Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe.

Von **L. Vietoris** in Wien.

Wir wollen hier die folgende Aufgabe lösen:

Σ_1, Σ_2 seien zwei kombinatorische Komplexe, Σ_3 der Durchschnitt von Σ_1 und Σ_2, Σ die Vereinigung $\Sigma_1 + \Sigma_2$ von Σ_1 und Σ_2. Wir fragen: Was muß man von den Homologiegruppen von Σ_1, Σ_2, Σ_3 wissen, um die Homologiegruppen von Σ angeben zu können, und wie gibt man diese dann an?

W. Mayer, dem ich das Problem samt vermutungsweisen Angaben über Weg und Antwort mitgeteilt habe, hat das Problem in diesen Monatsheften, Bd. 36 (1929), S. 1—42 (insbesonders 31—42), soweit es sich auf die Bettischen Zahlen bezieht, auf zum Teil anderem Weg gelöst [Formel (96)]. Im folgenden will ich den von mir damals ins Auge gefaßten Gedankengang wieder aufgreifen und zur allgemeinen Lösung verwenden.

$\mathfrak{A} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$, $\mathfrak{B} = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\}$ seien zwei Gruppen[1]. A_0, B_0 seien die beiden neutralen Elemente (Einheitselemente). Wir bilden die orientierten Paare $A_i B_k = C_{ik}$ und setzen für diese Paare folgendes Verknüpfungsgesetz fest: $C_{ik} C_{jl} = A_i A_j B_k B_l$, wo unter $A_i A_j$ und $B_k B_l$ die Verknüpfungsresultate innerhalb $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu verstehen sind[2]. Damit ist eine Gruppe erklärt, deren neutrales

[1]) Die Bezeichnung A_0, A_1, $A_2 \ldots$ soll nicht andeuten, daß $\mathfrak{A}$ nur endlich oder abzählbar viele Elemente haben soll.

[2]) Vgl. O. Hölder, Math. Ann., 43 (1893), S. 301—412, und 46 (1895), S. 321—422.

Element $C_{00} = A_0 B_0$ ist. Wir nennen diese Gruppe das „Produkt" $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$[3]).

Schreiben wir die einstufige Isomorphie zweier Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ einfach $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, dann gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$; d. h. unser Produkt ist kommutativ. Die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist natürlich dann und nur dann kommutativ, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für sich kommutativ sind. Außerdem gilt das assoziative Gesetz $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$.

Nun sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, $\mathfrak{A}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir zerlegen $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$ in Nebenkomplexe:

$$\begin{array}{lll} A_0, & A_1, & A_2, \ldots \\ B_1 A_0, & B_1 A_1, & B_1 A_2, \ldots \\ B_2 A_0, & B_2 A_1, & B_2 A_2, \ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

Setzt man in $\mathfrak{G}$ alle Elemente von $\mathfrak{A}$ gleich dem neutralen Element (Einführung neuer definierender Relationen), d. h. unterscheidet man zwei Elemente von $\mathfrak{G}$ nicht, wenn sie in dem angeschriebenen Zerlegungsschema in derselben Zeile stehen, dann erhält man aus $\mathfrak{G}$ die Faktorgruppe $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$.

Wir gehen nun an unsere eigentliche Aufgabe. Wir verstehen unter $\mathfrak{H}_i^\rho$ die ρ^{te} Homologiegruppe von Σ_i $(i = 1, 2, 3)$, unter $\mathfrak{H}^\rho$ die von Σ, unter $\mathfrak{G}^\rho$ die Untergruppe von $\mathfrak{H}_3^\rho$ aller jener in Σ_3 liegenden ρ-dimensionalen Zykel, welche sowohl in Σ_1, wie in Σ_2 homolog 0 sind; ferner sei $\mathfrak{F}^\rho$ die Untergruppe von $\mathfrak{H}^\rho$ aller jener ρ-dimensionalen Zykel, welche Summe eines in Σ_1 liegenden Zykels und eines in Σ_2 liegenden Zykels sind.

Dann läßt sich das Ergebnis der in den Seiten 32 bis Mitte 35 der zitierten Arbeit von W. Mayer enthaltenen Entwicklungen in der Formel niederlegen[4, 5]):

---

[3]) Der Unterschied vom „direkten Produkt" besteht darin, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht als Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ aufgefaßt werden, sondern die Paarung $A_i B_k$ ein noch nicht vorhandenes Gebilde schafft.

[4]) Um die Bezeichnung W. Mayers zu erhalten, muß man $\mathfrak{H}^\rho = H^\rho$, $F = \dfrac{\mathfrak{H}^\rho}{\mathfrak{F}^\rho}$, $\mathfrak{G}^{\rho-1} = \Gamma_3$ setzen.

[5]) Das Folgende gilt auch für $\rho = 0$, wenn man unter $\mathfrak{G}^{-1}$ die nur das neutrale Element enthaltende Gruppe versteht.

$$(1) \qquad \mathfrak{H}^{\varrho} = \mathfrak{E}^{\varrho}\,\mathfrak{G}^{\varrho-1}.$$

Wir wollen nun $\mathfrak{E}^{\varrho}$ durch $\mathfrak{H}_1^{\varrho}$, $\mathfrak{H}_2^{\varrho}$, $\mathfrak{H}_3^{\varrho}$, $\mathfrak{G}^{\varrho}$ ausdrücken.

Zunächst gilt folgender Hilfssatz:

Ist C ein ϱ-dimensionaler Zykel in Σ_1, C_2 ein ϱ-dimensionaler Zykel in Σ_2 und ist $C_1 \sim C_2$ in $\mathfrak{H}^{\varrho}$, dann gibt es einen Zykel P in Σ_3, so daß $P \sim C_1$ in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}$ und $P \sim C_2$ in $\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ ist.

Beweis: Wegen $C_1 - C_2 \sim 0$ in $\mathfrak{H}^{\varrho}$ gibt es einen Komplex K in Σ, so daß $C_1 - C_2 = R(K)$. Es gibt ferner einen Komplex K_1 in Σ_1 und einen Komplex K_2 in Σ_2, so daß $K = K_1 - K_2$ ist. Also ist $C_1 - C_2 = R(K_1 - K_2) = R(K_1) - R(K_2)$. Wir setzen $P = C_1 - R(K_1)$ $= C_2 - R(K_2)$. P liegt daher in Σ_1 und in Σ_2, also in Σ_3. Ferner ist wegen $C_1 - P = R(K_1)$ und $C_2 - P = R(K_2)$ $C_1 \sim P$ in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}$ und $C_2 \sim P$ in $\mathfrak{H}_2^{\varrho}$, womit die Behauptung erwiesen ist.

$\mathfrak{H}_1^{\varrho}\,\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ ist die Gruppe aller Paare (C_1, C_2), wo C_1 ein ϱ-dimensionaler Zykel in Σ_1, C_2 ein ϱ-dimensionaler Zykel in Σ_2 ist, und $(C_1, C_2) = (\overline{C}_1, \overline{C}_2)$ in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}\,\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ dann und nur dann gilt, wenn $C_1 \sim \overline{C}_1$ in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}$ und $C_2 \sim \overline{C}_2$ in $\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ gilt.

$\mathfrak{E}^{\varrho}$ ist die Gruppe der Zykel $C_1 + C_2$ als Untergruppe von $\mathfrak{H}^{\varrho}$; d. h. zwei Zykel gelten in $\mathfrak{E}^{\varrho}$ als gleich, wenn sie in $\mathfrak{H}^{\varrho}$ homolog sind.

Wir werden nun definierende Relationen ermitteln, welche in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}\,\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ eingeführt, eine mit $\mathfrak{E}^{\varrho}$ einstufig isomorphe Gruppe definieren.

Es sei $C_1 + C_2 \sim \overline{C}_1 + \overline{C}_2$ in $\mathfrak{H}^{\varrho}$. Dann ist $C_1 - \overline{C}_1 \sim \overline{C}_2 - C_2$ in $\mathfrak{H}^{\varrho}$. Nach dem oben bewiesenen Hilfssatz gibt es in Σ_3 einen Zykel P, so daß

$$P \sim C_1 - \overline{C}_1 \text{ in } \mathfrak{H}_1^{\varrho} \text{ und } P \sim \overline{C}_2 - C_2 \text{ in } \mathfrak{H}_2^{\varrho}.$$

Also ist $\overline{C}_1 \sim C_1 - P$ in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}$ und $\overline{C}_2 \sim C_2 + P$ in $\mathfrak{H}_2^{\varrho}$; d. h.:

Wenn $C_1 + C_2 \sim \overline{C}_1 + \overline{C}_2$ in $\mathfrak{H}^{\varrho}$ ist, d. i. wenn $C_1 + C_2$ und $\overline{C}_1 + \overline{C}_2$ dasselbe Element der Gruppe $\mathfrak{E}^{\varrho}$ darstellen, dann gibt es in Σ_3 einen Zykel P, so daß $\overline{C}_1 \sim C_1 - P$ in $\mathfrak{H}_1^{\varrho}$ und $\overline{C}_2 \sim C_2 + P$ in $\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ ist. D. h.:

Aus einem Element (C_1, C_2) von $\mathfrak{H}_1^{\varrho}\,\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ bekommt man alle dasselbe Element $C_1 + C_2$ von $\mathfrak{E}^{\varrho}$ liefernden Elemente von $\mathfrak{H}_1^{\varrho}\,\mathfrak{H}_2^{\varrho}$ in der Form $(C_1 - P,\ C_2 + P)$, wo P ein beliebiger ϱ-dimensionaler Zykel in Σ_3 ist. Andererseits ist aber

$(C_1 - P, C_2 + P) = (C_1, C_2)$ in $\mathfrak{H}_1^\varrho \mathfrak{H}_2^\varrho$ dann und nur dann, wenn $P \backsim 0$ in $\mathfrak{H}_1^\varrho$ und $P \backsim 0$ in $\mathfrak{H}_2^\varrho$ ist.

Daher ist

$$\mathfrak{F}^\varrho = \frac{\mathfrak{H}_1^\varrho \mathfrak{H}_2^\varrho}{\dfrac{\mathfrak{H}_3^\varrho}{\mathfrak{G}^\varrho}}. \tag{2}$$

Setzt man (2) in (1) ein, dann erhält man

$$\mathfrak{H}^\varrho = \frac{\mathfrak{H}_1^\varrho \mathfrak{H}_2^\varrho}{\dfrac{\mathfrak{H}_3^\varrho}{\mathfrak{G}^\varrho}} \mathfrak{G}^{\varrho\,-1}, \tag{3}$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Aus (3) ist W. Mayers Formel (96) unmittelbar zu gewinnen.

(Eingegangen: 15. VII. 1929.)