

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÊ DŨNG TRÁNG
FRANÇOISE MICHEL
CLAUDE WEBER

Courbes polaires et topologie des courbes planes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 24, n° 2 (1991), p. 141-169.

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_2_141_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBES POLAIRES ET TOPOLOGIE DES COURBES PLANES

PAR DUNG-TRANG LÊ, FRANÇOISE MICHEL ET CLAUDE WEBER

Notations utilisées dans l'article

Si ε est un réel positif, D_ε^{2n} est la boule dans $\mathbb{C}^n$ de centre l'origine et de rayon ε et S_ε^{2n-1} est la sphère qui borde D_ε^{2n} . Si W est une variété nous notons ∂W le bord de W et $\overset{\circ}{W}$ l'intérieur de W .

Soit f un germe de fonction holomorphe en l'origine de $\mathbb{C}^2$, nous notons $m_0(f)$ la multiplicité de f en l'origine et $m_0(f \cap g)$ sa multiplicité d'intersection avec un germe g .

Introduction

Soit $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, avec $f(0)=0$, un germe de fonction holomorphe réduit. Le théorème 2.10 de J. Milnor dans [M] montre que la classe d'isotopie de l'entrelacs $K=f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ ne dépend pas de ε lorsque ε est suffisamment petit et que K détermine entièrement la topologie de $f^{-1}(0)$.

Nous appelons *extérieur* de K le complémentaire dans S_ε^3 d'un petit voisinage tubulaire ouvert de K . Cet extérieur, que nous notons M , est une variété de dimension 3 dont le bord est la réunion disjointe de r tores où r est le nombre de branches de f . La classe d'isotopie de M dans S_ε^3 détermine la topologie de f .

Si l'origine est un point lisse de $f^{-1}(0)$, M est un tore plein et si c'est un point double ordinaire M est un tore épaissi. Nous excluons ces deux cas triviaux pour notre propos.

La résolution des singularités permet de montrer que M est une variété de F. Waldhausen au sens des « Grafenmannigfaltigkeiten » (*voir* [W]). Cela signifie qu'il existe une famille J de tores différentiablement plongés dans M telle que l'adhérence de toute composante connexe de $M \setminus J$ est une variété fibrée au sens de Seifert. Soit

$M = \bigcup_{j=1}^n V_j$ la décomposition de M en la réunion des adhérences V_j des composantes connexes de $M \setminus J$. De plus, si J est une famille minimale de tores essentiels alors la famille J et les fibrations de Seifert des variétés V_j sont uniques à isotopie près. Nous

dirons alors que $M = \bigcup_{j=1}^n V_j$ est la décomposition minimale de Waldhausen de M . Comme nous le rappelons au chapitre I, cette décomposition minimale peut être obtenue à partir de la résolution de f (voir [E-N] et [M-W]). Une fibre régulière ρ_j d'une des variétés de Seifert V_j de la décomposition minimale est, en particulier, un nœud dans S^3_ε . Notons $b(\rho_j)$ le « braid index » de ρ_j et $\mathcal{L}(\rho_j, K)$ son coefficient d'enlacement avec K .

La canonicité de la décomposition minimale de M implique que le sous-ensemble $\mathcal{P}_{\text{top}}$ de $\mathbb{Q}$ défini par :

$$\mathcal{P}_{\text{top}} = \{ \mathcal{L}(\rho_j, K) / b(\rho_j), j = 1, \dots, n \}$$

est un invariant de la topologie de $f^{-1}(0)$.

D'autre part supposons que l'axe $x=0$ n'appartienne pas au cône tangent de f . Par définition la courbe Γ d'équation $\partial f / \partial y = 0$ est la *courbe polaire* de f , pour la direction x . La courbe Γ est le lieu des points critiques de l'application $\Phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par : $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$. Pour des réels ε , θ et η suffisamment petits la variété $M_B = D^4_\varepsilon \cap (\Phi^{-1}(D^2_\theta \times S^1_\eta))$ est diffeomorphe à l'extérieur de l'entrelacs K . Le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ constitué des contacts $c(f, \gamma) = m_0(f \cap \gamma) / m_0(\gamma)$ de f avec les branches γ de la courbe polaire Γ sera noté $\mathcal{P}$. C'est l'ensemble des quotients polaires définis par Lê D. T. dans [L₄] (4.7) et B. Teissier dans [T₂] (3.6.4) (voir aussi [T₁]).

L'ensemble $\mathcal{P}$ et le revêtement ramifié $\Phi : M_B \rightarrow D^2_\theta \times S^1_\eta$ permettent de décomposer M_B en une réunion de variétés de Seifert [théorème A (2.4.1)]. Dans le théorème B (2.5.7)

nous en extrayons la décomposition minimale $M_B = \bigcup_{j=1}^n V_j^*$. Cette décomposition a l'avantage

de fournir des renseignements sur le comportement de la courbe polaire Γ (voir théorème C, [L-M-W] et [Mic]) et sur la monodromie de f . Par le théorème C, démontré dans le chapitre III, nous exprimons les quotients polaires en fonction de la décomposition minimale de Waldhausen de M :

THÉORÈME C. — *Si le cône tangent de f est constitué de deux droites distinctes alors $\mathcal{P}_{\text{top}} \cup m_0(f) = \mathcal{P}$, dans tous les autres cas $\mathcal{P}_{\text{top}} = \mathcal{P}$.*

Ce théorème C démontre que $\mathcal{P}$ est un invariant de la topologie de f pourvu que l'axe $x=0$ n'appartienne pas au cône tangent de f . De plus il fournit un moyen effectif de calcul de $\mathcal{P}$ pour un germe f à plusieurs branches. En effet le calcul de $\mathcal{P}_{\text{top}}$ peut être effectué au moyen de la résolution de f comme nous l'indiquons en (1.3.16) (voir [L-M-W] pour des calculs explicites) ou au moyen de la description de K comme entrelacs torique itéré (voir [M-W]).

Remarque. — Lorsque l'axe $x=0$ est « aussi générique que possible » par rapport à Γ on peut aussi montrer à partir de [T₁] (th. 6), [T₂] (th. 3) et de [L₃] que $\mathcal{P}$ ne dépend que de la topologie de f . On peut aussi obtenir cette dernière assertion de la façon suivante. Dans [T₁] (voir aussi [T₃], p. 197 (iii)) B. Teissier introduit la notion de polyèdre de Newton-jacobien dont les pentes donnent les quotients polaires. Le théorème, p. 198 de [T₃] montre en particulier que, si l'axe $x=0$ est « aussi générique que possible », le polyèdre de Newton-jacobien, et par conséquent l'ensemble des quotients polaires, ne

dépend pas de l'axe $x=0$. De plus si f est un germe irréductible, M. Merle a déterminé $\mathcal{P}$ au moyen des paires caractéristiques de Puiseux de f (voir [Me]). Dans le cas réductible T. C. Kuo et Y. C. Lu (voir [K-L]) fournissent des formules qui sont reliées aux quotients polaires.

La décomposition minimale $M_B = \bigcup_{j=1}^n V_j^*$ que nous obtenons au moyen de la courbe polaire et la famille caractéristique de tores J^* qui lui correspond nous permettent de décrire « la » monodromie quasi finie de f (chap. II, § 6). Plus précisément la restriction de f à M_B est une fibration de M_B sur S_η^1 que nous notons φ . Par J. Milnor, φ est isomorphe à la fibration induite par $f/\|f\|$ sur l'extérieur M de K dans S_ε^3 .

Notons F la fibre $(f^{-1}(\eta) \cap M_B)$ de φ . Par construction les tores de J^* et les cercles fibres des V_j^* sont transverses aux fibres de φ . Posons $\mathcal{S} = F \cap J^*$. En utilisant les principes généraux du chapitre II, paragraphe 3, nous construisons une monodromie $h: F \rightarrow F$, qui en dehors d'un voisinage tubulaire des courbes fermées simples $\mathcal{S}$ a pour trajectoires les fibres (compactes) des V_j^* . Par définition la monodromie h ainsi obtenue est un difféomorphisme quasi fini de F , ce qui généralise le résultat de N. A'Campo pour les courbes analytiquement irréductibles dans [AC] et des résultats partiels de B. Morin non publiés. La minimalité de J^* entraîne la minimalité du système de courbes $\mathcal{S}$. En faisant le mapping tore de F par le difféomorphisme h nous retrouvons M et sa décomposition minimale de Waldhausen. La canonicité de cette décomposition de M entraîne la canonicité de la décomposition de h en une réunion de difféomorphismes d'ordre fini recollés le long des courbes du système $\mathcal{S}$.

On trouvera une présentation de certains résultats de ce travail dans [L₁] et [We].

CHAPITRE I

LA DÉCOMPOSITION MINIMALE DE WALDHAUSEN DE L'EXTÉRIEUR D'UN ENTRELACS ALGÈBRIQUE

1. Entrelacs algébriques

Soit $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique réduit. Dans [M], J. Milnor démontre :

THÉORÈME. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout ε avec $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $f^{-1}(0)$ coupe transversalement la sphère S_ε^3 . De plus la classe d'isotopie dans S_ε^3 de l'entrelacs $K_\varepsilon = (f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3)$ ne dépend pas de ε .*

Par abus de langage si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, la classe d'isotopie K de K_ε est appelée *entrelacs algébrique associé à f* .

DÉFINITION. — Le complémentaire d'un petit voisinage tubulaire ouvert de K_ε , $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, sera noté M et appelé *extérieur de l'entrelacs algébrique K* .

M est une variété de dimension 3, compacte plongée dans S^3 . Son bord ∂M est une union disjointe de r tores où r est le nombre de branches de f . S^3 étant munie d'une orientation fixée une fois pour toutes, M est munie de l'orientation induite.

Dans [E-N] et dans [M-W], chap. 12, M est décomposée, de façon canonique, en une réunion de variétés de Seifert. Dans ce chapitre nous rappelons, pour la commodité du lecteur, les principes importants de cette décomposition que nous appelons décomposition minimale de Waldhausen.

2. Décompositions de Waldhausen

Soit V une variété différentiable de dimension 3, compacte, connexe et orientée; V peut avoir un bord.

(1.2.1) DÉFINITIONS. — V est une *variété seifertique* s'il existe un feuilletage en cercles différentiable et orienté de V tel que toute feuille possède un voisinage tubulaire compact qui est une réunion de feuilles. La variété V est *de Seifert* si on a fixé un tel feuilletage.

V est une *variété de Waldhausen* s'il existe des variétés seifertiques $V_1, \dots, V_n$, plongées dans V telles que :

$$(1) \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_i.$$

(2) Pour tout i et j , $i \neq j$, $V_i \cap V_j$ est soit vide, soit une réunion finie de tores deux à deux disjoints.

Une telle décomposition de V en $\left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right)$ constitue une *décomposition de Waldhausen* de V .

Un tore T plongé différentiablement dans V est *compressible* s'il existe un disque D , de dimension 2, plongé différentiablement dans V , dont le bord, ∂D , est égal à $(D \cap T)$ et si ∂D ne borde pas un disque dans T . Si un tel disque D n'existe pas, T est un tore *incompressible*.

Soit J une réunion disjointe de tores plongés différentiablement dans l'intérieur de V ; J est une *famille essentielle* si toutes les composantes connexes de J sont incompressibles et non isotopes (on dira aussi non parallèles) à une composante du bord de V .

La variété V est *irréductible* si toute sphère S^2 plongée différentiablement dans V borde, dans V , une boule de dimension 3.

La variété V est *atoroïdale* si elle est irréductible et si tout tore incompressible dans V est parallèle à une composante du bord de V .

Une famille essentielle de tores J dans V est une *famille caractéristique* si :

- (1) l'adhérence de toute composante connexe de $(V \setminus J)$ est seifertique ou atoroïdale.
- (2) J est minimale c'est-à-dire : pour tout T dans J la famille $(J \setminus T)$ ne satisfait plus (1).

Remarque. — Une variété de dimension 3 peut être à la fois seifertique et atoroidale, c'est en particulier le cas pour les complémentaires des nœuds du tore. Le « ou » de la condition (1) n'est donc pas un « ou » exclusif.

(1.2.2) Nous verrons [(1.3.7) ou (2.4.1)] que l'extérieur M d'un entrelacs algébrique est une variété de Waldhausen.

Le théorème (1.2.3) suivant permet de reconnaître si une famille de tores J dans M est caractéristique; il est une conséquence quasi immédiate de propriétés bien connues des variétés de Seifert (par exemple voir [J]).

(1.2.3) THÉORÈME. — Soit M l'extérieur d'un entrelacs algébrique et soit J une famille essentielle de tores dans M . Notons $V_1, \dots, V_i, \dots, V_n$ l'adhérence des composantes connexes de $(M \setminus J)$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- (1) toutes les variétés $V_i, i \in \{1, \dots, n\}$, sont des variétés de Seifert;
- (2) aucun V_i n'est un tore épaissi, c'est-à-dire aucun V_i n'est difféomorphe à $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$;
- (3) soit T dans J . Il existe donc i et $j, i \neq j$, tels que $T \subset V_i \cap V_j$. Soit ρ_i (resp. ρ_j) une fibre de Seifert de V_i (resp. V_j) sur T . Alors ρ_i n'est pas homologue dans T à ρ_j .

Alors J est une famille caractéristique de tores.

Preuve. — Vu la définition d'une famille caractéristique il suffit de démontrer que la famille J est minimale.

Par l'absurde supposons qu'il existe $T \in J$ avec $T \subset V_i \cap V_j, i \neq j$, tel que $V_i \cup V_j$ est seifertique.

Nous déduisons du théorème VI, 34, de W. Jaco (cf. [J], p. 107) le résultat suivant :

(1.2.4) Soit T un tore incompressible dans une variété seifertique V à bord non vide. Alors il existe une fibration de Seifert de V telle que T est une réunion de fibres.

Il existerait donc une fibration de Seifert $\mathcal{F}$ de $V_i \cup V_j$ telle que T est une réunion de fibres. Notons $\mathcal{F}_i$ (resp. $\mathcal{F}_j$) la restriction de $\mathcal{F}$ à V_i (resp. V_j).

Utilisons maintenant le théorème suivant d'unicité des fibrations de Seifert dû à P. Orlik-Vogt, H. Zieschang et F. Waldhausen (par ex. cf. [JJ]) :

(1.2.5) Soit V une variété seifertique à bord non vide plongée dans S^3 , compacte, connexe et orientée qui n'est ni un tore plein ni un tore épaissi. Alors elle admet à isotopie près une unique fibration de Seifert.

Les fibrations $\mathcal{F}$ de $V_i \cup V_j, \mathcal{F}_i$ de V_i et $\mathcal{F}_j$ de V_j sont donc uniques à isotopie près. Une fibre ρ de $\mathcal{F}$ sur T est alors isotope dans V_i à ρ_i et par conséquent homologue à ρ_i dans T . De même ρ est homologue à ρ_j dans T . Nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse (3).

Le théorème (1.2.6) est un cas particulier de résultats de K. Johannson, W. Jaco et P. Shalen (cf. par ex. [J-S], p. 169, lignes 6 à 10).

(1.2.6) THÉORÈME. — Soit V une variété de dimension 3 à bord non vide, compacte, connexe, orientée et irréductible. Alors V contient une famille caractéristique de tores et cette famille est unique à isotopie près.

Remarque. — Ce théorème (1.2.6) est généralement énoncé avec l'hypothèse « V suffisamment grande »; V ayant ici un bord non vide elle est automatiquement suffisamment « grande ».

(1.2.7) THÉORÈME. — Soit M l'extérieur d'un entrelacs algébrique. Supposons que J soit une famille caractéristique de tores dans M . Soient $V_1, \dots, V_i, \dots, V_n$, les adhérences des composantes connexes de $(M \setminus J)$. Alors la décomposition de Waldhausen $\bigcup_{i=1}^n V_i$ de M est unique à isotopie près.

(1.2.8) DÉFINITION. — $\left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right)$ est unique à isotopie près si pour toute décomposition $\bigcup_{j=1}^m W_j$ de Waldhausen de M qui est obtenue comme dans le théorème (1.2.7) alors $n=m$ et pour un bon ordre des indices, il existe un difféomorphisme H de M , isotope à l'identité, tel que $H(V_i) = W_i$ et si ρ_i est une fibre de Seifert de V_i , $H(\rho_i)$ est une fibre de Seifert de W_i .

Par définition cette unique décomposition de Waldhausen de M et la décomposition minimale de Waldhausen de M .

(1.2.7) est une conséquence directe de (1.2.6) et de (1.2.5) vu que :

(1.2.9) *Remarque.* — L'extérieur M d'un entrelacs algébrique est une variété irréductible. En effet soit S un plongement différentiable de S^2 dans M . Par un théorème de J. Alexander [A] S borde dans S^3 deux boules B_1 et B_2 . Si M était réductible il y aurait des composantes de K dans B_1 et aussi dans B_2 , par conséquent ces composantes ne s'enlacceraient pas. Ce qui est impossible car le coefficient d'enlacement entre deux composantes d'un entrelacs algébrique est toujours non nul.

Fin du théorème (1.2.7).

(1.2.10) *Remarque.* — Si $\left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right)$ est une décomposition de Waldhausen d'une sous-variété V de S^3 alors si $i \neq j$ l'intersection $V_i \cap V_j$ est soit vide soit constituée d'un seul tore.

En effet si $T \subset V_i \cap V_j$, T sépare S^3 en deux composantes connexes; par conséquent $V_i \cap V_j = T$.

3. Description de la décomposition minimale à partir de la résolution

Nous reprenons maintenant la construction de la décomposition canonique du complémentaire d'un entrelacs algébrique en réunion de variétés de Seifert à partir de la résolution minimale du germe f qui a été faite dans [M-W], chapitre 12, paragraphe 4.

Soit U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$. Notons $\pi: X \rightarrow U$ la résolution minimale du germe réduit f .

(1.3.1) Par définition le *diviseur exceptionnel* E de la résolution est l'ensemble $\pi^{-1}(0)$. Le diviseur exceptionnel E a pour composantes irréductibles des droites projectives complexes. Deux composantes irréductibles de E soit sont disjointes soit se coupent transversalement en un seul point. Un point de E est *lisse* s'il n'appartient qu'à une seule composante irréductible de E .

(1.3.2) DÉFINITIONS. — Une *curvette* d'une composante irréductible $\mathbb{P}$ de E est une courbe lisse dans X transverse à $\mathbb{P}$ en un point lisse de E .

La *transformée stricte* Y du germe f dans la résolution X est l'adhérence dans X de

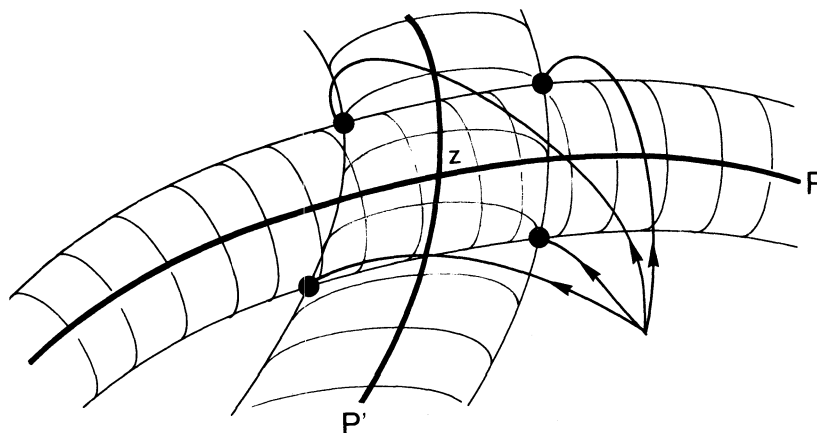
$$((f \circ \pi)^{-1}(0) \setminus E).$$

La variété Y est constituée de r curvettes disjointes où r est le nombre de branches de f .

(1.3.3) Remarque. — Un voisinage tubulaire fermé dans X d'une composante irréductible $\mathbb{P}$ de E est un fibré en disques $v(\mathbb{P})$ de base $\mathbb{P}$. La classe d'isomorphisme différentiable du fibré $v(\mathbb{P})$ est déterminée par sa classe d'Euler que nous notons $e(\mathbb{P})$.

(1.3.4) A partir de X on construit une variété $\bar{X}$ à bords et à coins difféomorphe à un voisinage fermé de E de la façon suivante :

On prend la réunion disjointe des fibrés $v(\mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une composante de E et, pour toute paire $(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$ de composantes de E qui se coupent, on effectue le plombage de $v(\mathbb{P})$ avec $v(\mathbb{P}')$ au voisinage de $z = \mathbb{P} \cap \mathbb{P}'$:



Plombage au voisinage de z .

Notons S le bord de $\bar{X}$.

(1.3.5) DÉFINITION. — *Le tore de plombage* de la paire $(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$ est l'intersection de S avec le polydisque du plombage au voisinage de z .

Notons : I l'ensemble des tores de plombage.

(1.3.6) Pour des voisinages tubulaires $v(\mathbb{P})$ de $\mathbb{P}$ bien choisis il existe un difféomorphisme H de $\bar{X}$ sur un voisinage de E tel que :

- (1) la restriction de H à E est l'identité;
- (2) si D est une fibre de $v(\mathbb{P})$ en un point lisse de E alors $H(D)$ est une curvette de $\mathbb{P}$;
- (3) $H^{-1}(Y)$ est une réunion de fibres;
- (4) $(\pi \circ H)(\bar{X}) = D_\varepsilon^4$.

Conséquences. — L'entrelacs $K_x = (\pi \circ H)^{-1}(K)$ est l'entrelacs algébrique K de f . Nous pouvons donc identifier $M_x = (H^{-1} \circ \pi^{-1})(M)$ à l'extérieur M de l'entrelacs K associé à f . C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

(1.3.7) PROPOSITION. — M_x est une variété de Waldhausen.

Preuve. — Pour toute composante connexe W de $S \setminus I$, il existe une composante $\mathbb{P}$ de E telle que W soit contenue dans le bord du fibré $v(\mathbb{P})$. Le bord des fibres de $v(\mathbb{P})$ munissent donc W d'une structure de fibré en cercles. De plus cette fibration en cercles se restreint à l'entrelacs K_x et à son voisinage $S \setminus M_x$. Comme $I \subset M_x$ la variété $(M_x \setminus I)$ est ainsi fibrée en cercles. L'adhérence des composantes connexes de $M_x \setminus I$ sont donc en particulier des variétés de Seifert.

Remarque. — En général la famille I n'est pas caractéristique. Il nous faut donc définir un sous-ensemble J de I tel que J soit la famille caractéristique de tores de M_x . Pour cela nous utilisons l'arbre de la résolution minimale de f .

Traditionnellement on construit un arbre $A(f)$ qui décrit le type topologique de la résolution $\pi: X \rightarrow U$. (Cf. E. Brieskorn et H. Knörrer [B-K], p. 503-528 ou [M-W], chap. 6.)

(1.3.8) RÉSUMONS LA CONSTRUCTION DE $A(f)$. — A chaque composante irréductible de E on associe un sommet et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les composantes de E qu'ils représentent se coupent. Si Q est un sommet de $A(f)$ notons $\mathbb{P}(Q)$ la composante de E qu'il représente. On complète $A(f)$ en munissant tout sommet Q d'autant de flèches qu'il y a de composantes connexes de la transformée stricte qui coupent $\mathbb{P}(Q)$; puis on pondère le sommet Q par la classe d'Euler de $v(\mathbb{P}(Q))$.

(1.3.9) DÉFINITION. — *La valence* $v(Q)$ d'un sommet Q de $A(f)$ est égale à la somme du nombre de flèches et du nombre d'arêtes qui rencontrent Q . Par extension $v(Q)$ est aussi la valence de la composante $\mathbb{P}(Q)$ de E .

(1.3.10) DÉFINITION. — Un sommet Q de $A(f)$ [resp. une composante $\mathbb{P}(Q)$ de E] est un sommet (resp. une composante) *de rupture* si sa valence est supérieure ou égale à 3.

Notons : $\mathbb{P}_1$ la composante de E créée par le premier éclatement (*i.e.* l'éclatement de l'origine dans U) et notons Q_1 le sommet de $A(f)$ qui représente $\mathbb{P}_1$.

(1.3.11) DÉFINITIONS. — (1) Soit g une composante irréductible de f . La géodésique de g dans $A(f)$ est par définition le chemin géodésique orienté dans $A(f)$ qui part de Q_1 et qui aboutit à l'extrémité de la flèche de $A(f)$ qui représente g .

Remarque. — Un sommet de rupture est toujours sur la géodésique d'une composante irréductible de f (cf. [M-W], chap. 6).

(2) Soit G la réunion des géodésiques des composantes irréductibles de f . Une *branche morte* de $A(f)$ est l'adhérence d'une composante connexe de $A(f) \setminus G$.

Remarque. — Une branche morte est un segment de $A(f)$ dont une extrémité est un sommet de rupture et l'autre extrémité un sommet de valence 1.

(3) Deux sommets de rupture sont *voisins* si l'intérieur du chemin géodésique qui les relie ne contient pas de sommet de rupture.

(1.3.12) CONSTRUCTION DE LA DÉCOMPOSITION MINIMALE DE WALDHAUSEN DE M . — Si l'origine est un point lisse de f alors M est un tore plein. Si elle est une singularité quadratique ordinaire alors M est un tore épaissi. Nous excluons de la discussion ces deux cas triviaux. Dans tous les autres cas $A(f)$ a au moins un sommet de rupture.

Si $A(f)$ possède un seul sommet de rupture on pose $J = \emptyset$. Sinon pour toute paire (Q, Q') de sommets de rupture voisins on choisit une arête $\alpha_{QQ'}$ sur le chemin géodésique qui relie Q à Q' .

Par construction il y a une correspondance canonique entre les tores de plombage [voir (1.3.5)] et les arêtes de $A(f)$. Soit J l'ensemble des tores de plombage qui correspondent aux arêtes $\alpha_{QQ'}$ qui viennent d'être choisies. Par (1.3.7) l'adhérence d'une composante connexe de $M_x \setminus J$ correspond à une composante $\mathbb{P}$ de E . Notons cette adhérence $W_{\mathbb{P}}$. Elle est fibrée en cercles par les bords des fibres de $v(\mathbb{P})$. Soit V l'adhérence d'une composante connexe de $M_x \setminus J$. Par construction il existe une unique composante de rupture $\mathbb{P}(V)$ de E telle que $W_{\mathbb{P}(V)} \subset V$. Dans [M-W] (chap. 12) on démontre que la fibration de $W_{\mathbb{P}(V)}$ s'étend à V et que la famille J est la famille caractéristique de tores de M_x [et de M par (1.3.6)].

Remarque. — Numérotions $V_1, \dots, V_j, \dots, V_n$ l'adhérence des composantes connexes de $M_x \setminus J$. Par construction il y a une correspondance biunivoque canonique entre les sommets de rupture de $A(f)$ et l'ensemble $\{V_j\}_{j=1 \dots n}$ des variétés de Seifert constituant la décomposition minimale de Waldhausen de M .

(1.3.13) PROPRIÉTÉS DES FIBRES DES VARIÉTÉS V_j . — Soit ρ_j une fibre régulière de V_j et soit Q_j le sommet de rupture correspondant à V_j . La fibre ρ_j est le nœud algébrique d'un germe irréductible g . De plus la transformée stricte de g dans la résolution minimale de f est une curvette de la composante $\mathbb{P}(Q_j)$ de E .

Dans le cas où V_j posséderait une fibre singulière, cette fibre serait aussi le nœud algébrique d'un germe irréductible. Mais dans ce cas la transformée stricte du germe dans la résolution minimale de f serait la curvette d'une composante de valence 1 de E .

(1.3.14) FIBRES SINGULIÈRES DES VARIÉTÉS V_j . — Par construction V_j possède autant de fibres singulières qu'il y a de composantes $\mathbb{P}$ de valence 1 de E telles que $W_{\mathbb{P}} \subset V_j$ où $W_{\mathbb{P}}$ est le fibré en cercles défini en (1.3.12).

Soit $\mathbb{P}_1$ la composante de E créée par le premier éclatement. Après renumérotation on peut supposer que $W_{\mathbb{P}_1} \subset V_1$.

Il découle de la description de $A(f)$ que V_j possède au plus une fibre singulière lorsque $j > 1$.

Pour étudier V_1 choisissons une droite l qui n'appartient pas au cône tangent de f et notons ρ le nœud associé à l .

(1.3.15) PROPOSITION. — *Le cône tangent de f est constitué :*

- (1) *d'une seule droite si et seulement si ρ est isotope à une fibre singulière de V_1 ;*
- (2) *de deux droites distinctes si et seulement si aucune fibre de V_1 n'est isotope à ρ ;*
- (3) *de plus de trois droites distinctes si et seulement si toutes les fibres de V_1 sont régulières et isotopes à ρ .*

Remarque. — Si $j \neq 1$ alors aucune fibre de V_j n'est isotope à ρ .

La proposition découle de la construction de la fibration de Seifert de V_1 [cf. (1.3.12)] et du fait que la valence de $\mathbb{P}_1$ est égale au nombre de droites distinctes qui constituent le cône tangent de f .

(1.3.16) CALCUL DE $\mathcal{P}_{\text{top}}$ EN FONCTION DE LA RÉOLUTION MINIMALE DE f . — Soit $M = \bigcup_{j=1}^n V_j$ la décomposition minimale de Waldhausen de M . Nous appelons *compagnon intrinsèque* de K une fibre régulière ρ_j de V_j .

DÉFINITION. — Parmi les tresses qui représentent le nœud ρ_j on en choisit une qui a le plus petit nombre de brins. Ce nombre est le « *braid index* » de ρ_j , nous le notons $b(\rho_j)$.

Comme dans l'introduction nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{P}_{\text{top}} = \{ \mathcal{L}(K, \rho_j) / b(\rho_j), j = 1, \dots, n \}.$$

D'autre part :

(1.3.17) DÉFINITION. — Le quotient $q(\mathbb{P})$ d'une composante irréductible $\mathbb{P}$ de E est le rationnel $m_0(f \cap g) / m_0(g)$ où g est l'image par le morphisme de résolution π d'une courvette de $\mathbb{P}$.

Remarque. — $q(\mathbb{P})$ est le contact $c(f, g)$ de la courbe f avec g .

(1.3.18) PROPOSITION. — $\mathcal{P}_{\text{top}}$ est égal à l'ensemble des quotients $q(\mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ parcourt les composantes de rupture de E .

Preuve. — Soit $\mathbb{P}_j$ la composante de rupture de E qui correspond à V_j . Par (1.3.13) ρ_j est isotope dans M au nœud algébrique associé à une courbe g_j où g_j est l'image par le morphisme de résolution π d'une courvette de $\mathbb{P}_j$. Par H. Schubert (cf. [S]) $b(\rho_j) = m_0(g_j)$. D'autre part $\mathcal{L}(K, \rho_j) = m_0(f \cap g_j)$.

Ceci termine la preuve de (1.3.18).

CHAPITRE II

LA DÉCOMPOSITION POLAIRE

1. Courbe polaire et courbe discriminante

Comme dans le chapitre I, soit $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique réduit.

Soit $l = \beta x - \alpha y$ une forme linéaire. Dans tout ce chapitre nous supposons que l n'est pas dans le cône tangent de f . Dans ce cas le germe d'application analytique $\Phi_l: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ défini par :

$$\Phi_l(x, y) = (\beta x - \alpha y, f(x, y))$$

est fini et propre.

(2.1.1) DÉFINITIONS. — Le germe de courbe (non nécessairement réduit) Γ_l d'équation : $\alpha(\partial f/\partial x) + \beta(\partial f/\partial y) = 0$, est la *courbe polaire* de f pour la direction l ; sont lieu des zéros, Λ_l , est le lieu critique de Φ_l .

L'image de Λ_l par Φ_l est le lieu des zéros d'un germe de courbe réduit Δ_l . Par définition le germe Δ_l est la *courbe discriminante* de f pour la direction l .

(2.1.2) PROPRIÉTÉS DE Φ_l . — Il existe un voisinage U de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ tel que $\Lambda^* = ((\Lambda_l \setminus \{0\}) \cap U)$ soit une sous-variété propre et lisse de U . La restriction de Φ_l à $(U \setminus \{0\})$ est un revêtement ramifié qui a Λ^* pour ensemble des points de ramification et $\Delta^* = (\Phi_l(\Lambda^*))$ pour l'ensemble des valeurs de ramification. De plus la restriction de Φ_l à Λ^* est un revêtement fini de Δ^* sur Δ^* .

(2.1.3) Soit $z \in \Delta^*$. Notons D^2 le disque unité dans $\mathbb{C}$. Il existe un voisinage W de z dans $\mathbb{C}^2$, un entier k , $2 \leq k$, et des difféomorphismes H_1 et H_2 tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{H_1} & D^2 \times D^2 \\ \Phi_l \downarrow & & \downarrow G \\ \Phi_l(W) & \xrightarrow{H_2} & D^2 \times D^2 \end{array}$$

où $G(z_1, z_2) = (z_1, z_2^k)$.

(2.1.4) DÉFINITION. — L'entier k est l'*indice de ramification* de Φ_l en z . Si $k=2$ on dit que z est un point de ramification quadratique ordinaire.

(2.1.5) Nous allons décrire une nouvelle construction de l'extérieur de l'entrelacs algébrique K associé à f (cf. § 1, chap. I).

Si η est un réel positif petit par rapport à ε nous posons :

$$\begin{aligned} M_\eta &= D_\varepsilon^4 \cap (f^{-1}(S_\eta^1)) \\ \Sigma_\eta &= M_\eta \cup (f^{-1}(D_\eta^2) \cap S_\varepsilon^3). \end{aligned}$$

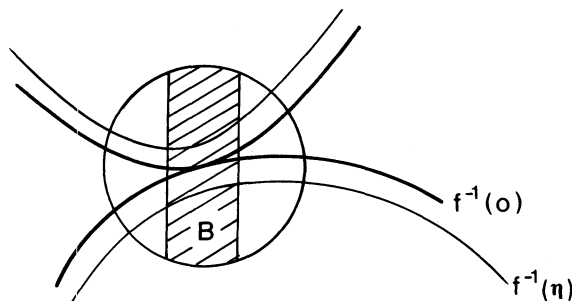
(2.1.6) Dans [M], J. Milnor démontre : si ε est suffisamment petit il existe η_0 , $0 < \eta_0 < \varepsilon$ tel que pour tout η , $0 < \eta \leq \eta_0$, on peut construire un difféomorphisme de paires entre (Σ_η, M_η) et (S_ε^3, M) qui est l'identité au voisinage de K . En particulier Σ_η est difféomorphe à S_ε^3 .

(2.1.7) Pour nos constructions futures nous avons besoin de « mettre » M_η dans une « boule à coins » $B = \{(x, y) \in D_\varepsilon^4 \text{ avec } |x| \leq \theta\}$ où θ est un réel positif suffisamment petit. Plus précisément : supposons que l'axe $x=0$ n'appartienne pas au cône tangent de f . Si ε est suffisamment petit, il existe θ_0 , $0 < \theta_0 < \varepsilon$ tel que pour tout θ , $0 < \theta \leq \theta_0$

(1) $(f^{-1}(0) \cap \partial B) \subset \partial B \setminus (S_\varepsilon^3 \cap \partial B)$.

(2) Il existe un voisinage ouvert U dans $\mathbb{CP}^1$ de la direction $x=0$ tel qu'aucune droite de U n'est tangente à $f^{-1}(0) \cap (D_\varepsilon^4 \setminus \{0\})$.

NOTATION. — K_B est l'entrelacs $(f^{-1}(0) \cap \partial B)$ dans ∂B .



La « boule » B.

(2.1.8) PROPOSITION. — Il existe un difféomorphisme de paires entre (S_ε^3, K) et $(\partial B, K_B)$.

En fait il y a plus : Soit η_0 suffisamment petit pour satisfaire (2.1.6) et pour que :

$$(M_\eta \cap \partial B) \subset (\partial B \setminus (\partial B \cap S_\varepsilon^3))$$

pour tout η , $0 < \eta \leq \eta_0$.

Choisissons un tel η et posons $M_B = M_\eta \cap B$ et $\Sigma = M_B \cup (f^{-1}(D_\eta^2) \cap \partial B)$.

(2.1.9) PROPOSITION. — Il existe un difféomorphisme de paires entre (Σ, M_B) et (Σ_η, M_η) .

Remarque. — La proposition implique en particulier que Σ est une sphère de dimension 3.

Preuve des deux propositions (2.1.8) et (2.1.9). — Notons B^c le complémentaire de l'intérieur de B dans D_ε^4 . Soit A l'anneau $B^c \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$. Notons p la projection orthogonale de B^c sur l'anneau A , i.e. $p(x, y) = (x, 0)$ pour tout (x, y) dans B^c . Notons n la restriction de l'application norme $(x, 0) \mapsto |x|$ à l'anneau A . Le point (2) dans (2.1.7) implique que p n'a pas de point critique sur $(B^c \cap f^{-1}(0))$. L'application n de A sur

l'intervalle $[\theta, \varepsilon]$ est une fibration triviale. Nous obtenons donc une fonction de Morse $(n \cdot p)$ de B^c sur $[\theta, \varepsilon]$ qui n'a pas de points critiques sur $(B^c \cap f^{-1}(0))$. Nous avons obtenu ainsi une isotopie entre les entrelacs K et K_B qui s'étend en une isotopie de leurs voisinages tubulaires $(f^{-1}(D_\eta^2) \cap S_\varepsilon^3)$ et $(f^{-1}(D_\eta^2) \cap \partial B)$.

(2.1.10) DÉCRIVONS M_B COMME REVÊTEMENT RAMIFIÉ SUR UN TORE PLEIN. — Nous supposons toujours que la droite $x=0$ n'appartient pas au cône tangent de f . Nous posons $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$ pour tout $(x, y) \in D_\varepsilon^4$ où ε est suffisamment petit pour vérifier (2.1.7) et pour que Φ soit un revêtement ramifié.

Soient Γ et Δ la courbe polaire et la courbe discriminante de f pour la direction x [cf. (2.1.1)].

Pour éviter les confusions entre l'espace de définition et l'espace image de Φ nous notons u et v les axes de coordonnées de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ qui contient $\Phi(D_\varepsilon^4)$. En particulier $(u, v) = \Phi(x, y)$ implique $u = x$ et $v = f(x, y)$.

D. T. Lê montre dans [L] que si f n'est pas lisse en l'origine alors la courbe discriminante Δ a pour cône tangent l'axe $v=0$. De plus, comme f est réduite l'axe $v=0$ n'est pas une composante de Δ .

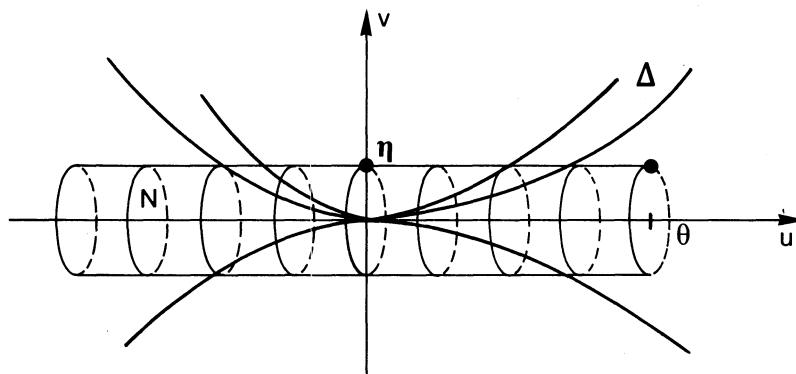
(2.1.11) Si ε et θ sont assez petits il existe η_0 suffisamment petit tel que pour tout $\eta \leq \eta_0$ on ait

(1) la restriction de Φ à $(B \cap f^{-1}(D_\eta^2))$ est un revêtement ramifié d'ordre $m_0(f)$ sur $D_\theta^2 \times D_\eta^2$.

(2) $\Phi(\Sigma) = (S_\theta^1 \times D_\eta^2) \cup (D_\theta^2 \times S_\eta^1)$ et $(\Phi(\Sigma) \cap \Delta) \subset D_\theta^2 \times S_\eta^1$.

NOTATIONS. — Notons N le tore plein $D_\theta^2 \times S_\eta^1$ et L la tresse $(\Delta \cap (D_\theta^2 \times S_\eta^1))$.

CONCLUSION. — La restriction de Φ à M_B est un revêtement fini ramifié sur le tore plein N et la tresse L est l'ensemble des valeurs de ramification.



Le tore N .

(2.1.12) Si ε , θ et η_0 sont choisis pour vérifier (2.1.11), (2.1.6) et (2.1.9) alors pour tout $\eta \leq \eta_0$ nous pouvons identifier M_B comme extérieur de l'entrelacs K_B dans Σ à l'extérieur M de l'entrelacs algébrique K dans S_ε^3 .

2. Quotients polaires

(2.2.1) Supposons que l'axe $x=0$ ne soit pas dans le cône tangent de f . Soit Γ la courbe polaire pour la direction $l=x$. Pour toute composante irréductible γ de Γ nous considérons le contact $c(f, \gamma) = m_0(f \cap \gamma)/m_0(\gamma)$ de f avec γ .

DÉFINITION. — Nous appelons *quotient polaire* un nombre rationnel dans $\mathcal{P} = \{c(f, \gamma), \gamma \text{ une composante irréductible de } \Gamma\}$.

(2.2.2) Soit δ une composante irréductible de la courbe discriminante $\Delta = \Phi(\Gamma)$. Le théorème de Puiseux fournit une paramétrisation de δ de la forme

$$v = t^n$$

$$u = at^m + \sum_{j \geq 0} b_j t^{m_j}$$

où a est un nombre complexe non nul et les entiers positifs n , m et m_j vérifient : $m < m_0 < \dots < m_j < m_{j+1} < \dots$.

Par D. T. Lê [L₂] si l'origine n'est pas un point lisse de $f^{-1}(0)$ (ce que nous avons toujours supposé dans ce travail) alors δ est tangente à l'axe $v=0$. D'où :

Remarque. — $m < n$.

NOTATION. — Un développement de Puiseux de δ sera désormais écrit sous la forme

$$u = av^{m/n} + \sum_{j \geq 0} b_j v^{m_j/n}$$

où $v^{1/n}$ désigne une racine n -ième de v .

PROPOSITION. — *Le premier exposant (non nécessairement caractéristique) de Puiseux n/m de δ est un quotient polaire.*

Preuve. — Soit une composante irréductible γ de Γ tel que $\Phi(\gamma) = \delta$; montrons que $c(f, \gamma) = n/m$.

Dans la sphère $(D_0^2 \times S_\eta^1) \cup (S_0^1 \times D_\eta^2)$ nous avons :

$$\frac{n}{m} = \frac{\mathcal{L}(S_0^1 \times 0, L(\delta))}{\mathcal{L}(0 \times S_\eta^1, L(\delta))}$$

où $L(\delta)$ désigne la tresse $(\delta \cap N)$ associée à δ dans $N = D_0^2 \times S_\eta^1$.

La restriction de Φ au nœud $(\gamma \cap M_B)$ est un revêtement fini dont l'ordre est noté α . Considérons aussi les coefficients d'enlacement entre des entrelacs de la sphère Σ définie en (2.1.9). Nous avons les égalités :

$$\mathcal{L}(K_B, (\gamma \cap M_B)) = \alpha \mathcal{L}(S_0^1 \times 0, L(\delta))$$

$$\mathcal{L}(M_B \cap \{x=0\}, (\gamma \cap M_B)) = \alpha \mathcal{L}(0 \times S_\eta^1, L(\delta)).$$

Par conséquent :

$$\frac{n}{m} = \frac{m_0(f \cap \gamma)}{m_0(x \cap \gamma)}.$$

Il nous reste à vérifier que $m_0(x \cap \gamma) = m_0(\gamma)$, c'est-à-dire que $x=0$ n'est pas dans le cône tangent de γ . Soit $P(x, y)$ le polynôme homogène de degré $m_0(f)$ qui fournit l'équation du cône tangent de f . Le cône tangent de Γ a pour équation $(\partial P / \partial y)(x, y)$. Comme $x=0$ n'est pas dans le cône tangent de f , x ne divise pas $P(x, y)$. Mais alors x ne divise pas $(\partial P / \partial y)(x, y)$ et l'axe $x=0$ n'appartient pas au cône tangent de Γ .

Comme γ est une branche de Γ nous avons démontré la proposition.

Ordonnons les éléments de $\mathcal{P}$:

$$\frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{p_i}{q_i} < \dots < \frac{p_k}{q_k}.$$

Pour tout $i \in \{1 \dots k\}$ il existe, par la proposition précédente, une composante irréductible δ_i de Δ qui a un développement de Puiseux de la forme :

$$u = a_i v^{q_i/p_i} + \sum_{j \geq 0} b_j v^{r_j}$$

où $q_i/p_i < r_0 < \dots < r_j < r_{j+1} < \dots$ et a_i est non nul.

(2.2.3) Notons Δ_i la courbe formée des composantes de la courbe discriminante Δ dont le développement de Puiseux commence par :

$$u = av^{q_i/p_i} + \dots$$

où a est non nul.

DESCRIPTION DE LA TRESSE L EN FONCTION DE $\mathcal{P}$. — Comme en (2.1.11) notons N le tore plein $D_0^2 \times S_\eta^1$ et L la tresse $\Delta \cap N$. Notons aussi L_i la tresse $\Delta_i \cap N$.

Nous allons décomposer N en la réunion d'un tore plein Z_1 et de $(k-1)$ tores épaissis $Z_2 \dots Z_k$ pour que L_i soit dans l'intérieur de Z_i .

Pour tout $i \in \{1 \dots k-1\}$ choisissons un entier positif k_i tel que $((q_{i+1}/p_{i+1}) - (q_i/p_i) + (1/k_i))$ soit négatif. Ceci est possible puisque $p_i/q_i < p_{i+1}/q_{i+1}$. Posons :

$$s_i = \frac{q_i}{p_i} - \frac{1}{k_i}.$$

Notons :

$$Z_1 = \{(u, v) \in N \text{ tels que } |u| \leq \eta^{s_1}\}$$

$$\text{si } i \in \{2, \dots, k-1\}, \quad Z_i = \{(u, v) \in N \text{ tels que } \eta^{s_{i-1}} \leq |u| \leq \eta^{s_i}\}$$

$$Z_k = \{(u, v) \in N \text{ tels que } \eta^{s_{k-1}} \leq |u|\}.$$

De plus posons :

$$\mathcal{D} = D_0^2 \times \{\eta\} \quad \text{et} \quad C_i = \mathcal{D} \cap Z_i.$$

(2.2.4) DÉFINITION. — Z_i est la i -ième zone polaire de N et C_i la i -ième couronne polaire de N .

(2.2.5) PROPOSITION. — Si η est suffisamment petit la tresse L_i se trouve à l'intérieur de la i -ième zone polaire z_i .

Preuve. — Plus précisément nous allons montrer que si η est suffisamment petit et si $(u_i, v) \in \Delta_i$ et $(u_{i+1}, v) \in \Delta_{i+1}$ avec $|v| \leq \eta$ alors :

$$|u_i| < |v|^{s_i} < |u_{i+1}|.$$

Ceci se justifie intuitivement car (u_i, v) est sur une courbe δ_i dont le développement de Puiseux commence par $u = a_i v^{q_i/p_i} + \dots$ tandis que (u_{i+1}, v) est sur une courbe δ_{i+1} dont le développement de Puiseux commence par

$$u = a_{i+1} v^{q_{i+1}/p_{i+1}} + \dots \quad \text{où} \quad \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}} < \frac{q_i}{p_i}.$$

La norme de u_i va donc être « plus petite » que la norme de u_{i+1} si la norme de v est « petite ».

Voici des détails :

Il s'agit d'obtenir η tel que : si $|v| \leq \eta$ alors :

$$|v|^{-s_i} |u_i| < 1 \quad \text{et} \quad 1 < |u_{i+1}| \cdot |v|^{-s_i}.$$

Or $(u_i, v) \in \delta_i$ et un développement de Puiseux de δ_i est :

$$u = a_i v^{q_i/p_i} + \sum_{j \geq 0} b_j v^{r_j} \quad \text{avec} \quad q_i/p_i < r_0 < \dots < r_j < r_{j+1} \dots$$

Par construction $s_i = (q_i/p_i) - (1/k_i)$ ce qui implique :

$$0 < \frac{1}{k_i} < r_j - s_i \quad \text{pour tout entier } j.$$

Il existe donc un réel positif $\eta(\delta_i)$ tel que :

$$(*) \quad |a_i| \cdot |v|^{1/k_i} + \sum_{j \geq 0} |b_j| \cdot |v|^{r_j - s_i} < 1$$

pour tout v avec $|v| \leq \eta(\delta_i)$.

Si $(u_i, v) \in \delta_i$, (*) implique : $|v|^{-s_i} |u_i| < 1$.

Soit η_1 le minimum des $\eta(\delta_i)$ lorsque δ_i parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de Δ_i . Un calcul semblable permet de trouver η_2 tel que : si $(u_{i+1}, v) \in \Delta_{i+1}$ et $|v| \leq \eta_2$ alors $1 < |u_{i+1}| \cdot |v|^{-s_i}$.

La proposition (2.2.5) est vérifiée lorsque η est inférieur à η_1 et à η_2 .

3. Généralités sur les fibrations sur le cercle et leurs monodromies

Soit W une variété différentiable, compacte connexe orientée de dimension 3. Soit $\varphi: W \rightarrow S^1$ une fibration différentiable localement triviale de W sur S^1 . Notons G une fibre de φ .

(2.3.1) DÉFINITIONS. — Soit h un difféomorphisme de G . Le *mapping tore*, $\text{Map}(G, h)$, de G par h est la variété quotient $G \times [0, 1]/(x, 0) \sim (h(x), 1)$. Notons p la fibration localement triviale de $\text{Map}(G, h)$ sur S^1 définie par : $p(x, t) = e^{2i\pi t}$. h est une *monodromie* de φ si la fibration p est isomorphe à la fibration φ .

(2.3.2) La donnée d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 différentiable et orienté de W *transverse* aux fibres de φ fournit une monodromie de φ . En effet l'homomorphisme de premier retour le long des feuilles de $\mathcal{F}$ est une monodromie de φ . Les trivialisations locales de φ permettent toujours de construire un tel feuilletage $\mathcal{F}$ de W . La fibration φ possède donc toujours une monodromie et celle-ci est bien définie à isotopie près.

(2.3.3) DÉFINITION. — W est le *mapping tore* de G si W est difféomorphe à $\text{Map}(G, h)$ où h est un difféomorphisme de G .

(2.3.4) Exemples. — Si W est le *mapping tore* d'une réunion de disques alors W est un tore plein. Si W est le *mapping tore* d'une réunion d'anneaux alors W est un tore épaissi.

(2.3.5) Remarque. — Si W admet une fibration localement triviale différentiable de fibre G sur le cercle alors W est le *mapping tore* de G .

4. Décomposition de Waldhausen de M_B

Utilisons les définitions et notations des paragraphes précédents, en particulier en (2.1.9) et en (2.2.3) pour énoncer le théorème fondamental de cet article. Tout le paragraphe 4 consistera en sa démonstration.

(2.4.1) THÉORÈME A. — Soit $i \in \{1 \dots k\}$. Posons $M_i = M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i)$. Toute composante connexe de M_i est une variété de Seifert.

(2.4.2) Avant de commencer la preuve du théorème nous devons définir des voisinages particuliers des composantes de la tresse L .

Soit δ une composante irréductible de Δ_i et soit $u = av^{q_i/p_i} + \sum_{j \geq 0} b_j v^j$ un développement de Puiseux de δ .

Soit δ_0 la courbe ayant $u = av^{q_i/p_i}$ pour développement de Puiseux.

(2.4.3) DÉFINITION. — Les *soleils* de δ sont les points d'intersection de δ_0 avec le disque $\mathcal{D}$.

Remarque. — Les soleils de δ sont au nombre de p_i et ils se répartissent régulièrement, dans $\mathcal{D}$, sur un cercle de centre $(0, \eta)$ et de rayon $|a| \eta^{q_i/p_i}$.

(2.4.5) Soient $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \dots, \delta_{m(i)}\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de Δ_i . Notons,

$$u = a_m v^{q_i/p_i} + \sum_{j \geq 0} b_{mj} v^{r_{mj}}$$

un développement de Puiseux de δ_m .

Soit s un nombre rationnel qui vérifie $q_i/p_i < s < r_{m_0}$ pour tout $m \in \{1, \dots, m(i)\}$.

Posons :

$$W(\delta_m) = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \text{ où } |u - a_m v^{q_i/p_i}| \leq |v|^s\}.$$

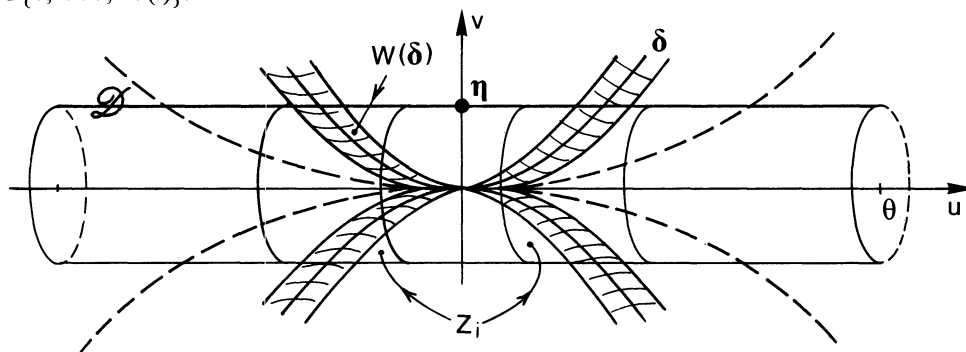
$$W_\eta(\delta_m) = W(\delta_m) \cap (D_\theta^2 \times D_\eta^2).$$

Remarque. — Deux composantes irréductibles δ et δ' de Δ_i ont les mêmes soleils si et seulement si $W(\delta) = W(\delta')$.

PROPOSITION. — Il existe η_0 suffisamment petit tel que pour tout $\eta \leq \eta_0$ et toute composante irréductible δ de Δ_i on ait :

- (1) $W(\delta) \cap N$ est dans l'intérieur de la zone Z_i .
- (2) $((\delta \setminus \{(0, 0)\}) \cap D_\theta^2 \times D_\eta^2)$ est dans l'intérieur de $W(\delta)$.
- (3) Si δ' est une composante irréductible de Δ_i qui n'a pas les mêmes soleils que δ alors $W_\eta(\delta) \cap W_\eta(\delta') = \{(0, 0)\}$.

La proposition découle directement des inégalités $q_i/p_i < s$ et $s < r_{m_0}$ pour tout $m \in \{1, \dots, m(i)\}$.



$W(\delta)$ est la partie hachurée autour de δ .

(2.4.6) DÉFINITION. — $W(\delta_m)$ est le voisinage conique de δ_m .

Remarque. — $W(\delta) \cap N$ est un « petit » tore plein qui contient en son intérieur la tresse $(\delta \cap N)$ et dont l'âme est un nœud du tore (p_i, q_i) sur le tore $S_\alpha^1 \times S_\eta^1$ où $\alpha = |a| \eta^{q_i/p_i}$. De plus $(W(\delta) \cap \mathcal{D})$ est une réunion disjointe de p_i « petits » disques de centre les soleils de δ .

La preuve du théorème A repose sur le lemme fondamental suivant :

(2.4.7) LEMME. — Soit δ une composante irréductible de Δ_i , $i \in \{1 \dots k\}$. Si D est une composante connexe de $(W(\delta) \cap \mathcal{D})$ alors $(\Phi^{-1}(D) \cap M_B)$ est une union disjointe de disques.

Remarque. — $(\Phi^{-1}(\mathcal{D}) \cap M_B)$ est égal à $F = (f^{-1}(\eta) \cap B)$, F est donc une surface orientée connexe dont le bord est isotope dans ∂B à l'entrelacs algébrique K_B .

(2.4.8) AFFIRMATION. — Le lemme (2.4.7) entraîne le théorème A.

Preuve de l'affirmation. — Sur la couronne trouée C'_i définie par :

$$C'_i = C_i \setminus \left[C_i \cap \left(\bigcup_{m=1}^{m(i)} \mathring{W}(\delta_m) \right) \right]$$

nous définissons la rotation R_i d'angle $2\pi q_i/p_i$. Les trajectoires de R_i dans la i -ième zone polaire Z_i fournissent une fibration en cercles de $Z'_i = Z_i \setminus \left[Z_i \cap \left(\bigcup_{m=1}^{m(i)} \mathring{W}(\delta_m) \right) \right]$.

Remarque. — Une fibre de Z'_i est donc un nœud torique (p_i, q_i) dans le tore plein N .

Or : $\Delta \cap N = \Delta_i \cap N$ est inclu dans : $\bigcup_{m=1}^{m(i)} \mathring{W}(\delta_m)$.

La restriction de Φ à $M'_i = M_B \cap (\Phi^{-1}(Z'_i))$ est donc un revêtement fini de M'_i sur Z'_i . Ce revêtement permet de relever la fibration en cercles de Z'_i en une fibration en cercles de M'_i . Soit T une composante connexe de $M_i \setminus M'_i$ où $M_i = M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i)$. La restriction de f à T est une fibration localement triviale sur S^1_η dont la fibre est, par le lemme de la balançoire (2.4.7), une réunion de disques. Par (2.3.4) T est donc un tore plein. Le bord de T est fibré en cercles par la fibration de M'_i . Or les fibres de M'_i ne sont pas nulles homologues dans T . Nous étendons la fibration sur le bord de T à une fibration au sens de Seifert de T tout entier. Ceci termine la preuve de (2.4.8).

Soit $\lambda = M_B \cap \{x=0\}$. Notons $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ l'enlacement dans les sphères Σ et $\Phi(\Sigma)$ [Σ a été définie en (2.1.9)].

(2.4.9) COROLLAIRE de la preuve de (2.4.8). — Soit ω une fibre de Seifert de la fibration de $M_i = M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i)$ construite ci-dessus.

Si ω n'est pas la fibre λ alors le quotient $\mathcal{L}(K_B, \omega)/\mathcal{L}(\omega, \lambda)$ est égal au quotient polaire p_i/q_i .

Preuve de (2.4.9). — Si ω est une fibre régulière de M_i nous pouvons supposer (modulo une isotopie) que ω est une fibre de M'_i . Par construction $\Phi(\omega)$ est une trajectoire de la rotation d'angle $2\pi q_i/p_i$ sur C_i . Comme $S^1_0 \times \{0\} = \Phi(K_B)$ et $\{0\} \times S^1_\eta = \Phi(\lambda)$ nous avons : $\mathcal{L}(\Phi(K_B), \Phi(\omega)) = p_i$ et $\mathcal{L}(\Phi(\omega), \Phi(\lambda)) = q_i$. Comme la restriction de Φ à ω est un revêtement, le corollaire est vérifié pour une fibre régulière de M_i .

Supposons que ω soit une fibre singulière de M_i . Par construction ω est alors l'âme d'un tore plein T inclu dans $M_i \setminus M'_i$. Soit ω' une fibre sur le bord de T .

Notons α l'entier positif tel que la classe de ω' dans $H_1(T)$ soit égale à $\alpha[\omega]$ où $[\omega]$ est la classe de ω .

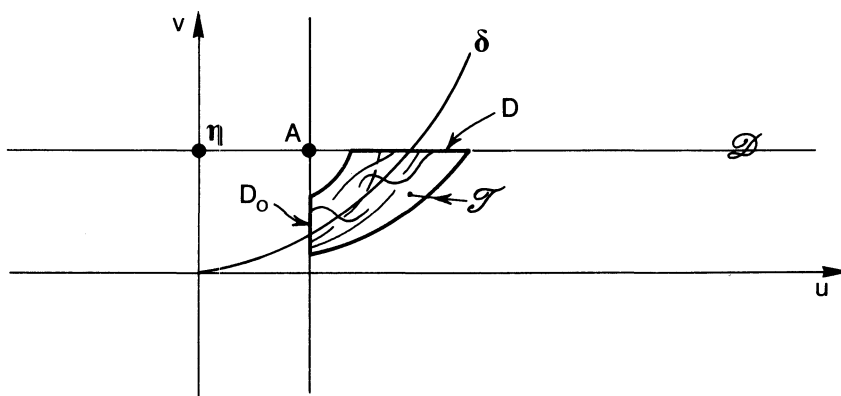
Comme T ne rencontre pas λ et que T est transverse à la surface $F = \Phi^{-1}(D_0^2 \times \{\eta\})$ de bord K_B nous avons :

$$\mathcal{L}(K_B, \omega') = \alpha \mathcal{L}(K_B, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\lambda, \omega') = \alpha \mathcal{L}(\lambda, \omega).$$

Ceci termine la preuve du corollaire.

Donnons l'idée de la démonstration du lemme (2.4.7).

Nous construisons un « tube » $\mathcal{T}$ entre D et une droite complexe verticale d pour que $\mathcal{T} \cap \Delta$ soit une tresse dont les brins partent de $D_0 = \mathcal{T} \cap d$ pour s'arrêter sur D . Ce tube permet de montrer que $\Phi^{-1}(D_0)$ et $\Phi^{-1}(D)$ ont même groupe d'homotopie (on bascule, dans $\mathcal{T}$, D sur D_0 ; d'où le nom lemme de la balançoire). Mais comme D_0 est dans une droite verticale ($u = \text{Cte}$), $\Phi^{-1}(D_0)$ est dans une droite $x = \text{Cte}$ et il n'est pas difficile de vérifier que $\Phi^{-1}(D_0)$ est une union disjointe de disques.



Position des disques D et D_0 .

Preuve du lemme (2.4.7). — Soit $a = av^{q_i/p_i} + \sum_{j \geq 0} b_j v^{r_j}$ un développement de Puiseux de δ . Soit δ_0 la courbe ayant $u = av^{q_i/p_i}$ pour développement de Puiseux. Nous pouvons supposer que le disque D est la composante connexe de $(W(\delta) \cap \mathcal{D})$ qui a pour centre le soleil $P = (a\alpha^{q_i}, \eta)$ où α est la racine p_i -ième réelle positive de η . Vu la construction de $W(\delta)$ il existe un réel positif β tel que le point $A = (a\beta^{q_i}, \eta)$ ne soit pas dans $W(\delta)$ et que $\beta < \alpha$.

Soit d la droite d'équation $u = a\beta^{q_i}$. Le point $Q = (a\beta^{q_i}, \beta^{p_i})$ appartient à $(d \cap \delta_0)$. Soit D_0 la composante connexe de $(W(\delta) \cap d)$ qui contient Q .

Construisons maintenant le « tube » $\mathcal{T}$ de dimension réelle 3 qui « relie » D à D_0 . Soit $c : [\beta, \alpha] \rightarrow \delta_0$ le chemin défini par $c(t) = (at^{q_i}, t^{p_i})$. Le chemin $c[\beta, \alpha]$ est sur δ_0 , il va de Q vers P .

Pour tout $t \in [\beta, \alpha]$ soit d_t la droite qui passe par A et $c(t)$.

(2.4.9) Notons D_t la composante connexe de $(W(\delta) \cap d_t)$ qui contient $c(t)$ et posons $\mathcal{T} = (\bigcup_{t \in [\beta, \alpha]} D_t)$.

Remarquons que $D_\beta = D_0$ et $D_\alpha = D$.

Numérotons $P_1, \dots, P_k, \dots, P_e$ les points d'intersection entre la courbe discriminante Δ et le disque D .

(2.4.10) LEMME (lemme de la balançoire). — *Il existe un homéomorphisme de paires H entre $(\mathcal{T}, c[\beta, \alpha])$ et $(D \times [\beta, \alpha], P \times [\beta, \alpha])$ tel que :*

(a) $H(z) = (z, \alpha)$ pour tout z dans D ;

(b) $H(\mathcal{T} \cap \Delta) = \{P_1, \dots, P_k, \dots, P_e\} \times [\beta, \alpha]$.

Pour montrer ce lemme, il suffit de montrer que la fonction de Morse $m: \mathcal{T} \rightarrow [\beta, \alpha]$ définie par $m(D_t) = t$ n'a pas de point critique sur $\delta_0 \cap \mathcal{T}$, ni sur $\Delta \cap \mathcal{T}$, ni sur le bord de $\mathcal{T}$ (ce qui implique que $S_t = \partial D_t$ est un cercle pour tout $t \in [\beta, \alpha]$).

(2.4.11) Par calcul direct on peut vérifier que si $(u, v) \in \delta_0 \cap D_t$ alors d_t n'est pas tangent à δ_0 en (u, v) . Comme les composantes irréductibles de Δ qui intersectent $\mathcal{T}$ ont les mêmes soleils que δ_0 c'est-à-dire que leur développement de Puiseux commence aussi par $u = av^{q_i/p_i} + \dots$ si $(u, v) \in \Delta \cap D_t$ alors d_t n'est pas tangente à Δ en (u, v) .

Il nous reste à montrer que D_t est un disque pour tout $t \in [\beta, \alpha]$. Décrivons le bord de $W(\delta)$. En (2.4.5) nous avons choisi un rationnel s avec $q_i/p_i < s$. Écrivons $s = q/p_i p$ avec p et q premiers entre eux. Comme $W(\delta) = \{(u, v) \text{ t. q. } |u - av^{q_i/p_i}| \leq |v|^s\}$, $W(\delta)$ est réunion des courbes δ_z qui admettent $u = av^{q_i/p_i} + zv^{q/p_i p}$, $z \in D_1^2$, pour développement de Puiseux. Au voisinage de l'origine ($|v| \leq \eta$, η très petit), si $z^p \neq z'^p$ alors $\delta_z \cap \delta_{z'} = (0, 0)$ et si $z^p = z'^p$ alors $\delta_z = \delta_{z'}$. Le bord de $W(\delta)$ est recouvert par les courbes δ_z telles que $|z| = 1$.

Soit $(u, v) \in S_t = \partial D_t$, il existe $z \in S^1$ tel que $(u, v) \in \delta_z$.

Soit $g: S_t \rightarrow S'$ définie par $g(u, v) = z^p$. Comme d_t n'est pas tangente à δ_z en (u, v) [nous étendons à δ_z l'argument donné en (2.4.11)], g est surjective et l'image inverse de chaque point est de cardinal p . De plus, g est continue et c'est un homéomorphisme local. Donc g est un revêtement, ce qui implique que S_t est soit un cercle, soit une union disjointe de cercles. Comme S_α est un seul cercle et qu'il y a, en fonction du paramètre t , déformation continue de S_t à S_α on ne peut pas passer d'un cercle à plusieurs cercles sans une étape du type : ∞ , ce que nous venons d'exclure car g est un revêtement.

Fin de la preuve du lemme de la balançoire.

(2.4.12) Soit U une composante connexe de $\Phi^{-1}(D_0)$; montrons que U est un disque. U est dans le disque $(a\beta^q \times D_\varepsilon^2)$. La restriction de Φ à $(a\beta^q \times D_\varepsilon^2)$ est un revêtement ramifié avec un nombre fini de points de ramification. On passe de U au disque $a\beta^q \times D_\varepsilon^2$ en ajoutant des anses d'indice 1. Au niveau des caractéristiques d'Euler nous obtenons donc l'inégalité :

$$\chi(U) \geq \chi(a\beta^q \times D_\varepsilon^2) = 1.$$

U est bien un disque.

Terminons la preuve du lemme (2.4.7).

Par le sous-lemme $\Phi^{-1}(\mathcal{T})$ est le revêtement fini d'un tube $D \times [\beta, \alpha]$ ramifié sur la tresse triviale $\{P_1, \dots, P_m, \dots, P_e\} \times [\beta, \alpha]$. Il est alors évident que $\Phi^{-1}(D_0)$ et $\Phi^{-1}(D)$ ont même premier groupe d'homotopie. Comme ce sont deux surfaces qui ont même bord elles sont homéomorphes. Comme $\Phi^{-1}(D_0)$ est une union disjointe de disques (2.4.12), $\Phi^{-1}(D)$ est aussi une union disjointe de disques.

Fin de la preuve du lemme (2.4.7).

5. Décomposition polaire minimale de M_B

Dans le théorème A [voir (2.4.1)] nous avons démontré que les composantes connexes des variétés $(M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i))$, $i = 1 \dots k$, constituent une décomposition de Waldhausen de l'extérieur M_B de l'entrelacs associé au germe f . Nous allons obtenir la décomposition minimale en gardant les composantes connexes qui rencontrent la courbe polaire Γ [avec une exception pour $\Phi^{-1}(Z_1) \cap M_B$] et en étendant leurs fibrations construites en (2.4.8) aux tores épaissis adjacents.

(2.5.1) Pour être plus précis nous avons besoin de considérer la fibration différentiable de M_B sur S_η^1 définie par f . Notons : $F = f^{-1}(\eta)$. Soit W_i une composante connexe de $(\Phi^{-1}(Z_i) \cap M_B)$ notons $F_i = W_i \cap F$.

Les tores du bord de W_i sont transverses à $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in S_\eta^1$ car les tores du bord de Z_i sont transverses aux disques $D_0^2 \times \{z\} = \Phi(f^{-1}(z) \cap M_B)$. La restriction de f à W_i est donc une fibration localement triviale de fibre F_i . Calculons la caractéristique d'Euler $\chi(F)$. Soient $P_1, \dots, P_l, \dots, P_m$ les points de $F_i \cap \Gamma$ et soient $a_1 \dots a_l \dots a_m$ leurs indices de ramification respectifs.

(2.5.1) PROPOSITION :

$$(a) \text{ Si } i=1 \text{ alors } \chi(F_1) = m_0(f) - \sum_{l=1}^m (a_l - 1).$$

$$(b) \text{ Si } i > 1 \text{ alors } \chi(F_i) = \sum_{l=1}^m (a_l - 1).$$

Preuve. — La restriction de Φ à F_i est un revêtement ramifié.

Si $i > 1$, $\Phi(F_i)$ est l'anneau C_i , le calcul de $\chi(F_i)$ est évident.

Si $i = 1$ nous devons utiliser le lemme suivant :

(2.5.2) LEMME. — L'intersection M_1 de M_B avec $\Phi^{-1}(Z_1)$ est connexe par arcs.

Preuve. — La zone polaire Z_1 est un tore plein d'âme $0 \times S_\eta^1$. Montrons que $\lambda = (M_B \cap \Phi^{-1}(0 \times S_\eta^1))$ est connexe par arcs. En effet λ est le nœud associé à la droite $x=0$ dans la variété M_B . Soit $z \in M_1$. Relions, dans Z_1 , $\Phi(z)$ à un point de $(0 \times S_\eta^1)$ par un chemin qui évite la tresse de ramification. Nous relevons ce chemin au départ de z et nous aboutissons sur λ . Ceci démontre le lemme.

Montrons le (a) de (2.5.1).

Comme $M_1 = (\Phi^{-1}(Z_1) \cap M_B)$ est connexe, $F_1 = F \cap \Phi^{-1}(C_1)$. Soit D un petit disque sur C_1 centré en $(0, \eta)$, D ne rencontre pas l'ensemble de ramification. L'ensemble $\Phi^{-1}(0, \eta) \cap F_1 = \{x=0\} \cap \{f^{-1}(\eta)\}$ est constitué de $m_0(f)$ points. Donc $\Phi^{-1}(D)$ est union disjointe de $m_0(f)$ disques, sa caractéristique d'Euler est égale à $m_0(f)$. Le (a) de la proposition (2.5.1) en découle directement.

(2.5.3) COROLLAIRE. — *Supposons $i > 1$. Si W_i rencontre la courbe polaire Γ alors W_i n'est ni un tore plein ni un tore épaissi. Si W_i ne rencontre pas Γ alors W_i est un tore épaissi.*

Preuve. — Si W_i ne rencontre pas Γ , la proposition (2.5.1) implique que $\chi(F_i) = 0$. Comme W_i est alors le *mapping tore* d'un nombre fini d'anneaux, W_i est un tore épaissi [voir (2.3.4)]. Sinon $\chi(F_i) < 0$ et W_i est le *mapping tore* d'une surface de genre non nul.

(2.5.4) PROPOSITION. — $M_1 = M_B \cap \Phi^{-1}(Z_1)$ n'est jamais un tore plein. De plus M_1 est un tore épaissi si et seulement si $p_1/q_1 = m_0(f)$ et $F_1 \cap \Gamma$ est constitué de $m_0(f)$ points.

Preuve. — Par construction Z_1 rencontre la courbe discriminante Δ . Comme M_1 est connexe (2.5.2), M_1 rencontre la courbe polaire Γ . Soit γ une composante irréductible de Γ telle que $\gamma \cap M_1 \neq \emptyset$.

$F \cap \gamma = F_1 \cap \gamma$ contient au moins $m_0(f)$ points. Par (2.5.1) $\chi(F_1) \leq 0$ et M_1 n'est pas un tore plein. Comme M_1 est le *mapping tore* de F_1 , M_1 est un tore épaissi si et seulement si $\chi(F_1) = 0$ [voir (2.3.4)]. Par (2.5.1) ceci implique que $F_1 \cap \Gamma = F_1 \cap \gamma$ est constitué de $m_0(f)$ points. La courbe γ est donc lisse et transverse à $f^{-1}(0)$. Comme le premier quotient polaire p_1/q_1 est égal au contact $c(f, \gamma)$ entre f et γ [voir (2.2.1)],

$$p_1/q_1 = c(f, \gamma) = \frac{m_0(f \cap \gamma)}{m_0(\gamma)} = m_0(f).$$

Fin de la preuve de (2.5.4).

(2.5.5) CONSTRUCTION DE LA DÉCOMPOSITION MINIMALE DE M_B . — Soit la famille de tores $I = \left(\left(\bigcup_{i=1}^k \Phi^{-1}(\partial Z_i) \right) \cap M_B \right)$. Dans (2.4.8) nous avons muni l'adhérence de toute composante connexe de $(M_B \setminus I)$ d'une fibration en cercles au sens de Seifert.

(2.5.6) DÉFINITION. — Soit W l'adhérence d'une composante connexe de $(M_B \setminus I)$. Soit $W^{(1)}$ la réunion de W avec les tores épaissis de $(M_B \setminus I)$ qui lui sont adjacents (s'il y en a), $W^{(l)}$ est la réunion de $W^{(l-1)}$ avec les tores épaissis de $(M_B \setminus I)$ qui lui sont adjacents. L'extension $\bar{W}$ de W dans M_B est égale à $W^{(l)}$ si aucune composante connexe de $(M_B \setminus I)$ adjacente à $W^{(l)}$ n'est un tore épaissi.

(2.5.7) THÉORÈME B. — La décomposition minimale $M_B = \bigcup_{j=1}^n V_j^*$ de M_B en la réunion des variétés de Seifert V_j^* est construite comme suit :

(a) Si $M_1 = M_B \cap \Phi^{-1}(Z_1)$ n'est pas un tore épaissi, V_1^* est l'extension de M_1 dans M_B . Si $V_1^* \neq M_B$, soit W l'adhérence d'une composante connexe de $M_B \setminus (I \cup V_1^*)$ qui rencontre la courbe polaire Γ , posons $V_2^* = \bar{W}$, etc.

(b) Si M_1 est un tore épaissi, soient W et W' l'adhérence des deux composantes connexes de $(M_B \setminus I)$ adjacentes à M_1 . Au moins l'une d'elle, disons W , rencontre la courbe polaire Γ alors V_1^* est l'extension de W dans M_B . Nous construisons alors $V_2^*, V_3^* \dots V_n^*$ comme en (a).

Preuve du théorème B. — Notons $J^* = \{V_{j_1}^* \cap V_{j_2}^*, j_1 \neq j_2\}$.

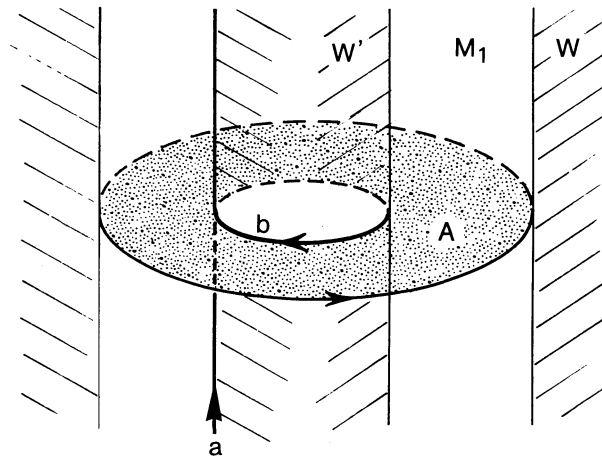
Par le théorème (1.2.7), il suffit de vérifier les hypothèses du théorème (1.2.3).

Nos variétés V_j^* sont l'extension dans M_B d'une variété de Seifert. Comme les fibrations de Seifert s'étendent au travers d'un tore épaissi, l'extension (dans notre sens) d'une variété de Seifert est une variété de Seifert. Par construction V_j^* n'est jamais un tore plein ni un tore épaissi [voir le corollaire (2.5.3)]. Soit T un tore de J^* , $T = V_{j_1}^* \cap V_{j_2}^*$, il nous reste à démontrer qu'une fibre de Seifert ρ_1 de $V_{j_1}^*$ sur T n'est pas homologue dans T à une fibre de Seifert ρ_2 de $V_{j_2}^*$ sur T .

(a) Si M_1 n'est pas un tore épaissi, il existe une composante connexe W_i de $(\Phi^{-1}(Z_i) \cap M_B)$ qui rencontre Γ et qui est dans $V_{j_1}^*$, et une composante connexe W_{i+l} de $\Phi^{-1}(Z_{i+l}) \cap M_B$ qui rencontre Γ et qui est dans $V_{j_2}^*$, l est non nul. Alors $\Phi(\rho_1)$ est un nœud torique p_i/q_i et $\Phi(\rho_2)$ un nœud torique p_{i+l}/q_{i+l} sur $\Phi(T)$. Or : $p_i/q_i < p_{i+l}/q_{i+l}$. Donc ρ_1 n'est pas homologue à ρ_2 .

(b) Si M_1 est un tore épaissi, $M_1 \subset V_1^*$. Si $j_1 \neq 1$ et $j_2 \neq 1$ nous faisons le raisonnement de (a). Supposons $j_1 = 1$. Par construction V_1^* est l'extension de W où $\Phi(W) = Z_2$. Si $W' = (\Phi^{-1}(Z_2) \setminus W)$ ne rencontre pas Γ , $W' \subset V_1^*$. Dans ce cas $\Phi(\rho_1)$ est un nœud torique (p_2, q_2) et $\Phi(\rho_2)$ un nœud torique (p_i, q_i) , avec $i > 2$, du tore $\Phi(T)$. Nous avons de nouveau deux fibres ρ_1 et ρ_2 non homologues dans T .

Si W' rencontre Γ et si $V_{j_2}^*$ est l'extension de W' , $\Phi(\rho_1)$ et $\Phi(\rho_2)$ sont toutes deux des nœuds toriques (p_2, q_2) sur le tore $\Phi(T)$. C'est une question d'orientation qui va nous permettre de démontrer que ρ_1 et ρ_2 ne sont pas homologues sur T . Ici $T = W' \cap M_1$.



Le bord du disque C_1 est muni de l'orientation trigonométrique. Soit A une composante connexe de F_1 . Vu que dans ce cas (b) M_1 est un tore épaissi, A est un anneau. Soit (u, η) un point du bord de C_1 .

Notons a une composante connexe de $\Phi^{-1}(u \times S_\eta^1) \cap T$ et b le cercle $A \cap T$ muni de l'orientation induite par le bord de C_1 . Les classes d'homologie $[a]$ et $[b]$ dans $H_1(T)$ sont linéairement indépendantes et $[\rho_2] = d_1 p_2 [a] + d_2 q_2 [b]$ où d_1 est le degré de Φ sur a et d_2 son degré sur b .

Vérifions $[\rho_1] = d_1 p_2 [a] - d_2 q_2 [b]$.

Soit b_1 le cercle $A \cap W$ muni de l'orientation induite par le bord de C_1 .

Par construction : $[\rho_1] = d_1 p_2 [a] + d_2 q_2 [b_1]$. Mais dans $H_1(M_1)$ nous avons :

$$0 = [\partial A] = [b_1] + [b].$$

Or $H_1(M_1) = H_1(T)$. Dans $H_1(T)$ nous avons $[b] = -[b_1]$.

Fin de la preuve du théorème B.

(2.5.8) CONCLUSION. — Vu la construction des variétés de Seifert V_j^* toutes les fibres des V_j^* sont des nœuds algébriques. Soit ρ_j une fibre régulière de V_j^* et soit g_j la courbe dont ρ_j est le nœud.

Par construction le contact $c(f, g_j)$ de f avec g_j est un des quotients polaires de $\mathcal{P} = \{p_1/q_1, \dots, p_i/q_i, \dots, p_k/q_k\}$.

6. Monodromie quasi finie de f

Notons φ la restriction de f à la variété M_B . L'application différentiable φ est une fibration localement triviale sur S_η^1 . Notons F_z la fibre au-dessus de $z \in S_\eta^1$ et posons $F = F_\eta$.

D'autre part soit $M_B = \bigcup_{j=1}^n V_j^*$ la décomposition de Waldhausen de M_B construite au paragraphe 5 (théorème B) et soit $J^* = \{V_j^* \cap V_{j'}^*, j \neq j'\}$ la famille caractéristique de tores qui lui est associée.

(2.6.1) Remarque. — Les tores de J^* et les fibres de $V_j^*, j=1, \dots, n$, sont transverses aux fibres $F_z, z \in S_\eta^1$.

En effet si $T \in J^*, \Phi(T)$ est un tore dans $N = D_0^2 \times S_\eta^1$ d'âme $(0 \times S_\eta^1)$. Donc $\Phi(T)$ est transverse à $\Phi(F_z) = D_0^2 \times \{z\}$. Les fibrations de Seifert des variétés V_j^* sont l'extension des fibrations de Seifert des variétés $M_i = M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i)$ qui, par construction [voir (2.4.8)], sont transverses aux surfaces F_z .

(2.6.2) DÉFINITION. — Une *monodromie* $h: F \rightarrow F$ [voir (2.3.1) pour la définition d'une monodromie] de la fibration φ est *quasi finie* s'il existe un ensemble $\mathcal{S}$ de courbes fermées simples sur F et un « petit » voisinage tubulaire ouvert U de $\mathcal{S}$ tels que $h(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ et la restriction de h à $F \setminus U$ est un difféomorphisme d'ordre fini.

Nous allons trouver $h: F \rightarrow F$ quasi finie telle que $\mathcal{S} = F \cap J^*$ et telle que la restriction de h à $F \setminus U$ soit le difféomorphisme de premier retour le long des fibres de Seifert des $V_j^*, j=1 \dots n$. La canonicité de la décomposition de Waldhausen de M_B [voir (1.2.7)]

entraîne : si le nombre de courbes de $\mathcal{S}$ est minimal alors l'ensemble $\mathcal{S}$ et la restriction de h à $F \setminus \mathcal{S}$ sont bien définis à isotopie de F près. Une monodromie quasi finie avec un système de courbes $\mathcal{S}$ minimal est donc canonique. Cette canonicité découle aussi de la théorie de W. Thurston sur les difféomorphismes des surfaces.

(2.6.3) Puisque nous avons posé $\mathcal{S} = F \cap J^*$, le système $\mathcal{S}$ est minimal car J^* est une famille minimale de tores dans M_B . Définissons un « petit » voisinage U de $\mathcal{S}$ de la façon suivante :

Soit $i \in \{1 \dots k-1\}$. Notons θ_i le réel positif tel que $C_i \cap C_{i+1} = S_{\theta_i}^1 \times \eta$. Soit α un réel positif « très petit » tel que les voisinages $W(\delta)$ des composantes δ de la courbe discriminante Δ ne rencontre pas les anneaux $A_i = \{(u, \eta) \text{ où } \theta_i - \alpha \leq |u| \leq \theta_i + \alpha\}$.

Les composantes de $\mathcal{S}$ se trouvent sur les tores de la famille J^* . Pour toute courbe l dans $\mathcal{S}$ il existe $i \in \{1 \dots k-1\}$ tel que $\Phi(l) = C_i \cap C_{i+1}$. Soit U_l l'intérieur de la composante connexe de $\Phi^{-1}(A_i)$ qui contient l . Posons $U = \bigcup_{l \in \mathcal{S}} U_l$.

Comme A_i ne rencontre pas la courbe discriminante Δ la restriction de Φ à l'adhérence $\bar{U}$ de U est un revêtement sur les anneaux A_i . En particulier U est une union disjointe d'anneaux.

(2.6.4) Notons $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des fibres de Seifert de $M_B \setminus J^*$ qui rencontre $F \setminus U$. Notons π_l la composante connexe de $\Phi^{-1}(A_i \times S_\eta^1)$ qui contient l , π_l est un tore épaissi qui contient un tore de J^* . $\mathcal{F}_0$ est une fibration de Seifert de l'adhérence de $M_B \setminus (\bigcup_{l \in \mathcal{S}} \pi_l)$.

Pour toute courbe l dans $\mathcal{S}$ définissons un feuilletage $\mathcal{F}_l$ de π_l de la façon suivante :

Soit $H_i: A_i \rightarrow A_i$ défini par : si $|u| \leq \theta_i$ la restriction de H à $S_{|u|}^1 \times \eta$ est la rotation d'angle $(2\pi q_i/p_i)(\theta_i - |u|/\alpha)$ et si $|u| \geq \theta_i$ c'est la rotation d'angle $(2\pi q_{i+1}/p_{i+1})(|u| - \theta_i/\alpha)$.

La restriction de Φ aux tores épaissis π_l est un revêtement, $\mathcal{F}_l$ peut être défini en relevant par Φ les trajectoires de H_i dans $A_i \times S_\eta^1$.

Par construction la restriction de $\mathcal{F}_0$ aux bords des tores π_l est le relevé des trajectoires des rotations d'angle $2\pi q_i/p_i$ sur les couronnes C_i . Sur le bord de π_l les feuilletages $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_l$ coïncident. Nous posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \left(\bigcup_{l \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_l \right).$$

(2.6.5) $\mathcal{F}$ est par construction un feuilletage différentiable de dimension 1 de M_B dont les feuilles sont transverses aux fibres de φ . Soit h le difféomorphisme de premier retour le long des feuilles de $\mathcal{F}$. Comme nous l'avons remarqué en (2.3.2) h est une monodromie de φ . $\mathcal{F}$ se restreint aux tores J^* car les difféomorphismes H_i laissent invariants les cercles $C_i \cap C_{i+1}$. Par conséquent $h(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Les feuilles de $\mathcal{F}_0$ étant compactes la restriction de h à $F \setminus U$ est un difféomorphisme d'ordre fini. Le difféomorphisme $h: F \rightarrow F$ est donc « la » monodromie quasi finie de φ que nous voulions décrire.

CHAPITRE III

CALCUL DES QUOTIENTS POLAIRES

Ce chapitre consiste en la preuve du théorème suivant :

THÉORÈME C. — *Si le cône tangent de f est constitué de deux droites distinctes alors $\mathcal{P}_{\text{top}} \cup m_0(f) = \mathcal{P}$, dans tous les autres cas $\mathcal{P}_{\text{top}} = \mathcal{P}$.*

Preuve. — En (1.3.12) nous avons décrit la décomposition minimale de Waldhausen, $M = \bigcup_{j=1}^n V_j$, de l'extérieur M de l'entrelacs K associé à f . D'autre part nous avons construit

en (2.5.7) la décomposition minimale de Waldhausen $M_B = \bigcup_{j=1}^n V_j^*$ en fonction d'une

courbe polaire Γ de f , M_B étant l'extérieur de l'entrelacs associé à f vu dans une boule de D^4 . Par (1.2.7) ces deux décompositions sont équivalentes. Pour une numérotation bien choisie, V_j est donc difféomorphe à V_j^* en tant que variété de Seifert. Par (1.3.13) si ω est une fibre de Seifert de V_j , $j=1 \dots n$, il existe une courbe g dont le nœud est isotope à ω . En (1.3.18) nous montrons $\mathcal{L}(K, \omega)/b(\omega)$ est égal au contact $c(f, g)$ de f avec g .

Soit ρ_j une fibre régulière de V_j^* . Il existe $i \in \{1 \dots k\}$ tel que V_j^* soit l'extension dans M_B [voir (2.5.6)] d'une composante connexe W_i de $(\Phi^{-1}(Z_i) \cap M_B)$ qui rencontre la courbe polaire Γ .

(3.1.1) LEMME. — *Le quotient $\mathcal{L}(K_B, \rho_j)/b(\rho_j)$ de $\mathcal{P}_{\text{top}}$ est égal au quotient polaire p_i/q_i .*

Preuve. — Par construction $\Phi(\rho_j)$ est un nœud du tore p_i/q_i dans le tore N . La restriction de Φ à ρ_j est un revêtement fini, notons α l'ordre de ce revêtement. Donc : $\mathcal{L}(K_B, \rho_j) = \alpha p_i$ et $\mathcal{L}(\rho_j, M_B \cap \{x=0\}) = \alpha q_i$. De plus ρ_j est le nœud associé à une courbe g et $\{x=0\}$ n'est pas dans le cône tangent de g car $\{x=0\}$ n'est pas dans le cône tangent de la courbe polaire Γ [voir (2.2.2)]. Par conséquent $\alpha q_i = m_0(g)$ et alors p_i/q_i est le contact $c(f, g)$ de f avec g . Par H. Schubert (voir [S]) $m_0(g) = b(\rho_j)$ d'où le lemme.

Étant donné que $\mathcal{P}_{\text{top}}$ est l'ensemble des quotients $\mathcal{L}(K_B, \rho_j)/b(\rho_j)$ où ρ_j est une fibre régulière de V_j^* le lemme entraîne l'inclusion $\mathcal{P}_{\text{top}} \subset \mathcal{P}$.

Soit p_i/q_i un quotient polaire de $\mathcal{P}$. Si $i > 1$ ou si M_1 n'est pas un tore épaissi, il existe [voir (2.5.7)] $j \in \{1 \dots n\}$ tel que V_j^* soit l'extension dans M_B d'une composante connexe W_i de $(M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i))$ qui rencontre Γ . Soit ρ_j une fibre régulière de cette variété de Seifert V_j^* . Par le lemme (3.1.1) p_i/q_i est un quotient de $\mathcal{P}_{\text{top}}$.

Il reste à voir ce qui se passe quand $i=1$ et M_1 est un tore épaissi. Par (2.5.4) nous savons que dans ce cas $p_1/q_1 = m_0(f)$. Le théorème C ne dépend donc plus que du lemme suivant :

(3.1.2) LEMME. — *M_1 est un tore épaissi si et seulement si le cône tangent de f est constitué de deux droites distinctes.*

Preuve. — En (1.3.15) nous avons montré : le cône tangent de f est constitué de deux droites distinctes si et seulement si aucune fibre de Seifert des variétés V_j , $j=1 \dots n$, n'est isotope au nœud d'une courbe lisse transverse à f .

Si M_1 n'est pas un tore épaissi, V_1^* est [en vertu de (2.5.7)] l'extension de M_1 dans M_B . La fibration de Seifert de M_1 construite en (2.4.8) a pour fibre le nœud de la courbe $x=0$ qui est lisse et transverse à f .

Si M_1 est un tore épaissi, toute variété de Seifert V_j^* , $j=1 \dots n$, est l'extension dans M_B d'une composante connexe W_i de $(M_B \cap \Phi^{-1}(Z_i))$ où $i \geq 2$. Si ω est une fibre (régulière ou singulière) de V_j^* , ω est isotope à une fibre de W_i où W_i est fibré comme en (2.4.8). Par le corollaire (2.4.9) $\mathcal{L}(K_B, \omega)/\mathcal{L}(\omega, M_B \cap \{x=0\})$ est égal au quotient polaire p_i/q_i .

Mais par (1.3.18) ω est aussi le nœud d'une courbe g . En particulier :

$$m_0(g) \leq m_0(g \cap x) = \mathcal{L}(\omega, M_B \cap \{x=0\}).$$

Nous avons donc obtenu :

$$p_i/q_i = \mathcal{L}(K_B, \omega)/\mathcal{L}(\omega, M_B \cap \{x=0\}) \leq \frac{m_0(f \cap g)}{m_0(g)}.$$

Mais $p_1/q_1 = m_0(f)$ car M_1 est un tore épaissi [voir (2.5.4)] et $p_1/q_1 < p_i/q_i$ car $2 \leq i$. Par conséquent :

$$m_0(f) < \frac{m_0(f \cap g)}{m_0(g)}.$$

Nous avons donc montré que la courbe g n'est pas lisse et transverse à f , ceci termine la preuve du lemme (3.1.2).

(3.1.3) COROLLAIRE. — *L'ensemble des quotients polaires $\mathcal{P}$ est un invariant du type topologique de $f^{-1}(0)$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [A] J. W. ALEXANDER, *On the Subdivision of 3-Sphere by a Polyhedron* (Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 10, 1924, p. 6-8).
- [AC] N. A'CAMPO, *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes* (Inv. Math., vol. 20, 1973, p. 147-169).
- [B-K] E. BRIESKORN et H. KNÖRRER, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Verlag, 1986.
- [E-N] D. EISENBUD et W. NEUMANN, *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Princeton University Press.
- [J] W. JACO, *Lectures on Three-Manifold Topology*, A.M.S., n° 43, 1980.
- [J-S] W. JACO et P. SHALEN, *Seifert Fibered Spaces in Three-Manifolds*, A.M.S., Memoirs, n° 220.
- [K-L] T. C. KUO et Y. C. LU, *On Analytic Function Germs of Two Complex Variables* (Topology, vol. 16, 1977, p. 299-310).
- [L₁] D. T. LÊ, *Courbes polaires et résolution des courbes planes*, preprint.
- [L₂] D. T. LÊ, *Calcul des cycles évanouissants des hypersurfaces complexes* (Ann. Inst. Fourier, fasc. 4, 1973, p. 261-270).

- [L₃] D. T. LÊ, *Sur un critère d'équisingularité* (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 272, série A, 1971, p. 138-140).
- [L₄] D. T. LÊ, *Topological Use of Polar Curves* (Proc. Symp. Pure Math., vol. 29, 1975, p. 507-512).
- [L-M-W] D. T. LÊ, F. MICHEL et C. WEBER, *Sur le comportement des polaires associées aux germes des courbes planes*, preprint.
- [Me] M. MERLE, *Invariants polaires des courbes planes* (Inv. Math., vol. 41, 1977, p. 103-111).
- [Mic] F. MICHEL, *Courbes polaires pour les singularités de type « arbre de Noël »*, preprint.
- [M] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.
- [M-W] F. MICHEL et C. WEBER, *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, prépublication de l'Université de Genève, 1985.
- [O-V-Z] P. ORLIK, E. VOGT et H. ZIESCHANG, *Zu topologie gefaserter dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten* (Topology, vol. 6, 1967, p. 49-64).
- [S] H. SCHUBERT, *Über eine numerische knoteninvariante* (Math. Zeitschr., vol. 61, 1954, p. 245-288).
- [T₁] B. TEISSIER, *Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces* (Inv. Math., vol. 40, 1977, p. 267-292).
- [T₂] B. TEISSIER, *Introduction to Equisingularity Problems* (Proc. Symp. Pure Math., vol. 29, 1975, p. 593-632).
- [T₃] B. TEISSIER, *Polyèdre de Newton-jacobien et équisingularité*, in *Séminaire sur les singularités* (Publications Math. Univ. Paris-III, n° 7, 1980).
- [W] F. WALDHAUSEN, *Eine klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* (Inv. Math., vol. 3, 1967, p. 308-333 et Inv. Math., vol. 4, 1967, p. 87-117).
- [We] C. WEBER, *A Topological Interpretation for the Polar Quotients of an Algebraic Plane Curve Singularity* (Proc. of the Siegen Math. Symp., July 1987).

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1989,
révisé le 5 octobre 1989).

LÊ DUNG TRANG, Département de Mathématiques, Université de Paris-VII, 2, place Jussieu, 75005 Paris, France.	F. MICHEL, Département de Mathématiques, Université de Nantes, 2, chemin de la Houssinière, 44072 Nantes.	C. WEBER, Section de Mathématiques, Université de Genève, 2-4, rue du Lièvre, case postale n° 240, CH-1211 Genève 24.
---	--	--