

Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume.

Von

L. Vietoris in Wien.

Ich habe in meiner Abhandlung „Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen“¹⁾ auf Grund der in simplizialen Komplexen mit endlich vielen Seiten kombinatorisch definierten Homologie-, Zusammenhangs- und Fundamentalgruppen in beliebigen kompakten metrischen Räumen Gruppen definiert, welche ich Homologie-, Zusammenhangs- und Fundamentalgruppen dieser Räume nannte. Ich will im folgenden diese Bezeichnung rechtfertigen, indem ich zeige, daß I. *die mengentheoretisch definierten Gruppen* tatsächlich *Verallgemeinerungen der kombinatorisch definierten Gruppen* sind und daß II. *die m -te Homologiegruppe (ebenso die m -te Zusammenhangsgruppe)* *jedes n -dimensionalen kompakten Raumes für $m > n$ außer dem neutralen Element kein Element enthält.*

I.

Faßt man die Seiten eines Komplexes^{1a)} als geometrische Simplexe, d. i. (im Gegensatz zu dem in (Z_1) eingenommenen Standpunkt) als Raumstücke, den Komplex selbst als Vereinigungsmenge dieser Simplexe und damit als kompakten metrischen Raum auf, dann sind in ihm die genannten Gruppen nicht nur, wie üblich, kombinatorisch, sondern auch, wie in (Z_1) auseinandergesetzt, mengentheoretisch erklärt. Wir wollen hier zeigen, daß *diese beiden Definitionen übereinstimmen, d. h. daß die kombinatorisch erklärten Gruppen mit den entsprechenden mengentheoretisch erklärten Gruppen einstufig isomorph sind.* Wir beschränken uns auf die

¹⁾ Math. Annalen 97 (1927), S. 454–472, und auszugsweise Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 443–453. Wir beziehen uns im folgenden unter (Z_1) auf Math. Annalen loc. cit., deren Begriffe und Namen wir hier verwenden.

^{1a)} Wir betrachten nur simpliziale Komplexe von endlich vielen Seiten.

Homologiegruppen. Der Beweis für die Zusammenhangsgruppen und die Fundamentalgruppen verläuft analog

Da die topologische Invarianz der in kompakten metrischen Räumen definierten Gruppen eine unmittelbare Folge der gleichmäßigen Stetigkeit der topologischen Abbildungen in kompakten Räumen ist²⁾, erbringen wir damit auch einen *Beweis für die topologische Invarianz der kombinatorisch definierten Gruppen*, insbesondere der (kombinatorisch definierten) Betti'schen Zahlen und Torsionszahlen³⁾.

Wir verwenden zum Beweis die folgenden kombinatorischen Sätze, die im wesentlichen schon bei Poincaré⁴⁾ zu finden sind und auch beim Beweis Alexanders⁵⁾ für die topologische Invarianz der Bettischen Zahlen und der Torsionszahlen die Grundlage bilden.

(A) Ist K^1 die erste reguläre Unterteilung⁶⁾ eines Komplexes K^0 , dann gibt es zu jedem in K^1 liegenden Zykel C^1 einen in K^0 liegenden Zykel C^0 , dessen erste reguläre Unterteilung C^{01} mit C^1 in K^1 homolog ist.

(B) Ist der in K^1 liegende Zykel D^1 in K^1 homolog mit der ersten regulären Unterteilung C^{01} eines in K^0 liegenden Zyklus C^0 , so ist $D^1 \sim 0$ in K^1 dann und nur dann, wenn $C^0 \sim 0$ in K^0 ist⁷⁾.

(A) und (B) zusammen besagen, daß die k -te Homologiegruppe von K^1 mit der von K^0 einstufig isomorph ist (für jedes $k = 0, 1, 2, \dots$).

Nun sei K^0 irgendein simplizialer kombinatorischer Komplex mit endlich vielen Seiten. Unter K verstehen wir denselben Komplex, aber aufgefaßt als Punktmenge im Sinne von Veblen⁸⁾, und denken uns K irgendwie metrisiert. Ein Zykel in K^0 ist dann ein Zykel, dessen sämtliche Seiten von K^0 sind; ein Zykel in K ist nach $(Z_1)II$ ein Zykel, dessen Ecken in K liegen.

Die l -te Homologiegruppe von K ist nach der Definition von $(Z_1)II$ die Gruppe der Fundamentalfolgen von l -dimensionalen Zykeln in K . Unsere Behauptung ist, daß diese Gruppe mit der in K^0 kombinatorisch definierten l -ten Homologiegruppe einstufig isomorph ist.

²⁾ In (Z_1) , S. 465—472 ist die Invarianz der genannten Gruppen bezüglich einer allgemeineren Klasse von Abbildungen gezeigt. Nur *dieser* Beweis erfordert den dortigen Aufwand an Mitteln.

³⁾ Zum ersten Mal von J. W. Alexander, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), S. 324 bis 330. Es ist nicht zu verwundern, daß im folgenden Beweis die Hilfsmittel Alexanders wieder Verwendung finden.

⁴⁾ Rend. Pal. 13 (1899), S. 303—309.

⁵⁾ loc. cit. ³⁾.

⁶⁾ Veblen, Analysis Situs, S. 41, 86, sowie loc. cit. ³⁾ und loc. cit. ⁴⁾.

⁷⁾ K^0, K^1, C^0, C^{01} bedeuten hier dasselbe wie in (A).

⁸⁾ loc. cit. ⁶⁾.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. K^n entstehe aus K^0 durch n -malige reguläre Unterteilung und habe eine Kantenlänge $< \frac{\varepsilon}{3}$. $\delta > 0$ sei so gewählt, daß jede Punktmenge M in K , deren Durchmesser $< \delta$ ist, ganz in dem Stern⁹⁾ mindestens einer Ecke von K^n liegt. Ist nun a irgendein Punkt von K , so ist die sphärische Umgebung U_a vom Radius $\frac{\delta}{2}$ von a ganz in dem Stern mindestens einer Ecke von K^n in K^n enthalten. Eine dieser Ecken von K^n ordnen wir dem Punkt a als a' zu. (Die so erhaltene Abbildung $\mathfrak{A}$ („*elementary transformation*“ im Sinne Alexanders¹⁰⁾) von K auf die Menge der Ecken von K^n ist natürlich unstetig, aber ihre Schwankung ist in keinem Punkt $> \frac{2\varepsilon}{3}$.) Nun sei C ein Zykel in K von einer Kantenlänge $< \frac{\delta}{2}$ und $[a_0, a_1, \dots, a_r]$ eine Seite von C . Die zugehörigen Umgebungen $U_{a_0}, U_{a_1}, \dots, U_{a_r}$ vom Radius $\frac{\delta}{2}$ haben als Durchschnitt eine Menge, in welcher $a_0, a_1, \dots, a_r$ innere Punkte sind. Verstehen wir unter S_i den Stern von a'_i in K^n , so ist $U_{a_i} \subseteq S_i$. Daher hat der Durchschnitt $S_1 S_2 \dots S_r$ erst recht einen inneren Punkt. Es gibt also mindestens einen Teilsimplex A^m ($m \leq n$) von K^n , der ein Teil des Durchschnittes $S_1 S_2 \dots S_r$ ist, d. h. die Punkte $a'_1, a'_2, \dots, a'_r$ sind Ecken von A^m ; mit anderen Worten: der Simplex $[a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_r]$ ist eine Seite von K^n . Der Komplex aller dieser den Seiten von C entsprechenden Seiten ist ein Zykel und heiße C' . Es gilt $C' \sim_\varepsilon C$ in K , was man wie die analoge Behauptung in $Z_1(3)$ einsieht.

Zu C' gibt es nach (A) einen Zykel C^0 in K^0 , dessen n -te reguläre Unterteilung C'' mit C' in K^n homolog ist. Als Zykel in K aufgefaßt sind C' und C'' miteinander daher $\frac{\varepsilon}{3}$ -homolog in K . Aus $C \sim_\varepsilon C'$ in K und $C' \sim_{\frac{\varepsilon}{3}} C''$ in K folgt nun $C \sim_\varepsilon C''$ in K .

Wir haben also gezeigt:

(1) Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ und ein n , so daß es zu jedem in K liegenden $\frac{\delta}{2}$ -Zykel C einen in K^0 liegenden Zykel C^0 gibt, dessen n -te reguläre Unterteilung C'' mit C in K ε -homolog ist.

Daher gilt:

(1') Jede Fundamentalfolge von in K liegenden Zykeln $C_1, C_2, C_3, \dots$ ist in K homolog mit einer Fundamentalfolge von Zykeln $C_1'', C_2'', C_3'', \dots$,

⁹⁾ Ist A eine r -dimensionale Seite ($0 \leq r \leq n$) eines n -dimensionalen Komplexes K , so verstehen wir unter dem Stern von A in K den Komplex aller Seiten von K , welche A als Seite enthalten.

¹⁰⁾ Diese Abbildungen wurden zuerst von J. W. Alexander, loc. cit. ³⁾, herangezogen und bilden den Kern seines Invarianzbeweises.

welche aus in K^0 liegenden Zykeln $C_1^0, C_2^0, C_3^0, \dots$ durch entsprechend oftmalige¹¹⁾ reguläre Unterteilung entstehen.

Setzen wir nun im Beweis von (1) (ohne ein ε vorzugeben) $n=0$ und wählen im übrigen δ und die Abbildung $\mathfrak{A}$ so, wie dort angegeben. C sei ein Zykel in K , der aus einem in K^0 liegenden Zykel C^0 durch r -fache ($r \geq 0$) reguläre Unterteilung entsteht; ferner sei $C \sim_{\delta} 0$ in K , d. h. C sei Rand eines in K liegenden Komplexes P , dessen Seiten $< \frac{\delta}{2}$ sind (vgl. Z_1 , S. 458). $\mathfrak{A}$ führt C in einen in K^0 liegenden Zykel C' , P in einen in K^0 liegenden Komplex P' über, dessen Rand C' ist. Damit ist $C' \sim 0$ in K^0 . Tilgt man in C' entgegengesetzt gleiche Seiten gegeneinander, so erhält man nach Alexander (loc. cit. S. 328, Lemma) den Zykel C^0 . Also ist $C^0 \sim 0$ in K^0 .

Damit haben wir gezeigt:

(2) Zu K^0 gibt es ein $\delta > 0$, so daß jeder in K^0 liegende Zykel C^0 , von dem eine hinreichend feine reguläre Unterteilung $\sim_{\delta} 0$ in K ist, selbst ~ 0 in K^0 ist.

Anders ausgedrückt, bedeutet das:

(2') Ist $C_1, C_2, C_3, \dots$ eine Nullfolge (vgl. Z_1 , S. 458) von Zykeln in K , welche aus in K^0 liegenden Zykeln $C_1^0, C_2^0, C_3^0, \dots$ durch entsprechend oftmalige¹¹⁾ reguläre Unterteilung entstanden sind, dann sind fast alle $C_i^0 \sim 0$ in K^0 .

Sind nun $C_1, C_2, C_3, \dots, D_1, D_2, D_3, \dots$ zwei Fundamentalfolgen in K , welche in K miteinander homolog sind, dann sind irgendwelche Folgen $C_1'', C_2'', C_3'', \dots, D_1'', D_2'', D_3'', \dots$, welche ihnen gemäß (1') entsprechen, miteinander in K homolog, weil $\{C_i''\} \sim \{C_i\} \sim \{D_i\} \sim \{D_i''\}$ in K gilt. Also ist die Folge $\{C_i'' - D_i''\} = \{C_1'' - D_1'', C_2'' - D_2'', \dots\}$ eine Nullfolge. Sie besteht aus lauter Zykeln, welche durch reguläre Unterteilung aus den entsprechenden Zykeln $C_i^0 - D_i^0$ entstehen. Also ist nach (2') für fast alle i $C_i^0 - D_i^0 \sim 0$ in K^0 , d. h. $C_i^0 \sim D_i^0$ in K für fast alle i . Ähnlich zeigt man, daß $C_i^0 \sim C_k^0$ ist, sobald i und k hinreichend groß sind.

Durch (1') und (2') ist also jeder Homologieklass C von Fundamentalfolgen aus K eindeutig eine Homologieklass aus K^0 zugeordnet, nämlich die Klasse jener Zykel C^0 , aus denen man durch fortgesetzte reguläre Unterteilung eine Fundamentalfolge $C^0, C^1, C^2, \dots$ erhält, welche der Homologieklass $\mathfrak{C}$ angehört. Umgekehrt erhält man zur Homologieklass irgendeines in K^0 liegenden Zykels C^0 durch fortgesetzte reguläre

¹¹⁾ C_i^0 muß nur so oft, k_i -mal, untergeteilt werden, daß $\lim k_i = \infty$ ist, weil sonst überhaupt keine Fundamentalfolge entsteht. Vgl. Z_1 , S. 458. $i = \infty$

Unterteilung eine Fundamentalfolge $C^0, C^1, C^2, \dots$, deren Homologieklassse der von C^0 in der angegebenen Weise entspricht.

Damit ist zunächst eine eindeutige Zuordnung unter den kombinatorisch und den mengentheoretisch definierten Homologieklassen definiert. Es bleibt nur noch die Erhaltung der Gruppenrelationen bei diesem Entsprechen in beiden Richtungen zu zeigen.

Es seien zunächst C^0, D^0, E^0 drei Zyklen in K^0 , welche in der Relation $C^0 + D^0 = E^0$ stehen. Dann stehen selbstverständlich auch die aus ihnen durch fortgesetztes reguläres Unterteilen hervorgehenden Fundamentalfolgen $\mathfrak{C} = \{C^0, C^1, C^2, \dots\}$, $\mathfrak{D} = \{D^0, D^1, D^2, \dots\}$, $\mathfrak{E} = \{E^0, E^1, E^2, \dots\}$ in der Relation $\mathfrak{C} + \mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, weil ja für jedes i $C^i + D^i = E^i$ gilt. Da außerdem aus $E^0 \sim F^0$ in K^0 die Homologie $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{F}$ in K folgt, wo $\mathfrak{F} = \{F^0, F^1, F^2, \dots\}$ ist, so gilt für irgend drei Zyklen C^0, D^0, F^0 in K^0 , welche in der Relation $C^0 + D^0 \sim F^0$ in K^0 stehen, $\mathfrak{C} + \mathfrak{D} \sim \mathfrak{F}$ in K .

Andererseits seien $\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$, $\mathfrak{D} = \{D_1, D_2, D_3, \dots\}$, $\mathfrak{E} = \{E_1, E_2, E_3, \dots\}$ drei Fundamentalfolgen von Zykeln und es bestehe die Relation $\mathfrak{C} + \mathfrak{D} \sim \mathfrak{E}$ in K . Für die gemäß (2) entsprechenden Fundamentalfolgen $\mathfrak{C}'' = \{C^0, C^1, C^2, \dots\}$, $\mathfrak{D}'' = \{D^0, D^1, D^2, \dots\}$, $\mathfrak{E}'' = \{E^0, E^1, E^2, \dots\}$ gilt dann wegen $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}''$ in K , $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}''$ in K , $\mathfrak{E} \sim \mathfrak{E}''$ in K auch $\mathfrak{C}'' + \mathfrak{D}'' \sim \mathfrak{E}''$ in K . Nun sei $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{C}'' + \mathfrak{D}''$. Dann ist $\mathfrak{F}''$ die Fundamentalfolge $\{C^0 + D^0, C^1 + D^1, C^2 + D^2, \dots\}$ und entsteht aus dem Zykel $F^0 = C^0 + D^0$ durch fortgesetztes reguläres Unterteilen. Wegen $\mathfrak{F}'' \sim \mathfrak{E}''$ in K gilt nun $F^0 \sim E^0$ in K^0 , d. h. $C^0 + D^0 \sim E^0$ in K^0 , was eben noch zu beweisen war.

II.

(3) Ist M ein kompakter metrischer Raum von einer Dimension $\leq n$, dann ist für $m > n$ die m -te Homologiegruppe¹²⁾ von M leer¹³⁾.

Dabei verstehen wir das Wort Dimension im (später von P. Urysohn und K. Menger wieder aufgenommenen) Brouwerschen Sinne und stützen uns zum Beweis von (3) auf den folgenden Urysohn-Mengerschen Satz:

Ist M ein kompakter metrischer Raum von einer Dimension $\leq n$ und ist $\varepsilon > 0$, dann ist M Vereinigung von endlich vielen offenen Teilen, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind und von denen je $(n+2)$ einen leeren Durchschnitt haben¹⁴⁾.

¹²⁾ Analog sind für die Zusammenhangsgruppen Satz und Beweis.

¹³⁾ Eine Gruppe heiße leer, wenn sie außer dem neutralen Element (Einheits-element) kein Element enthält.

¹⁴⁾ Siehe bezüglich des Satzes und der Literatur dazu die zusammenfassenden Darstellungen von W. Hurewicz, Math. Annalen 98 (1927), S. 81, und P. Alexandroff, Math. Annalen 98 (1927), S. 48. Anstatt des Wortes „offenen“ in obiger Fassung steht im Originalsatz „abgeschlossenen“. Die Äquivalenz der beiden Fassungen ist leicht einzusehen.

Diese Teile mögen $A_1, A_2, \dots, A_r$ heißen. Wir wählen in jedem dieser A_i einen Punkt a_i . Nun definieren wir einen Komplex K mit den Ecken a_i durch folgende Festsetzung: Der Simplex¹⁵⁾ $[a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_l}]$ soll dann und nur dann dem Komplex K als Seite angehören, wenn der Durchschnitt $A_{i_0} A_{i_1} \dots A_{i_l} \neq 0$ ist. Da je $(n+2)$ von den A_i einen leeren Durchschnitt haben, hat K eine Dimension $\leq n$. Die Kantenlänge von K ist $< 2\varepsilon$.¹⁶⁾

Nun sei $\delta > 0$ so klein, daß $\delta < \varepsilon$ ist und die Umgebung vom Radius δ jedes Punktes x von M ganz in mindestens einem der A_i liegt. (Es gibt dieses δ , weil M kompakt und die A_i offen und nur endlich viele sind.) Jedem Punkt x von M sei nun als x' einer jener Punkte a_i zugeordnet, in dessen zugehörigem A_i die Umgebung von x vom Radius δ liegt. Diese (im allgemeinen unstetige) Abbildung von M auf die Menge der a_i heiße $\mathfrak{A}$. Ferner sei C ein δ -Zykel in M . Der C in der Abbildung $\mathfrak{A}$ entsprechende Zykel C' ist dann ein Zykel in K , d. h. ein Zykel, dessen sämtliche Seiten Seiten von K sind. Ist nämlich $[c_1, c_2, \dots, c_l]$ eine Seite von C , $[c'_1, c'_2, \dots, c'_l]$ die entsprechende Seite von C' , wo $c'_1 = a_{i_1}, c'_2 = a_{i_2}, \dots, c'_l = a_{i_l}$ ist, dann liegt wegen $\overline{c_1 c_j} < \delta$ der Punkt c_j in A_{i_j} für $j = 1, 2, \dots, l$; damit ist der Durchschnitt $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_l} \neq 0$, also $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}] = [c'_1, c'_2, \dots, c'_l]$ eine Seite von K . Wie in $(Z_1)(3)$ zeigt man noch, daß $C \sim_{3\varepsilon} C'$ in M ist.

Dabei kann natürlich, auch wenn eine Seite $[c_1, c_2, \dots, c_r]$ von C nicht ausgeartet ist, d. h. auch wenn $c_i \neq c_k$ für $i \neq k$ gilt, die entsprechende Seite $[c'_1, c'_2, \dots, c'_r]$ ausgeartet sein, indem etwa $c'_i = c'_k = c'_l, c'_i = c'_s, \dots$ ist. C' ist dann ein „ausgearteter“ Zykel. Hat C eine Dimension $m > n$, so hat natürlich auch C' die Dimension $m > n$ und ist als Zykel auf K notwendig ausgeartet. Wenn wir nun zeigen, daß $C' \sim 0$ auf K ist, so ist gezeigt, daß für jeden in M liegenden δ -Zykel C gilt: $C \sim_{3\varepsilon} 0$ in M . Denn dann gilt außer $C \sim_{3\varepsilon} C'$ in M auch $C' \sim_{2\varepsilon} 0$ in M . Dann ist auch gezeigt, daß für $m > n$ jede Fundamentalfolge von m -dimensionalen Zykeln in M homolog 0 ist.

Was also noch zu zeigen bleibt, ist der folgende rein kombinatorische Satz:

(4) *Ist K ein n -dimensionaler Komplex und C' ein auf ihm liegender m -dimensionaler (ausgearteter) Zykel und $m > n$, dann ist $C' \sim 0$ auf K .*

Damit ist gemeint, daß es dann in K einen (ausgearteten) $(m+1)$ -dimensionalen Komplex P gibt, dessen Rand $R(P) = C'$ ist.

Wir führen den Beweis durch eine doppelte vollständige Induktion, einerseits nach der Anzahl r der Teilsimplexe, aus denen K besteht,

¹⁵⁾ Es ist wesentlich, hier das Wort Simplex in der abstrakten Bedeutung von (Z_1) zu verstehen.

¹⁶⁾ Vgl. P. Alexandroff, Math. Annalen 96 (1926), S. 489–511, und C. R. 184 (1927), S. 317–319.

andererseits nach der Dimension n von K . Als Ausgangspunkt der Induktion überlegen wir uns die folgenden Tatsachen (a) und (b).

(a) Der Satz gilt, wenn K aus einem einzigen Teilsimplex besteht. Ist dann nämlich auf K ein Zykel C' irgendwelcher Dimension gegeben und a eine beliebige Ecke von K , so hat der Verbindungskomplex $a \times C'$, d. i. der Komplex aller Simplexe, welche a mit einem Simplex von C' verbinden, als Rand den Zykel C' .

(b) Der Satz gilt, wenn $n = 0$, d. h. K ein nulldimensionaler Komplex $K_1 + K_2 + \dots + K_s$ ist, wo K_i die (aus einzelnen Punkten bestehenden) Komponenten von K' sind. Ist C' irgendein in K enthaltener Zykel einer Dimension $m > 0$ — er muß ausgeartet sein —, dann ist er Summe $C'_1 + C'_2 + \dots + C'_s$ von m -dimensionalen Zykeln C'_i , deren jeder ganz in einer Komponente K_i von K liegt. Zuzufolge (a) ist aber $C'_i \sim 0$ in K_i ,¹⁷⁾ also $C' \sim 0$ in K .

Um nun zur Induktion selbst zu kommen, nehmen wir an: Es stehe für drei bestimmte Werte n , $m > n$, r fest, daß in jedem nicht mehr als $(n-1)$ -dimensionalen Komplex alle $(m-1)$ -dimensionalen Zykel homolog 0 sind, ferner daß in jedem aus weniger als r Teilsimplexen bestehenden nicht mehr als n -dimensionalen Komplex alle m -dimensionalen Zykel homolog 0 sind.

Nun bestehe der n -dimensionale Komplex K aus r Teilsimplexen. Wir stellen K als Summe zweier nicht mehr als n -dimensionaler Komplexe K_1, K_2 dar, von denen jeder weniger als r Teilsimplexe hat und deren Durchschnitt L von einer Dimension $< n$ ist. Laut Induktionsannahme ist dann jeder in K_i ($i = 1, 2$) enthaltene m -dimensionale Zykel in K_i homolog 0 und jeder in L enthaltene $(m-1)$ -dimensionale Zykel in L homolog 0. Diese beiden Dinge genügen aber¹⁸⁾, um behaupten zu können, daß jeder in $K_1 \dot{+} K_2 = K$ enthaltene m -dimensionale Zykel in $K_1 \dot{+} K_2 \sim 0$ ist. Damit ist unsere Induktion geschlossen und (4), somit auch (3), bewiesen.

¹⁷⁾ Denn K_i ist ein (nulldimensionaler) Simplex.

¹⁸⁾ Denn es gilt der Satz: Sind K_1 und K_2 Komplexe, in denen jeder k -dimensionale Zykel homolog 0 ist, und ist im Durchschnitt $K_1 K_2$ jeder $(k-1)$ -dimensionale Zykel homolog 0, dann ist in $K_1 \dot{+} K_2$ jeder k -dimensionale Zykel homolog 0. Vgl. meine Abhandlung Monatsh. f. Math. u. Phys. 35 (1928), S. 169. Der Satz ist implizit auch durch die Beweise von Poincaré, loc. cit., bzw. Alexander, loc. cit., für die eingangs erwähnten Sätze (A), (B) erwiesen.

Berichtigung

zu der Arbeit von L. Vietoris „Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume“, Math. Annalen **101**, S. 219—225.

Der in der obigen Arbeit S. 223 unmittelbar nach (3) stehende Absatz hat durch ein Versehen meinerseits einen von freundlicher Mitwirkung eines Mitleasers der Korrekturen herrührenden Wortlaut bekommen, welcher mir den Anschein gibt, als wollte ich in der Prioritätsfrage hinsichtlich der Schaffung des Dimensionsbegriffes und der Entstehung der dimensionstheoretischen Hauptsätze ein Urteil abgeben. Da mir dies hier ferne liegt, setze ich anstatt dieses Absatzes hiermit den folgenden Wortlaut:

„Zum Beweis stützen wir uns auf den bekannten Satz:“

L. Vietoris.