{Z}$ bzw.

$$\varphi_{i_k}^{(n)} : X \longrightarrow \Sigma^{-n} K\mathbb{Z}_{p^k} \quad \text{mit } k>0 \ .$$

Diese haben die Eigenschaft, daß die folgende Abbildung einen Isomorphismis in $H^n(\ ,\mathbb{Z})$ modulo Torsion prim zu p induziert :

$$\varphi^{(n)} := \sum_{i_k} \varphi_{i_k}^{(n)} : X \longrightarrow \bigvee_{\substack{i_k\in I_k^n\\ k \neq 0}} \Sigma^{-n} K\mathbb{Z}_{p^k} \vee \bigvee_{i_0\in I_0^n} \Sigma^{-n} K\mathbb{Z} =: K^{(n)}$$

Wir setzen $K := \bigvee_{n=m}^{\infty} K^{(n)}$ und die Abbildung $f := \sum_{n=m}^{\infty} \varphi^{(n)}$. Dabei sei (m-1) der Zusammenhang von X.

f ist nach Konstruktion surjektiv in $\mathbb{Z}_p$-Cohomologie, also gilt (i).

Ebenfalls nach Konstruktion induziert f einen Isomorphismus der mod p - Bockstein-Spektralsequenzen von K und X. Also ist insbesondere die Abbildung der E_2-Terme f_* ein Isomorphismus und mit 4.5 gilt (ii).

Für den E_2-Term der Adams-Spektralsequenz gilt :

$$E_2(K) = \bigoplus_{n=m}^{\infty} \Big(\bigoplus_{i_k \neq i_0} E_2(\Sigma^{-n}K\mathbb{Z}_{p^k}) \oplus \bigoplus_{i_0} E_2(\Sigma^{-n}K\mathbb{Z}) \Big) \ .$$

Für $k \geq 2$ sind $E_2(K\mathbb{Z})$ und $E_2(K\mathbb{Z}_{p^k})$ nach [May & Milgram, lemma 3] freie $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Moduln, $E_2^{s,t}(\Sigma^{-n}K\mathbb{Z}_p) = 0$ für s>0. Also ist $\bigoplus_{\substack{t,s\\ s>0}} E_2^{s,t}(K)$ ein freier $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul. □

Zusammen mit dem folgenden Verschwindungssatz, der für p=2 von [Adams 2, §2] und für p>2 von [Liulevicius, thm.1] stammt, erhalten wir die gewünschte

Abschätzung als Corollar aus 4.6 und 4.7.

4.7 Theorem (Adams, Liulevicius):

Sei M ein (m+1)-zusammenhängender A_0-freier A-Modul.
Dann ist $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}_p) = 0$ für $s \geq 1$ und $t-s \leq m+f(s)$.
Dabei ist $f(s) = 2(p-1)s$ für $p>2$ und für $p=2$ wiefolgt gegeben:
$f(4k) = 8k+1$, $f(4k+1) = 8k+2$, $f(4k+2) = 8k+3$ und $f(4k+3) = 8k+5$.

4.8 Corollar (h_0-Verschwndungsgerade):

Sei X ein m-zusammenhängendes Spektrum gemäß 3.2, f wie in 4.7 .
Dann ist $\mathrm{TExt}_A^{t,s}(H^*(X,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p) = 0$ für $s \geq 2$ und $t-s \leq m+f(s-1)$

Bemerkung:

Trägt man Ext_A^{**} in den Koordinaten t-s und s auf, so bedeutet 4.8, daß TExt_A^{**} etwa oberhalb einer Geraden der Steigung $1/(2(p-1))$ durch $m-2(p-1)$ auf der t-s-Achse verschwindet. Diese Gerade nennen wir h_0-Verschwindungsgerade (vanishing line).

Beweis:

Sei K ein Spektrum, $f:X \longrightarrow K$ eine Spektrenabbildung mit den Eigenschaften (i)-(iii) aus 4.6. Da wegen (i) f^* surjektiv in $\mathbb{Z}_p$-Cohomologie ist, liefert die Cofaserung $X \xrightarrow{f} K \xrightarrow{p} C_f$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathbb{Z}_p$-Cohomologie und somit die folgende lange exakte Sequenz in $\mathrm{Ext}_A^{**}(H^*(\ ,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p) = E_2^{**}(\ )$:

$$\longrightarrow E_2^{s-1,t}(C_f) \xrightarrow{\partial} E_2^{s,t}(X) \xrightarrow{f_*} E_2^{s,t}(K) \xrightarrow{p_*} E_2^{s,t}(C_f) \xrightarrow{\partial}$$

f_* und p_* sind $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modulhomomorphismen, $\bigoplus_{\substack{t,s\\ s>0}} E_2^{s,t}(K)$ ist nach 4.6 ein freier $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul.

Also gilt : $T \bigoplus_{\substack{t,s\\ s>0}} E_2^{s,t}(X) \subseteq \mathrm{Kern}\, f_*$.

Weiter gilt nach Theorem 4.3 und 4.6(ii), daß f einen Isomorphismus der E_2-Terme der mod p -Bockstein-Spektralsequenzen von K und X induziert. Wegen Theorem 4.3 enthält Kern f_* daher keinen freien $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Untermodul. Also ist $\mathrm{Kern}(\, f_* : \bigoplus_{\substack{t,s\\ s>0}} E_2^{s,t}(X) \longrightarrow E_2^{**}(K)\ ) = T \bigoplus_{\substack{s,t\\ s>0}} E_2^{s,t}(X)$.

Wegen der Exaktheit der Sequenz ist Kern f_* = Bild ∂ . $H^*(C_f,\mathbb{Z}_p)$ ist nach Konstruktion von f (vgl.Bew.4.6) ein (m+1)-zusammenhängender freier A_0-Modul und damit gelten die Verschwindungssätze von Adams und Liulevicius (Theorem 4.7) : $TE_2^{s,t}(X) = \partial E_2^{s-1,t}(C_f) = 0$ für $s-1 \geq 1$ und $t-s+1 \leq (m+1)+f(s-1)$. Mit leichtem Umformen folgt die Behauptung. □

4.9 Lemma:

Sei p eine ungerade Primzahl. n und m seien ganze Zahlen mit $m \leq n$ und $p > \sqrt{n-m+(5/4)} + 1/2$.

$M = \bigoplus_k M^k$ sei ein graduierter (2m-1)-zusammenhängender A-Modul, der für alle $k \leq n$ die Bedingungen (i) M^{2k} ist endlich erzeugter $\mathbb{Z}_p$-Vektorraum und (ii) $M^{2k-1} = 0$ erfüllt.

Dann ist $T \bigoplus_{t-s=2k} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}_p) = 0$ für alle $k \leq n+m$

und diese Grenze ist scharf, d.h.es gibt A-Moduln M', die den obigen Vorraussetzungen genügen mit $T \bigoplus_{t-s=2(n+m+1)} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M',\mathbb{Z}_p) \neq 0$.

Beweis:

Ist M (2m-1)-zusammenhängend, so ist $\Sigma^{-2m}M$ $((\Sigma^j M)^k := M^{k-j})$ (-1)-zusammenhängend und erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) für alle $k \leq n-m$. Weiter gilt $\bigoplus_{t-s=j} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(\Sigma^{-2m} M,\mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{t-s=j-2m} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}_p)$ als $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul.

Wir zeigen daher :

Ist M ein (-1)-zusammenhängender A-Modul, der den Bedingungen (i) und (ii) genügt, und p eine ungerade Primzahl größer als $\sqrt{n+(5/4)} + 1/2$, so gilt: $T \bigoplus_{t-s=2k} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}_p) = 0$ für alle $k \leq n$.

Die volle Algemeinheit folgt dann durch geeignetes Suspendieren.

Bekanntlich hängt der $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul $\bigoplus_{t-s\leq j} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}_p)$ nur von dem A-Modul $M/\bigoplus_{k>j+1} M^k$ ab. Sei also o.B.d.A. $M^k=0$ für alle $k>q$ für ein genügend großes $q \in \mathbb{Z}$. Wir werden den Beweis mittels Induktion nach q führen.

Für die Induktionsbasis betrachten wir den trivialen A-Modul $\mathbb{Z}_p$:

Es ist allgemein bekannt (vgl. [Nakamura 1,thm.4.4,insb.4.4.2.b)]), daß gilt:

$$T \bigoplus_{t-s=2k} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) = 0 \quad \text{für alle } k < (p-1)p-1, \text{ und}$$

$$T \bigoplus_{t-s=2p(p-1)-2} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \neq 0 .$$

$\mathbb{Z}_p$ ist (-1)-zusammenhängend und erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) für alle $n \in \mathbb{Z}$. Genau dann ist $n < (p-1)p-1$ wenn $p > \sqrt{n+(5/4)} + 1/2$ ist. Es folgt die Behauptung für den trivialen A-Modul $\mathbb{Z}_p$.

Wegen $\mathrm{Ext}_A^{**}(M \oplus N,\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}_A^{**}(M,\mathbb{Z}_p) \oplus \mathrm{Ext}_A^{**}(N,\mathbb{Z}_p)$ als $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modul für zwei A-Moduln M und N, gilt die Behauptung auch für endliche Summen von $\mathbb{Z}_p$. Damit ist die Behauptung gezeigt für q=0.

Sei nun die Behauptung bewiesen für alle A-Moduln N mit $N^k = 0$ für $k>q-1$. Sei M ein A-Modul, der den Bedingungen (i) und (ii) genügt, und für den gilt $M^k = 0$ für alle $k>q$.

Ist q ungerade, so ist wegen (ii) auch $M^q = 0$ und die Behauptung bereits gezeigt. Sei q also gerade und $\{a_1,\dots,a_j\}$ eine Basis von M^q. Wegen $M^k = 0$ für alle $k>q$ ist M^q ein A-Untermodul von M, isomorph zu dem trivialen A-Modul $\Sigma^{-q}\bigoplus_{i=1}\mathbb{Z}_p^{(i)}$. Daher haben wir die folgende exakte Sequenz von A-Moduln :

$$0 \longrightarrow \Sigma^{-q}\bigoplus_{i=1}\mathbb{Z}_p^{(i)} \longrightarrow M \longrightarrow M/M^q \longrightarrow 0$$

Diese liefert eine lange exakte Ext-Sequenz :

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M/M^q,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{s,t}(\Sigma^{-q}\bigoplus_{i=1}\mathbb{Z}_p^{(i)},\mathbb{Z}_p) \longrightarrow$$

Da q gerade ist, gilt die Behauptung nach dem bereits Gezeigten für den trivialen A-Modul $\Sigma^{-q}\bigoplus_{i=1}\mathbb{Z}_p$ und nach der Induktionsvoraussetzung auch für M/M^q, da $(M/M^q)^k = 0$ für $k>q-1$. Da die in der langen exakten Sequenz auftretenden Abbildungen $\mathbb{Z}_p[h_0]$-Modulhomomorphismen sind, gilt somit die Behauptung auch für M. □

4.10 Lemma:

Sei p eine ungerade Primzahl.
Dann ist $H^{2k-1}(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle,\mathbb{Z}_p) = 0$ für alle $k \leq 2m + p^2 - 1$ und $H^{4m+2(p^2-1)+1}(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle,\mathbb{Z}_p) \neq 0$ für $p<2m-1$ wobei m durch die Ungleichung $4(m-1) < n+1 \leq 4m$ bestimmt ist.

Beweis:

Nach [Giambalvo, thm. 1] gilt :

$$H^*(BO\langle n+1\rangle,\mathbb{Z}_p) \cong \frac{H^*(BO,\mathbb{Z}_p)}{\mathbb{Z}_p[\Theta_i \mid \sigma_p(2i-1)<2k-1]} \otimes \bigotimes_{t\ \text{odd}>0}^{p-2} F_{4m-3-2t}$$

Dabei ist der erste Faktor ein Quotient von $H^*(BO,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\Theta_i \mid i\in\mathbb{N}]$ mit $\Theta_i \in H^{4i}(BO,\mathbb{Z}_p)$. F_k bezeichnet die Subhopfalgebra von $H^*(K(\mathbb{Z},k),\mathbb{Z}_p)$, die von dem Element $\beta P^1\sigma_k \in H^{k+2p-1}(K(\mathbb{Z},k),\mathbb{Z}_p)$ über der Steenrod-Algebra A erzeugt wird. Es sei m wie im Lemma bestimmt. Offensichtlich sitzen die Erzeuger der F_k in den Graduierungen 4g mit $4m \leq 4g \leq 4m+2p-2$. Nach [Cartan 2,(3.6)] gilt für $0\leq k\leq p-1$ und $h \in \mathbb{N}$:

$$P^k\beta P^h = \binom{k-1+h}{h} P^{h+k}\beta + \binom{k-1+h}{h-1} \beta P^{h+k} \quad .$$

Mit Hilfe der Adem-Relationen rechnet man nach : $\beta P^p\beta P^1 = 0$.
Da die Steenrod-Operation P^h Graduierung $2h(p-1)$ hat, sind die Elemente in $H^*(BO\langle n+1\rangle,\mathbb{Z}_p)$ $P^h\beta P^1\sigma_k$ Elemente grader Graduierung. Wegen $\beta\sigma_k = 0$ gilt nach den obigen Formeln $\beta P^h\beta P^1\sigma_k = 0$ für alle $h\leq p$.

$\beta P^{p+1}\beta P^1$ ist ein zulässiges Monom mit Excess $\mathrm{exc}(\beta P^{p+1}\beta P^1) = 3$. Genau dann ist $\beta P^{p+1}\beta P^1 \sigma_k$ nicht trivial, wenn k>3 ist ([Cartan 1]). Für den kleinstmöglichen Wert von k in der Zerlegung nach Giambalvo , nämlich $k=4m-3-2(p-2)$ ist dies äquivalent zu der Bedingung $p<2m-1$. Damit ist für $p<2m-1$ $\beta P^{p+1}\beta P^1 \sigma_{4m-3-2(p-2)}$ das Element mit der niedrigsten ungeraden Graduierung, nämlich $4m+2(p^2-1)+1$. Die Behauptung folgt. □

4.11 Lemma:

Für den E_2-Term der mod p -Bockstein-Spektralsequenz des zu der Faserung $(B,p) := (\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p)$ über BO assoziierten Thom-Spektrums $M(B,p)$ gilt für alle Primzahlen p :

$$E_2^{2q+1}(M(B,p)) = H_{2q+1}(H^*(M(B,p),\mathbb{Z}_p),\beta) = 0 \quad \text{für alle } q \leq n.$$

Insbesondere gilt $E_2^q(M(B,p)) = E_\infty^q(M(B,p))$ für alle $q \leq 2n+1$.

Beweis:

Wegen $H^1(M(B,p),\mathbb{Z}_p)=0$ ist die Faserung (B,p) orientierbar und der Bockstein-Homomorphismus β operiert trivial auf der Thom-Klasse. Mit der Cartan-Formel folgt, daß der Thom-Isomorphismus mod p von $H^*(B,\mathbb{Z}_p)$ auf $H^*(M(B,p),\mathbb{Z}_p)$ ein Isomorphismus von A_0-Moduln ist. Dabei bezeichnet A_0 die von β erzeugte Sub-Hopf-Algebra der Steenrod-Algebra A. β operiert ebenfalls trivial auf $H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}_p)$ und folglich gilt mit der Künneth- und der Cartan-Formel :

$$H_*(H^*(B,\mathbb{Z}_p),\beta) \cong H_*(H^*(BO\langle n+1\rangle,\mathbb{Z}_p),\beta) \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}_p)$$

Da die Cohomologie von $\mathbb{C}P^\infty$ in ungeraden Dimensionen verschwindet, ist somit zu zeigen :

$$(*) \qquad H_{2q+1}(H^*(BO\langle n+1\rangle,\mathbb{Z}_p),\beta) = 0 \quad \text{für alle } q \leq n \ .$$

Wir werden (*) auf die analoge Aussage über die Spektren bo<k>, die die zusammenhängende reelle K-Theorie repräsentieren, zurückführen, da über diese die benötigten Aussagen in zitierfähiger Form vorliegen. Dabei ist bo<k> definiert als das Ω-Spektrum, dessen 8i-ter Term BO<k+8i> ist, mit den durch Bott-Periodizität vermittelten Verbindungsabbildungen.

Nach [Stolz §3,3.6 und §4] gibt es eine Abbildung

$F: H^*(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(BO\langle k\rangle,\mathbb{Z}_p)$, die von einer geometrischen Abbildung $M(BO\langle k\rangle,p\langle k\rangle)/S \longrightarrow bo\langle k\rangle$ und dem reduzierten Thom-Isomorphismus der Faserung $(BO\langle k\rangle,p\langle k\rangle)$ herrührt. Wegen $H^1(BO\langle k\rangle,\mathbb{Z})= 0$ für $k>1$ $(n \geq 3)$ ist wie oben der Thom-Isomorphismus und damit auch F ein A_0-Modulhomomorphismus.

Sei zunächst p ungerade.

Da BO lokalisiert bei p nur Homotopie in den durch 4 teilbaren Dimensionen trägt, ist die Lokalisierung $BO\langle n+1\rangle_{(p)}$ homotopieäquivalent zu $BO\langle 4m\rangle_{(p)}$, wobei m durch die Ungleichung $4(m-1)<n+1\leq 4m$ bestimmt ist. Sei also o.B.d.A. $n+1=4m=:k$.

Nach 4.10 ist die Behauptung (*) trivial für $q\leq 2m+p^2$, da die entsprechenden Cohomologiegruppen verschwinden. Sei also $4m=k>q>2m+p^2$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß [Stolz 4.15] auf unseren Bereich anwendbar ist, und es ergibt sich für $F\colon H^j(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^j(BO\langle k\rangle,\mathbb{Z}_p)$: Kern F = 0 für alle $j<pk$ und Cokern F = 0 für alle $j<2k+8$ mit $j\neq 2k$ oder $2k+4$. Daher folgt die Behauptung (*), wenn die folgende Behauptung gilt :

(**) $\quad H_{2q+1}(H^*(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_p),\beta)=0 \quad$ für alle $q\in\mathbb{Z}$.

Nach Definition der Spektren $bo\langle k\rangle$ gilt für die Lokalisierung bei p : $bo\langle k\rangle_{(p)}=\Sigma^{-k}bo_{(p)}$. Nach [Adams 3,lec.4] spaltet die Lokalisierung von BU bei p in p-1 Faktoren : $BU_{(p)}=\prod_{i=0,\dots,p-2}BU_i$ und induziert eine Spaltung des Spektrums bu, das die zusammenhängende komplexe K-Theorie repräsentiert :

$$bu_{(p)}=\bigvee_{i=0}^{p-2}\Sigma^{-i}\ell .$$

Offensichtlich ist die Verknüpfung der Inklusion mit der vom Vergessen der komplexen Struktur induzierten Abbildung von bu nach bo

$$\bigvee_{i=0,\,i\equiv 0(2)}^{p-2}\Sigma^{-i}\ell\longrightarrow bu_{(p)}\longrightarrow bo_{(p)}$$

eine Homotopieäquivalenz. Nach [Kane §22] ist $H_{2q+1}(H^*(\ell,\mathbb{Z}_p),\beta)=0$ für alle $q\in\mathbb{Z}$. Die Behauptung (**) ergibt sich durch Übergang zu direkten Summen und i-fachem Suspendieren mit geradem i.

Sei nun p=2.

Mit der gleichen Argumentation wie bei ungeradem p betrachten wir O.B.d.A. den Raum $BO\langle k\rangle$, wobei k die kleinste Zahl $\geq n+1$ ist, die kongruent 0,1,2 oder 4 mod 8 ist. Wieder zeigt eine einfache Rechnung unter Berücksichtigung der generellen Voraussetzung $n\geq 3$, daß [Stolz 4.7] auf unseren Bereich anwendbar ist und das folgende Ergebnis liefert:

$F\colon H^j(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^j(BO\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2)$ ist ein Isomorphismus für alle $j<2k$, und injektiv für $j=2k$. Daher folgt die Behauptung (*), wenn die folgende Behauptung gilt :

(**) $\quad H_{2q+1}(H^*(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2),\beta)=0 \quad$ für alle $q\in\mathbb{Z}$.

Wir beweisen (**) durch Induktion nach k mittels der von der Faserung $BO\langle k+1\rangle\xrightarrow{p}BO\langle k\rangle\xrightarrow{g}K(\pi_k(BO),k)$ ([Stong 1]) induzierten Cofaserung

von Spektren : $bo\langle k+1\rangle \xrightarrow{p} bo\langle k\rangle \xrightarrow{g} \Sigma^{-k}K\pi_k(BO)$.
Für $k=0$ ist $bo\langle 0\rangle = bo$ und $H^*(bo,\mathbb{Z}_2)$ ist isomorph zu dem A-Linksmodul $A \otimes_{A_1} \mathbb{Z}_2$, wobei A_1 die von Sq^1 und Sq^2 erzeugte Sub-Hopf-Algebra der Steenrod-Algebra bezeichnet ([Mahowald & Milgram]). Die Induktionsbasis folgt mittels Theorem 4.3 aus [Lellmann,A10 und A11] .
Sei nun $k \equiv 0,1,2$ oder 4 mod 8, $k>0$.
Nach [Stong 1,thm.3.A] ist $g^*: H^j(K(\pi_k(BO),k),\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^j(BO\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2)$ surjektiv für alle $j \leq 2^{h(k)}$ mit $h(k) = \#\{s \in \mathbb{N} \mid 0<s\leq k,\ s\equiv 0,1,2,4 \bmod 8\}$
Wegen $H^j(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2) = \varinjlim H^{j+8i}(BO\langle k+8i\rangle,\mathbb{Z}_2)$ ist damit g^* surjektiv für alle j, $g^*: H^j(\Sigma^{-k}K\pi_k(BO),\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^j(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2)$. Damit liefert die obige Cofaserung kurze exakte Sequenzen in Cohomologie (ab jetzt stets mit $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten) der Gestalt :

$$0 \longrightarrow H^{j-1}(bo\langle k+1\rangle) \xrightarrow{\partial} H^j(\Sigma^{-k}K\pi_k(BO)) \xrightarrow{g^*} H^j(bo\langle k\rangle) \longrightarrow 0$$

Da alle Abbildungen A_0-Modulhomomorphismen sind, erhalten wir die folgende lange exakte Sequenz in der Homologie bezüglich des Bockstein-Homomorphismus $\beta=Sq^1$:

$$\longrightarrow H_j(H^*(\Sigma^{-k}K\pi_k(BO)),\beta) \xrightarrow{g^*} H_j(H^*(bo\langle k\rangle),\beta) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H_j(H^*(bo\langle k+1\rangle),\beta) \xrightarrow{\partial_*} H_{j+1}(H^*(\Sigma^{-k}K\pi_k(BO)),\beta) \longrightarrow$$

Wegen $H_{j+1}(H^*(\Sigma^{-k}K\pi_k(BO)),\beta) = 0$ für $j+1\neq k$ ([May & Milgram,3 und thm.5]) ist $\delta: H_j(H^*(bo\langle k\rangle),\beta) \longrightarrow H_j(H^*(bo\langle k+1\rangle),\beta)$ surjektiv für $j+1\neq k$. Ist $j+1=k$, so ist $H^j(bo\langle k+1\rangle) = 0$ und δ ist trivialerweise surjektiv. Aus der Induktionsannahme $H_{2q+1}(H^*(bo\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2),\beta) = 0$ für alle q folgt damit $H_{2q+1}(H^*(bo\langle k+1\rangle,\mathbb{Z}_2),\beta) = 0$ für alle q. Also gilt (**) für alle $k\in\mathbb{N}$ und somit die Behauptung (*). □

4.12 Theorem:

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ zwei vollständige Durchschnitte der komplexen Dimension $n\geq 3$. $\nu_p(d)$, und analog $\nu_p(d')$, bezeichne den Exponenten der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung des Totalgrades d von $X_n(\underline{d})$. Es gelte die Bedingung (*) :

$$(*) \qquad \nu_p(d),\ \nu_p(d') \geq \frac{2n+1}{2(p-1)} + 1 \quad \text{für alle Primzahlen } p \leq \sqrt{n+\tfrac{5}{4}} + \tfrac{1}{2}$$

Genau dann sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorph, wenn ihre Totalgrade und die Pontrjagin-Klassen der assoziierten Bündel auf $\mathbb{C}P^n$ übereinstimmen, d.h. falls gilt :

(i) $d = d'$

(ii) $p_i(\xi(n,\underline{d})) = p_i(\xi(n,\underline{d}'))$ für $i = 1,\dots,[n/2]$.

Dabei ist $\xi(n,\underline{d})$, und analog $\xi(n,\underline{d}')$, wiefolgt definiert :

$\xi(n,\underline{d}) = -(n+r+1)H + H^{d_1} + \cdots + H^{d_r} \in K(\mathbb{C}P^\infty)$.

Beweis: stabil

Nach dem Theorem in 0.6 sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ genau dann diffeomorph, wenn wenn sie vom selben Normalentyp (B,p) sind und bezüglich geeigneter Normalenstrukturen B-bordant sind. Nach Theorem 1.9 haben sie gleichen Normalentyp, wenn (ii) erfüllt ist, und (ii) mit $i = 1,\dots,[n/4]$ ist dafür notwendig. Haben $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ den selben Normalentyp (B,p), so sind sie bezüglich geeigneter Normalenstrukturen q und q' nach Theorem 2.8 genau dann rational B-bordant, wenn (i) erfüllt ist und (ii) für $i = [n/4]+1,\dots,[n/2]$. Also sind (i) und (ii) notwendig.

Wir werden zeigen, daß (i) und (ii) unter der Bedingung (*) hinreichend für B-Bordanz sind. Seien $(X_n(\underline{d}),q)$ und $(X_n(\underline{d}'),q')$ rational B-bordant, o.B.d.A. $(B,p) = (\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, p)$. Dies bedeutet, daß $(X_n(\underline{d}),q) \cup -(X_n(\underline{d}'),q')$ vermöge Pontrjagin-Thom-Konstruktion ein Element endlicher Ordnung in $\pi_{2n}(M(B,p))$ repräsentiert. Nach Theorem 3.12 ist die mod p -Adams-Filtrierung von $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ gerade $\nu_p(d)$ ($d=d'$ nach (i)). Wegen Bedingung (*) ist die mod p -Adams-Filtrierung von $(X_n(\underline{d}),q) \cup -(X_n(\underline{d}'),q')$ ebenfalls größer oder gleich $(2n+1)/2(p-1) + 1$ für $p \leq \sqrt{n+(5/4)} + 1/2$ und repräsentiert somit für solch p im E_∞-Term der mod p -Adams-Spektralsequenz von $M(B,p)$ ein Element oberhalb der h_0-Verschwindungsgeraden, die in 4.8 für $E_2^{**}(M(B,p))$ gegeben ist. Dabei ist zu beachten, daß Thom-Spektren (-1)-zusammenhängend sind. Mit $s = \nu_p(d)$ und $t-s=2n$ folgt mit einer einfachen Rechnung $t-s \leq f(s-1)-1$. Wegen $p \leq \sqrt{n+(5/4)} + 1/2$ ist $(2n+1)/2(p-1)$ stets größer als 1 ($n \geq 3$), und somit die Voraussetzung $s \geq 2$ erfüllt. Wegen 4.11 erfüllt $M(B,p)$ die Voraussetzungen von 4.4 , und somit ist die Einschränkung der Projektion $ZTE_2^{s,t}(M(B,p)) \longrightarrow TE_\infty^{s,t}(M(B,p))$ surjektiv für alle $t-s \leq 2n+1$. Also ist die B-Bordismusklasse von $(X_n(\underline{d}),q) \cup -(X_n(\underline{d}'),q')$ modulo p-Torsion mit $p > \sqrt{n+(5/4)} + 1/2$ trivial.

Nach 4.10 erfüllt $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times BO\langle n+1\rangle, \mathbb{Z}_p)$ und damit auch vermöge Thom-Isomorphismus $H^*(M(B,p),\mathbb{Z}_p)$ die Voraussetzungen von 4.9. $M(B,p)$ ist (-1)-zusammenhängend und für $p > \sqrt{n+(5/4)} + 1/2$ ist die Grenze aus 4.10 $2m+p^2-1$ mit $4(m-1) < n+1 \leq 4m$ größer als n. Also gilt :

$T \bigoplus_{t-s=2k} \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(M(B,p),\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p) = 0$ für alle $k \leq n$.

Damit ist die B-Bordismusklasse von $(X_n(\underline{d}),q) \cup -(X_n(\underline{d}'),q')$ trivial und $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ sind stabil diffeomorph.

$\square$

§ 5 Das Kürzungsproblem für vollständige Durchschnitte gerader komplexer Dimension

Sind zwei Mannigfaltigkeiten M und N stabil diffeomorph, so stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen sie diffeomorph sind. Lax gesprochen lautet die Frage, wann man in der Gleichung $M \# r(S^n \times S^n) = N \# s(S^n \times S^n)$ die stabilisierenden Summanden $r(S^n \times S^n)$ und $s(S^n \times S^n)$ gegeneinander kürzen kann, d.h. wann $M = N$ folgt. Dabei ist $2n = \dim M = \dim N$. Diese Fragestellung bezeichnen wir als Kürzungsproblem (vgl.0.8).

Wiewohl das Kürzungsproblem im allgemeinem schwierig ist, werden wir es für eine große Klasse von vollständigen Durchschnitten lösen können: Für komplex geraddimensionale vollständige Durchschnitte genügend hoher Adams-Filtrierung, d.h. die der Voraussetzung (*) von Theorem 4.12 genügen, und komplex ungeraddimensionale, deren Kervaire-Invariante nicht definiert oder trivial ist, sind Diffeomorphie und stabile Diffeomorphie bei Kontrolle der Euler-Charakteristik äquivalente Begriffe. Der Beweis dieses Resultats ist relativ einfach dank dem hervorragenden Ineinandergreifen der Kürzungssätze in dem Klassifikationsprogramm von [Kreck 2](vgl.0.8) einerseits und den Ergebnissen von Libgober, Wood und Browder über die Homologie und topologische Struktur vollständiger Durchschnitte andererseits ([Libgober & Wood 2] für gerade,[Libgober & Wood 3] und [Browder 3] für ungerade komplexe Dimension).

Da sich der Fall gerader komplexer Dimension in Argumentation und Aussage wesentlich vom ungeraddimensionalen Fall unterscheidet, werden wir diese Fälle getrennt behandeln. Für den Rest des Paragraphen sei stets $X_n(\underline{d})$ ein vollständiger Durchschnitt gerader komplexer Dimension n.

Im ihrem Artikel "On the topological structure of even dimensional complete intersections" ([Libgober & Wood 2]) beschreiben Libgober und Wood die topologische Struktur geraddimensionaler vollständiger Durchschnitte in Konstruktionen wie Plumben, Bilden zusammenhängender Summen und Verkleben entlang von Rändern. Dabei werden die Bausteine sowie Teile der Konstruktion durch die mittlere Homologie und der darauf erklärten Schnittform bestimmt. Diese ist Gegenstand genauerer Untersuchung:

5.1 Die mittlere Homologie:

(Zu diesem Abschnitt vergleiche [Libgober & Wood 2,pp.640-642])

Wie bereits bemerkt, ist die Inklusion eines vollständigen Durchschnittes $i\colon X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ eine n-Äquivalenz ([Bott]). Es folgt zusammen mit Poincaré-Dualität und universellem Koeffiziententheorem, daß die mittlere Homologie $H:=H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist. Sein Rang ist durch die Euler-Charakteristik $e(X_n(\underline{d}))$ bestimmt, die aus n und dem Multigrad berechenbar ist (vgl. [Hirzebruch,p.160]). Die Schnittform liefert eine symetrische unimodulare Bilinearform $\lambda : H \times H \longrightarrow \mathbb{Z}$, so daß (H,λ) ein innerer Produktraum im Sinne von [Husemoller & Milnor] ist. Die Inclusion i versieht H mit einem ausgezeichneten Element $h:=i^*c_1(H)^{[n/2]} \cap [X_n(\underline{d})]$, für das gilt : $\{u \in H \mid \lambda(u,h)=0\} =: h^\perp = \mathrm{Bild}(\pi_n(X_n(\underline{d})) \longrightarrow H)$.
Dies motiviert zu der folgenden Definition, der die mittlere Homologie eines vollständigen Durchschnittes genügt ([Libgober & Wood 2,thm.2.1]):

5.2 Definition:

Ein basierter innerer Produktraum ist ein Tripel (H,h,λ), wobei H ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist, $\lambda\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine symetrische unimodulare Bilinearform und $h \in H$ ein ausgezeichnetes Element ist mit :

(i) h ist unteilbar ,

(ii) $h^\perp$ hat geraden Typ, d.h. aus $\lambda(u,h) = 0$ folgt $\lambda(u,u)$ ist gerade.

Wir nennen $d:= \lambda(h,h)$ den Grad von (H,h,λ). (H,h,λ) heißt von geradem Typ, falls $\lambda(x,x)$ gerade ist für alle $x \in H$, von ungeradem Typ wenn dies für ein x nicht der Fall ist. Zwei basierte innere Produkträume heißen isomorph, wemm es eine Isometrie gibt, die das ausgezeichnete Element erhält.

Die folgenden Aussagen aus [Libgober & Wood 2,3.7,thm.5.1,2.2] klären die für uns wichtige Frage, wann zwei basierte innere Produktraüme isomorph sind, insbesondere solche, die im Zusammenhang mit vollständigen Durchschnitten auftreten.

5.3 Theorem (Libgober & Wood 1981):

(i) Zwei basierte innere Produkträume von gleichem Rang, Typ, Grad und gleicher Signatur, die der Bedingung $|\mathrm{sign}| \leq \mathrm{rang} - 4$ genügen, sind isomorph.

(ii) Für den basierten inneren Prodiktraum $(H_n(X_n(\underline{d}),h,\lambda)$ mit $n \geq 3$ gilt $|\mathrm{sign}| \leq \mathrm{rang} - 4$, falls $(\underline{d}) \notin \{(1),(2),(2,2)\}$.

(iii) $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ hat genau dann geraden Typ wenn gilt : $\binom{m+s}{m} \equiv 0 \bmod 2$.

Dabei ist $2m=n$ und s die Anzahl der geraden Einträge im Multigrad $(\underline{d})$.

Mit Hilfe einer Zerlegung des inneren Produktraumes $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ und der Information, die das charakteristische Element h liefert, konstruieren Libgober und Wood eine topologische Zerlegung von $X_n(\underline{d})$, die im nächsten Theorem zusammengefaßt wird (vgl.[Libgober & Wood 2,thm.8.1,thm. 9.3]). Dieser Satz wird uns die Grundlage zur Lösung des Kürzungsproblems liefern.

5.4 Theorem (Libgober & Wood, 1981):

Sei $X_n(\underline{d})$ ein vollständiger Durchschnitt mit $n=2m>2$ und $(\underline{d}) \neq (2)$ oder $(2,2)$ und für $n=4$ $(\underline{d}) \neq (3)$.

Dann besitzt $X_n(\underline{d})$ eine differenzierbare Zerlegung der Gestalt :

$$X_n(\underline{d}) = W_1(n,\underline{d}) \cup_f W_2(n,\underline{d})$$

Dabei ist $W_1(n,\underline{d})$ ein n-dimensionales Scheibenbündel über $\mathbb{C}P^m$, eindeutig bestimmt durch die stabile Klasse des Bündels :

$\eta = j^*i^*(\ (m+r)H - (H^{d_1} + \cdots + H^{d_r}))$, wobei $ij\colon \mathbb{C}P^m \longrightarrow X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ homotop zur linearen Einbettung ist, und die Euler-Klasse $e(\eta)$ wiefolgt bestimmt ist :

$$e(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \binom{m+s}{m} \equiv 0 \bmod 2 \\ 1 & \text{falls } \binom{m+s}{m} \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$W_2(n,\underline{d})$ ist bis auf Diffeomorphie durch das Tripel $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ bestimmt und $f\colon \partial W_1(n,\underline{d}) \longrightarrow \partial W_2(n,\underline{d})$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis:

[Libgober & Wood 2,thm.8.1 und 9.3] liefern für $(\underline{d}) \neq (2),(2,2)$ und falls $n=4$ ist für $(\underline{d}) \neq (3)$ unter der Voraussetzung $n=2m>2$ eine Zerlegung $X_n(\underline{d}) = W_1(n,\underline{d}) \cup_f W_2(n,\underline{d})$. Dabei ist $W_1(n,\underline{d})$ ein n-dimensionales Scheibenbündel über $\mathbb{C}P^m$: $D(\eta)$. Nach [Libgober & Wodd 2,lemma 2.4] ist seine Isomorphieklasse bestimmt durch die stabile Isomorphieklasse und die Euler-Charakteristik von η. η ist gegeben als Normalenbündel einer Einbettung $j\colon \mathbb{C}P^m \longrightarrow X_n(\underline{d})$, wobei die Komposition $ji\colon CP^m \longrightarrow X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ homotop zur linearen Einbettung ist. Die stabile Klasse von η ist bestimmt

durch die Gleichung aus [Libgober & Wood 2,lemma 2.3] :
$\tau(\mathbb{C}P^m) + \nu(j) + j^* \nu(i) = j^* i^* \tau(\mathbb{C}P^{n+r})$, mit $\nu(i) = i^*(H^{d_1} + \dots + H^{d_r})$.
Ist $H := H_n(X_n(\underline{d}), \mathbb{Z})$ von geradem Typ, so wird $W_2(n,\underline{d})$ in [Libgober & Wood 2,thm.8.1] als die folgende randzusammenhängende Summe bestimmt :
$W_2(n,\underline{d}) = W \natural a(S^n \times S^n - D^{2n}) \natural bV$. Dabei ist V die durch Plumben nach dem Dynkin-Diagramm E_8 konstruierte Mannigfaltigkeit (vgl. [Browder 2,chap.5, §2]). Die Zahlen a und b ergeben sich aus der direkten Zerlegung von H in [Libgober & Wood 2,thm.3.2] : $H = A \oplus aU \oplus b\Gamma_8$. Dabei hat U Rang 2 und Schnittform $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Γ_8 hat Rang 8 und die dem Dynkin-Diagramm E_8 entsprechende Schnittform M_0 (vgl. [Browder 2,chap.5,§2]). A ist ein unimodularer Summand von H von minimalem Rang, der h enthält, und damit eindeutig bestimmt. W ist in diesem Fall diffeomorph zu $W_1(n,d)$.
Ist H von ungeradem Typ, so wird $W_2(n,\underline{d})$ in [Libgober & Wood 2,9.3] als die randzusammenhängende Summe $W_2(n,\underline{d}) = W \natural c(S^n \times S^n - D^{2n}) \natural bV$ bestimmt, wobei b wieder aus der Zerlegung $H = A \oplus aU \oplus b\Gamma_8$ stammt. W wird nach einem Dynkin-Diagramm geplumpt, das durch die Kongruenzklasse des Totalgrades d mod 8 eindeutig bestimmt ist. Nach [Libgober & Wood 2,9.5] ist W dadurch bis auf Diffeomorphie eindeutig bestimmt. Die Zahl c ergibt sich aus a, Rang A und Rang $H_n(W, \mathbb{Z})$. □

Bevor wir mittels dieser Zerlegung an das Kürzungsproblem herangehen, wollen wir sehen, in wieweit die Bausteine $W_1(n,\underline{d})$ und $W_2(n,\underline{d})$ durch den Normalentyp und die B-Bordismusklasse von $X_n(\underline{d})$ bestimmt sind. $W_1(n,\underline{d})$ ist bestimmt durch die Zurückziehung des Bündels $(m+r)H - (H^{d_1} + \dots + H^{d_r})$, was gerade das bekannte Bündel $-(m+1)H - \xi(n,\underline{d})$ ist, sowie die Kongruenzklasse mod 2 des Binomialkoeffizienten $\binom{m+s}{m}$. Dabei ist n=2m und s bezeichnet die Anzahl der geraden Einträge im Multigrad $(\underline{d})$.
Auch bei der Behandlung der complex ungeraddimensionalen vollständigen Durchschnitte spielt die Kongruenzklasse mod 2 des Binomialkoeffizienten $\binom{m+s}{m+1}$ eine wichtige Rolle (hier:n=2m+1). Daher will ich an dieser Stelle ein Lemma formulieren, das besagt, daß die Anzahl der geraden Einträge im Multigrad bei vollständigen Durchschnitten vom selben Normalentyp nicht wesentlich verschieden ist.

<u>5.5 Lemma:</u>

Seinen $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ zwei vollständige Durchschnitte von selben Normalentyp mit Dimension n = 2m oder n = 2m+1 . Sei s bzw. s' die

Anzahl der geraden Einträge in dem Multigrad $(\underline{d})$ bzw. $(\underline{d}')$.
Dann ist $s \equiv s' \mod 2^k$ mit $2^{k-1} \leq m < 2^k$.

Insbesondere gilt : $\binom{m+s}{m} \equiv \binom{m+s'}{m} \mod 2$,und

$$\binom{m+s}{m+1} \equiv \binom{m+s'}{m+1} \mod 2 \quad \text{für } m+1<2^k .$$

Beweis:

Sei $i: \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die lineare Einbettung. Da $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ vom selben Normalentyp sind, stimmen die Einschränkungen von $\xi(n,\underline{d})$ und $\xi(n,\underline{d}')$ auf $\mathbb{C}P^m$ überein (1.6 und 1.7). Insbesondere gilt für die totalen Stiefel-Whitney-Klassen $w(i^*\xi(n,\underline{d})) = w(i^*\xi(n,\underline{d}'))$.

Wegen $c_1(H^{d_j}) = d_j c_1(H)$ ist
$$w_2(H^{d_j}) = \begin{cases} w_2(H) & \text{für } d_j \equiv 1 \mod 2 \\ 0 & \text{für } d_j \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

Sei $j \in \mathbb{Z}$ so bestimmt, daß $2^j > \max\{n+s+1, n+s'+1\}$. Dann gilt :

$$w(i^*\xi(n,\underline{d})) = i^*w(-(n+r+1)H + H^{d_1} + \dots + H^{d_r}) = i^*w(-(n+r+1)H)\, w(H)^{r-s}$$
$$= i^*w(H)^{-(n+s+1)} = i^*(1+w_2(H))^{2^j-(n+s+1)} = \sum_{i=0}^{m} \binom{2^j-(n+s+1)}{i} w_2(H)^i .$$

Eine analoge Rechnung läßt sich für $i^*\xi(n,\underline{d}')$ durchführen, und somit gilt:

$$\binom{2^j-(n+s+1)}{i} \equiv \binom{2^j-(n+s+1)}{i} \mod 2 \quad \text{für } i = 1,\dots,m .$$

Da dies insbesondere für alle $2^t = i \leq m$ gilt, ist die obige Kongruenz gleichbedeutend damit, daß die Binärdarstellungen von $2^j-(n+s+1)$ und $2^j-(n+s'+1)$ bis zur k-ten Stelle ausschließlich übereinstimmen (Erinnerung: $2^{k-1} \leq m < 2^k$).

Also gilt : $2^j-(n+s+1) \equiv 2^j-(n+s'+1) \mod 2^k$, und somit $s \equiv s' \mod 2^k$.

Insbesondere gilt : $\binom{m+s}{m} \equiv \binom{m+s'}{m} \mod 2$, da $m<2^k$ ist, und

$$\binom{m+s}{m+1} \equiv \binom{m+s}{m+1} \mod 2 \quad \text{für } m+1<2^k$$ □

Als kleine nützliche Folgerung aus 5.5 werden wir das Problem der lästigen Ausnahmefälle $X_n(\underline{d})$ mit $(\underline{d}) = (1),(2),(3)$ oder $(2,2)$ erledigen. Da der Totalgrad d eine stabile Diffeomorphieinvariante ist (Theorem 4.12), ist die stabile Diffeomorphieklassifikation für kleine d sehr einfach: Sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorph, so folgt für $d<4$ $(\underline{d}) = (\underline{d}')$ und damit Diffeomorphie. Ist $d=4$, so sind $(\underline{d})$ und $(\underline{d}') \in \{(2,2),(4)\}$. Mit Hilfe vom 5.5 können wir $X_n(2,2)$ und $X_n(4)$ durch den Normalentyp unterscheiden. Wegen $n \geq 3$ ist stets $s \equiv s' \mod 2^k$ mit $k \geq 2$.(Tatsächlich folgt aus 5.5 bereits, daß $X_n(1), X_n(2)$ und $X_n(2,2)$ nicht den selben Normalentyp haben.)

Insbesondere sind $X_n(2,2)$ und $X_n(4)$ nicht stabil diffeomorph, und somit folgt auch für d=4 $(\underline{d}) = (\underline{d}')$. Damit haben wir das folgende Corollar bewiesen :

5.6 Corollar:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ beliebig.

Sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorph, so folgt aus $d \leq 5$ die Gleichheit der Multigrade : $(\underline{d}) = (\underline{d}')$. Dabei bedeutet Gleichheit die Identifikation von $(d_1,\dots,d_r)$ mit $(d_1,\dots,d_r,1,\dots,1)$.

Insbesondere fogt aus $d \leq 5$, daß $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ diffeomorph sind.

Daher können wir ab jetzt stets d>5 voraussetzen.

5.7 Proposition:

Haben die vollständigen Durchschnitte $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ den selben Normalentyp, so gilt für die Bausteine der Zerlegung gemäß Theorem 5.4, sofern diese für $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ erklärt ist :

$W_1(n,\underline{d})$ ist diffeomorph zu $W_1(n,\underline{d}')$.

Beweis:

Haben $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ gleichen Normalentyp, so sind die Einschränkungen von $\xi(n,\underline{d})$ und $\xi(n,\underline{d}')$ auf $\mathbb{C}P^m$ (n=2m) stabil isomorph (1.6 und 1.7). Da die Komposition ij: $\mathbb{C}P^m \longrightarrow X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ homotop zur linearen Einbettung ist, gilt in $\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^m)$:

$$\begin{aligned}\eta &= j^*i^*((m+r)H - (H^{d_1}+\dots+H^{d_r})) = j^*i^*(-(m+1)H - \xi(n,\underline{d}))\\ &= j^*i^*(-(m+1)H - \xi(n,\underline{d}')) = j^*i^*((m+r')H - (H^{d'_1}+\dots+H^{d'_{r'}})) = \eta' .\end{aligned}$$

(Erinnerung : $\xi(n,\underline{d}) = -(n+r+1)H + H^{d_1}+\dots+H^{d_r}$). Nach 6.5 gilt weiter : $\binom{m+s}{m} \equiv \binom{m+s'}{m} \bmod 2$, und somit haben η und η' gleichen stabilen Isomorphietyp und gleiche Euler-Klasse (5.4). Somit sind η und η' als n-dimensionale Bündel isomorph, also ihre Scheibenbündel diffeomorph und die Behauptung folgt wegen $W_1(n,\underline{d}) = D(\eta)$, bzw. $W_1(n,\underline{d}') = D(\eta')$ (5.4). $\square$

5.8 Proposition:

Sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorph mit gleicher Euler-Charakteristik, so sind ihre inneren basierten Produkträume $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ und $(H_n(X_n(\underline{d}'),\mathbb{Z}),h',\lambda)$ isomorph.

Insbesondere sind die Bausteine der Zerlegung gemäß Theorem 5.4, sofern diese für $(\underline{d})$ und $(\underline{d}')$ erklärt ist, $W_2(n,\underline{d})$ und $W_2(n,\underline{d}')$ diffeomorph.

Beweis:

Wegen der bezüglich der Schnittform orthogonalen Zerlegung $H_n(X_n(\underline{d})\#r(S^n\times S^n),\mathbb{Z}) = H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}) \oplus H_n(r(S^n\times S^n),\mathbb{Z})$ ist offensichtlich $(H_n(X_n(\underline{d})\#r(S^n\times S^n),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ ein basierter innerer Produktraum (vgl.5.2). Weiter ist $h^\perp = (h^\perp \cap H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})) \oplus H_n(r(S^n\times S^n),\mathbb{Z})$, und somit hat $h^\perp$ geraden Typ, denn $h^\perp\cap H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ hat geraden Typ (5.1) und die Einschränkung von λ auf $H_n(r(S^n\times S^n),\mathbb{Z})$ ist die hyperbolische Form, d.h. insbesondere für $u \in H_n(r(S^n\times S^n),\mathbb{Z})$: $\lambda(u,u) \equiv 0 \mod 2$. Analog ist die mittlere Homologie von $X_n(\underline{d}')\#r(S^n\times S^n)$ zusammen mit h' und der Schnittform ein innerer Produktraum. Nach Theorem 5.3(ii) gilt für $H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})$ falls $(\underline{d}) \neq (1)$, (2) oder (2,2): $|\text{sign } H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z})| \leq \text{rang } H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}) - 4$. Ist $(\underline{d}) = (1)$, (2) oder (2,2), so folgt aus 5.6 $(\underline{d}) = (\underline{d}')$ und die Behauptung gilt trivialerweise. Sei nun $(\underline{d}) \neq (1),(2)$ oder (2,2). Dann erfüllen die basierten inneren Produkträume der vollständigen Durchschnitte und ihrer Stabilisierungen die Voraussetzung von Theorem 5.3(i).

Nach Voraussetzung sind $X_n(\underline{d})\#r(S^n\times S^n)$ und $X_n(\underline{d}')\#r(S^n\times S^n)$ für geeignetes $r \in \mathbb{N}_0$ diffeomorph. Also haben $(H_n(X_n(\underline{d})\#r(S^n\times S^n),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ und $(H_n(X_n(\underline{d}')\#r(S^n\times S^n),\mathbb{Z}),h',\lambda)$ gleichen Typ, Rang und gleiche Signatur. Da Stabilisieren den Typ und die Signatur nicht ändert, haben auch die basierten inneren Produkträume $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ und $(H_n(X_n(\underline{d}'),\mathbb{Z}),h',\lambda)$ gleichen Typ,gleiche Signatur und auch gleichen Rang, da ihre Euler-Charakteristik übereinstimmt. Nach Definition ist der Grad von $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ gerade der Totalgrad von $X_n(\underline{d})$. Da dieser nach Theorem 4.12 eine Invariante der stabilen Diffeomorphie ist, sind nach Theorem 5.3(i) die basierten inneren Produkträume $(H_n(X_n(\underline{d}),\mathbb{Z}),h,\lambda)$ und $(H_n(X_n(\underline{d}'),\mathbb{Z}),h',\lambda)$ isomorph. Also sind nach Theorem 5.4 $W_2(n,\underline{d})$ und $W_2(n,\underline{d}')$ diffeomorph. □

Die Propositionen 5.7 und 5.8 ergeben zusammen:

Sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorph, so stimmen ihre Zerlegungen gemäß Theorem 5.4,sofern erklärt, bis auf den verklebenden Diffeomorphismus überein, d.h. : $X_n(\underline{d}) = W_1 \cup_f W_2$ und

$X_n(\underline{d}') = W_1 \cup_g W_2$, mit $W_1 = W_1(n,\underline{d})$ und $W_2 = W_2(n,\underline{d})$.

Läßt sich der Diffeomorphismus $g^{-1}f\colon \partial W_1 \longrightarrow \partial W_1$ zu einem Diffeomorphismus von W_1 fortsetzen, so sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ diffeomorph. Diese Fragestellung kann ebenfalls mit dem in §0 dargestellten Programm von M.Kreck behandelt werden:

Ist $W_1 \cup_{g^{-1}f} W_1$ vom Normalentyp (B,p) und B-nullbordant bezüglich einer geeigneten Normalenstruktur, so läßt sich $g^{-1}f$ stabil fortsetzen, d.h. es existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ und ein Diffeomorphismus F von $W_1 \# r(S^n \times S^n)$, dessen Einschränkung auf ∂W_1 gerade $g^{-1}f$ ist (Theorem in 0.8). Verschwindet zusätzlich die Schnittform λ auf dem Kern der Normalen-Gauß-Abbildung $K\pi_n(W_1)$ (vgl.0.7), so ist nach der Proposition in 0.8 $g^{-1}f$ fortsetzbar zu einem Diffeomorphismus von W_1 und somit $X_n(\underline{d})$ diffeomorph zu $X_n(\underline{d}')$. Nach der Proposition in 0.8 verschwindet λ etwa, wenn die Inklusion des Randes eine Surjektion $K\pi_n(\partial W_1) \longrightarrow K\pi_n(W_1)$ liefert. Da W_1 homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^m$ mit 2m=n ist, und $\pi_n(\mathbb{C}P^m)$ wegen n>2 trivial ist, ist dies stets der Fall. Daher bleibt nur zu klären, wann der Diffeomorphismus $g^{-1}f$ stabil auf W_1 fortsetzbar ist.

Dies leistet der folgende Satz für vollständige Durchschnitte genügend hoher Adams-Filtrierung. Diese einschränkende Voraussetzung wird in dieser Arbeit leider notwendig, da der Beweis an einer wesentlichen Stelle benutzt, daß rational die Gruppe der Homotopieklassen von Faserhomotopieselbstäquivalenzen des Normalentyps Aut(B,p) lediglich als Orientierungsumkehrung operiert und somit für hohe Filtrierungen gut zu kontrollieren ist. Das wird allerdings das Hauptresultat dieser Arbeit nicht verschlechtern, da es sich exakt um die Voraussetzungen von Theorem 4.12, das bis auf stabile Diffeomorphie klassifiziert, handelt.

<u>5.9 Theorem:</u>

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ vollständige Durchschnitte gerader komplexer Dimension n>2. Sei seien stabil diffeomorph mit gleicher Euler-Charakteristik. Ihre Zerlegungen gemäß Theorem 5.4 seien mit 5.7 und 5.8 gegeben durch : $X_n(\underline{d}) = W_1 \cup_f W_2$ und

$$X_n(\underline{d}') = W_1 \cup_g W_2 \quad .$$

Für die Exponenten in der Primfaktorzerlegung des Totalgrades d gelte

$$(*) \qquad \nu_p(d) \geq \frac{2n+1}{2(p-1)} + 1 \qquad \text{für alle Primzahlen } p \leq \sqrt{n+\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \quad .$$

Dann läßt sich der Diffeomorphismus $g^{-1}f\colon \partial W_1 \longrightarrow \partial W_1$ stabil, d.h. zu einem Diffeomorphismus von $W_1 \# r(S^n \times S^n)$ fortsetzen für ein $r \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Wegen (*) erfüllen $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ die Voraussetzung von Theorem 5.4. Da sie stabil diffeomorph sind, haben sie den selben Nornalentyp (B,p) und es existieren Normalenstrukturen $q\colon W_1 \cup_f W_2 \longrightarrow B$ und $q'\colon W_1 \cup_g W_2 \longrightarrow B$, so daß $(W_1 \cup_f W_2, q)$ und $(W_1 \cup_g W_2, q')$ B-bordant sind (Theorem in 0.6). Sei $(\overline{W},\overline{h})$ ein B-Bordismus.

Wir werden zeigen, daß sich die Einschränkung von q auf W_2 zu einer Normalenstruktur auf $W_1 \cup_g W_2$ fortsetzen läßt, die B-bordant zu q' ist. Mit diesem B-Bordismus und $(\overline{W},\overline{h})$ werden wir eine (B,p)-Mannigfaltigkeit konstruieren, deren Rand $W_1 \cup_{g^{-1}f} W_1$ ist, und die eine B-Struktur trägt, deren Einschränkung auf den Rand Normalenstrukturen auf W_1 liefert. Dann läßt sich nach dem Theorem in 0.6 $g^{-1}f\colon \partial W_1 \longrightarrow \partial W_1$ stabil fortsetzen.

Der Beweis erfolgt in Schritten.

(1) $q_2 := q_{|W_2}$ läßt sich zu einer Normalenstruktur auf $W_1 \cup_g W_2$ fortsetzen.

Denn:

Sei W_1 das Scheibenbündel des n-dinensionalen Bündels η über $\mathbb{C}P^m$ gemäß 5.4, d.h. $W_1 = D(\eta)$ und $\partial W_1 = S(\eta)$. Die Einschränkungen von q und q' auf W_1 bzw. W_2 seien mit q_1 und q'_1 bzw. q_2 und q'_2 bezeichnet.

O.B.d.A. seien $W_1 \cup_f W_2$ und $W_1 \cup_g W_2$ so eingebettet, daß die Einschränkungen der Normalen-Gauß-Abbildungen auf W_1 übereinstimmen. Sei also $\nu := pq_1 = pq'_1 : W_1 \longrightarrow BO$ die Normalen-Gauß-Abbildung von $W_1 \subseteq W_1 \cup_f W_2$.

Wir stellen uns q und q' ebenfalls verklebt vor : $q = q_1 \cup_f q_2$ und $q' = q'_1 \cup_g q'_2$.

Wir haben das folgende Hochhebungsproblem :

Warum nicht Hindernis-theorie ?

$$\begin{tikzcd} S(\eta) \arrow[r, "q_2 g"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, "p"] \\ D(\eta) \arrow[r, "\nu"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & BO \end{tikzcd}$$

Gesucht ist eine Abbildung φ , die das Diagramm kommutativ ergänzt.

Da (B,p) eine n-antizusammenhängende Faserung ist (vgl. 0.4), verschwinden die Homotopiegruppen der Faser F $\pi_k(F)$ für $k \geq n$. Die Hindernisse zur Fortsetzung einer Hochhebung vom j- auf das j+1-Gerüst eines CW-Komplexes liegen in $\pi_j(F)$. Um $q_2 g$ zu einer B-Struktur fortzusetzen genügt es also, einen Unterkomplex K des CW-Komplexes $D(\eta)$ zu finden, mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $S(\eta) \subseteq K$

(ii) $q_2 g$ läßt sich auf K zu einer Hochhebung von $\nu_{|K}$ fortsetzen .

(iii) $D(\eta)$ entsteht aus K durch Anheften von Zellen der Dimension $\geq n+1$. Wählt man einen CW-Aufbau von $\mathbb{C}P^m$, so daß die Einschränkung von η auf jeder Zelle trivial ist, so liefert das Kreuzprodukt mit D^n einen Zellaufbau von $D(\eta)$, bei dem Zellen der Dimension $\geq n$ an $S(\eta)$ angeheftet werden. Nach den oben Bemerkten ist das einzige Problem das Anheften der endlich vielen Zellen $x_i \times D^n$, wobei x_i Nullzelle in $\mathbb{C}P^m$ bezüglich des gewählten CW-Aufbaus ist. Damit können wir die Hochhebung $q_2 g$ fortsetzen, wenn wir das folgende Hochhebungsproblem gelöst haben :

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q_2 g|S^{n-1}"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, "p"] \\ D^n \arrow[r, "\nu|D^n"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & BO \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Da wir stets die Einbettung einer Mannigfaltigkeit $M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ so isotopieren können, daß ihre Einschränkung auf endlich viele eingebettete Scheiben affin ist, sei o.B.d.A. die Einschränkung der Normalen-Gauß-Abbildung $\nu|D^n$ Konstant. Dann liegt das Bild $q_2 g(S^{n-1})$ ganz in einer Faser und das Hochhebungsproblem (*) ist genau dann lösbar, wenn $q_2 g|S^{n-1}: S^{n-1} \longrightarrow \underset{F}{B}$ nullhomotop ist.

q_1 setzt $q_2 g = q|\partial W_1$ auf W_1 fort. Insbesondere ist die Einschränkung von $q_2 g g^{-1} f$ auf das Urbild von S^{n-1} unter $g^{-1}f$ $(g^{-1}f)(S^{n-1})$ nullhomotop, denn $\pi_{n-1}(W_1) = \pi_{n-1}(\mathbb{C}P^m)$ ist trivial ($n \geq 3$, n gerade). Also ist die Komposition $(g^{-1}f)^{-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g^{-1}f} S^{n-1} \xrightarrow{q_2 g|S^{n-1}} F$ nullhomotop, d.h. das Hindernis verschwindet und das Hochhebungsproblem (*) ist lösbar.

Wir definieren den Unterkomplex K wiefolgt :

$K := S(\eta) \cup \{ \{\text{Nullzellen in } \mathbb{C}P^m\} \times D^n \}$. Offensichtlich erfüllt K die Bedingungen (i)-(iii). Damit existiert eine Hochhebung $\bar{q}$ von ν, die $q_2 g$ auf W_1 fortsetzt. Nach Konstruktion ist dann $\tilde{q} := \bar{q} \cup_g q_2$ eine Fortsetzung von q_2 auf $W_1 \cup_g W_2$.

Zu zeigen bleibt : $\tilde{q}$ ist eine n-Äquivalenz :

Nach [Libgober & Wood, §7, §8] induziert die Inklusion i: $W_2 \longrightarrow W_1 \cup_g W_2$ Isomorphismen in Homologie bis zur Dimension n-1 einschließlich. Da $qi = \tilde{q}i$ und q als Normalenstruktur eine n-Äquivalenz ist, induziert auch $\tilde{q}$ Isomorphismen in $\mathbb{Z}$-Homologie bis zur Dimension n-1 einschließlich. $\pi_{n-1}(W_2)$ ist trivial, da W_2 durch Plumben von Bündeln über S^n und Bilden randzusammenhängender Summen mit einem Bündel über $\mathbb{C}P^m$ entsteht ($n \geq 3$, n gerade)(vgl.

den Beweis von Theorem 5.4 und [Libgober & Wood 2,thm.8.1 und cor.9.3]). Da B homotopieäquivalent zu $\mathbb{CP}^{\infty} \times BO\langle n+1\rangle$ ist (1.6), ist $\pi_n(B)$ ebenfalls trivial, und damit ist mit Whitehead $\tilde{q}$ eine n-Äquivalenz.
Es folgt Aussage (1).

(2) $(W_1 \cup_{g^{-1}f} W_1\,,\ q_1 \cup_{g^{-1}f} \tilde{q}_1)$ ist B-nullbordant.

Denn:

Nach Theorem 4.12 sind $(W_1 \cup_g W_2, q')$ und $(W_1 \cup_g W_2, \tilde{q})$ B-bordant modulo Orientierung. Da $(W_1 \cup_f W_2, q)$ B-bordant zu $(W_1 \cup_g W_2, q')$ ist, induzieren q und q' auf W_2 dieselbe Orientierung und somit auch $\tilde{q}$ und q', da $\tilde{q}$ und q auf W_2 übereinstimmen. Also sind $(W_1 \cup_g W_2, \tilde{q})$ und $(W_1 \cup_g W_2, q')$ B-bordant und damit auch $(W_1 \cup_f W_2, q)$ und $(W_1 \cup_g W_2, \tilde{q})$. Sei (W',h') ein B-Bordismus. Da h' die B-Strukturen q und $\tilde{q} = \bar{q} \cup_g q_2$ fortsetzt, die nach Konstruktion von $\tilde{q}$ auf W_2 übereinstimmen, können wir $W_2 \subseteq W_1 \cup_f W_2 \subseteq W'$ und $W_2 \subseteq W_1 \cup_g W_2 \subseteq W'$ über die Identität verkleben und erhalten so eine B-Mannigfaltigkeit (W,h), die nach Konstruktion von der B-Mannigfaltigkeit $(W_1 \cup_{g^{-1}f} W_1\,,\ q_1 \cup_{g^{-1}f} \tilde{q}_1)$ berandet wird.
Zu zeigen bleibt noch :

(3) q_1 und $\tilde{q}_1 : W_1 \longrightarrow B$ sind n-Äquivalenzen.

Denn:

Nach Theorem 5.4 ist die Komposition $\mathbb{CP}^m \hookrightarrow D(\eta)=W_1 \xrightarrow{j} W_1 \cup_g W_2 \longrightarrow \mathbb{CP}^{\infty}$ homotop zur linearen Einbettung und damit eine n-Äquivalenz. Also ist $j_*: \pi_k(W_1) \longrightarrow \pi_k(W_1 \cup_f W_2)$ ein Isomorphismus für k<n. Da q und $\tilde{q}$ n-Äquivalenzen sind und $\pi_n(B)$ trivial ist, sind $q_1 = qj$ und $\tilde{q}_1 = \tilde{q}j$ ebenfalls n-Äquivalenzen.

Nach den Theorem in 0.7 läßt sich wegen (2) und (3) der Diffeomorphismus $g^{-1}f\colon \partial W_1 \longrightarrow \partial W_1$ stabil auf W_1 fortsetzen. □

5.10 Theorem:

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorphe vollständige Durchschnitte gerader komplexer Dimension n>2 mit gleicher Euler-Charakteristik. Für die Exponenten in der Primfaktorzerlegung des Totalgrades d gelte

(*) $\nu_p(d) \geq \dfrac{2n+1}{2(p-1)} + 1$ für alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$.

Dann sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ diffeomorph.

Beweis:

Wegen 5.6 sei o.B.d.A. d>5. Dann erfüllen $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ die Voraussetzung von Theorem 5.4. Zusammen mit 5.7 und 5.8 erhalten wir die folgenden Zerlegungen : $X_n(\underline{d}) = W_1 \cup_f W_2$ und

$X_n(\underline{d}') = W_1 \cup_g W_2$ mit $W_1 := W_1(n,\underline{d})$ und $W_2 := W_2(n,\underline{d})$.

Nach Theorem 5.9 läßt sich der Diffeomorphismus $g^{-1}f \colon \partial W_1 \longrightarrow \partial W_1$ stabil fortsetzen, d.h. zu einem Diffeomorphismus $F\colon W_1 \# r(S^n \times S^n) \longrightarrow W_1 \# r(S^n \times S^n)$ für ein geeignetes r. Nach dem Theorem in 0.8 läßt sich $g^{-1}f$ zu einem Diffeomorphismus auf W_1 fortsetzen, wenn die Komposition $\vartheta(F)$ eine Isometrie bezüglich der Schnittzahl λ und der Selbstdurchdringungszahl μ ist (zu Definition und Eigenschaften von λ, μ und $\vartheta(F)$ vgl. 0.7 und 0.8). Nach der Proposition in 0.8 ist das Verschwinden von λ und μ auf $K\pi_n(W_1)$ hinreichend hierfür. Da W_1 homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^m$ mit 2m=n ist, ist $\pi_n(W_1)$ und damit auch $K\pi_n(W_1) \subseteq \pi_n(W_1)$ trivial und die Bedingung ist automatisch erfüllt. Also ist $\vartheta(F)$ eine Isometrie und es existiert eine Fortsetzung von $g^{-1}f$ zu einem Diffeomorphismus auf W_1. Diese setzt die Identität auf W_2 zu einem Diffeomorphismus von $W_1 \cup_f W_2$ nach $W_1 \cup_g W_2$ fort. $\square$

§ 6 Das Kürzungsproblem für vollständige Durchschnitte ungerader komplexer Dimension

Wie auch schon im Fall gerader komplexer Dimension liefert eine genauere Untersuchung der mittleren Homologie und der darauf erklärten Schnittform eine Beschreibung der topologischen Struktur der vollständigen Durchschnitte. Damit haben sich unter andren [Wood] (für ungeraden Totalgrad) und vor allem [Browder 3] beschäftigt. Bevor ich ihre Ergebnisse genauer darstelle, will ich etwa auf den allgemeinen Hintergrund dieser Arbeiten eingehen und die Kervaire-Invariante definieren, die in diesem Paragraphen eine wichtige Rolle spielen wird.

Sei n ungerade, X eine 2n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Im folgenden bezeichne $H_*(X)$ stets die Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.
Ist $H_{n-1}(X)$ torsionsfrei, so ist wegen Poincaré-Dualität und universellem Koeffiziententheorem $H_n(X)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul und bildet zusammen mit der Schnittform λ einen inneren Produktraum im Sinne von [Husemoller & Milnor].
Da n ungerade ist, ist λ schiefsymetrisch, und somit besitzt $H_n(X)$ nach [Husemoller & Milnor, chap. 1] eine symplektische Basis, d.h. eine Basis $\{e_1,\dots,e_q,f_1,\dots,f_q\}$, so daß gilt :

$$\lambda(e_i,e_j) = 0\ ,\ \lambda(f_i,f_j) = 0 \text{ und } \lambda(e_i,f_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Sind alle Homologieklassen sphärisch, d.h. h: $\pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ surjektiv, so kann man nach Einbettungssätzen von [Haeflinger] und Whitney ($n \geq 3$) eine symplektische Basis durch eingebettete Sphären $\{S_{11},\dots,S_{1q},S_{21},\dots S_{2q}\}$ repräsentieren, für die gilt :

$$S_{ij} \cap S_{ik} = \emptyset \qquad \text{für alle } j \neq k \text{ und } i = 1 \text{ oder } 2$$

$$S_{1j} \cap S_{2k} = \emptyset \qquad \text{für alle } j \neq k \text{ und}$$

$$S_{1j} \cap S_{2j} = * \qquad \text{für alle } j\ .$$

Kann man alle S_{ij} mit trivialem Normalenbündel in X wählen, so ist eine Umgebung von $S_{1j} \times S_{2j}$ in X diffeomorph zu $S^n \times S^n - D^{2n}$, und man erhält eine differenzierbare Zerlegung $X = M \# q(S^n \times S^n)$, wobei M eine Mannigfaltigkeit mit $H_n(M)=0$ ist.

Eine solche Zerlegung, die es für vollständige Durchschnitte ungerader komplexer Dimension n (Dies sei ab jetzt stets vorausgesetzt) in vielen Fällen gibt (vgl. [Libgober & Wood 3, §2]), liefert einen Ansatz zur Lösung des Kürzungsproblems:

Sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorphe vollständige Durchschnitte mit solchen Zerlegungen : $X_n(\underline{d}) = M \# q(S^n \times S^n)$,bzw.
$X_n(\underline{d}') = M' \# q'(S^n \times S^n)$,mit $H_n(M) = 0 = H_n(M')$,
so sind M und M' stabil diffeomorph mit gleicher Euler-Charakteristik.
Sei etwa $f: M \# k(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# k(S^n \times S^n)$ ein Diffeomorphismus.
Das Problem, ob M und M' diffeomorph sind, was die Diffeomorphie von $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ bei gleicher Euler-Charakteristik impliziert, ist einfacher zu behandeln als das ursprüngliche Kürzungsproblem. Denn die nach dem Theorem in 0.8 hinreichende Bedingung, daß die Komposition $\vartheta(f)$ (vgl.0.8)

$$\pi_n(k(S^n \times S^n)) \xrightarrow{i_*} \pi_n(M\#k(S^n \times S^n)) \xrightarrow{f_*} \pi_n(M'\#k(S^n \times S^n)) \xrightarrow{pr} \pi_n(k(S^n \times S^n))$$

eine Isometrie bezüglich der Schnittform λ und der Selbstdurchdringungszahl μ ist, ist wegen $H_n(M) = 0 = H_n(M')$ für λ stets erfüllt (vgl.0.7 und die Proposition in 0.8).

Ist n=3 oder 7, so ist $\pi_{n-1}(SO_n) = 0$ und damit hat jede eingebettete Sphäre S^n triviales Normalenbündel. Die Frage, ob für $n \neq 3$ oder 7 eine symplektische Basis gefunden werden kann, die durch eingebettete Sphären mit trivialem Normalenbündel, d.h. durch $S^n \times D^n \subseteq X$ repräsentiert wird, kann mit Hilfe der Kervaire-Invariante studiert werden. Um diese zu definieren, muß man zunächst eine Abbildung $\psi: H_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ definieren, so daß für $x \in H_n(X)$ $\psi(x)$ genau dann trivial ist, wenn x durch $S^n \times D^n \subseteq X$ repräsentierbar ist. Ist der Hurewicz-Homomorphismus h eingeschränkt auf den Kern der Normalen-Gauß-Abbildung h: $K\pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ ein Isomorphismus, so ergibt sich notwendig $\psi = \mu h^{-1}$ für $n \neq 3$ oder 7. Denn nach Proposition (v)in 0.7 ist ein Element x aus $K\pi_n(X)$ genau dann repräsentierbar durch $S^n \times D^n \subseteq X$, wenn die Selbstdurchdringungszahl $\mu(x)$ trivial ist.
Die Einschränkung des Hurewicz ist ein Isomorph. für $X = q(S^n \times S^n)$. Da wir nur in diesem Fall Rechnungen mit der Kervaire-Invariante durchführen müssen, will ich auf die Definition der Abbildung ψ verzichten. Man kann sie nachlesen etwa in [Kervaire & Milnor,§8] oder in [Browder 3,§1] . Dort kann man auch die folgende Definition vergleichen :

<u>6.1 Definition:</u>

Sei X eine Mannigfaltigkeit, so daß $(H_n(X), \lambda)$ ein innerer Produktraum im Sinne von [Husemoller & Milnor] ist.
Sei $\{e_1, \dots, e_q, f_1, \dots f_q\}$ eine symplektische Basis von $H_n(X)$.
Ist die in [Kervaire & Milnor,§8] ($\psi_0 = \psi$) bzw. [Browder 3,§1]

definierte Abbildung ψ auf $H_n(X)$ erklärt, $\psi: H_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$,so definieren wir die Kervaire- oder Arf-Invariante $K(X)$ von X wiefolgt :

$$K(X) := \psi(e_1)\psi(f_1) + \cdots + \psi(e_q)\psi(f_q) \in \mathbb{Z}_2 .$$

6.2 Bemerkungen zur Eigenschaft von K(X):

(vgl. [Kervaire & Milnor, §8])

Ist die Kervaire-Invariante $K(X)$ definiert, so gilt :

(i) $K(X)$ ist unabhängig von der Wahl der symplektischen Basis.

(ii) Analog zu 6.1 ist die Kervaire-Invariante eines direkten Summanden von $H_n(X)$ definiert. Ist $H_n(X) = A \oplus B$ eine bezüglich der Schnittform λ orthogonale Zerlegung, so gilt offensichtlich : $K(X) = K(A) + K(B)$.

(iii) Ist $K(X)=0$, so besitzt $H_n(X)$ eine symplektische Basis $\{ e_1,\dots,e_q,f_1,\dots,f_q \}$ mit $\psi(e_i) = 0$ für $i = 1,\dots,q$.

(iv) Für x und $y \in H_n(X)$ gilt $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) + [\lambda(x,y)]$.

Aus 6.2(iii) ergibt sich das folgende Lemma, das wir beim Beweis des Kürzungssatzes benötigen werden:

6.3 Lemma:

Für eine Mannigfaltigkeit X der Dimension $2n$, n ungerade, sei die Kervaire-Invariante $K(X)$ definiert und trivial.
Hat ein direkter Summand der Kodimension 2 von $H_n(X)$ eine symplektische Basis auf der ψ verschwindet, so existieren Elemente e und $f \in H_n(X)$ mit $\psi(e) = \psi(f) = 0$, die diese Basis zu einer symplektischen Basis von $H_n(X)$ ergänzen.

Beweis:

Sei $U \subseteq H_n(X)$ der direkte Summand. Da $(H_n(X), \lambda)$ ein innerer Produktraum ist, besitzt U ein orthogonales Komplement $U^{\perp}$. Wegen 6.2 und der Voraussetzung ist $K(U^{\perp}) = K(X) + K(U) = 0$ und $U^{\perp}$ besitzt eine symplektische Basis $\{ e,f' \}$ mit $\psi(e)=0$.

Ist $\psi(f')=0$, so setzen wir $f:=f'$.

Ist $\psi(f')=1$, so leistet $f:= e+f'$ das Gewünschte :

$\lambda(e,e+f') = \lambda(e,e) + \lambda(e,f') = 1$

$\lambda(e+f',e+f') = \lambda(e,e) + \lambda(e,f') + \lambda(f',e) + \lambda(f',f') = 0$

$\psi(e+f') = \psi(e) + \psi(f') + [\lambda(e,f')] = 0 + 1 + 1 = 0 \in \mathbb{Z}_2$. $\square$

[Browder 3] hat in seinem Artikel "Complete intersections and the Kervaire invariant" die Kervaire-Invariante für vollständige Durchschnitte berechnet. Die folgenden drei Theoreme sind seine Hauptresultate.

6.4 Theorem (Browder 1979):

Sei $n=2m+1$, s die Anzahl der gerader Einträge im Multigrad des vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$.
Ist $\binom{m+s}{m+1} \equiv 1 \bmod 2$, $n \neq 1,3$ oder 7, dann existiert eine nullhomologe eingebettete Sphäre $S^n \subseteq X_n(\underline{d})$ mit nicht trivialem (stabil trivialem) Normalenbündel und jedes Element aus $H_n(X_n(\underline{d}))$ kann durch $S^n \times D^n \subseteq X_n(\underline{d})$ repräsentiert werden. Insbesondere ist die Kervaire-Invariante von $X_n(\underline{d})$ nicht definiert.
Ist $n = 1,3$ oder 7, so hat jede eingebettete Sphäre $S^n \subseteq X_n(\underline{d})$ triviales Normalenbündel.

Die Existenz einer nullhomologen eingebetteten Sphäre $S^n \subseteq X_n(\underline{d})$ mit nicht trivialem, stabil trivialem Normalenbündel bedeutet, daß für einen stabilen Diffeomorphismus f zwischen solchen vollständigen Durchschnitten die Komposition $\vartheta(f)$ bezüglich μ nicht notwendig eine Isometrie sein muß, da in diesem Fall μ auf $K\pi_n(M) \neq 0$ nicht verschwindet (vgl. die Ausführungen zu Beginn des Paragraphen und die Proposition (v) in 0.7).

6.5 Theorem (Browder 1979):

Mit den Bezeichnungen aus Theorem 6.4 gilt :
Ist $\binom{m+s}{m+1} \equiv 0 \bmod 2$, dann ist eine quadratische Form definiert :

$\psi : H_n(X_n(\underline{d})) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, so daß ein Element $x \in H_n(X_n)$, $n\neq 1,3$ oder 7, genau dann durch $S^n \times D^n \subseteq X_n(\underline{d})$ repräsentiert wird, wenn $\psi(x)=0$ ist.

6.6 Theorem (Browder 1979)

Mit den Bezeichnungen aus Theorem 6.4 gilt :
Ist $\binom{m+s}{m+1} \equiv 0 \bmod 2$, so besitzt $H_n(X_n(\underline{d}))$ eine symplektische Basis, repräsentiert durch eingebettete Sphären mit trivialem Normalenbündel $S^n \times D^n \subseteq X_n(\underline{d})$ genau dann, wenn die Kervaire-Invariante $K(X_n(\underline{d})) = 0$ ist. für $K(X_n(\underline{d}))$ gilt :

(i) Sind alle Einträge im Mutligrad ungerade, d.h. s=0, so gilt :

$$K(X_n(d)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } d \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ 1 & \text{falls } d \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases}$$

(ii) Sind einige der Einträge gerade, d.h. $s>0$, so gilt :
$K(X_n(\underline{d})) = 1$ genau dann, wenn $s=2$, 4 teilt m und 8 teilt nicht d.

Es ergibt sich die folgende Zerlegung [Libgober & Wood 3,§2] :

6.7 Theorem (Browder 1979, Libgober & Wood 1980):

Sei $X_n(\underline{d})$ ein vollständiger Durchschnitt ungerader komplexer Dimension.

(i) Ist die Kervaire-Invariante von $X_n(\underline{d})$ nicht definiert oder trivial, so besitzt $X_n(\underline{d})$ die folgende differenzierbare Zerlegung :
$$X_n(\underline{d}) = M \# q(S^n \times S^n) .$$

(ii) Ist die Kervaire-Invariante von $X_n(\underline{d})$ definiert und nicht trivial, so besitzt $X_n(\underline{d})$ die folgende topologische Zerlegung :
$$X_n(\underline{d}) \cong K \# M \# q(S^n \times S^n) .$$

Dabei bezeichnet M eine Mannigfaltigkeit mit $H_n(M) = 0$ und K die Kervaire-Mannigfaltigkeit, die durch das Plumben zweier Kopien des tangentialen Scheibenbündels von S^n an einem Punkt entsteht.

6.8 Bemerkung:

Theorem 6.6 zeigt, daß $K(X_n(\underline{d}))$ eine relativ restriktive Forderung ist. Da notwendig $s=0$ oder $s=2$ und $8 \nmid d$ folgt, können nur vollständige Durchschnitte der mod 2 -Adams-Filtrierung 0 oder 2 nichttriviale Kervaire-Invariante besitzen (vgl.Theorem 3.12). Also haben die vollständigen Durchschnitte, die der Bedingung (*) aus Theorem 4.12 genügen, stets nicht definierte oder triviale Kervaire-Invariante. Denn die Bedingung (*) für $p=2$ besagt $\nu_2(d) \geq n+(3/2)$ und sichert damit wegen $n \geq 3$ $\nu_2(d) \geq 5$. Da wir aber nur über solche vollständigen Durchschnitte Aussagen über stabile Diffeomorphie machen können (Theorem 4.12), werde ich den Fall $K(X_n(\underline{d})) = 1$ nicht mehr betrachten.

Lemma 5.5 besagt im Zusammenhang mit den Theoremen 6.4 und 6.5, daß in den meisten Fällen bereits der Normalentyp des vollständigen Durchschnittes darüber entscheidet, ob die Kervaire-Invariante definiert ist oder nicht. Das liefert das folgende Corollar zu den Theoremen 6.4 und 6.5 :

6.9 Corollar:

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ vollständige Durchschnitte vom gleichen Normalentyp der komplexen Dimension $n=2m+1$.

Für die Exponenten der Primzahl 2 in den Primfaktorzerlegungen der Totalgrade d und d' gelte $\nu_2(d) > 2$ und $\nu_2(d') > 2$.

(i) Ist m+1 keine Zweierpotenz, so sind die Kervaire-Invarianten von $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ entweder beide nicht definiert oder beide trivial.

(ii) Ist $m+1 = 2^k$, so sind ihre Kervaire-Invarianten entweder beide nicht definiert oder trivial genau dann, wenn $s_k = s'_k$ ist. Dabei bezeichnet s bzw. s' die Anzahl der geraden Einträge im Multigrad $(\underline{d})$ bzw. $(\underline{d}')$ und s_k bzw. s'_k die k-te Stelle in der Binärdarstellung von $s = \sum_{k=0}^{\infty} s_k\, 2^k$ bzw $s' = \sum_{k=0}^{\infty} s'_k\, 2^k$.

Beweis:

(i) ist eine direkte Folgerung aus 5.5 und den Theoremen 6.4 und 6.5 .

(ii): Sei nun $m+1 = 2^k$. Dann gilt :

$$\binom{2^k-1+s}{2^k} \equiv \binom{2^k-1+s'}{2^k} \mod 2 \iff (s+2^k-1)_k = (s'+2^k-1)_k$$
$$\iff s_k = s'_k\,, \quad \text{da } s \equiv s' \mod 2^k \ (5.5).$$

Dabei bezeichnet $(\ )_k$ die k-te Stelle in der Binärdarstellung. □

6.10 Bemerkung:

Sei $m+1 = 2^k$. Aus dem Beweis von 5.5 ist leicht ersichtlich, daß die Bedingung $s_k = s'_k$ erfüllt ist, wenn für die zu $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ asoziierten Bündel gilt : $w_{2^{k+1}}(\xi(n,\underline{d})) = w_{2^{k+1}}(\xi(n,\underline{d}'))$.

Dies ist etwa der Fall, wenn $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorph sind (Theorem 4.12 zusammen mit 1.8).

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorphe vollständige Durchschnitte mit Zerlegungen $X_n(\underline{d}) = M \# q(S^n \times S^n)$ und $X_n(\underline{d}') = M' \# q'(S^n \times S^n)$, wobei M und M' Mannigfaltigkeiten mit $H_n(M) = 0 = H_n(M')$ sind.

Dann sind M und M' stabil diffeomorph und haben gleiche Euler-Charakteristik. Nach [Wood,3.1] haben wir die folgende exakte Sequenz (n ungerade)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_d \longrightarrow \pi_n(X_n(\underline{d})) \longrightarrow H_n(X_n(\underline{d})) \longrightarrow 0 \quad .$$

Also ist $\pi_n(M)$ und auch $\pi_n(M')$ zyklisch der Ordnung d. Mit dieser Situation werden wir uns in der nächsten Proposition näher befassen.

6.11 Proposition:

Seien M und M' stabil diffeomorphe Mannigfaltigkeiten der Dimension 2n

mit ungeradem $n \geq 3$. Es gelte $H_n(M) = H_n(M') = 0$ und $\pi_n(M)$ und $\pi_n(M')$ seien zyklisch der Ordnung $d \in \mathbb{N}$.
Dann sind $M \# S^n \times S^n$ und $M' \# S^n \times S^n$ diffeomorph.
Ist zusätzlich ein Erzeuger des Kerns der Normalen-Gauß-Abbildung $K\pi_n(M) \subseteq \pi_n(M)$ repräsentierbar durch eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel, was für $n = 3$ oder 7 stets der Fall ist, so sind M und M' diffeomorph.

Beweis:

Da M und M' stabil diffeomorph sind und ihre mittlere Homologie verschwindet, haben sie die gleiche Euler-Charakteristik und für geeignetes $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen Diffeomorphismus $f\colon M \# k(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# k(S^n \times S^n)$.
Nach dem Theorem in 0.8 induziert f einen Diffeomorphismus von M nach M', wenn die Komposition $\vartheta(f)$ aus 0.8 eine Isometrie bezüglich der Schnittzahl λ und der Selbstdurchdringungszahl μ ist. Hinreichend hierfür ist nach der Proposition in 0.8, wenn λ und μ auf den Kernen der Normalen-Gauß-Abbildungen $K\pi_n(M)$ und $K\pi_n(M')$ verschwinden. Da $\pi_n(M)$ und $\pi_n(M')$ endlich sind, ist dies für die bilineare $\mathbb{Z}$-wertige Schnittzahl λ trivialerweise der Fall. Somit ist μ nach der Proposition in 0.7 auf $K\pi_n(M)$ additiv und verschwindet genau dann, wenn μ auf einem Erzeuger x der zyklischen Gruppe $K\pi_n(M) \subseteq \pi_n(M)$ trivial ist.Da das Bild von x unter der Isometrie f_* $K\pi_n(M')$ erzeugt, gilt dies entsprechend auch für $K\pi_n(M')$.
Nach der Proposition in 0.7 ist $\mu(x)$ genau dann trivial, wenn x durch eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel repräsentiert werden kann. Ist dies der Fall, so sind wir fertig.

Sei ab jetzt der Erzeuger x von $K\pi_n(M)$ nicht durch eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel repräsentierbar, d.h. $\mu(x) = 1 \in \mathbb{Z}_2$.
Wir werden $\vartheta(f)$ genauer untersuchen.
Bezeichnen wir mit H^k die durch $\pi_n(k(S^n \times S^n))$ gegebene hyperbolische Ebene, so ist $\vartheta(f)$ die folgende Komposition :

$$H^k \xrightarrow{\ i\ } \pi_n(M \# k(S^n \times S^n)) \xrightarrow{\ f_*\ } \pi_n(M' \# k(S^n \times S^n)) \xrightarrow{\ pr\ } H^k$$

Sei $y \in H^k \subseteq \pi_n(M \# k(S^n \times S^n))$. Dann hat $f_*(y)$ eine Darstellung:
$f_*(y) = y' + a(y)x'$, mit $y' \in H^k$, $x' := f_*(x)$, Erzeuger von $K\pi_n(M')$, und $a(y) \in \mathbb{Z}$. Also ist $\vartheta(f)y = y'$ und es ist zu zeigen : $\mu(y) \overset{!}{=} \mu(y')$.
Da f_* eine Isometrie ist und λ auf $\pi_n(M')$ verschwindet gilt (vgl.die Proposition in 0.8) :

$$\mu(y) = \mu(y' + a(y)x') = \mu(y') + a(y)\mu(x') + [\lambda(y',a(y)x')]$$
$$= \mu(y') + a(y)\mu(x') \ .$$

Somit ist $\vartheta(f)$ genau dann eine Isometrie wenn gilt :

$a(S_{ij}) \equiv 0 \bmod 2$ für alle $i=1,2$, $j=1,\dots,k$.

Dahei sei $\{ S_{ij} \mid i=1,2 \ , \ j=1,\dots,k \}$ die natürliche Basis von H^k, d.h. :

$S_{1j} = \{*\} \times S^n \subseteq (S^n \times S^n)_j$ und

$S_{2j} = S^n \times \{*\} \subseteq (S^n \times S^n)_j$ für $j=1,\dots,k$, wobei wir die zusammenhängende Summe numerieren : $k(S^n \times S^n) = (S^n \times S^n)_1 \# \cdots \# (S^n \times S^n)_k$.

Ist also $a(S_{ij}) \equiv o \bmod 2$ für alle $1=1,2$ und $j=1,\dots,k$, so sind wir nach dem oben Bemerkten fertig.

Sei nun o.B.d.A. $a(S_{11}) \equiv 1 \bmod 2$.

Nach den Ausführungen in dem letzten Abschnitt ist dann $\vartheta(f)$ keine Isometrie und f induzuiert keinen Diffeomorphismus zwischen M und M'. Wir werden die Existenz eines Diffeomorphismus von $M \# S^n \times S^n$ auf $M' \# S^n \times S^n$ nachweisen, indem wir Diffeomorphismen

$g\colon M \# k(S^n \times S^n) \longrightarrow M \# k(S^n \times S^n)$ und

$h\colon M' \# k(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# k(S^n \times S^n)$

finden, so daß die folgende Komposition $\vartheta(hfg)$ eine Isometrie ist :

$$\vartheta(hfg) : \quad \pi_n((k-1)(S^n \times S^n)) \xrightarrow{\ i\ } \pi_n(M \# (S^n \times S^n)_1 \# (k-1)(S^n \times S^n))$$
$$\xrightarrow{h_* f_* g_*} \pi_n(M' \# (S^n \times S^n)_1 \# (k-1)(S^n \times S^n)) \xrightarrow{\ pr\ } \pi_n((k-1)(S^n \times S^n))$$

Da jede Isometrie der hyperbolischen Ebene H^k von einem unterliegenden Diffeomorphismus von $k(S^n \times S^n)$ für $n \geq 3$ induziert wird ([Kreck 1,thm.2]), können wir uns die Diffeomorphismen g und h mit Hilfe von Isometrien G und H von H^k verschaffen. Wir setzen die unterliegenden Diffeomorphismen, die gegebenenfalls nach geeignetem Isotopieren die Identität auf einer Scheibe um den Basispunkt sind, durch die Identität auf M bzw. M' fort.

Wir definieren G wiefolgt :

$$G(S_{ij}) := \begin{cases} S_{ij} & \text{für } i=1,2 \ , \ j=1 \\ S_{ij} + b(S_{ij})S_{11} & \text{für } i=1,2 \ , \ j=2,\dots,k \ . \end{cases}$$

Dabei sei $b(S_{ij}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a(S_{ij}) \equiv 1 \bmod 2 \\ 0 & \text{falls } a(S_{ij}) \equiv 0 \bmod 2 \ . \end{cases}$

Offensichtlich ist $\{ G(S_{ij}) \mid i=1,2 \ , \ j=1,\dots,k \}$ eine Basis von H^k.

G ist eine Isometrie, denn es gilt :

$\lambda(G(S_{ij}),G(S_{pq})) = \lambda(S_{ij},S_{pq})$ für alle i,j,p und q ,

$\mu(G(S_{ij})) = \mu(S_{ij}) + b(S_{ij})\mu(S_{11}) + [\lambda(S_{ij},S_{11})] = 0$ für alle $i=1,2$, $j>1$, da S_{11} orthogonal zu allen S_{ij} mit $(i,j) \neq (2,1)$ bzgl. λ ist. Wie man leicht nachrechnet, ist nach Konstruktion von G die Einschränkung von $\vartheta(f)G$ auf $H^{k-1} := \pi_n((S^n \times S^n)_2 \# \cdots \# (S^n \times S^n)_k)$ eine Isometrie. Da die Komposition $\vartheta(f)G\colon H^k \longrightarrow H^k$ ein Isomorphismus ist, bilden die Elemente $\{ \vartheta(f)G(S_{ij}) \mid i=1,2 \ , \ j=1,\ldots,k \}$ eine Basis von H^k.

Wir definieren H zunächst auf H^{k-1} wiefolgt :

$$H(\vartheta(f)G(S_{ij})) := S_{ij} \qquad \text{für } i=1,2 \ , \ j=2,\ldots,k \ .$$

Da H eine Isometrie von H^k werden soll, muß unter H eine symplektische Basis, auf der μ verschwindet, auf eine ebensolche abgebildet werden. $\{ S_{ij} \mid i=1,2 \ , \ j=1,\ldots,k \}$ ist eine solche Basis, und da $\vartheta(f)G$ eingeschränkt auf H^{k-1} eine Isometrie ist, gilt dies auch für die Basis $\{\vartheta(f)G(S_{ij}) \mid i=1,2 \ , \ j=2,\ldots,k \}$ von $\vartheta(f)G(H^{k-1})$. Also muß eine symplektische Basis $\{e,f\}$ des orthogonalen Komplements von $\vartheta(f)G(H^{k-1})$, auf der μ verschwindet, unter H auf $\{S_{11},S_{21}\}$ abgebildet werden. Da die Kervaire-Invarianten $K(H^k)$ und $K(\vartheta(f)G(H^{k-1}))$ trivial sind, existiert eine solche Basis $\{e,f\}$ nach 6.3. Somit ist H durch die Festsetzung

$H(e) := S_{11}$ und

$H(f) := S_{21}$ eine Isometrie von H^k.

Seien g' und h' Diffeomorphismen von $k(S^n \times S^n)$, die G und H induzieren (vgl [Kreck 1,thm.2]). Diese sind o.B.d.A. die Identität auf einer Scheibe um den Basispunkt. Dann können wir g' und h' durch die Identität auf zusammenhängende Summen fortsetzen und erhalten Diffeomorphismen

$$g\colon M \# k(S^n \times S^n) \longrightarrow M \# k(S^n \times S^n) \quad \text{und}$$
$$h\colon M' \# k(S^n \times S^n) \longrightarrow M' \# k(S^n \times S^n) \quad .$$

Da die Einschränkung von $G\vartheta(f)H$ auf H^{k-1} die Identität ist, ist die Komposition $\vartheta(hfg)$ eine Isometrie :

$$\vartheta(hfg) : \ H^{k-1} \xrightarrow{\ i\ } \pi_n(M \# (S^n \times S^n)_1 \# (k-1)(S^n \times S^n)) \xrightarrow{(hfg)_*}$$
$$\longrightarrow \pi_n(M' \# (S^n \times S^n)_1 \# (k-1)(S^n \times S^n)) \xrightarrow{pr} H^{k-1}$$

Nach dem Theorem in 0.8 induziert somit der Diffeomorphismus hfg einen Diffeomorphismus von $M \# S^n \times S^n$ auf $M' \# S^n \times S^n$. $\square$

Um aus 6.11 den Kürzungssatz für vollständige Durchschnitte ungerader komplexer Dimension zu folgern, müssen wir sicherstellen, daß eine Zerlegung gemäß Theorem 6.7 $X_n(\underline{d}) = M \# k(S^n \times S^n)$ den in 6.11 benötigten Spielraum $k \geq 1$ gibt. Wir müssen also untersuchen, für welche vollständigen Durchschnitte die mittlere Homologie verschwindet. Daß dies in den zu entscheidenden Fällen nie auftreten wird, ist eine Folgerung aus [Hirzebruch p.160] , der eine Formel gibt, aus der die Euler-Charakteristik vollständiger Durchschnitte berechenbar ist (vgl. [Chen]).

6.12 Lemma:

Sei $X_n(\underline{d})$ ein vollständiger Durchschnitt ungerader komplexer Dimension.
Dann sind äquivalent : (i) $H_n(X_n(\underline{d})) = 0$
(ii) $(\underline{d}) = (1,\ldots,1)$.

Beweis:

Der Beweis folgt direkt aus [Chen] . □

6.13 Theorem

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ stabil diffeomorphe vollständige Durchschnitte ungerader komplexer Dimension mit gleicher Euler-Charakteristik. Ihre Kervaire-Invarianten seien nicht definiert oder trivial.
Dann sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ diffeomorph.

Beweis:

Die Aussage ist trivial für n=1. Sei also $n \geq 3$.
Nach Theorem 6.7 besitzen $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ Zerlegungen der Gestalt :

$X_n(\underline{d}) = M \# k(S^n \times S^n)$ und

$X_n(\underline{d}') = M' \# k(S^n \times S^n)$, mit $H_n(M) = H_n(M') = 0$ und $\pi_n(M)$ und $\pi_n(M')$ zyklisch der Ordnung d=d', da der Totalgrad eine stabile Diffeomorphieinvariante ist (Theorem 4.12)([Wood.3.1]). Nach 6.11 gibt es einen Diffeomorphismus von f von $M \# S^n \times S^n$ auf $M' \# S^n \times S^n$. Ist $k \geq 1$, so läßt sich f durch die Identität auf $(k-1)(S^n \times S^n)$ zu einem Diffeomorphismus von $X_n(\underline{d})$ auf $X_n(\underline{d}')$ fortsetzen, wobei o.B.d.A. f die Identität auf einer Scheibe um den Basispunkt ist. Ist k=0, so ist $H_n(X_n(\underline{d})) = H_n(X_n(\underline{d}')) = 0$. Nach 6.12 sind dann $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ diffeomorph zu $\mathbb{C}P^n$. Also ist auch in diesem Fall die Behauptung bewiesen. □

Abschließend können wir das Hauptresultat dieser Arbeit wiefolgt formulieren:
Für einen vollständigen Durchschnitt $X_n(\underline{d})$ bezeichne $\nu_p(d)$ den Exponenten der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung des Totalgrades $d = \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p(d)}$.

$\xi(n,\underline{d})$ sei das folgende Bündel über $\mathbb{C}P^{\infty}$, gegeben als Polynom im Hopfbündel H : $\xi(n,\underline{d}) = -(n+r+1)H + H^{d_1} + \dots + H^{d_r} \in K(\mathbb{C}P^{\infty})$.
Mit diesen Bezeichnungen gilt :

6.14 Theorem:

Ist $n \geq 3$ und die folgende Bedingung (*) erfüllt ,

(*) $\quad \nu_p(d) \geq \frac{2n+1}{2(p-1)} + 1 \quad$ für alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$,

so ist ein vollständiges Invariantensystem für den Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes $X_n(\underline{d})$ gegeben durch den Totalgrad, die Pontrjagin-Klassen des assoziierten Bündels auf $\mathbb{C}P^n$ und die Euler-Charakteristik :

(i) $\quad d = d_1 \cdot \dots \cdot d_r$,

(ii) $\quad p_i(\xi(n,\underline{d})) \quad$ für $i = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$,

(iii) $\quad e(X_n(\underline{d}))$.

Da heißt : Genau dann sind zwei vollständige Durchschnitte der komplexen Dimension $n \geq 3$, die der Bedingung (*) genügen, diffeomorph, wenn ihre Invarianten nach (i),(ii) und (iii) übereinstimmen.

Beweis:

Seien $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ vollständige Durchschnitte, $n \geq 3$, die der Bedingung (*) genügen.
Nach Theorem 4.12 sind $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$ genau dann stabil diffeomorph, wenn (i) und (ii) gelten. Natürlich ist (iii) eine notwendige Bedingung.
Für gerades n folgt nach Theorem 5.10 unter der Bedingung (*) aus stabiler Diffeomorphie und gleicher Euler-Charakteristik Diffeomorphie.
Für ungerades n folgt nach Theorem 6.13 aus stabiler Diffeomorphie und gleicher Euler-Charakteristik die Diffeomorphie von $X_n(\underline{d})$ und $X_n(\underline{d}')$, wenn ihre Kervaire-Invarianten nicht definiert oder trivial sind. Dies ist wegen $\nu_2(d) = \nu_2(d') > n+1 \geq 4$ nach 6.8 der Fall. $\square$

6.15 Bemerkung:

Theorem 6.14 ist bis auf die Einschränkugn bezüglich des Totalgrades (*) eine befriedigende Antwort auf die Frage, wann zwei vollständige Durchschnitte diffeomorph sind. Das Invariantensystem (i),(ii) und (iii) ist in Termen der Dimension und des Multigrades berechenbar. Für die Euler-Charakteristik gibt [Hirzebruch,p.160] (vgl. auch [Chen]) eine Formel an, nach der man sie berechnen kann. Handlicher ist eventuell die folgende Berechnungsvorschrift aus [Libgober & Wood 3,§7] :

$$e(X_n(\underline{d})) = c_n(X_n(\underline{d})) \cap [X_n(\underline{d})] = \frac{d}{n!}\, g_n(n+r+1-s_1,\ldots,n+r+1-s_n) .$$

Dabei sind $s_k := \sum_{j=1}^{r} d_j^k$ und g_k Polynome, so daß gilt :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, g_k(s_1,\ldots,s_k) = (1+d_1x)\cdot\ldots\cdot(1+d_rx) .$$

Die g_k können mit Hilfe der Newton-Formel berechnet werden [Hirzebruch, p.92] : $s_k - g_1s_{k-1} + \cdots + (-1)^k g_k k = 0$ für alle $k \geq 1$.

Die drei ersten Polynome sind :

$$g_1(s_1) = s_1 , \; g_2(s_1,s_2) = s_1^2 - s_2 , \; g_3(s_1,s_2,s_3) = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3 .$$

Im ähnlicher Weise lassen sich auch die Pontrjagin-Klassen $p_i(\xi(n,\underline{d}))$ berechnen.

Da die Einschränkung von $\xi(n,\underline{d})$ auf $X_n(\underline{d})$ ein Repräsentant des stabilen Normalenbündels von $X_n(\underline{d})$ ist (vgl. [Hirzebruch,§22] oder [Libgober & Wood 3,§7]) und die Inklusion $i: X_n(\underline{d}) \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ eine injektive Abbildung in Cohomologie bis zur Dimension 2n einschließlich induziert, entsprechen sich die Pontrjagin-Klassen von $X_n(\underline{d})$ und die Pontrjagin-Klassen $p_i(\xi(n,\underline{d}))$ mit $i \leq [n/2]$ eineindeutig.

Wegen $\langle i^*c_1(H)^n, [X_n(\underline{d})] \rangle = d$ ([Libgober & Wood 3,§7]) ist der Totalgrad durch den Cohomologiering über $\mathbb{Z}$ von $X_n(\underline{d})$ bestimmt. Dies gilt natürlich auch für die Euler-Charakteristik.

Daher läßt sich Theorem 6.14 auch wiefolgt mit den Bezeichnungen aus 6.14 formulieren (vgl. das Theorem von Sullivan in der Einleitung) :

6.14' Theorem:

Sei $n \geq 3$ und die folgende Bedingung (*) erfüllt :

(*) $\quad \nu_p(d) \geq \frac{2n+1}{2(p-1)} + 1 \quad$ für alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$.

Dann bestimmen die Pontrjagin-Klassen und der ganzzahlige Cohomologiering eines vollständigen Durchschnittes der komplexen Dimension n, dessen Totalgrad der Bedingung (*) genügt, eindeutig die Diffeomorphieklasse.

6.16 Bemerkung zu komplexen Dimension 3 :

Für komplese Dimension n=3 ist das in 6.14 angegebene Invariantensystem bis auf eine kleine Uminterprätation dasselbe wie das von [Libgober &

Wood 3,§2] in diesem Fall angegebene, das wir in der Einleitung dargestellt haben. In der Tat können wir die Ergebnisse von Libgober und Wood für n=3, abgesehen von Realisierungsfragen, mit wenig Aufwand nachvollziehen. Da es sich lediglich um straightforward Rechnungen handelt, verzichte ich auf eine genaue Ausführung und begnüge mich mit der Darstellung des Weges :

Für n=3 reduziert sich die Bedingung (*) aus 6.14 zu einer Bedingung über die mod 2 -Adams-Filtrierung der vollständigen Durchschnitte. Diese wurde benötigt um sicherzustellen, daß die Differenz zweier rational B-nullbordanter vollständiger Durchschnitte kein nichttriviales Element der 2-Torsion in der Homotopie des entsprechenden Thom-Spektrums liefert.

Für kleine Dimensionen, d.h. etwa für $n \leq 4$ hält sich der Rechenaufwand für die Erstellung expliziter Ext-Diagramme von Hand für alle in Frage kommenden Thom-Spektren nach einer Methode von [Stolz,§6] unter Benutzung des "Change of Rings" in vernünftigen Grenzen. Führt man die Rechnung durch, so sieht man an den Ext-Diagrammen, daß es keine 2-Torsion in der 6. Homotopie der fraglichen Thom-Spektren gibt, und somit ist für n=3 rationale B-Bordanz äquivalent zu B-Bordanz.

Da für n=3 jedes Element von $H_n(X_3(\underline{d}))$ durch eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel repräsentiert werden kann, tritt der Fall nichttrivialer Kervaire-Invariante nicht auf, und nach 6.13 folgt aus stabiler Diffeomorphie bei gleicher Euler-Charakteristik Diffeomorphie.

Wir erhalten also die folgende Aussage :

> Der Diffeomorphietyp eines vollständigen Durchschnittes $X_3(\underline{d})$ ist eindeutig bestimmt durch den Totalgrad, $p_1(\xi(3,\underline{d}))$ und die Euler-Charakteristik.

Literaturverzeichnis

J.F.ADAMS: (1) On the strukture and application of the Steenrod algebra, Comm.Math.Helv.32 (1958),pp.180-214.

(2) A periodicity theorem in homological algebra, Proc.Cambridge.Phil. Soc.Math.Phys.Sci.62 (1966),pp.365-378.

(3) Lectures on generalized cohomology, Battelle Inst.Conf. Category theory, homology theory and their applications,III (1968),Springer LN 99,pp.1-139.

(4) Stable homotopy and generalised homology, Univ.Chicago,Math. Lecture Notes (1971).

M.F.ATIYAH and F.HIRZEBRUCH: Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symp.Pure Math.3, Differential geometrie, Amer.Math.Soc.(1961),pp.7-38.

J.M.BOARDMAN: Stable homotopy theory, Mimiographed Notes,Univ.Warwick, Coventry (1966).

R.BOTT: On a theorem of Lefschetz, Michigan Math.J.6 (1959),pp.211-216.

W.BROWDER: (1) Torsion in H-spaces, Annals of Math.74 (1961),pp.24-51.

(2) Surgery on simply connected manifolds, Springer (1972).

(3) Complete intersections and the Kervaire invariant, Algebraic Topology, Aarhus (1978), Springer LN 763.

H.CARTAN: (1) Sur les groupes d'Eilenberg MacLane II, Proc.Nat.Acad.Sci. USA 40 (1954),pp.704-707.

(2) Sur l'itêration des opêrations de Steenrod, Com.Math.Helv.29 (1955),pp.40-58.

B-Y.CHEN: Euler charakteristics and codimensions of complete intersections, Proc.Amer.Math.Soc.71,1 (1978),pp.13-14.

P.E.CONNER and E.E.FLOYD: Differentiable periodic maps, Springer (1964).

P.DELIGNE,P.GRIFFITHS,J.MORGAN and D.SULLIVAN: Real homotopy type of Kähler manifolds, Invent.Math.29 (1975),pp.245-274.

A.DOLD: Über faserweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen, Math.Zeitschrift 62 (1955),pp.111-136.

V.GIAMBALVO: The mod p cohomology of BO<4k>, Proc.Amer.Math.Soc. 20 (1969), pp.593-597.

A.HAEFLINGER: Plongements diffêrentiables de variêtês dans variêtês, Comm. Math.Helv.36 (1961),pp.47-82.

M.W.HIRSCH: Differential topology, Springer (1976).

F.HIRZEBRUCH: Topological methods in algebraic geometry, third edition, Springer (1966).

D.HUSEMOLLER and J.MILNOR: Symetric bilinear forms, Springer (1973).

P.E.JUPP: Classification of certain 6-manifolds, Proc.Cambridge Phil.Soc. 73 (1973),pp.293-300.

R.M.KANE: Operations in connective K-theory, Memoirs Amer.Math.Soc.34, 254 (1981):

M.KAROUBI: K-theory,an Introduction, Springer (1978).

M.KERVAIRE and J.MILNOR: Groups of homotopy spheres I, Annals of Math. 77 (1963),pp.504-537.

M.KRECK: (1) Isotopy classes of diffeomorphism of (k-1)-connected almost parallelizable 2k-manifolds, Algebraic Topology, Aarhus (1978), Springer LN 763,pp.643-663.

(2) An extension of results of Browder, Novikov and Wall about surgery on compact manifolds, Preprint Mainz (1985).

W.LELLMANN: Operations and cooperations in odd-primery connective K-theory, J.London Math.Soc.(2) 29 (1984),pp.562-576.

A.S.LIBGOBER and J.W.WOOD: (1) Diffeomorphic complete intersections with different multidegrees, Bull.Amer.Math.Soc.(NS) 2 (1980),pp.459-461.

(2) On the topological structure of even dimensional complete intersections, Trans.Amer.Math.Soc.267 (1981),pp.637-660.

(3) Differentiable structuers on complete intersections I, Topology 221 (1982),pp.469-483.

(4) Differentiable structures on complete intersections II, Proc.Symp. Pure Math.40, Singulatities (2), (1983),pp.123-133.

A.LIULEVICIUS: Zeros in the cohomology of the Steenrod algebra, Proc.Amer. Math.Soc. 14 (1963),pp.972-976.

M.MAHOWALD and R.J.MILGRAM: Operations which detect Sq^4 in connective K-theory and their applications, Quart.J.Math.Oxford II Ser.27 (1976), pp.415-432.

R.MANDELBAUM and B.MOISHEZON: On the topological structure of simply connected algebraic surfaces, Bull.Amer.Math.Soc.82 (1976),pp.731-733.

J.P.MAY and R.J.MILGRAM: The Bockstein and the Adams spectral sequences, Proc.Amer.Math.Soc.83 (1981),pp.128-130.

J.W.MILNOR: Whitehead torsion, Bull.Amer.Math.Soc.72 (1966),pp.359-426.

J.W.MILNOR and J.D.STASHEFF: Characteristic classes, Annals of Math. Stud. 76,Princeton Univ.Press (1974).

B.MOISHEZON: Complex surfaces and connected sums of complex projectiv planes, Springer LN (1977).

O.NAKAMURA: (1) On the cohomology of the mod p Steenrod algebra, Bull.Sci. Engrg.Div.Univ.Ryukus (Math.Nat.Sci.) 18 (1975),pp.9-58.

(2) Corrections to "On the cohomology of the mod p Steenrod algebra", Bull.Sci.Engrg.Div.Univ.Ryukus 23 (1977),p.3.

B.J.SANDERSON: Immersions and embeddings of projective spaces, Proc.London Math.Soc.14(3) (1964),pp.137-153.

J.-P.SERRE: (1) Homologie singulière des espaces fibrês, Annals 54(3)(1951) pp.425-505.

(2) Groupes d'hmotopie et classes des groupes abeliens, Annals of Math. 58 (1953),pp.258-294.

E.H.SPANIER: Algebraic topology, MacGraw-Hill (1971).

S.STOLZ: Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder, Springer LN 1116 (1985).

R.E.STONG: (1) Determination of $H^*(BO\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2)$ and $H^*(BU\langle k\rangle,\mathbb{Z}_2)$, Trans.Amer. Math.Soc. 107 (1963),pp.526-544.

(2) Notes on cobordismus theory, Math.Notes,Princeton Univ.Press (1968).

D.SULLIVAN: Infinitesimal computations in topology, I.H.E.S.Pub.Math:47, (1977),pp.269-332.

R.M.SWITZER: Algebraic topology, homotopy and homology, Springer (1975).

C.T.C.WALL: (1) Classification problems in differential topology V, on certain 6-manifolds, Invent.Math.1 (1966),pp.355-374.

(2) Surgery on compact manifolds, Acadamic Press (1970).

G.W.WHITEHEAD: Elements of homotopy theory, Springer (1978).

J.W.WOOD: Complete intersections as branched covers and the Kervaire invariant, Math.Ann.240 (1979),pp.223-230.

A.V.ZUBR: Classification of simply connected six-dimensional spinor manifolds, Math.USSR Izv.9 (1975),pp.793-812.