Question 1: Find an expression for <7 , -1> as an element of $K_2(\mathbb{Z},7)$.

Question 2: Find generators for $\mathrm{cok}(K_3R \to K_3R/\underline{m})$ in other cases where $|R/\underline{m}|$ is small.

Hand computations are under way for $\mathbb{Z}/8$ and $\mathbb{Z}/9$, but little beyond that seems approachable now. Further progress will require theoretical improvements which reduce the initial set of generators for K substantially. It will probably also be necessary to implement an interactive version of the computer program so that the effect of various relations on the generators for K can be tried out easily.

Question 3: Find an explicit generator for $K_3(\mathbb{F}_7)$ using our knowledge that K is generated by <7 , -1> .

Loday [unpublished] has discussed some ideas of how to go about this by "lifting" the proof that <7 , -1> is trivial in $K_2(\mathbb{Z}_{(7)})$:

$$\begin{aligned} \langle 7 , -1\rangle &= \langle 1 , -1\rangle \langle 3 , -1\rangle \\ &= \langle 1 , -1\rangle \langle 1 , -1\rangle \langle 1 , -1\rangle \\ &= 1 . \end{aligned}$$

His method depends on an explicit use of the isomorphism $K_3(R) \approx H_3(St(R),\mathbb{Z})$ using an exact sequence of Gersten's.

References

[Br] W. Browder, Letter to R.K. Dennis (May 26, 1978).

[K] F. Keune, The relativization of K_2 , J. Algebra 54 (1978) 159-177.

[M-S] H. Maazen and J. Stienstra, A presentation for K_2 of split radical pairs, J. Pure Appl. Algebra 10 (1977) 271-294.

[St] M.R. Stein, Maps of rings which induce surjections on K_3 , J. Pure Appl. Algebra 21 (1981) 23-49.

UNE NOUVELLE FAMILLE DE GROUPES EN L-THEORIE ALGEBRIQUE

Pierre VOGEL

§0.- INTRODUCTION

Les groupes de chirurgie $L_n(A)$ ont été définis par Wall [12], du moins lorsque A est un anneau de groupe. Si n est pair, les éléments de $L_n(A)$ sont représentés par des formes quadratiques et, si n est impair, $L_n(A)$ est un quotient du groupe unitaire U(A). En fait, il y a plusieurs définitions possibles suivant que l'on considère les groupes L_n^h, L_n^s ou L_n^p .

Dans [12], Wall suggère une nouvelle définition des groupes $L_n(A)$ en considérant des formes quadratiques de degré n sur des complexes algébriques et cette idée a été reprise et développée considérablement par Ranicki [8].

Soient $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ deux classes de A-modules différentiels gradués, projectifs de type fini, stables par équivalence d'homotopie, par extension et par dualité. On se propose de définir ici des groupes $L_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$, en considérant des formes quadratiques sur des complexes de $\mathcal{A}$, le défaut de dégénérescence étant dans $\mathcal{B}$. Ces groupes sont des généralisations des groupes de chirurgie classiques et apparaissent dans de nombreuses situations, comme le montrent les exemples suivants:

Soit $K \subset S^{n+2}$ un noeud. Si M est le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de K, on a une application normale de M dans $B^{n+1} \times S^1$ qui est un isomorphisme sur le bord. Comme l'application de M dans $B^{n+1} \times S^1$ est une équivalence d'homologie, la construction standard donne une forme quadratique non dégénérée de degré n+2 sur un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-complexe $\mathbb{Z}$-acyclique.

Ainsi, si $\mathcal{A}$ est la classe des $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-complexes C tels que $C \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]} \mathbb{Z}$ est acyclique, et si $\mathcal{B}$ est la classe des $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-complexes acycliques, on obtient un élément du groupe $L_{n+2}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, et on vérifie que cela donne un isomorphisme du groupe de noeuds P.L C_n sur le groupe $L_{n+2}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Si maintenant le noeud $K \subset S^{n+2}$ vérifie la conjecture de Smith modulo p, c'est-à-dire que le revêtement de S^{n+2} à p feuillets, ramifié le long de K, est une sphère d'homologie, alors l'application de M dans $B^{n+1} \times S^1$ est une équivalence de $Z[Z/p]$-homologie, et l'on obtient une forme quadratique non dégénérée de degré n+2 sur un $Z[Z]$-complexe $Z[Z/p]$-acyclique.

Soit alors $\mathcal{A}_p$ la classe des $Z[Z]$-complexes C tels que $C \otimes_{Z[Z]} Z[Z/p]$ est acyclique. On obtient un isomorphisme du groupe de Cappell et Shaneson [2] de noeuds vérifiant la conjecture de Smith modulo p, dans le groupe $L_{n+2}(\mathcal{A}_p, \mathcal{B})$

Soit $A \to \Lambda$ une localisation injective d'anneaux avec involution. Soient $\mathcal{A}$ la classe des A-complexes, $\mathcal{B}$ la classe des A-complexes Λ-acycliques et $\mathcal{C}$ la classe des A-complexes acycliques. Alors la théorie de localisation en L-théorie peut s'interpréter de la façon suivante:

$$L_n(\mathcal{A},\mathcal{C}) = L_n(A)$$
$$L_n(\mathcal{A},\mathcal{B}) = L_n(\Lambda)$$
$$L_n(\mathcal{B},\mathcal{C}) = L_{n+1}(\Lambda,A)$$

et l'on a une longue suite exacte:

$$\dots \to L_n(\mathcal{B},\mathcal{C}) \to L_n(\mathcal{A},\mathcal{C}) \to L_n(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to L_{n-1}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \to \dots$$

Les groupes $L_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ possèdent un certain nombre de bonnes propriétés qui peuvent se résumer de la façon suivante: les groupes L_n se comportent vis-à-vis des paires de classes $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ comme les groupes d'homologie H_n vis-à-vis des paires d'espaces topologiques. En particulier, si $\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ sont trois classes, on a une longue suite exacte comme ci-dessus; on a également un théorème d'excision et une suite exacte de Mayer-Vietoris.

Si A est commutatif noetherien régulier, les calculs peuvent se poursuivre beaucoup plus loin, et l'on obtient, entre autres, une suite spectrale convergeant vers $L_*(A)$ analogue à la suite spectrale de Quillen convergeant vers la K-théorie de A. On obtient ainsi des résultats assez comparables à ceux de W. Pardon [5], [6]. Les techniques utilisées sont cependant assez différentes car Pardon travaille essentiellement avec des groupes de Witt sur certaines catégories de modules.

Cet article est consacré à l'étude complète des groupes $L_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ dans le cas général. Le cas où A est commutatif est traité en collaboration avec J. Barge et J.J. Sansuc dans [1].

Table des matières

§1- ENONCE DES PRINCIPAUX RESULTATS

Soient A un anneau unitaire muni d'une involution: $a \to \bar{a}$, et ε un élément du centre de A tel que $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$. Si e est l'un des symboles s, h, p ou p', on désigne par $\mathcal{C}^e(A)$ la catégorie des A-modules (à droite) différentiels $\mathbf{Z}$-gradués:

$$\dots \to C_n \to C_{n-1} \to \dots$$

où chaque module C_n est un module de type fini, projectif si e = p ou p', libre si e = h, et libre muni d'une base si e = s, et où de plus, dans le cas $e \neq p'$, les modules C_n sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Les objets de $\mathcal{C}^e(A)$ seront appelés des complexes.

Soit $0 \to C \to C' \to C'' \to 0$ une suite de complexes de $\mathcal{C}^e(A)$. On dira que cette suite est e-exacte si elle est exacte et si, dans le cas e = s, elle induit, pour chaque dimension, une suite exacte courte de torsion nulle dans le groupe $\tilde{K}_1(A)/\varepsilon$ $\tilde{K}_1(A)$ étant le groupe de K-théorie relative du morphisme d'anneaux $\mathbf{Z} \to A$ [4], [7].

Si C est un complexe de $\mathcal{C}^e(A)$, on désignera par $\hat{C}$ le complexe dual défini par

$$\hat{C}_n = \operatorname{Hom}(C_{-n}, A)$$

la différentielle étant choisie de façon que l'évaluation de $\hat{C} \otimes C$ dans A soit un cocycle.

En remarquant que l'involution sur A induit sur chaque A-module à gauche une structure de A-module à droite (et réciproquement), on vérifie que $\hat{C}$ est un complexe de $C^e(A)$ (si $e = s$, il faut choisir sur $\hat{C}$ les bases duales).

<u>DEFINITION</u> 1.1. Une classe $\mathcal{A} \subset C^e(A)$ sera dite exacte si $\mathcal{A}$ contient tous les complexes ayant le type d'homotopie (simple, si $e = s$) du complexe 0, et si, pour chaque suite e-exacte : $0 \to C \to C' \to C'' \to 0$ de complexes de $C^e(A)$, on a la propriété suivante:

Si deux des complexes C, C' et C" appartiennent à $\mathcal{A}$, le troisième appartient également à $\mathcal{A}$.

La plus grande classe exacte est $C^e(A)$. la plus petite classe exacte, formée des complexes ayant le type d'homotopie (simple, si $e = s$) de 0 sera notée $\mathcal{O}$.

<u>DEFINITION</u> 1.2. Soit $\mathcal{A}$ une classe exacte de $C^e(A)$. On désignera par $\hat{\mathcal{A}}$ la classe des complexes $C \in C^e(A)$ tels que $\hat{C}$ appartient à $\mathcal{A}$. La classe $\hat{\mathcal{A}}$ est exacte.

La classe $\mathcal{A}$ sera dite symétrique si $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}}$.

<u>DEFINITION</u> 1.3. Soit $\mathcal{A}$ une classe exacte de $C^e(A)$. On dira qu'un morphisme $f \in C^e(A)$ est une $\mathcal{A}$-équivalence si le cône de f appartient à $\mathcal{A}$.

<u>EXEMPLE</u> 1.4. Soit M un A-module à gauche (resp. à droite). Alors la classe $\mathcal{A}$ des complexes C tels que $H_*(C,M)$ (resp. $H^*(C,M)$) est nul est une classe exacte. De plus, les $\mathcal{A}$-équivalences sont les équivalences de M-homologie (resp. de M-cohomologie).

<u>EXEMPLE</u> 1.5. Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux et β un sous-groupe de $\tilde{K}_1(B)$. Soit $\mathcal{A}$ la classe des complexes $C \in C^s(A)$ tels que $C \otimes B$ soit acyclique avec torsion dans β . Alors $\mathcal{A}$ est exacte et les $\mathcal{A}$-équivalences sont les équivalences de B-homologie avec torsion dans β.

Si, de plus, $A \to B$ est un morphisme d'anneaux à involution et si β est stable par involution, $\mathcal{A}$ est symétrique.

Soient C et C' deux complexes de $C^e(A)$. On désignera par $\mathrm{Hom}(C,C')_n$ l'ensembl des homorphismes A-linéaires de degré n de C dans C'; $\mathrm{Hom}(C,C')$ est muni d'une structure de $\mathbf{Z}$-module différentiel gradué en posant, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(C,C')$ et to $x \in C$:

$$\partial^\circ(f(x)) = \partial^\circ f + \partial^\circ x$$

$$d(f(x)) = (df)(x) + (-1)^{\partial^\circ f} f(dx) .$$

Si l'on pose, de plus, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(C,C')$ est $u \in \hat{C}'$:

$$\hat{f}(u) = (-1)^{\partial^\circ f\, \partial^\circ u}\, u \circ f ,$$

on obtient un morphisme $f \to \hat{f}$ de $\mathrm{Hom}(C,C')$ dans $\mathrm{Hom}(\hat{C}',\hat{C})$ qui respecte les degré et les différentielles.

<u>NOTATION</u> 1.6. Soit C un complexe de $C^e(A)$. On désignera par B(C) le $\mathbf{Z}$-module différentiel gradué $\mathrm{Hom}(C,\hat{C})$. L'application composée : $\mathrm{Hom}(C,\hat{C}) \to \mathrm{Hom}(\hat{\hat{C}}, \hat{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C,\hat{C})$ est une involution sur B(C) (toujours notée $f \to \hat{f}$) et B(C) est un $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/2]$-module différentiel gradué.

On désignera par $B(C)^\varepsilon$ le module différentiel gradué B(C) muni de la nouvell involution $f \to \varepsilon\hat{f}$.

<u>DEFINITION</u> 1.7. Soit C un complexe de $C^e(A)$. On notera $Q_n^\varepsilon(C)$ le groupe d'hype homologie $H_n(\mathbf{Z}/2, B(C)^\varepsilon)$. On appellera n-forme ε-quadratique sur C un élément de $Q_n^\varepsilon(C)$. Un n-complexe ε- quadratique sera un couple (C,q), $q \in Q_n^\varepsilon(C)$.

Soit $C \to C'$ un épimorphisme de degré 0 entre deux complexes de $C^e(A)$. On not ra $Q_n^\varepsilon(C \to C')$ le groupe $H_n(\mathbf{Z}/2, B(C)^\varepsilon/B(C')^\varepsilon)$. On appellera n-forme ε-quadratic sur $C \to C'$ un élément de $Q_n^\varepsilon(C \to C')$. Une n-paire ε-quadratique sera un couple $(C \to C',q)$, $q \in Q_n^\varepsilon(C \to C')$.

<u>DEFINITION</u> 1.8. Soit $\mathcal{A}$ une classe exacte symétrique dans $C^e(A)$.

Soit (C,q) un **n-complexe** ε-quadratique. On dira que q ou (C,q) est $\mathcal{A}$-non dégénérée si l'image de q par l'application composée:

$$H_n(\mathbf{Z}/2,\ B(C)^\varepsilon) \xrightarrow{\text{transfert}} H_n(1,\ B(C)^\varepsilon) \approx H_n(B(C))$$

est représentée par une $\mathcal{A}$-équivalence de C dans $\hat{C}$.

Soit $(C \to C',q)$ une n-paire ε-quadratique. Soit K le noyau de $C \to C'$. On di que q ou $(C \to C',q)$ est A-non dégénérée si l'image de q par l'application composée:

$$H_n(Z/2,\ B(C)^{\varepsilon}/B(C')^{\varepsilon}) \xrightarrow{\text{transfert}} H_n(B(C)/B(C')) \longrightarrow H_n(\mathrm{Hom}(K,\hat{C}))$$

est représentée par une A-équivalence de K dans $\hat{C}$.

DEFINITION 1.9. Soient $A \supset B$ deux classes exactes symétriques de $C^e(A)$. On désignera par ${}_{\varepsilon}L^e_n(A,B)$ l'ensemble des n-complexes ε-quadratiques A-non dégénérés (C,q), $C \in A$, soumis à la relation de cobordisme suivante:

(C,q) et (C',q') sont cobordants s'il existe une n+1-paire ε-quadratique B-non dégénérée $(\Sigma \to C \oplus C',\ u)$ telle que Σ appartienne à A et $\partial u = q \oplus -q'$.

Les groupes ${}_{\varepsilon}L^e_n(A,B)$ ainsi définis sont des généralisations des groupes de chirurgie classiques. Ainsi le groupe ${}_{\varepsilon}L^e_n(A)$ (pour e = s, h ou p) est isomorphe à ${}_{\varepsilon}L^e_n(C^e(A),0)$ et ${}_{\varepsilon}L^{p'}_n(C^{p'}(A),0)$ est isomorphe à ${}_{\varepsilon}L^p_n(A)$.

En outre, si α est un sous-groupe de $\tilde{K}_0(A)$ stable par involution, ${}_{\varepsilon}L^{\alpha}_n(A)$ est le groupe ${}_{\varepsilon}L^p_n(A,0)$, A étant la classe des complexes de $C^p(A)$ dont la classe est dans α.

Si α est un sous-groupe de $\tilde{K}_1(A)/\varepsilon$ stable par involution, ${}_{\varepsilon}L^{\alpha}_n(A)$ est le groupe ${}_{\varepsilon}L^s_n(C^s(A),B)$, B étant la classe des complexes acycliques de $C^s(A)$ avec torsion dans α.

Ceci est démontré par Ranicki [8] mais dans un cadre un peu différent: tout d'abord il utilise un point de vue dual du point de vue adopté ici; de plus, les complexes qu'il considère pour définir les groupes ${}_{\varepsilon}L_n$ sont -1-connexes et de dimension n, alors qu'ici on ne prend aucune restriction de ce genre.

PROPOSITION 1.10. Soient $A \supset B$ deux classes exactes symétriques. Pour tout $n \in Z$, on a des isomorphismes canoniques :

$${}_{\varepsilon}L^e_{n+2}(A,B) \xrightarrow{\sim} {}_{-\varepsilon}L^e_n(A,B)$$

PROPOSITION 1.11. Soient $A \supset B$ deux classes exactes symétriques de $C^e(A)$. Soit a une unité du centre de A. Alors on a des isomorphismes :

$${}_{\varepsilon}L^e_n(A,B) \xrightarrow{\sim} {}_{\varepsilon'}L^e_n(A,B)\ ,\ \text{avec}\quad \varepsilon' = \varepsilon\frac{a}{\bar{a}}$$

THEOREME 1.12. Soient $A \supset B \supset C$ trois classes exactes symétriques de $C^e(A)$. Alors on a une longue suite exacte :

$$\dots \to {}_{\varepsilon}L^e_n(B,C) \to {}_{\varepsilon}L^e_n(A,C) \to {}_{\varepsilon}L^e_n(A,B) \to {}_{\varepsilon}L^e_{n-1}(B,C) \to \dots$$

Ainsi ${}_{\varepsilon}L^e_n$ se comporte vis-à-vis d'une paire de classes exactes symétriques comme une théorie homologique vis-à-vis d'une paire d'espaces topologiques. On en déduit, par exemple, que si $C^e(A)$ est filtré par des classes exactes symétriques $0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = C^e(A)$, on a une suite spectrale dont le terme E^1 est : $E^1_{pq} = {}_{\varepsilon}L^e_{p+q}(A_p,A_{p-1})$

et qui converge vers ${}_{\varepsilon}L^e_{p+q}(A) = {}_{\varepsilon}L^e_{p+q}(C^e(A),0)$.

DEFINITION 1.13. Soient C un complexe de $C^e(A)$ et A une classe exacte. On dira que C est inversible modulo A s'il existe un complexe $C' \in C^e(A)$ tel que $C \oplus C'$ appartienne à A.

Soient $A \supset B$ deux classes exactes de $C^e(A)$ telles que tout complexe $C \in A$ est inversible modulo B. Alors la relation

$$C \sim C' \Leftrightarrow C \oplus \Sigma C' \in B$$

est une relation d'équivalence sur A et l'ensemble quotient est un groupe abélien que l'on notera $K(A,B)$.

EXEMPLE 1.14. Si A est la classe des complexes acycliques de $C^s(A)$, alors K(A, est égal à $\tilde{K}_1(A)/\varepsilon$.

Si A est égal à $C^p(A)$ et si B est la classe des complexes $C \in C^p(A)$ tels que [soit nul dans $\tilde{K}_0(A)$, alors $K(A,B)$ est égal à $\tilde{K}_0(A)$.

THEOREME 1.15. Soient $A \supset B$ deux classes exactes symétriques telles que tout complexe $C \in A$ soit inversible modulo B. Alors on a un isomorphisme canonique :

$${}_{\varepsilon}L^e_n(A,B) \simeq \hat{H}^n(Z/2,K(A,B))$$

Les théorèmes 1.12 et 1.15 permettent de retrouver les suites exactes de Ranicl Rothenberg. Par exemple, la suite exacte :

$$\cdots \to {}_{\varepsilon}L^h_n(A) \to {}_{\varepsilon}L^p_n(A) \to \hat{H}^n(Z/2,\ \tilde{K}_0(A)) \to {}_{\varepsilon}L^h_{n-1}(A) \to \cdots$$

s'obtient en choisissant (dans 1.12) $e = p$ et les classes suivantes :

$\mathcal{A} = C^p(A)$

$\mathcal{B}$ est la classe des complexes $C \in C^p(A)$ tels que $[C]$ soit nul dans $\tilde{K}_0(A)$

$\mathcal{C}$ est la classe nulle $\mathcal{O}$.

De même, la suite exacte reliant ${}_{\varepsilon}L^s_n(A)$ et ${}_{\varepsilon}L^h_n(A)$ s'obtient en prenant $e = s$, et les classes suivantes: la classe $C^s(A)$, la classe des complexes acycliques et la classe nulle .

Les groupes ${}_{\varepsilon}L_n$ possèdent en outre la propriété d'excision. Cette propriété n'est cependant valable que pour les classes transverses au sens suivant:

<u>DEFINITION</u> 1.16. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux classes exactes de $C^e(A)$. On dira que $\mathcal{A}$ est transverse à $\mathcal{B}$ et l'on écrira $\mathcal{A} \pitchfork \mathcal{B}$, si, pour tout $C \in \mathcal{A}$ et tout $C' \in \mathcal{B}$, tout morphisme de C dans C' se factorise à travers un complexe de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux classes exactes de $C^e(A)$, on notera $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ la classe exacte engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

<u>THEOREME</u> 1.17 (<u>excision</u>). <u>Soient</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>deux classes exactes symétriques</u>, $\mathcal{A} \pitchfork \mathcal{B}$. <u>Alors on a un isomorphisme canonique</u> :

$${}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} {}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

Des théorèmes 1.12 et 1.17, on déduit immédiatement le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> 1.18 (<u>Mayer-Vietoris</u>). <u>Soient</u> $\mathcal{A}$ <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>deux classes exactes symétriques</u>, $\mathcal{A} \pitchfork \mathcal{B}$. <u>Soit</u> $\mathcal{C}$ <u>une classe exacte symétrique contenue dans</u> $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. <u>On a alors une longue suite exacte</u> :

$$\cdots \to {}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \mathcal{C}) \to {}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \oplus {}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to {}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \cdots$$

<u>THEOREME</u> 1.19. <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>une classe exacte de</u> $C^e(A)$. <u>On suppose que</u> $\mathcal{A}$ <u>est transverse à</u> $\hat{\mathcal{A}}$. <u>Alors les groupes</u> ${}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A} + \hat{\mathcal{A}}, \mathcal{A} \cap \hat{\mathcal{A}})$ <u>sont nuls</u>.

Si A est commutatif, les classes exactes sont en général transverses, comme le montre l'exemple suivant:

<u>EXEMPLE</u> 1.20. On suppose A commutatif noetherien. Si C est un complexe de $C^e(A)$ on note Supp(C) (support de C) l'ensemble des idéaux premiers p de A tels que $C_{(p)}$ ne soit pas acyclique. Le support de C est un fermé du spectre de A. Soit S une union de fermés de Spec A. Alors la classe $\mathcal{A}_S$ des complexes de $C^e(A)$ dont le support est dans S est une classe exacte.

<u>THEOREME</u> 1.21 [1]. <u>Soient</u> S <u>et</u> S' <u>deux unions de fermés de</u> Spec A. <u>Alors les classes</u> $\mathcal{A}_S$ <u>et</u> $\mathcal{A}_{S'}$ <u>sont transverses et l'on a</u> :

$$\mathcal{A}_S \cap \mathcal{A}_{S'} = \mathcal{A}_{S \cap S'} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_S + \mathcal{A}_{S'} \subset \mathcal{A}_{S \cup S'}$$

<u>De plus, si</u> A <u>est régulier et</u> $e = p$, <u>on a</u> : $\mathcal{A}_{S \cup S'} = \mathcal{A}_S + \mathcal{A}_{S'}$

Si A n'est pas commutatif, on peut assez facilement trouver des classes non transverses :

<u>EXEMPLE 1</u>.22. Soit F un groupe libre non commutatif. Soit A l'anneau K[F], K étant un corps. Soit $\mathcal{A}$ la classe des complexes C de $C^e(A)$ tels que $H_*(C)$ soit de type fini sur K. Alors $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ ne sont pas transverses.

D'autres propriétés des groupes ${}_{\varepsilon}L_n$ concernent la localisation.

Soit $A \to \Lambda$ un morphisme d'anneaux. On dira que $A \to \Lambda$ est une localisation de si Λ est obtenu par inversion formelle d'un système de matrices à coefficients dans A [3].

<u>THEOREME</u> 1.23. <u>Soit</u> $A \to \Lambda$ <u>une localisation de</u> A <u>qui soit un morphisme d'anneau avec involution</u>. <u>Soit</u> α <u>un sous-groupe de</u> $\tilde{K}_1(\Lambda)/\!\!\!\!k$ <u>stable par involution</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>la classe des complexes</u> $C \in C^s(A)$ <u>tels que</u> $C \otimes \Lambda$ <u>soit acyclique avec torsion dans</u> α <u>Alors, on a un isomorphisme</u> :

$${}_{\varepsilon}L^s_n(C^s(A), \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} {}_{\varepsilon}L^{\alpha}_n(\Lambda)$$

<u>THEOREME</u> 1.24. <u>Soit</u> $A \to \Lambda$ <u>une localisation de</u> A <u>qui soit un morphisme d'anneau avec involution</u>. <u>On suppose que les groupes</u> $\mathrm{Tor}^A_i(\Lambda, \Lambda)$ <u>sont nuls pour</u> $i \geq 2$.

<u>Soient</u> $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ <u>deux classes symétriques de</u> $C^e(A)$ ($e \neq p'$) <u>contenant tous les complexes</u> $C \in C^e(A)$ <u>tels que</u> $C \otimes \Lambda$ <u>soit dans la classe nulle de</u> $C^e(\Lambda)$. <u>Soit</u> $\mathcal{A} \otimes \Lambda$ (<u>resp.</u> $\mathcal{B} \otimes \Lambda$) <u>la classe exacte de</u> $C^e(\Lambda)$ <u>engendrée par les complexes</u> $C \otimes \Lambda$, $C \in \mathcal{A}$

(resp. $C \in \mathcal{B}$).

Alors, la tensorisation par Λ induit un isomorphisme :

$${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A} \otimes \Lambda, \mathcal{B} \otimes \Lambda)$$

REMARQUE 1.25. Si $\mathcal{W}$ est la classe des complexes $C \in C^{e}(A)$ (e = s ou h) tels que $C \otimes \Lambda$ appartienne à la classe nulle de $C^{e}(\Lambda)$, on déduit des théorèmes 1.12 et 1.23 une longue suite exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{W},0) \to {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\Lambda) \xrightarrow{\partial} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n-1}(\mathcal{W},0) \to \dots$$

C'est la longue suite exacte de localisation démontrée dans [9].

Si e est égal à p, on a une suite analogue, α étant l'image de $\tilde{K}_0(A) \to \tilde{K}_0(\Lambda)$:

$$\dots \xrightarrow{\partial} {}_{\varepsilon}L^{p}_{n}(\mathcal{W},0) \to {}_{\varepsilon}L^{p}_{n}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{\alpha}_{n}(\Lambda) \xrightarrow{\partial} {}_{\varepsilon}L^{p}_{n-1}(\mathcal{W},0) \to \dots$$

§2 - QUELQUES POINTS D'ALGEBRE HOMOLOGIQUE

2.1 Soient C et C' deux complexes de $C^{e}(A)$. On appellera aplication de degré n de C dans C' un élément de $\mathrm{Hom}(C,C')_n = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(C_p, C'_{n+p})$. Les applications de C dans C' forment un $\mathbb{Z}$-module différentiel gradué Hom(C,C'). On appellera morphisme de degré n de C dans C' une application f de $\mathrm{Hom}(C,C')_n$ telle que $df = 0$. On appellera homotopie de degré n de C dans C' une application de la forme dg, $g \in \mathrm{Hom}(C,C')_{n+1}$.

2.2 Le cône d'un morphisme

Soient C et C' deux complexes de $C^{e}(A)$ et f un morphisme de C dans C'. Soient M(f) le module $C \oplus C'$, i et i' les inclusions canoniques de C et C' dans M(f) et p et p' les projections canoniques de M(f) sur C et C'. Soit n un entier; on peut alors choisir sur M(f) la graduation et la différentielle de façon que l'on ait :

$$\partial^{\circ} i' = n \qquad \partial^{\circ} p' = -n \qquad \partial^{\circ} i = 1+n+\partial^{\circ} f \qquad \partial^{\circ} p = -1-n-\partial^{\circ} f$$

$$di' = 0 \qquad dp' = fp \qquad di = -(-1)^{n} i'f \qquad dp = 0$$

M(f) sera appelé le (n-)cône du morphisme f; M(f) est un complexe de $C^{e}(A)$.

$$0 \longrightarrow C' \underset{i'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} M(f) \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$$

Soit $\mathcal{A}$ une classe exacte de $C^{e}(A)$. On dira qu'un morphisme f est une $\mathcal{A}$-équivalence si M(f) (bien défini à suspension près) appartient à $\mathcal{A}$.

LEMME 2.3. Soient C, C', et C" trois complexes de $C^{e}(A)$, $f: C \to C'$ et $g: C' \to C$ deux $\mathcal{A}$-équivalences. Alors gf est une $\mathcal{A}$-équivalence.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'on a une suite e-exacte :

$$0 \to M(f) \to M(gf) \oplus M(1_{C'}) \to M(g) \to 0$$

LEMME 2.4. Considérons le diagramme commutatif suivant dans $C^{e}(A)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & C''_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des morphismes et où les lignes sont e-exactes. Alors, si deux des trois morphismes f, g et h sont des $\mathcal{A}$-équivalences, le troisième l'est.

Démonstration. On a la suite e-exacte :

$$0 \to M(f) \to M(g) \to M(h) \to 0$$

LEMME 2.5. Considérons le diagramme commutatif suivant dans $C^{e}(A)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & C' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "g"] & C'' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\beta"] & C'_1 \arrow[r, "\beta'"] & C''_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des morphismes et où les lignes sont e-exactes. Soit λ une application de C' dans C'_1 qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & C' \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "\lambda"'] \\ C'_1 \arrow[r, "\beta'"] & C''_1 \end{tikzcd}$$

Soit h le morphisme de C" dans C_1 tel que : $d\lambda = \beta h \alpha'$. Alors, si deux des trois morphismes f, g et h sont des $\mathcal{A}$-équivalences, le troisième l'est.

Démonstration. Soient $M(\beta)$ le 0-cône de β, et i, i', p et p' les applications définies dans 2.2. On vérifie que $g' = i'\lambda + ih\alpha'$ est un morphisme de C' dans $M(\beta)$, et le diagramme suivant est commutatif, à lignes e-exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\alpha} & C' & \xrightarrow{\alpha'} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g' & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1' & \xrightarrow{i'} & M(\beta) & \xrightarrow{p} & C_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'après le lemme 2.4, si deux des trois morphismes f, g' et h sont des A-équivalences, le troisième l'est.

Or g est égal à $\beta'p'g'$ et $\beta'p'$ est une équivalence d'homotopie (simple si e = s)

On en déduit donc le lemme.

§3 - FORMES QUADRATIQUES

Soit W la résolution suivante du $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-module $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]e_0 \longleftarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]e_1 \longleftarrow \cdots$$

avec, pour tout $i \geqslant 1$: $\quad de_i = (1+(-1)^i t)e_{i-1}$

t étant le générateur du groupe $\mathbb{Z}/2$.

Si C est un complexe de $C^e(A)$, $B(C)^\varepsilon$ est le $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-module différentiel gradué $\mathrm{Hom}(C,\hat{C})$, l'involution étant définie par : $f \to \varepsilon\hat{f}$.

On désignera par $\mathcal{Q}^\varepsilon(C)$ le $\mathbb{Z}$-module différentiel gradué suivant:

$$\mathcal{Q}^\varepsilon(C) = W \underset{\mathbb{Z}/2}{\otimes} B(C)^\varepsilon$$

Ainsi, une n-forme ε-quadratique sur C est un élément de $Q_n^\varepsilon(C) = H_n(\mathcal{Q}^\varepsilon(C))$.

Un élément de $\mathcal{Q}^\varepsilon(C)$ est une somme finie de la forme :

$$u = \Sigma\, e_i \otimes u_i \ , \text{ avec } \quad \partial^o u = i+\partial^o u_i \ , \ u_i \in B(C) \ ,$$

et l'on a :

$$d(\Sigma\, e_i \otimes u_i) = \Sigma e_i \otimes (u_{i+1} - (-1)^i \varepsilon \hat{u}_{i+1} + (-1)^i du_i) \ .$$

NOTATION 3.2. Si $u = \Sigma\, e_i \otimes u_i$ est un élément de $\mathcal{Q}^\varepsilon(C)$, on posera :

$$\tilde{u} = u_o + \varepsilon\hat{u}_o \in B(C)$$

$$S(u) = \Sigma e_{i+1} \otimes (-1)^i \varepsilon\hat{u}_i \in \mathcal{Q}^{-\varepsilon}(C)$$

On vérifie aisément la formule suivante :

FORMULE 3.3. Pour tout $u \in \mathcal{Q}^\varepsilon(C)$, on a : $\quad d(Su) + S(du) = e_o \otimes \tilde{u}$.

*

NOTATION 3.4. Soient C et C' deux complexes de $C^e(A)$ et α et β deux applications de C dans C' de degrés respectifs p et q.

Si $u = \Sigma\, e_i \otimes u_i$ est un élément de $\mathcal{Q}^\varepsilon(C')$, on désignera par $\hat{\alpha}u\beta$ l'élément de $\mathcal{Q}^{\varepsilon'}(C)$ $(\varepsilon' = (-1)^p\varepsilon)$ défini par :

$$\hat{\alpha}u\beta = \Sigma\, e_i \otimes (-1)^{pi}\hat{\alpha}u_i\beta$$

LEMME 3.5. *Soient C et C' deux complexes de $C^e(A)$, α et β deux applications de C dans C' de degré p et u un élément de $\mathcal{Q}^\varepsilon(C')$ de degré n. Alors, on a les formules*

$$\hat{\alpha}\, S(u)\, \beta = (-1)^p S(\hat{\beta}u\alpha)$$

$$d\left[\hat{\alpha}u\alpha - (-1)^p\, d\hat{\alpha}S(u)\alpha\right] = (-1)^p\, \hat{\alpha}du\alpha + d\hat{\alpha}d(Su)\alpha - (-1)^n d\hat{\alpha}S(u)d\alpha$$

§4 - LES GROUPES $L_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$

Dans ce paragraphe, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ désigneront deux classes exactes symétriques de $C^e(A)$

DEFINITION 4.1. Soient (C,q) et (C',q') deux n-complexes ε-quadratiques $\mathcal{B}$-non dégénérés, C et C' appartenant à $\mathcal{A}$.

On dira que (C,q) et (C',q') sont en relation (par la relation $\mathcal{R}$) s'il existe une n+1-paire ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénérée $(\Sigma \to C \oplus C', u)$ telle que Σ appartienne à $\mathcal{A}$ et $\partial u = q \oplus -q'$

LEMME 4.2 *Soient $q = [\phi]$ et $q' = [\phi']$ deux n-formes ε-quadratiques $\mathcal{B}$-non dégénérées sur des complexes C et C' de $\mathcal{A}$. Alors, (C,q) et (C',q') sont en relation si et seulement s'il existe deux suites e-exactes:*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} \Sigma \xrightarrow{\alpha} C \longrightarrow 0 \qquad \partial^o\alpha = \partial^o\beta = 0$$

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\beta'} \Sigma \xrightarrow{\alpha'} C' \longrightarrow 0 \qquad \partial^o\alpha' = \partial^o\beta' = 0$$

et un élément $\psi \in \mathcal{Q}^\varepsilon(\Sigma)$ de degré n+1 tels que: $\quad \hat{\alpha}\phi\alpha - \hat{\alpha}'\phi'\alpha' = d\psi$

et $\hat{\beta}'\tilde{\psi}\beta$ est une $\mathcal{B}$-équivalence.

Démonstration. Supposons que (C,q) et (C',q') soient en relation. Alors il existe une suite e-exacte :

$$0 \longrightarrow \Sigma' \xrightarrow{\gamma} \Sigma \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} C \oplus C' \longrightarrow 0$$

et un élément $\psi \in \mathcal{Q}^\varepsilon(\Sigma)$ de degré n+1 tels que :

$$\hat{\alpha}\phi\alpha - \hat{\alpha}'\phi'\alpha' = d\psi$$

$\tilde{\psi}\gamma$ est une $\mathcal{B}$-équivalence.

Soient K (resp. K') le noyau de α (resp. α') et β (resp. β') l'inclusion canonique de K (resp. K') dans Σ. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\text{(I)}\qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & \Sigma' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\psi}\gamma"'] & K \arrow[r, "\alpha'\beta"] \arrow[dl, "\tilde{\psi}\beta"'] \arrow[d, "\hat{\beta}'\tilde{\psi}\beta"] & C' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{C}' \arrow[r, "\hat{\alpha}'"] & \hat{\Sigma} \arrow[r] & \hat{K}' \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd}$$

et l'on a : $\qquad d(\tilde{\psi}\beta) = -\hat{\alpha}'\tilde{\phi}'\alpha'\beta$

Or $\tilde{\psi}\gamma$ et $\tilde{\phi}'$ sont des $\mathcal{B}$-équivalences. D'après le lemme 2.5, $\hat{\beta}'\tilde{\psi}\beta$ est une $\mathcal{B}$-équivalence.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux suites e-exactes:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} \Sigma \xrightarrow{\alpha} C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\beta'} \Sigma \xrightarrow{\alpha'} C' \longrightarrow 0$$

et un élément $\psi \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ vérifiant les conditions du lemme.

A type d'homotopie (simple) près, on peut supposer que $\alpha \oplus \alpha'$ est surjectif, de noyau $\Sigma' \in C^{e}(A)$.

On a alors le diagramme (I) et $\tilde{\phi}'$ et $\hat{\beta}'\tilde{\psi}\beta$ sont des $\mathcal{B}$-équivalences. D'après le lemme 2.5, $\tilde{\psi}\gamma$ est une $\mathcal{B}$-équivalence.

<u>LEMME</u> 4.3. <u>La relation</u> $\mathcal{R}$ <u>est une relation d'équivalence compatible avec la somme directe</u>.

<u>Démonstration</u>. D'après le lemme 4.2, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique. Elle est de plus clairement compatible avec la somme directe.

Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soient q, q' et q" des n-formes ε-quadratiques $\mathcal{B}$-non dégénérées sur des complexes C, C' et C" de A, représentées par des éléments ϕ, ϕ' et ϕ'' de $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(C)$, $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(C')$ et $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(C'')$.

Supposons que (C,q) et (C',q') soient en relation, ainsi que (C',q') et (C",q").

Il existe alors des suites e-exactes:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \Sigma \xrightarrow{\alpha} C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow \Sigma \xrightarrow{\alpha'} C' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow \Sigma_1 \xrightarrow{\alpha_1} C' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_1' \longrightarrow \Sigma_1 \xrightarrow{\alpha_1'} C'' \longrightarrow 0$$

où toutes les flèches sont des morphismes de degré 0, et deux éléments $\psi \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ e $\psi_1 \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma_1)$ tels que: $\qquad \hat{\alpha}\phi\alpha - \hat{\alpha}'\phi'\alpha' = d\psi$

$$\hat{\alpha}_1\phi'\alpha_1 - \hat{\alpha}_1'\phi''\alpha_1' = d\psi_1$$

et où $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi}_1$ induisent des $\mathcal{B}$-équivalences de K dans $\hat{K}'$ et de K_1 dans $\hat{K}_1'$.

Soit X le produit fibré de Σ et Σ_1 au-dessus de C'. On a le diagramme commutati suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \Sigma \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"] & C \\ \Sigma_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_1'"'] & C' & \\ C'' & & \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des morphismes de degré 0. On a:

$$\widehat{\alpha\gamma}\phi\alpha\gamma - \widehat{\alpha_1'\gamma_1}\phi''\alpha_1'\gamma_1 = d(\hat{\gamma}\psi\gamma + \hat{\gamma}_1\psi_1\gamma_1)$$

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \gamma \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \alpha\gamma \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \alpha \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{\operatorname{Ker} \alpha_1'} \arrow[r] & \widehat{\operatorname{Ker} \alpha_1'\gamma_1} \arrow[r] & \widehat{\operatorname{Ker} \gamma_1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des morphismes induits par $\hat{\gamma}\tilde{\psi}\gamma + \hat{\gamma}_1\tilde{\psi}_1\gamma_1$. Les flèches verticales extrêmes sont des $\mathcal{B}$-équivalences. Il en résulte que $\hat{\gamma}\tilde{\psi}\gamma + \hat{\gamma}_1\tilde{\psi}_1\gamma_1$ induit une $\mathcal{B}$-équivalence de Ker $\alpha\gamma$ sur le dual de Ker $\alpha_1'\gamma_1$ et (C,q) et (C",q") sont en relation.

Ainsi la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (on l'appellera dorénavant cobordisme) et l'ensemble quotient ${}_{\varepsilon}L_n^{e}(A,\mathcal{B})$ est un groupe abélien pour la somme directe. De plus, (C,q) et (C,-q) représentent des éléments opposés dans ${}_{\varepsilon}L_n^{e}(A,\mathcal{B})$.

<u>LEMME</u> 4.4. <u>Soient</u> f <u>une</u> $\mathcal{B}$-<u>équivalence de degré</u> 0 <u>d'un complexe</u> $C \in A$ <u>dans un complexe</u> $C' \in A$, <u>et</u> q <u>une</u> n-<u>forme</u> ε-<u>quadratique</u> $\mathcal{B}$-<u>nondégénérée sur</u> C'. <u>Alors</u> (C',q) <u>et</u>

$(C,f^*(q))$ <u>sont</u> <u>cobordants</u>.

<u>Démonstration</u>. Comme f est une $\mathcal{B}$-équivalence, on peut trouver deux suites e-exactes dans $C^e(A)$:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \Sigma \xrightarrow{\ \alpha\ } C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow \Sigma \xrightarrow{\ \alpha'\ } C' \longrightarrow 0$$

où les flèches sont des morphismes de degré 0, α est une équivalence d'homotopie (simple) et où $f\alpha$ est homotope à α' par une homotopie $d\beta$.

Soit $\phi \in Q^{\varepsilon}(C')$ un représentant de q. On a :

$$\hat{\alpha}\hat{f}\phi f\alpha - \hat{\alpha}'\phi\alpha' = \hat{\alpha}'\phi d\beta + \hat{d\beta}\phi\alpha' + \hat{d\beta}\phi d\beta$$

Posons $\phi = \Sigma e_i \otimes \phi_i$. On vérifie aisément la formule suivante :

$$\hat{\alpha}'\phi d\beta + \hat{d\beta}\phi\alpha' = d\left[\Sigma e_i \otimes ((-1)^n \hat{\alpha}'\phi_i\beta + (-1)^i \hat{\beta}\phi_i\alpha')\right]$$

Soit ϕ' l'élément de $Q^{-\varepsilon}(C')$ défini par : $\phi = S\phi' + e_0 \otimes \phi_0$. On a :

$$0 = d(S\phi') + e_0 \otimes d\phi_0 = -S(d\phi') + e_0 \otimes \tilde{\phi}' + e_0 \otimes d\phi_0$$

et $d\phi'$ est nul.

En appliquant la formule 3.5, on obtient:

$$d(\hat{\beta}\phi'\beta + \hat{d\beta}\phi\beta) = d(e_0 \otimes \hat{d\beta}\phi_0\beta) + \hat{d\beta}d(S\phi')\beta + (-1^n\hat{d\beta}S\phi' d\beta$$

d'où : $\quad d(\hat{\beta}\phi'\beta + \hat{d\beta}\phi\beta) = (-1)^n \hat{d\beta}\phi d\beta$

Ilen résulte que $\hat{\hat{\alpha}f}\phi f\alpha - \hat{\alpha}'\phi\alpha'$ est un bord $d\psi$, $\psi \in Q^{\varepsilon}(\Sigma)$. De plus, comme K et K' appartiennent à $\mathcal{B}$, Ψ induit une $\mathcal{B}$-équivalence de K dans $\hat{K}'$. On en déduit, d'après le lemme 4.2, que (C',q) est cobordant à (C,f^*q).

<u>Démonstration</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>proposition</u> 1.10

Il s'agit de montrer l'isomorphisme entre les groupes ${}_{\varepsilon}L^e_{n+2}(A,\mathcal{B})$ et ${}_{-\varepsilon}L^e_n(A,\mathcal{B})$.

Soit C un complexe de A. Soit ΣC la suspension de C ; ΣC est le complexe C, la graduation et la différentielle ayant été modifiées pour que l'identité de C dans ΣC soit un morphisme de degré 1.

Le morphisme de C dans ΣC induit un isomorphisme équivariant de degré 2 de $B(\Sigma C)^{-\varepsilon}$ sur $B(C)^{\varepsilon}$, d'où un isomorphisme de degré 2 de $Q^{-\varepsilon}(\Sigma C)$ sur $Q^{\varepsilon}(C)$ et un isomorphisme de ${}_{-\varepsilon}L^e_n(A,\mathcal{B})$ sur ${}_{\varepsilon}L^e_{n+2}(A,\mathcal{B})$.

<u>Démonstration</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>proposition</u> 1.11

Soit a une unité du centre de A. Soit ε' l'élément $\frac{a}{\bar{a}}\varepsilon$ de A. Si C est un complexe de $C^e(A)$, la multiplication par a induit un isomorphisme de degré 0 de $B(C)^{\varepsilon}$ sur $B(C)^{\varepsilon'}$, d'où un isomorphisme de degré 0 de $Q^{\varepsilon}(C)$ sur $Q^{\varepsilon'}(C)$ et un isomorphisme de ${}_{\varepsilon}L^e_n(A,\mathcal{B})$ sur ${}_{\varepsilon'}L^e_n(A,\mathcal{B})$.

<u>LEMME</u> <u>DE</u> <u>CHIRURGIE</u> 4.5. <u>Soit</u> $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ \alpha\ } \Sigma \xrightarrow{\ \beta\ } C \longrightarrow 0$ <u>une</u> <u>suite</u> e-<u>exacte</u> <u>dans</u> A, <u>les</u> <u>morphismes</u> α <u>et</u> β <u>étant</u> <u>de</u> <u>degré</u> 0. <u>Soit</u> q <u>une</u> n-<u>forme</u> ε-<u>quadratique</u> $\mathcal{B}$-<u>non</u> <u>dégénérée</u> <u>sur</u> C <u>représentée</u> <u>par</u> <u>un</u> <u>élément</u> ϕ <u>de</u> $Q^{\varepsilon}(C)$. <u>On</u> <u>suppose</u> <u>que</u> $\beta^*\phi$ <u>est</u> <u>un</u> <u>bord</u> $d\psi$.

<u>Alors</u>, <u>il</u> <u>existe</u> <u>une</u> n-<u>forme</u> ε-<u>quadratique</u> $\mathcal{B}$-<u>non</u> <u>dégénérée</u>, q' <u>sur</u> <u>le</u> $(-n-1)$-<u>cône</u> C' <u>du</u> <u>morphisme</u> $\Psi\alpha$ <u>et</u> (C',q') <u>est</u> <u>cobordant</u> <u>à</u> (C,q).

<u>Démonstration</u>. Soit M le 0-cône de α. Notons γ et p les projections de M sur K et Σ . On a :

$$\partial^0 p = 0 \quad , \quad \partial^0\gamma = -1$$

$$dp = \alpha\gamma \quad , \quad d\gamma = 0$$

De plus, βp est une équivalence d'homotopie (simple) de degré 0 de M sur C. Il en résulte que $(\beta p)^* q$ est une n-forme ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénérée sur M et (C,q) et $(M,(\beta p)^* q)$ sont cobordants.

Soit C' (resp. X) le $(-n-1)$-cône du morphisme $\Psi\alpha$ (resp $\Psi\alpha\gamma$). On a le diagramme commutatif suivant dans A, où les lignes et les colonnes sont e-exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \hat{\Sigma} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\lambda"] & \hat{\Sigma} \arrow[d, "\lambda'"] & \\
0 \arrow[r] & \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\mu'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma \arrow[r] & M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

De plus, toutes les flèches du diagramme sont de degré 0 sauf γ et μ' qui sont de degré -1 et λ et λ' qui sont de degré $-n-1$.

Soient ρ et ρ' les projections de X et C' sur $\hat{\Sigma}$. On a :

$$\partial^{o}\rho = \partial^{o}\rho' = n+1$$

$$\rho = \rho' g$$

$$d\rho = \tilde{\psi}\alpha\gamma\mu \qquad d\rho' = \tilde{\psi}\alpha\mu'$$

D'après le lemme 3.5, on a :

$$d[\hat{\mu}\hat{\rho}\psi p\mu - \hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}S(\psi)p\mu] = \hat{\mu}\hat{\rho}d\psi p\mu + \hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}d(S\psi)p\mu + (-1)^{n}\hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}S(\psi)\alpha\gamma\mu$$

Or, on a :

$$\hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}d(S\psi)p\mu = -\hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}S(\hat{\beta}\phi\beta)p\mu + e_{o} \otimes \hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}\tilde{\psi}p\mu = e_{o} \otimes \hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}\tilde{\psi}p\mu$$

Posons :

$$\omega = \hat{\mu}\hat{\rho}\psi p\mu - \hat{\mu}\hat{\gamma}\hat{\alpha}S(\psi)p\mu + (-1)^{n}\, e_{o} \otimes \varepsilon\hat{\rho}p\mu$$

On a alors :

$$d\omega = (\beta p\mu)^{*}\phi - g^{*}(e_{o} \otimes \varepsilon\hat{\rho}'\alpha\mu' - (-1)^{n}\hat{\mu}'\alpha S(\psi)\alpha\mu')$$

Comme $(\beta p)^{*}q$ est $\mathcal{B}$-non dégénérée et que $\hat{f}\tilde{\omega}\lambda$ est un isomorphisme, $e_{o} \otimes \varepsilon\hat{\rho}'\alpha\mu' - (-1)^{n}\hat{\mu}'\hat{\alpha}S(\psi)\alpha\mu'$ représente une n-forme ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénérée q' sur C' et (C',q') est cobordant à (C,q).

THEOREME 4.6. *Si n est un entier positif ou nul et si e est égal à s, h ou p, le groupe ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{C}^{e}(A),\mathcal{O})$ est isomorphe au groupe de chirurgie ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A)$.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème, il est possible d'utiliser le lemme de chirurgie et d'exprimer le groupe ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{C}^{e}(A),\mathcal{O})$ en terme de générateurs et de relations avec des complexes de longueur 1 ou 2. Il est alors facile de reconnaître la définition classique du groupe ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A)$.

On peut également utiliser la définition de Ranicki des groupes ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A)$ [6] : Si (C,q) est un complexe de Poincaré ε-quadratique de dimension n au sens de Ranicki on en déduit une n-forme ε-quadratique non dégénérée sur $\hat{C}$. Cette correspondance induit un morphisme de groupe de ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A)$ dans ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{C}^{e}(A),\mathcal{O})$, compatible avec la périodicité.

Soit u un élément de $L^{e}_{n}(\mathcal{C}^{e}(A),\mathcal{O})$ représenté par un couple (C,q). Si k est un entier assez grand, le stabilisé de (C,q) par la périodicité $L_{n} \xrightarrow{\sim} L_{n+4k}$ sera le couple $(\Sigma^{2k}C,q')$ et le dual de $\Sigma^{-2k}C$ sera un complexe positif de dimension inférieure ou égale à n+4k . Dans ce cas, la classe de $(\Sigma^{-2k}C,q')$ est dans l'image du morphisme :

$${}_{\varepsilon}L^{e}_{n+4k}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L^{e}_{n+4k}(\mathcal{C}^{e}(A),\mathcal{O})$$

Il en résulte, par périodicité, que la classe de (C,q) appartient à l'image de ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A)$ et le morphisme de ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(A)$ dans ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{C}^{e}(A),\mathcal{O})$ est surjectif.

Pour l'injectivité du morphisme, on procède de même; on stabilise pour s'assurer que les complexes utilisés satisfont les conditions dimensionnelles de Ranicki.

On montrera plus loin que ${}_{\varepsilon}L^{p'}_{n}(\mathcal{C}^{p'}(A),\mathcal{O})$ est isomorphe au groupe ${}_{\varepsilon}L^{p}_{n}(A)$.

DEFINITION 4.7. Soit $\mathcal{A}$ une classe exacte de $\mathcal{C}^{e}(A)$. On dira qu'un complexe $C \in \mathcal{C}^{e}(A)$ est inversible modulo $\mathcal{A}$ s'il existe un complexe $C' \in \mathcal{C}^{e}(A)$ tel que $C \oplus C'$ appartienne à $\mathcal{A}$.

LEMME 4.8. *Soient $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ deux classes exactes de $\mathcal{C}^{e}(A)$. On suppose que tout complexe de $\mathcal{A}$ est inversible modulo $\mathcal{B}$. Alors, la relation :*

$$C \sim C' \iff C \oplus \Sigma C' \in \mathcal{B}$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$ compatible avec la somme directe.

Le groupe quotient sera noté $K(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Démonstration. Soit C un complexe de $\mathcal{A}$. Il existe $C' \in \mathcal{C}^{e}(A)$ tel que $C \oplus C'$ appartienne à $\mathcal{B}$ et C' est un complexe de $\mathcal{A}$. Or $C \oplus C'$ est le 0-cône de l'application nulle de $\Sigma^{-1}C'$ dans C. Par suite, l'application nulle de C' dans ΣC est une $\mathcal{B}$-équivalence et il existe une $\mathcal{B}$-équivalence de $C \oplus C'$ dans $C \oplus \Sigma C$. Il en résulte que $C \oplus \Sigma C$ appartient à $\mathcal{B}$.

On vérifie alors immédiatement que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$ compatible avec la somme directe et que l'ensemble quotient $K(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est un groupe abélien.

LEMME 4.9. *Soit θ l'application quotient de $\mathcal{A}$ dans $K(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Alors, si $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} C' \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow 0$ est une suite e-exacte dans $\mathcal{A}$, α et β étant des morphismes de degré 0, on a :*

$$\theta(C') = \theta(C) + \theta(C'')$$

<u>Démonstration</u>. On a une suite e-exacte :

$$0 \longrightarrow C \oplus \Sigma C \longrightarrow C' \oplus \Sigma C \oplus \Sigma C'' \longrightarrow C'' \oplus \Sigma C'' \longrightarrow 0$$

et $C' \oplus \Sigma C \oplus \Sigma C''$ appartient à $\mathcal{B}$.

<u>Démonstration du théorème</u> 1.15.

Soient $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ deux classes exactes symétriques de $\mathcal{C}^e(A)$. On suppose que tout complexe de $\mathcal{A}$ est inversible modulo $\mathcal{B}$. Alors, $K(\mathcal{A},\mathcal{B})$) est un groupe abélien muni d'une involution induite par la dualité.

On va montrer que θ induit un isomorphisme de ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sur $\hat{H}^n(\mathbf{Z}/2, K(\mathcal{A},\mathcal{B}))$.

Soit (C,q) un n-complexe ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénéré, C appartenant à $\mathcal{A}$. Comme q induit une $\mathcal{B}$-équivalence de degré n de C dans $\hat{C}$, on a :

$$\theta(C) = (-1)^n\, \theta(\hat{C})$$

D'autre part, si (C,q) est cobordant à 0, il existe une suite e-exacte dans $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \Sigma \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

et une $\mathcal{B}$-équivalence de degré n+1 de K dans $\hat{\Sigma}$. On a alors, dans ce cas:

$$\theta(C) = \theta(\Sigma) - \theta(K) = \theta(\Sigma) + (-1)^n \theta(\hat{\Sigma})$$

On en déduit, par passage au quotient, un morphisme de groupe θ' de ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ dans $\hat{H}^n(\mathbf{Z}/2, K(\mathcal{A},\mathcal{B}))$. Le morphisme θ' fait correspondre à la classe de (C,q) la classe de $\theta(C)$.

Montrons que θ' est surjectif. Soit $u \in \hat{H}^n(\mathbf{Z}/2, K(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ un élément représenté par $\theta(C)$, $C \in \mathcal{A}$.

On a : $\theta(C) = (-1)^n\, \theta(\hat{C})$

On en déduit que $(C,0)$ est un n-complexe ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénéré qui donne u dans $\hat{H}^n(\mathbf{Z}/2, K(\mathcal{A},\mathcal{B}))$; θ' est donc surjectif.

Montrons que θ' est injectif.

Soit (C,q) un n-complexe ε-quadratique, C appartenant à $\mathcal{A}$, tel que (C,q) donne 0 dans $\hat{H}^n(\mathbf{Z}/2, K(\mathcal{A},\mathcal{B}))$.

Alors on a : $\theta(C) = \theta(\Sigma) + (-1)^n\ \theta(\hat{\Sigma})$

Sans changer le type d'homotopie (simple) de Σ, on peut supposer qu'il existe un épimorphisme homotope à 0 de Σ sur C, de noyau $K \in \mathcal{A}$. Choisissons un élément

$u \in Q^{\varepsilon}_{n+1}(\Sigma \xrightarrow{f} C)$ de bord q. Alors, u est $\mathcal{B}$-non dégénéré et (C,q) est cobordant à 0.

§5- <u>LA LONGUE SUITE EXACTE</u> (<u>Théorème</u> 1.12)

Soient $\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ trois classes exactes symétriques de $\mathcal{C}^e(A)$. On va construire une longue suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \xrightarrow{i} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \xrightarrow{j} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} {}_{\varepsilon}L^{e}_{n-1}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \longrightarrow \cdots$$

où i et j résultent des inclusions $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

5.1 <u>Construction du bord</u> ∂.

Soient C un complexe de $\mathcal{A}$ et q une n-forme ε-quadratique sur C représentée par un élément ϕ de $Q^{\varepsilon}(C)$. Soient M le -n-cône du morphisme $\tilde{\phi}$ de C dans $\hat{C}$, α l'injection canonique de $\hat{C}$ dans M, β et ρ les projections canoniques de M sur C et $\hat{C}$.

$$0 \longrightarrow \hat{C} \underset{\alpha}{\overset{\rho}{\leftrightarrows}} M \xrightarrow[\beta]{} C \longrightarrow 0$$

On a : $\quad \partial^\circ\alpha = -n \qquad \partial^\circ\rho = n \qquad \partial^\circ\beta = -1$

$\qquad d\alpha = 0 \qquad d\beta = 0 \qquad d\rho = \tilde{\phi}\beta$

Posons : $\quad \psi = e_0 \otimes \hat{\beta}\rho - \hat{\beta}S(\phi)\beta$

On a alors : $d\psi = -e_0 \otimes \hat{\beta}\tilde{\phi}\beta + \hat{\beta}d(S\phi)\beta = -\hat{\beta}S(d\phi)\beta = 0$

et ψ représente une n-1-forme ε-quadratique sur M.

On vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{C} \arrow[r, "\hat{\beta}"] & \hat{M} \arrow[r, "\hat{\alpha}"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et la classe de ψ est non dégénérée.

Si la forme ε-quadratique q est $\mathcal{B}$-non dégénérée, M appartient à $\mathcal{B}$ et $(M,[\psi])$ représente un élément $\partial(C,\phi)$ de ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n-1}(\mathcal{B},\mathcal{C})$.

Supposons que $(C,[\phi])$ soit cobordant à 0. Alors il existe une suite e-exacte dans $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\lambda} \Sigma \xrightarrow{\mu} C \longrightarrow 0$$

λ et μ étant des morphismes de degré 0, et un élément u de $Q^{\varepsilon}(\Sigma)$ tel que :

$\hat{\mu}\phi\mu = du \quad$ et $\quad \tilde{u}\lambda$ est une $\mathcal{B}$-équivalence

Soit $\hat{K}'$ le -1-cône du morphisme $\hat{\mu} : \hat{C} \to \hat{\Sigma}$. Soient f et s les injections canoniques de $\hat{\Sigma}$ et $\hat{C}$ dans $\hat{K}'$, et g et t les projections canoniques de $\hat{K}'$ sur $\hat{C}$ et $\hat{\Sigma}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{\Sigma} \arrow[r, shift right, "f"'] & \hat{K}' \arrow[l, shift right, "t"'] \arrow[r, shift right, "g"'] & \hat{C} \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On a : $\quad \partial^\circ f = -1 \qquad \partial^\circ t = 1 \qquad \partial^\circ g = \partial^\circ s = 0$

$$df = dg = 0 \quad dt = \hat{\mu}g \qquad ds = f\hat{\mu}$$

On vérifie que $\tilde{u}\lambda$ et $s\tilde{\phi}\mu + f\tilde{u}$ sont des morphismes et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tilde{u}\lambda"] \arrow[d, "\lambda"] & \hat{\Sigma} \arrow[d, "f"] \\ \Sigma \arrow[r, "s\tilde{\phi}\mu+f\tilde{u}"] \arrow[d, "\mu"] & \hat{K}' \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & \hat{C} \end{tikzcd}$$

Soient M' le -n-cône de $s\tilde{\phi}\mu+f\tilde{u}$ et M" le -n-1-cône de $\tilde{u}\lambda$. On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes e-exactes :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \hat{\Sigma} \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "h"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{K}' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "g"] & M' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "k"] & \Sigma \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

On notera ρ' et ρ'' les rétractions canoniques de α' et α''. On a donc :

$$d\rho' = s\tilde{\phi}\mu\beta' + f\tilde{u}\beta' \qquad\qquad d\rho'' = \tilde{u}\lambda\beta''$$

On a : $\quad \hat{k}\psi k = e_0 \otimes \hat{\beta}'\hat{\mu}g\rho' - \hat{\beta}'\hat{\mu}S(\phi)\mu\beta'$

On vérifie alors que, si l'on pose : $v = -e_0 \otimes \hat{\beta}'t\rho' - \hat{\beta}'S(u)\beta'$, on a :

$$\hat{k}\psi k = dv$$

Pour montrer que $(M,[\psi])$ est cobordant à 0, il reste à montrer que M'et M" appartiennent à $\mathcal{B}$ et que $\tilde{V}h$ est une $\mathcal{C}$-équivalence. Or M" est le cône de $\tilde{u}\lambda$ qui est une $\mathcal{B}$-équivalence. Il en résulte que M' et M" appartiennent à $\mathcal{B}$.

D'autre part, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{\Sigma} \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "-1"'] & M'' \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\tilde{V}h"] & K \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^n\varepsilon\hat{t}\lambda"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{\Sigma} \arrow[r, "\hat{\beta}'"] & \hat{M}' \arrow[r, "\hat{\alpha}'"] & \hat{K}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Or, il est facile de vérifier que $\hat{t}\lambda$ est une équivalence d'homotopie (simple) de K vers le dual K' de $\hat{K}'$. On en déduit que $\tilde{V}h$ est une $\mathcal{C}$-équivalence et $(M,[\psi])$ est cobordant à 0.

Ainsi, si $(C,[\phi])$ est cobordant à 0, $\partial(C,\phi)$ est nul.

Soient, maintenant, C et C' deux complexes de $\mathcal{A}$ et $[\phi]$ et $[\phi']$ des n-formes ε-quadratiques $\mathcal{B}$-non dégénérées sur C et C'. Si $(C,[\phi])$ est cobordant à $(C',[\phi'])$, $(C \oplus C',[\phi \oplus -\phi'])$ est cobordant à 0 et $\partial(C \oplus C',\phi \oplus -\phi') = \partial(C,\phi) + \partial(C',-\phi')$ est nul. Cela a lieu en particulier si C = C' et $\phi = \phi'$. On en déduit :

$$\partial(C',\phi') + \partial(C',-\phi') = 0$$

Il en résulte que, si $(C,[\phi])$ est cobordant à $(C',[\phi'])$, $\partial(C,\phi)$ est égal à $\partial(C',\phi')$.

Ainsi l'application ∂ est bien définie de ${}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ dans ${}_{\varepsilon}L^e_{n-1}(\mathcal{B},\mathcal{C})$.

5.2. <u>ji = 0</u> . Soit q une n-forme ε-quadratique $\mathcal{C}$-non dégénérée sur un complexe $C \in \mathcal{B}$. L'application nulle de 0 dans C est une $\mathcal{B}$-équivalence.

D'après le lemme 4.4, (C,q) représente 0 dans le groupe ${}_{\varepsilon}L^e_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$. L'application ji est donc nulle.

5.3. <u>∂j = 0</u> . Soit $[\phi]$ une n-forme ε-quadratique $\mathcal{C}$-non dégénérée sur un complexe $C \in \mathcal{A}$. Alors, $\tilde{\phi}$ est une $\mathcal{C}$-équivalence de C sur $\hat{C}$ et $\partial(C,\phi)$ est représenté par un couple (M,q) , $M \in \mathcal{C}$. D'après le lemme 4.4, (M,q) est cobordant à 0 et $\partial(C,\phi)$ est nul.

L'application ∂j est donc nulle.

5.4. <u>i∂ = 0</u> . Soit $[\phi]$ une n-forme ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénérée sur un complexe $C \in \mathcal{A}$.

En reprenant les notations de 5.1, $\partial(C,\phi)$ est représenté par $(M,[\psi])$.

Soient M' le 0-cône du morphisme β de M dans C, λ l'inclusion canonique de C dans M' et t et μ les projections canoniques de M' sur C et M :

$$0 \longrightarrow C \underset{\lambda}{\overset{t}{\rightleftarrows}} M' \xrightarrow[\mu]{} M \longrightarrow 0$$

Les applications λ, μ et t sont de degré 0 et l'on a :

$$d\lambda = d\mu = 0 \qquad dt = \beta\mu$$

On a : $\hat{\mu}\psi\mu = e_0 \otimes \hat{\mu}\hat{\beta}\rho\mu - \hat{\mu}\hat{\beta}S(\phi)\beta\mu = e_0 \otimes \widehat{dt}\rho\mu - \widehat{dt}S(\phi)dt$

D'après le lemme 3.5, on a également :

$$(-1)^n d(\hat{t}\phi t - \widehat{dt}S(\phi)t - e_0 \otimes \hat{t}\tilde{\phi}t) = -e_0 \otimes \hat{t}\phi dt - \widehat{dt}S(\phi)dt$$

On en déduit , si l'on pose :

$$u = e_0 \otimes \hat{t}\rho\mu + (-1)^n\hat{t}\phi t - (-1)^n\widehat{dt}S(\phi)t - (-1)^n e_0 \otimes \hat{t}\tilde{\phi}t$$

que l'on a : $\hat{\mu}\psi\mu = du$

D'autre part, on vérifie que $\tilde{u}\lambda$ est égal à $\varepsilon\hat{\mu}\hat{\rho} - (-1)^n\hat{t}\tilde{\phi}$, et si f est l'équivalence d'homotopie (simple) canonique de $\hat{C}$ dans M', $\hat{f}\tilde{u}\lambda$ est égal à $(-1)^n\varepsilon$. On en déduit que $\tilde{u}\lambda$ est une $\mathcal{C}$-équivalence. Comme, de plus, C et M' appartiennent à $\mathcal{A}$, $\partial(C,\phi)$ est annulé par i.

L'application $i\partial$ est donc nulle.

5.5. Exactitude en ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{C})$.

Soit $[\phi]$ une n-forme ε-quadratique $\mathcal{C}$-non dégénérée sur un complexe $C \in \mathcal{A}$, tel que $(C,[\phi])$ soit annulé par j. Il existe alors une suite e-exacte dans $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} \Sigma \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

et un élément $\psi \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ tels que : $\partial^0\alpha = \partial^0\beta = 0$

$$\hat{\beta}\phi\beta = d\psi$$

$\tilde{\psi}\alpha$ est une $\mathcal{B}$-équivalence.

D'après le lemme de chirurgie 4.5, $(C,[\phi])$ est cobordant à (C',q'), C' étant un cône de $\tilde{\psi}\alpha$. Ainsi, C' appartient à $\mathcal{B}$ et la classe de $(C,[\phi])$ est dans l'image de i.

5.6. Exactitude en ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Soit $[\phi]$ une n-forme ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénérée sur un complexe $C \in \mathcal{A}$, tel que $\partial(C,\phi)$ soit nul. Soient M le -n-cône de $\tilde{\phi}$, α et σ les injections canoniques

de $\hat{C}$ et C dans M et β et ρ les projections canoniques de M sur C et $\hat{C}$. Si $\partial(C,\phi)$ est nul, il existe une suite e-exacte dans $\mathcal{B}$:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\lambda} \Sigma \xrightarrow{\mu} M \longrightarrow 0$$

et un élément u de $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ tels que :

$$\partial^\circ\lambda = \partial^\circ\mu = 0 \qquad \partial^\circ u = n$$

$$\hat{\mu}\psi\mu = \hat{\mu}(e_0 \otimes \hat{\beta}\rho - \hat{\beta}S(\phi)\beta)\mu = du$$

$\tilde{u}\lambda$ est une $\mathcal{C}$-équivalence

Soient s une section de μ et C' le produit fibré de $\hat{C}$ et Σ au dessus de M, le morphisme $C' \to \Sigma$ étant de degré 0. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\lambda'"'] & K \arrow[d, "\lambda"] & \\
C' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\mu'"'] & \Sigma \arrow[r, "\beta\mu"] \arrow[d, shift right, "\mu"'] & C \arrow[d, "1"] \\
\hat{C} \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & M \arrow[l, shift right, "\rho"'] \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & C \arrow[l, shift right, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Comme sσ est une section (de degré 1) de βμ, il existe un morphisme f de degré 0 de C dans C' tel que : $d(s\sigma) = -(-1)^n\alpha' f$

On vérifie aisément que μ'f est égal à $\tilde{\phi}$.

Soit v l'élément de $\mathcal{Q}^{-\varepsilon}(\Sigma)$ défini par : $u = e_0 \otimes u_0 + S(v)$

On a :

$$du = e_0 \otimes du_0 - S(dv) + e_0 \otimes \tilde{v} = e_0 \otimes \hat{\mu}\hat{\beta}\rho\mu - \hat{\mu}\hat{\beta}S(\phi)\beta\mu$$

d'où :

$$S(dv) = \hat{\mu}\hat{\beta}S(\phi)\beta\mu = -S(\hat{\mu}\hat{\beta}\phi\beta\mu)$$

$$\Rightarrow dv = -\hat{\mu}\hat{\beta}\phi\beta\mu$$

D'après le lemme 3.5, on a :

$$d[\widehat{s\sigma}vs\sigma + d\widehat{s\sigma}S(v)s\sigma] = -\widehat{s\sigma}dvs\sigma + d\widehat{s\sigma}d(Sv)s\sigma + (-1)^n d\widehat{s\sigma}Svd(s\sigma)$$

Or on a les formules suivantes :

$$-\widehat{s\sigma}dvs\sigma = \widehat{s\sigma}\widehat{\beta\mu}\phi\beta\mu s\sigma = -\phi$$

$$d\widehat{s\sigma}d(Sv)s\sigma = -(-1)^n\hat{f}\hat{\alpha}'dus\sigma - e_0 \otimes d\widehat{s\sigma}du_0s\sigma = -e_0 \otimes d\widehat{s\sigma}du_0s\sigma$$

$$(-1)^n d\widehat{s\sigma}Svd(s\sigma) = (-1)^n\hat{f}\hat{\alpha}'u\alpha' f - (-1)^n e_0 \otimes d\widehat{s\sigma}u_0d(s\sigma)$$

On en déduit :

$$d\left[\widehat{s\sigma}vs\sigma + d\widehat{s\sigma}S(v)s\sigma\right] = -\phi + (-1)^n\hat{f}\hat{\alpha}'u\alpha'f - d(e_o \otimes d\widehat{s\sigma}u_o s\sigma)$$

Ainsi ϕ est homologue à $(-1)^n\hat{f}\hat{\alpha}'u\alpha'f$. Comme f est une $\mathcal{B}$-équivalence, $(C,[\phi])$ est cobordant à $(C',[(-1)^n\hat{\alpha}'u\alpha'])$.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\tilde{u}\lambda"'] & C' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[dl, "\tilde{u}\alpha'"'] \arrow[d, "\hat{\alpha}'\tilde{u}\alpha'"] & \hat{C} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{C} \arrow[r, "\hat{\mu}\hat{\beta}"] & \hat{\Sigma} \arrow[r, "\hat{\alpha}'"] & \hat{C}' \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales et verticales sont des morphismes et l'on a :

$$d(\tilde{u}\alpha') = (\hat{\mu}\hat{\beta}\rho\mu + \varepsilon\hat{\mu}\hat{\rho}\beta\mu)\alpha' = \hat{\mu}\hat{\beta}\mu'$$

D'après le lemme 2.5, comme $\tilde{u}\lambda$ est une C-équivalence, $\hat{\alpha}'\tilde{u}\alpha'$ est une C-équivalence et la classe de $(C',(-1)^n[\hat{\alpha}'u\alpha'])$ est dans l'image de j.

5.7. <u>Exactitude en</u> ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n-1}(\mathcal{B},C)$

Soit $[\phi]$ une n-1-forme ε-quadratique C-non dégénérée sur un complexe C de $\mathcal{B}$, telle que $(C,[\phi])$ s'annule dans ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n-1}(A,C)$. Il existe une suite e-exacte dans A :

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} \Sigma \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

et un élément ψ de $Q^{\varepsilon}(\Sigma)$ tels que : $\partial°\alpha = \partial°\beta = 0$, $\partial°\psi = n$

$$d\psi = \hat{\beta}\phi\beta$$

$\tilde{\psi}\alpha$ est une C-équivalence

Considérons alors le couple $(K,\widehat{\alpha\psi\alpha})$. Soient M le -n-cône de $\hat{\alpha}\tilde{\psi}\alpha$, λ et σ les injections canoniques de $\hat{K}$ et K dans M, et μ et ρ les projections canoniques de M sur K et $\hat{K}$. Posons : $u = e_o \otimes \hat{\mu}\rho - \hat{\mu}S(\widehat{\alpha\psi\alpha})\mu$. Alors $(M,[u])$ représente $\partial(K,\widehat{\alpha\psi\alpha})$.

Soit s une section de β. Il existe un morphisme γ de C dans K défini par :

$$ds = \alpha\gamma$$

Comme le morphisme $\hat{\alpha}\tilde{\psi}$ de Σ dans $\hat{K}$ est une C-équivalence, il induit une C-équivalence du cône de α sur M. Or le cône de α a le type d'homotopie (simple) de C. On en déduit une C-équivalence f de C dans M. On trouve la formule :

$$f = \lambda\hat{\alpha}\tilde{\psi}s + (-1)^n\sigma\gamma$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] & \Sigma \arrow[r, "\beta"', "\overset{s}{\leftarrow}"] \arrow[d, "\hat{\alpha}\tilde{\psi}"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & \hat{K} \arrow[r, "\lambda"', "\overset{\rho}{\leftarrow}"] & M \arrow[r, "\mu"', "\overset{\sigma}{\leftarrow}"] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 3.5, on a :

$$\begin{aligned}
d(\hat{s}\psi s - \hat{d}sS(\psi)s) &= \hat{s}d\psi s + \hat{d}sd(S\psi)s - (-1)^n d\hat{s}S\psi ds \\
&= \phi - \hat{d}sS(\hat{\beta}\phi\beta)s + e_o \otimes \hat{d}s\tilde{\psi}s - (-1)^n\hat{\gamma}\hat{\alpha}S\psi\alpha\gamma \\
&= \phi + e_o \otimes \hat{\gamma}\hat{\alpha}\tilde{\psi}s - (-1)^n\hat{\gamma}\hat{\alpha}S\psi\alpha\gamma
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\hat{f}(e_o \otimes \hat{\mu}\rho - \hat{\mu}S(\hat{\alpha}\psi\alpha)\mu)f = -(-1)^n e_o \otimes \hat{\gamma}\hat{\alpha}\tilde{\psi}s - \hat{\gamma}\hat{\alpha}S\psi\alpha\gamma$$

On en déduit que ϕ est homologue à $(-1)^n f^*(e_o \otimes \hat{\mu}\rho - \hat{\mu}S(\hat{\alpha}\psi\alpha)\mu)$, et par conséquent la classe de $(C,(-1)^n[\phi])$ est égale à $\partial(K,\widehat{\alpha\psi\alpha})$.

Il en résulte que la classe de $(C,[\phi])$ est dans l'image de ∂.

§6- <u>TRANSVERSALITE ET EXCISION</u>

Soient A et $\mathcal{B}$ deux classes exactes de $C^e(A)$. On dira que A est transverse à $\mathcal{B}$ ($A \pitchfork \mathcal{B}$) si tout morphisme d'un complexe de A dans un complexe de $\mathcal{B}$ se factorise par un complexe de $A \cap \mathcal{B}$.

Si A et $\mathcal{B}$ sont deux classes exactes, on notera $A + \mathcal{B}$ la classe engendrée par A et $\mathcal{B}$.

<u>LEMME</u> 6.1. <u>Soient</u> A <u>et</u> $\mathcal{B}$ <u>deux classes exactes</u>, $A \pitchfork \mathcal{B}$. <u>Alors, un complexe</u> C <u>appartient à</u> $A + \mathcal{B}$ <u>si et seulement s'il existe une</u> $\mathcal{B}$<u>-équivalence d'un complexe de</u> A <u>dans</u> C .

<u>Démonstration</u>. Soit C la classe des complexes $C \in C^e(A)$ tels qu'il existe une $\mathcal{B}$-équivalence d'un complexe de A dans C . Il est clair que C est contenue dans $A + \mathcal{B}$ et contient A et $\mathcal{B}$. Il suffit donc de montrer que C est exacte.

Soit $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} C' \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ une suite e-exacte, C et C' appartenant à C.

Il existe deux complexes K et K' dans A et des $\mathcal{B}$-équivalences $f: K \to C$ et

$f' : K' \to C'$, que l'on peut supposer surjectives.

Soit M' le cône de f'. Comme $\mathcal{A}$ est transverse à $\mathcal{B}$, le morphisme composé $K \to C \to C' \to M'$ se factorise par un complexe $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Soit M le 1-cône du morphisme $K \to X$.

Comme X appartient à $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, M appartient à $\mathcal{A}$ et le morphisme composé $M \to K \to C$ est une $\mathcal{B}$-équivalence. De plus, le morphisme composé $M \to K \to M'$ est homotope à 0 et le morphisme de M vers C' se factorise par K'.

$$\begin{tikzcd}
 & & M' & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[u] & C'' \arrow[r] & 0 \\
 & K \arrow[u] & K' \arrow[u, "f'"'] & & \\
 & M \arrow[u] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Soit K'' le cône du morphisme $M \to K'$; K'' appartient à $\mathcal{A}$ et s'envoie dans C'' par une $\mathcal{B}$-équivalence. Donc C'' appartient à $\mathcal{C}$.

Comme $\mathcal{C}$ est stable par équivalence d'homotopie (simple) et par suspension, on en déduit que $\mathcal{C}$ est exacte, et par conséquent, égale à $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

6.2 <u>Démonstration du théorème d'excision</u> 1.17.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux classes exactes symétriques, $\mathcal{A} \pitchfork \mathcal{B}$. On a un morphisme canonique : $F : {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A},\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A} + \mathcal{B},\mathcal{B})$

On va montrer que F est bijective.

Soit (C,q) un n-complexe ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénéré, $C \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

D'après 6.1, il existe une $\mathcal{B}$-équivalence f de K dans C , $K \in \mathcal{A}$. D'après le lemme 4.4, (C,q) est cobordant à $(K,f^{*}q)$ et F est surjective.

Soit (C,q) un n-complexe ε-quadratique $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$-non dégénéré, $C \in \mathcal{A}$. On suppose que (C,q) s'annule par F. Alors, il existe une suite exacte dans $\mathcal{A} + \mathcal{B}$:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} \Sigma \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

et un élément $\psi \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ tels que : $\partial^{o}\alpha = \partial^{o}\beta = 0 \qquad \partial^{o}\psi = n+1$

$$d\psi = \hat{\beta}\phi\beta$$

$\bar{\psi}\alpha$ est une $\mathcal{B}$-équivalence.

D'après le lemme 6.1, on peut trouver un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] & \Sigma \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[u, "f"] & \Sigma' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[u, "g"] & C \arrow[r] \arrow[u, "1"] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont e-exactes, où K' et Σ' sont dans $\mathcal{A}$ et où f et g sont des $\mathcal{B}$-équivalences. On a alors : $d(\hat{g}\psi g) = \hat{\beta}'\phi\beta'$

$\hat{g}\bar{\psi}g\alpha'$ est une $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$-équivalence.

Ainsi, (C,q) est cobordant à 0 et F est injective.

6.3. <u>Démonstration du théorème</u> 1.19.

Soit $\mathcal{A}$ une classe exacte, $\mathcal{A} \pitchfork \hat{\mathcal{A}}$. On va montrer la nullité des groupes ${}_{\varepsilon}L^{e}_{n}(\mathcal{A} + \hat{\mathcal{A}},\mathcal{A} \cap \hat{\mathcal{A}})$.

Soit (C,q) une n-forme ε-quadratique $\mathcal{A} \cap \hat{\mathcal{A}}$-non dégénérée, $C \in \mathcal{A} + \hat{\mathcal{A}}$.

Si j est un entier, on désignera par (P_j) la propriété suivante :

" Il existe un complexe $\Sigma \in \mathcal{A}$ et une $\hat{\mathcal{A}}$-équivalence f de Σ dans C tels que $f^{*}(q)$ soit représenté par un élément de $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ de la forme $\sum_{i=0}^{j} e_i \otimes \phi_i$."

D'après le lemme 6.1, la propriété (P_j) est vérifiée pour j assez grand. Montrons par récurrence que (P_j) est vérifiée pour tout $j \geqslant -1$.

Supposons donc vérifiée la propriété (P_j) , $j \geqslant 0$. Il existe un complexe $\Sigma \in \mathcal{A}$ et un $\hat{\mathcal{A}}$-équivalence f de Σ dans C tels que $f^{*}(q)$ soit représenté par $e_o \otimes \phi_o + \dots + e_j \otimes \phi_j$.

Comme cet élément est un cycle de $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$, on a : $d\phi_j = 0$ et ϕ_j est un morphisme de Σ dans $\hat{\Sigma}$. Comme $\mathcal{A}$ est transverse à $\hat{\mathcal{A}}$, ϕ_j se factorise par un complexe $X \in \mathcal{A} \cap \hat{\mathcal{A}}$. Soient Σ' le -1-cône de $\Sigma \to X$ et α le morphisme de Σ' dans Σ . Il est clair que Σ' appartient à $\mathcal{A}$ et que $f\alpha$ est une $\hat{\mathcal{A}}$-équivalence. De plus $\hat{\alpha}\phi_j\alpha$ est un bord $d\psi$. Il est alors facile de vérifier que $(f\alpha)^{*}(q)$ est représenté par un élément de la forme $e_o \otimes \phi'_o + \dots + e_{j-1} \otimes \phi'_{j-1}$

Ainsi, par récurrence, on vérifie toutes les propriétés (P_j) et il existe un complexe $\Sigma \in \mathcal{A}$ et une $\hat{\mathcal{A}}$-équivalence f de Σ dans C tels que $f^{*}(q)$ soit nul. Sans changer le type d'homotopie (simple) de Σ, on pourra supposer que f est surjective de noyau $K \in \hat{\mathcal{A}}$: $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} \Sigma \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$.

Soient $\phi \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(C)$ un représentant de q et $\psi \in \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Sigma)$ un élément tel que $d\psi = \hat{f}\phi f$.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\bar\psi\alpha"] & \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\bar\psi"'] \arrow[d, "\hat\alpha\bar\psi"] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat C \arrow[r, "\hat f"] & \hat\Sigma \arrow[r, "\hat\alpha"] & \hat K \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme Σ et $\hat K$ appartiennent à $\mathcal{A}$, $\hat\alpha\bar\psi$ est une $\mathcal{A}$-équivalence. De plus, on a : $d\bar\psi = \hat f\bar\phi f$ et $\bar\phi$ est une $\mathcal{A}$-équivalence. On en déduit, d'après le lemme 2.5, que $\bar\psi\alpha$ est une $\mathcal{A}$-équivalence.

D'autre part, K et $\hat\Sigma$ appartiennent à $\hat{\mathcal{A}}$ et $\bar\psi\alpha$ est une $\mathcal{A} \cap \hat{\mathcal{A}}$-équivalence. Il en résulte que (C,q) est cobordant à 0 .

<u>COROLLAIRE</u> 6.4. <u>Le groupe</u> $_{\varepsilon}L_n^{p'}(C^{p'}(A),0)$ <u>est isomorphe à</u> $_{\varepsilon}L_n^{p}(A)$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathcal{A}$ la classe exacte de $C^{p'}(A)$ formée des complexes ayant le type d'homotopie de complexes de $C^p(A)$. Comme les catégories homotopiques $C^p(A)$ et $\mathcal{A}$ sont équivalentes, $_{\varepsilon}L_n^{p'}(\mathcal{A},0)$ est isomorphe à $_{\varepsilon}L_n^{p}(C^p(A),0) = {_{\varepsilon}L_n^{p}(A)}$.

Soit $\mathcal{B}$ la classe exacte de $C^{p'}(A)$ formée des complexes ayant le type d'homotopie de complexes de dimension finie. Alors, $\hat{\mathcal{B}}$ est la classe des complexes ayant le type d'homotopie de complexes minorés. On vérifie que $\mathcal{B}$ est transverse à $\hat{\mathcal{B}}$, que $\mathcal{B} \cap \hat{\mathcal{B}}$ est égal à $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{B} + \hat{\mathcal{B}}$ est égal à $C^{p'}(A)$.

D'après le théorème 1.19, on a : $\quad {_{\varepsilon}L_n^{p'}(C^{p'}(A),\mathcal{A})} = 0$

En utilisant la longue suite exacte du théorème 1.12, on en déduit que l'application canonique de $_{\varepsilon}L_n^{p'}(\mathcal{A},0)$ dans $_{\varepsilon}L_n^{p}(C^p(A),0)$ est un isomorphisme et $_{\varepsilon}L_n^{p'}(C^{p'}(A),0)$ est isomorphe à $_{\varepsilon}L_n^{p}(A)$.

§7. <u>LOCALISATION</u>

Dans ce paragraphe, on suppose que $A \to \Lambda$ est une localisation d'anneaux au sens de Cohn [3], qui soit, de plus, un morphisme d'anneaux avec involution.

7.1. <u>Démonstration du théorème</u> 1.23.

Soient α un sous-groupe de $\tilde K_1(\Lambda)/_{\varepsilon}$ stable par involution, $\mathcal{A}$(resp. $\mathcal{A}'$) la classe des complexes C de $C^s(A)$ (resp. $C^s(\Lambda)$) tels que $C \otimes \Lambda$ (resp. C) soit acyclique avec

torsion dans α.

La tensorisation par Λ induit un morphisme :

$$_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(A),\mathcal{A}) \longrightarrow {_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(\Lambda),\mathcal{A}')} = {_{\varepsilon}L_n^{\alpha}(\Lambda)}$$

On va montrer que c'est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) la classe des complexes C de $C^s(A)$ (resp. $C^s(\Lambda)$) tels que $C \otimes \Lambda$ (resp. C) soit acyclique. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {_{\varepsilon}L_n^{s}(\mathcal{B},\mathcal{A})} \arrow[r] \arrow[d] & {_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(A),\mathcal{A})} \arrow[r] \arrow[d] & {_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(A),\mathcal{B})} \arrow[r] \arrow[d] & {_{\varepsilon}L_{n-1}^{s}(\mathcal{B},\mathcal{A})} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & {_{\varepsilon}L_n^{s}(\mathcal{B}',\mathcal{A}')} \arrow[r] & {_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(\Lambda),\mathcal{A}')} \arrow[r] & {_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(\Lambda),\mathcal{B}')} \arrow[r] & {_{\varepsilon}L_{n-1}^{s}(\mathcal{B}',\mathcal{A}')} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Or, $_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(\Lambda),\mathcal{B}')$ est égal à $_{\varepsilon}L_n^{h}(\Lambda)$, et il est démontré dans [10] que le morphisme de $_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(A),\mathcal{B})$ dans $_{\varepsilon}L_n^{h}(\Lambda)$ est bijectif, du moins si ε est égal à 1, mais la démonstration s'applique pour tout ε.

D'autre part, tout complexe de $\mathcal{B}$(resp. $\mathcal{B}'$) est inversible modulo $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) et l'on a [10] :

$$K(\mathcal{B},\mathcal{A}) = K(\mathcal{B}',\mathcal{A}') = \tilde K_1(\Lambda)/\alpha$$

On en déduit que l'application de $_{\varepsilon}L_n^{s}(\mathcal{B},\mathcal{A})$ dans $_{\varepsilon}L_n^{s}(\mathcal{B}',\mathcal{A}')$ est bijective, et, d'après le lemme des cinq, l'application de $_{\varepsilon}L_n^{s}(C^s(A),\mathcal{A})$ dans $_{\varepsilon}L_n^{\alpha}(\Lambda)$ est bijective

7.2. <u>Localisation des complexes</u>

Soit $\overline{C}(A)$ la catégorie des A-modules différentiels $\mathbb{Z}$-gradués projectifs et minorés. Si e est différent de p', on a une fonction canonique de $C^e(A)$ dans $\overline{C}(A)$ qui est une injection si e est différent de s.

Soient $\overline{\mathcal{W}} \subset \overline{C}(A)$ la classe des complexes C de $\overline{C}(A)$ tels que $C \otimes \Lambda$ soit acyclique, et $\mathcal{W}$ la classe exacte des complexes C de $C^e(A)$ tels que $C \otimes \Lambda$ ait le type d'homotopie (simple) de 0.

<u>LEMME</u> 7.3 [10]. <u>Soient</u> K <u>un complexe de</u> $C^e(A)$ <u>et</u> C <u>un complexe de</u> $\overline{\mathcal{W}}$. <u>Alors tout morphisme de</u> K <u>dans</u> C <u>se factorise par un complexe de</u> $\mathcal{W}$.

<u>DEFINITION</u> 7.4. Un complexe C de $\overline{C}(A)$ est local si tout morphisme d'un complexe de $\overline{\mathcal{W}}$ dans C est homotope à 0.

Voici quelques résultats démontrés dans [10] concernant la localisation des complexes.

THEOREME 7.5. *Il existe un foncteur E de $\overline{\mathcal{C}}(A)$ dans lui-même et un morphisme η de Id dans E tels que :*

Pour tout $C \in \overline{\mathcal{C}}(A)$, $E(C)$ est local

Pour tout $C \in \overline{\mathcal{C}}(A)$, le cône de $\eta : C \to E(C)$ appartient à $\overline{\mathcal{W}}$.

LEMME 7.6. *Si $C \in \overline{\mathcal{C}}(A)$ est local, l'application canonique de $H_i(C)$ dans $H_i(C) \otimes \Lambda$ est bijective.*

LEMME 7.7. *On a les formules suivantes :*

$$\Lambda \underset{A}{\otimes} \Lambda \simeq \Lambda \qquad \mathrm{Tor}_1^A(\Lambda,\Lambda) = 0$$

On supposera dorénavant que $\mathrm{Tor}_i^A(\Lambda,\Lambda)$ est nul pour tout $i \geqslant 2$.

LEMME 7.8. *Si C est un complexe local de $\overline{\mathcal{C}}(A)$, l'application canonique de $H_i(C)$ dans $H_i(C \otimes \Lambda)$ est bijective.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des A-modules à droite M tels que $M \to M \otimes \Lambda$ soit bijectif. Soit M un module de $\mathcal{E}$. Il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L est un Λ-module libre et N appartient à $\mathcal{E}$. Comme L est libre, $\mathrm{Tor}_i(L,\Lambda)$ est nul pour $i \geqslant 1$, et $\mathrm{Tor}_{i+1}(M,\Lambda)$ est isomorphe à $\mathrm{Tor}_i(N,\Lambda)$ pour $i \geqslant 1$. On a de plus la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(M,\Lambda) \to N \otimes \Lambda \to L \otimes \Lambda \to M \otimes \Lambda \to 0$$

On en déduit que $\mathrm{Tor}_1(M,\Lambda)$ est nul pour tout M de $\mathcal{E}$ et par suite, $\mathrm{Tor}_i(M,\Lambda)$ est nul pour tout $i \geqslant 1$ et tout module M de $\mathcal{E}$.

D'autre part, il existe une suite spectrale de terme $E^2_{pq} = \mathrm{Tor}_p(H_q(C),\Lambda)$ convergeant vers $H_{p+q}(C \otimes \Lambda)$. Comme C est local, $H_q(C)$ appartient à $\mathcal{E}$ et E^2_{pq} est nul pour $p \geqslant 1$. De plus, E^2_{po} est égal à $H_p(C) \otimes \Lambda$ c'est-à-dire à $H_p(C)$.

On en déduit que l'application $C \to C \otimes \Lambda$ induit un isomorphisme en homologie.

LEMME 7.9. *Soient C et C' deux complexes de $\mathcal{C}^e(A)$ et f un morphisme de $C \otimes \Lambda$ dans $C' \otimes \Lambda$. Alors il existe une $\mathcal{W}$-équivalence $\alpha : K \to C$ et un morphisme $g : K \to C'$ tels que $g \otimes \Lambda$ soit homotope à $f \circ \alpha \otimes \Lambda$*

Démonstration. Soit E(C') le localisé de C'. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r] \arrow[d] & E(C') \arrow[d] \\ C' \otimes \Lambda \arrow[r] & E(C') \otimes \Lambda \end{tikzcd}$$

et, d'après le lemme 7.8, le morphisme $E(C') \to E(C') \otimes \Lambda$ induit un isomorphisme en homologie. Il n'y a donc pas d'obstruction à factoriser le morphisme composé $C \to C \otimes \Lambda \to C' \otimes \Lambda \to E(C') \otimes \Lambda$ à travers E(C').

Soit g' le morphisme obtenu de C dans E(C') et M le cône de $C' \to E(C')$. Comme M appartient à $\overline{\mathcal{W}}$ et que C appartient à $\mathcal{C}^e(A)$, l'application composée $C \to E(C') \to M$ se factorise à travers un complexe X de $\mathcal{W}$. Soient K le -1-cône du morphisme obtenu de C dans X et α le morphisme de K dans C . Par construction, $g'\alpha$ se factorise à travers C' par un morphisme g . On a donc un diagramme homotopiquement commutatif :

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r] & E(C') \arrow[r] & M \\ K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[u, "g'"] \arrow[r] & X \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Il est clair que α est une $\mathcal{W}$-équivalence. Pour vérifier que $g \otimes \Lambda$ est homotope à $f \circ \alpha \otimes \Lambda$, il suffit de remarquer que le morphisme $C' \otimes \Lambda \to E(C') \otimes \Lambda$ est une équivalence d'homotopie.

LEMME 7.10. *Soient C et C' deux complexes de $\mathcal{C}^e(A)$ et f un morphisme de C dans C'. Alors, si $f \otimes \Lambda$ est homotope à 0, il existe une $\mathcal{W}$-équivalence $\alpha : K \to C$ telle que $f\alpha$ soit homotope à 0.*

Démonstration. Soit E(C') le localisé de C'. Comme $E(C') \to E(C') \otimes \Lambda$ induit un isomorphisme en homologie, l'application composée $C \to C' \to E(C')$ est homotope à 0.

Soit M' le -1-cône de $C' \to E(C')$. Alors f se factorise à travers M' par une application g' :

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "g'"'] \arrow[d, "f"] & \\
M' \arrow[r] & C' \arrow[r] & E(C')
\end{tikzcd}$$

Comme M' appartient à $\overline{\mathcal{W}}$ et que C appartient à $\mathcal{C}^e(A)$, g' se factorise à travers un complexe X de $\mathcal{W}$ par une application g :

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dll, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
X \arrow[r] & M' \arrow[r] & C' \arrow[r] & E(C')
\end{tikzcd}$$

Soient alors K le -1-cône de g et $\alpha : K \to C$ la projection canonique. Il est clair que α est une $\mathcal{W}$-équivalence et que $f\alpha$ est homotope à 0.

<u>LEMME</u> 7.11. <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>une classe exacte de</u> $\mathcal{C}^e(A)$ <u>contenant</u> $\mathcal{W}$. <u>Soit</u> C' <u>un complexe de</u> $\mathcal{A} \otimes \Lambda$. <u>Alors, il existe un complexe</u> $C \in \mathcal{A}$ <u>et une équivalence d'homotopie (simple) de</u> $C \otimes \Lambda$ <u>dans</u> C'.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathcal{C}$ la classe de $\mathcal{C}^e(\Lambda)$ formée des complexes ayant le type d'homotopie (simple) de $C \otimes \Lambda$, $C \in \mathcal{A}$.

Pour montrer que $\mathcal{C}$ est égal à $\mathcal{A} \otimes \Lambda$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est exacte.

Soit $0 \to C \xrightarrow{\alpha} C' \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$ une suite e-exacte dans $\mathcal{C}^e(\Lambda)$, C et C' appartenant à $\mathcal{C}$. Il existe deux complexes K et K' de $\mathcal{A}$ et des équivalences d'homotopie (simple) $u : K \otimes \Lambda \to C$ et $u' : K' \otimes \Lambda \to C'$. On a donc un diagramme homotopiquement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\alpha"] & C' \arrow[r, "\beta"] & C'' \arrow[r] & 0 \\
 & K \otimes \Lambda \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f"] & K' \otimes \Lambda \arrow[u, "u'"'] & &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 7.9, on peut, quitte à modifier K, supposer que f est de la forme $g \otimes \Lambda$. Soit K" le cône de g. Alors, C" a le type d'homotopie (simple) de $K'' \otimes \Lambda$.

Comme $\mathcal{C}$ est stable par équivalence d'homotopie (simple) et par suspension, $\mathcal{C}$ est exacte et, par suite, égale à $\mathcal{A} \otimes \Lambda$ •

7.12. <u>Démonstration du théorème</u> 1.24.

On suppose que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ sont deux classes exactes symétriques de $\mathcal{C}^e(A)$ ($e \neq p'$) contenant $\mathcal{W}$. Soit F le morphisme canonique :

$$F : \ {}_{\varepsilon}L_n^e(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n^e(\mathcal{A} \otimes \Lambda, \mathcal{B} \otimes \Lambda)$$

a) <u>Surjectivité de</u> F. Soit v un élément de ${}_{\varepsilon}L_n^e(\mathcal{A} \otimes \Lambda, \mathcal{B} \otimes \Lambda)$ représenté par un couple (C',q').

Soit j un entier positif ou nul. Considérons la propriété P_j suivante :

" Il existe un complexe $C \in \mathcal{A}$, une équivalence d'homotopie (simple) f de $C \otimes \Lambda$ dans C', un cycle $\phi' = \Sigma\, e_i \otimes \phi'_i$ de $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(C \otimes \Lambda)$ et des éléments ϕ_i , $i \geqslant j$, de B(C) tels que :

$$f^* q' \text{ est représenté par } \phi'$$

$$\text{pout tout } i \geqslant j, \quad \phi'_i = \phi_i \otimes \Lambda$$

$$\text{pour tout } i \geqslant j, \quad (-1)^i d\phi_i + \phi_{i+1} - (-1)^i \varepsilon\hat{\phi}_{i+1} = 0 \text{ "}$$

D'après le lemme 7.11, la propriété P_j est vérifiée pour j assez grand. Soit $j > 0$ et supposons P_j vérifiée. Comme ϕ' est un cycle, on a :

$$(-1)^{j-1} d\phi'_{j-1} + \phi'_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\phi}'_j = 0$$

On vérifie alors que $\phi_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\phi}_j$ est un cycle et que $(\phi_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\phi}_j) \otimes \Lambda$ est un bord. D'après le lemme 7.10, on peut, quitte à modifier C, supposer que $\phi_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\phi}_j$ est un bord $d\alpha$. On a alors :

$$(-1)^{j-1} d\phi'_{j-1} + d(\alpha \otimes \Lambda) = 0$$

D'après le lemme 7.9, on peut, quitte à modifier C, supposer que l'on a :

$$(-1)^{j-1} \phi'_{j-1} + \alpha \otimes \Lambda = \alpha' \otimes \Lambda + d\beta \qquad \text{avec } d\alpha' = 0$$

On pose alors : $\quad \phi_{j-1} = (-1)^j (\alpha - \alpha')$

et l'on a :

$$\phi' - d(e_{j-1} \otimes \beta) = \Sigma\, e_i \otimes \phi''_i$$

et pour tout $i \geqslant j-1$, $\quad \phi''_i = \phi_i \otimes \Lambda \quad$ et $\quad (-1)^i d\phi_i + \phi_{i+1} - (-1)^i \varepsilon\hat{\phi}_{i+1} = 0$

On a ainsi montré la propriété P_{j-1} .

En particulier, on a la propriété P_o, ce qui implique que F est surjective.

b) <u>Injectivité de</u> F. Soit u un élément de ${}_{\varepsilon}L_n^e(\mathcal{A},\mathcal{B})$ annulé par F et représenté par un n-complexe ε-quadratique $\mathcal{B}$-non dégénéré (C,q), $C \in \mathcal{A}$.

Comme F(u) est nul, il existe une n+1-paire ε-quadratique $\mathcal{B} \otimes \Lambda$-non dégénérée

$(\Sigma' \xrightarrow{f'} C \otimes \Lambda, q')$ telle que Σ' appartienne à $A \otimes \Lambda$ et $\partial q'$ soit égal à $q \otimes \Lambda$.

D'après les lemmes 7.11 et 7.9, on peut supposer que Σ' est de la forme $\Sigma \otimes \Lambda$, $\Sigma \in A$ et f' de la forme $f \otimes \Lambda$, f étant un épimorphisme.

Soit $\phi = \Sigma\, e_i \otimes \phi_i$ un représentant de q. Soit j un entier positif ou nul. Considérons la propriété P_j suivante :

" Il existe un complexe $\Sigma_1 \in A$, une W-équivalence surjective g de Σ_1 sur Σ, un représentant $\psi' = \Sigma\, e_i \otimes \psi'_i$ de $(g \otimes \Lambda)^* q'$ et des éléments ψ_i , $i \geqslant j$ de $B(\Sigma_1)$ tels qu que :

pour tout $i \geqslant j$, $\psi'_i = \psi_i \otimes \Lambda$

pour tout $i \geqslant j$, $(-1)^i d\psi_i + \psi_{i+1} - (-1)^i \varepsilon\hat{\psi}_{i+1} = \hat{g}\hat{f}\phi_i fg$. "

Cette propriété a lieu pour j assez grand. Soit $j > 0$ et supposons P_j vérifiée. On vérifie que $\psi_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\psi}_j - \hat{g}\hat{f}\phi_{j-1} fg$ est un cycle et que $(\psi_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\psi}_j - \hat{g}\hat{f}\phi_{j-1} fg) \otimes \Lambda$ est un bord.

D'après le lemme 7.10, on peut, quitte à modifier Σ_1, supposer que $\psi_j + (-1)^j \varepsilon\hat{\psi}_j - \hat{g}\hat{f}\phi_{j-1} fg$ est un bord $d\alpha$. On a alors :

$$(-1)^{j-1} d\psi'_{j-1} + d\alpha \otimes \Lambda = 0$$

D'après le lemme 7.9, on peut, quitte à modifier Σ_1, supposer que l'on a :

$$(-1)^{j-1}\psi'_{j-1} + \alpha \otimes \Lambda = \alpha' \otimes \Lambda + d\beta \qquad \text{avec} \quad d\alpha' = 0$$

On pose alors :

$$\psi_{j-1} = (-1)^j(\alpha - \alpha')$$

et l'on a : $\psi' - d(e_{j-1} \otimes \beta) = \Sigma\, e_i \otimes \psi''_i$

pour tout $i \geqslant j-1$, $\psi''_i = \psi_i \otimes \Lambda$

pour tout $i \geqslant j-1$, $(-1)^i d\psi_i + \psi_{i+1} - (-1)^i \varepsilon\hat{\psi}_{i+1} = \hat{g}\hat{f}\phi_i fg$

On a montré ainsi la propriété P_{j-1}. En particulier, on a la propriété P_o. On vérifie alors que $(\Sigma_1 \xrightarrow{gf} C, [\psi])$ est une n+1-paire ε-quadratique B-non dégénérée, que Σ_1 appartient à A et que $\partial[\psi]$ est égal à q. En conséquence, F est injective.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.BARGE, J.J.SANSUC et P.VOGEL, Une suite spectrale pour les formes quadratiques sur un anneau commutatif noetherien régulier,à paraître.

[2] S.CAPPELL and J.SHANESON, The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds, Ann. of Math. (2) 99 (1974), p. 277-348.

[3] P.M.COHN, Inversive localization in noetherian rings, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), p. 679-691.

[4] J.W.MILNOR, Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), p. 358-426.

[5] W.L.PARDON, A "Gerstein Conjecture" for Witt groups, à paraître aux Proceedin de K-théorie algébrique, Oberwolfach, 1980.

[6] W.L.PARDON, A relation between the Witt group of a regular local ring and the Witt group of its residue class fields, preprint.

[7] A.A.RANICKI, Algebraic L-theory III Twisted Laurent extensions, Algebraic K-theory III, Battelle Institute conference 1972, Lecture Notes in Math. 343, Springer-Verlag (1973), p. 412-463.

[8] A.A.RANICKI, The algebraic theory of surgery I foundations, Proc. London Math. Soc. (3) 40 (1980), p. 87-192.

[9] P.VOGEL, Torsion de Whitehead généralisée, C.R.A.S. 290 (1980) p. 491-493.

[10] P.VOGEL,On the obstruction group in homology surgery, Publ. Math. de l'I.H.E.S 55 (1982), p. 165-206.

[11] P.VOGEL, Localization in algabraic L-theory, Lecture Notes in Math. 788, Sprir ger-Verlag (1980), p. 482-495.

[12] C.T.C.WALL, Surgery on compact manifolds, Academic Press,New-York and London, 1970.

INSTITUT DE MATHEMATIQUES

Université de NANTES

2, rue de la Houssinière

F- 44072 NANTES Cedex