

COBORDISMUS VON KNOTEN

Renate Vogt

In der vorliegenden Arbeit verstehen wir unter einem Knoten eine glatte orientierbare Untermannigfaltigkeit K^q von S^{q+2} , wobei K eine geschlossene, einfach zusammenhängende q -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Der Knoten heißt sphärisch, wenn K^q homotopieäquivalent zu S^q ist.

Zwei Knoten $K_0^q, K_1^q \subset S^{q+2}$ heißen cobordant, wenn es eine glatte orientierte Untermannigfaltigkeit X^{q+1} von $S^{q+2} \times I$ gibt, so daß gilt:

$$(i) \quad \partial X = X \cap (S^{q+2} \times \partial I) = K_0^q \times \{0\} \cup K_1^q \times \{1\},$$

(ii) Die Inklusionen $K_0^q \rightarrow X, K_1^q \rightarrow X$ sind Homotopieäquivalenzen.

Cobordismus ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller q -dimensionalen Knoten ($q \geq 0$). Auf der Menge $\mathcal{C}_q$ der Cobordismusklassen von q -dimensionalen Knoten wird durch die zusammenhängende Summe (s. [3]) die Struktur einer abelschen Halbgruppe induziert. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_q^s$ die Untergruppe der Cobordismusklassen von sphärischen Knoten.

Die Gruppen $\mathcal{C}_q^s$ wurden für gerade q von Kervaire [2] und für ungerade $q \geq 5$ von Levine [5,6] vollständig bestimmt als

$$\mathcal{C}_q^s = 0 \quad \text{für } q \text{ gerade},$$

$$\mathcal{C}_q^s \cong \mathbb{Z}^\infty + \mathbb{Z}_2^\infty + \mathbb{Z}_4^\infty \quad \text{für } q \text{ ungerade, } q \geq 5.$$

In dieser Arbeit sollen nun die Halbgruppen $\mathcal{C}_q$ untersucht werden, wobei weitgehend auf die Methoden von Kervaire und Levine zurückgegriffen wird.

§ 1. Hilfsmittel

Die Existenz der Seifertfläche ist nach Erle [1] auch für nicht-sphärische Knoten gesichert:

Lemma 1: Jeder Knoten $K^q \subset S^{q+2}$ ist der Rand einer orientierbaren Mannigfaltigkeit $V^{q+1} \subset S^{q+2}$. V heißt Seifertfläche für K .

Um zu entscheiden, ob zwei Knoten cobordant sind, erweist sich das folgende Kriterium als nützlich:

Lemma 2: Zwei Knoten $K_0^q, K_1^q \subset S^{q+2}$ mit $q \geq 5$ sind cobordant genau dann, wenn es eine Mannigfaltigkeit $W^{q+1} \subset D^{q+3}$ gibt mit

- (i) $W^{q+1} \cap S^{q+2} = \partial W = K_0 \# (-K_1)$,
 (ii) Die Inklusionen $K_0^q \setminus \mathring{D}^q \rightarrow W^{q+1}$, $K_1^q \setminus \mathring{D}^q \rightarrow W^{q+1}$ sind Homotopieäquivalenzen.

§ 2. Knoten gerader Dimension

Seien $K_0^{2n}, K_1^{2n} \subset S^{2n+2}$ zwei $(n-1)$ -zusammenhängende, $2n$ -dimensionale Knoten mit $n \geq 3$, und seien V_0^{2n+1}, V_1^{2n+1} Seifertflächen für K_0^{2n}, K_1^{2n} . Dann ist $V := V_0 \natural (-V_1)$ eine Seifertfläche für $K := K_0 \# (-K_1)$.

Wir nehmen an, daß K_0 und K_1 dieselbe Homologie haben, d.h.

$$H_n(K_0) \cong H_n(K_1) \cong \mathbb{Z}^k.$$

Dabei ist k gerade, weil K_0 und K_1 gerade Eulercharakteristik haben.

Durch Surgery können wir die Seifertfläche V zunächst $(n-1)$ -zusammenhängend machen (s. [4]). Indem wir Surgery entlang der "primitiven" Elemente im Sinne von Kervaire-Milnor [4] durchführen, können wir im nächsten Schritt erreichen, daß $\text{rg } H_n(V) = k$ ist. Um die Torsion von $H_n(V)$ zu töten, muß man nach der Methode von Wall [9] vorgehen. Man hat dann die Seifertfläche V von K abgeändert zu einer $(n-1)$ -zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $\tilde{V}$ mit

$$H_n(\tilde{V}) \cong \mathbb{Z}^k.$$

Durch weitere $\frac{k}{2}$ Surgeries kann man schließlich erreichen, daß die Inklusionen $K_0 \rightarrow \tilde{V}$, $K_1 \rightarrow \tilde{V}$ Isomorphismen in der Homologie erzeugen, also Homotopieäquivalenzen sind.

Da sich alle diese Surgeries auf V innerhalb der Kugel D^{2n+3} durchführen lassen (s. [2]), ist $\tilde{V}$ eine Untermannigfaltigkeit von D^{2n+3} und erfüllt damit die Bedingungen von Lemma 2.

Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1: Sei $\mathcal{C}_{2n}^{(n-1)}$ die Halbgruppe der Cobordismusklassen von $(n-1)$ -zusammenhängenden Knoten. Für alle $n \geq 3$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}_{2n}^{(n-1)} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ K &\longmapsto \frac{1}{2} \text{rg } H_n(K) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Das Erzeugende von $\mathcal{C}_{2n}^{(n-1)}$ wird repräsentiert durch den kanonisch eingebetteten Torus

$$S^n \times S^n \subset S^{2n+2}.$$

Der Beweis des Satzes beruht im wesentlichen darauf, daß sich die Homologie der Seifertfläche, auch in der mittleren Dimension, durch Surgery vereinfachen läßt. Mit diesen Methoden kann daher eine Verallgemeinerung des Satzes auf Knoten, die nicht $(n-1)$ -zusammenhängend sind, nicht gelingen.

§ 3. Knoten ungerader Dimension

Bei sphärischen Knoten enthält die Seifertform genügend Informationen, um zu entscheiden, ob zwei Knoten cobordant sind. Wir werden zeigen, daß auch bei hochzusammenhängenden einfachen Knoten mit freier Homologie eine Cobordismusklassifikation mit Hilfe der Seifertform möglich ist. Dabei heißt ein $(2n-1)$ -dimensionaler Knoten einfach, wenn er eine $(n-1)$ -zusammenhängende Seifertfläche besitzt.

Sei $K^{2n-1} \subset S^{2n+1}$ ein Knoten mit Seifertfläche V^{2n} . Sei

$$i^+: V \longrightarrow S^{2n+1} \setminus V$$

die Verschiebung von V in positiver Normalenrichtung. Dann ist die Seifertform von K bezüglich V definiert als die folgende Bilinearform

$$\begin{aligned} \theta : H_n^f(V) \otimes H_n^f(V) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \otimes y &\longmapsto L(x, i_*^+(y)), \end{aligned}$$

wobei $H_n^f(V) := H_n(V)/\text{Torsion}$ und L die Linking-Form in S^{2n+1} ist.

Die Seifertform hat die folgende wichtige Eigenschaft: ist σ die Schnittform auf V , so ist

$$\theta + (-1)^n \theta^t = \sigma.$$

Seien K_0^{2n-1}, K_1^{2n-1} zwei cobordante $(n-2)$ -zusammenhängende einfache Knoten mit freier Homologie. Für $i \in \{0,1\}$ sei V_i eine $(n-1)$ -zusammenhängende Seifertfläche für K_i , θ_i die zugehörige Seifertform, σ_i die Schnittform auf V_i .

Wir haben die folgende Situation:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_n(K_1) \longrightarrow H_n(V_1) \longrightarrow H_n(V_1, K_1) \longrightarrow H_{n-1}(K_1) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbb{Z}^{c_1} \xrightarrow{\text{inj.}} \mathbb{Z}^{r_1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{r_1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Da K_0 und K_1 dieselbe Homologie haben, ist natürlich $c_0 = c_1 =: c$.

Die Basis $x_1, \dots, x_c$ von $H_n(K_0)$ läßt sich erweitern zu einer Basis $x_1, \dots, x_{r_0}$ von $H_n(V_0)$, ebenso läßt sich die Basis $y_1, \dots, y_c$

von $H_n(K_1)$ zu einer Basis $y_1, \dots, y_{r_1}$ von $H_n(V_1)$ erweitern.

Sei π_i für $i \in \{0, 1\}$ der folgende Homomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_i: H_n(V_i) &\longrightarrow [H_n(V_i)]^* \\ x &\longmapsto (\pi_i(x): y \mapsto \sigma_i(y, x)) \end{aligned} .$$

Die Homologie von K_i berechnet sich als

$$\begin{aligned} H_n(K_i) &\cong \text{Ker } \pi_i \\ H_{n-1}(K_i) &\cong \text{Coker } \pi_i . \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$(1) \quad c = r_0 - \text{rg } \sigma_0 = r_1 - \text{rg } \sigma_1 .$$

Genauer kann man sagen, daß die Schnittmatrizen bezüglich der Basen $x_1, \dots, x_{r_0}$ bzw. $y_1, \dots, y_{r_1}$ die Form haben

$$\begin{aligned} S_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r_0 - c \end{matrix} , \quad |\det \tilde{S}_0| = 1 , \\ S_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r_1 - c \end{matrix} , \quad |\det \tilde{S}_1| = 1 . \end{aligned}$$

Die Homologieklassen $x_1, \dots, x_c$ bzw. $y_1, \dots, y_c$ können durch eingebettete n -Sphären in K_0 bzw. K_1 repräsentiert werden. Der Cobordismus $X^{2n} \subset S^{2n+1} \times I$, $X \cong K_0 \times I$, induziert Einbettungen $S_j^n \times I \rightarrow S^{2n+1} \times I$ ($j = 1, \dots, c$), so daß x_j durch $S_j^n \times \{0\}$, y_j durch $S_j^n \times \{1\}$ repräsentiert wird, wobei die Basen $x_1, \dots, x_c$ und $y_1, \dots, y_c$ geeignet gewählt sein müssen. Aus geometrischen Gründen sind die Verschlingungszahlen der entsprechenden n -Sphären in $S^{2n+1} \times \{0\}$ und in $S^{2n+1} \times \{1\}$ gleich.

Wenn wir $H_n(K_i)$ als Untermodul von $H_n(V_i)$ auffassen, so haben wir gezeigt:

$$(2) \quad \theta_0|_{H_n(K_0) \otimes H_n(K_0)} = \theta_1|_{H_n(K_1) \otimes H_n(K_1)} ,$$

d.h. die Seifertmatrizen haben bezüglich der Basen $x_1, \dots, x_{r_0}$ bzw. $y_1, \dots, y_{r_1}$ die Gestalt

$$M_0 = \begin{pmatrix} A & B_0 \\ \pm B_0^t & C_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r_0 - c \end{matrix} ,$$

$$M_1 = \left(\begin{array}{cc|c} A & B_1 & c \\ \hline \pm B_1^t & C_1 & r_1 - c \end{array} \right) \cdot$$

Wir leiten als nächstes eine Bedingung an die Seifertformen θ_0 und θ_1 ab, die genau der von Levine in [5] definierten Cobordismusrelation für Matrizen entspricht.

Sei $X \cong K_0 \times I$ ein Cobordismus zwischen K_0 und K_1 . Es existiert eine Untermannigfaltigkeit G^{2n+1} von $S^{2n+1} \times I$ mit $\partial G = V_0 \cup X \cup V_1$ (s. [7]). Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(V_0) \oplus H_n(V_1) & \xrightarrow{i_0 + i_1} & H_n(\partial G) \\ & \searrow \varphi & \downarrow j \\ & & H_n(G) \end{array}$$

wobei alle Abbildungen durch Inklusionen induziert sind. Es gilt:

Lemma 3: Die Bilinearform $\theta_0 + (-\theta_1)$ verschwindet auf $\text{Ker } \varphi$ (siehe dazu [7]).

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz bestimmt man

$$H_n(\partial G) \cong \mathbb{Z}^{r_0 + r_1}.$$

Nach derselben Methode wie Kervaire [3] schließt man, daß

$$\text{rg Ker } j = \frac{1}{2} \text{rg } H_n(\partial G) = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) =: r$$

ist. Daraus folgt, daß $\text{rg Ker } \varphi \geq r$ ist. Wir haben damit die dritte Bedingung an die Seifertformen θ_0, θ_1 abgeleitet:

- (3) Es gibt einen Untermodul H der Dimension r von $H_n(V_0) \oplus H_n(V_1)$, auf dem die Bilinearform $\theta_0 + (-\theta_1)$ verschwindet.

Man kann noch genauere Angaben darüber machen, welche Klassen aus $H_n(V_0) \oplus H_n(V_1)$ zu $\text{Ker } \varphi$ gehören. Zunächst ist klar, daß $(x_1 - y_1), \dots, (x_c - y_c)$ in $\text{Ker}(i_0 + i_1)$, also auch in $\text{Ker } \varphi$ liegen:

- (4) $(x_1 - y_1), \dots, (x_c - y_c) \in H_n(V_0) \oplus H_n(V_1)$ lassen sich zu einer Basis von H ergänzen.

Schließlich läßt sich noch beweisen, daß $x_1, \dots, x_c$ nicht in H liegen. Dazu zeigen wir, daß $i_0(x_1), \dots, i_0(x_c) \notin \text{Ker } j$ sind. Wir ändern die Mannigfaltigkeit G durch Surgery wie in § 2 zu einer Mannigfaltigkeit $\tilde{G}$ ab, so daß

$\tilde{G}$ (n-1)-zusammenhängend,

$$H_n(\tilde{G}) \cong \mathbb{Z}^r,$$

$$\partial \tilde{G} = \partial G$$

ist. Dabei nehmen wir keine Rücksicht auf die Einbettung von G in $S^{2n+1} \times I$. Die Inklusion $\partial G \rightarrow \tilde{G}$ induziert eine Abbildung $\tilde{j}: H_n(\partial G) \rightarrow H_n(\tilde{G})$, und es gilt

Lemma 4: $\text{Ker } j$ ist ein Untermodul der Dimension r von $\text{Ker } \tilde{j}$.

Zum Beweis sieht man sich die Surgeries, die von G zu $\tilde{G}$ führen, genau an.

Man wählt nun eine Basis $v_1, \dots, v_r$ von $\text{Ker } \tilde{j}$, die sich zu einer Basis von $H_n(\partial G)$ erweitern läßt, und beweist:

Lemma 5: Die Schnittzahl von v_i und v_j ($i, j \in \{1, \dots, r\}$) in ∂G ist gerade.

Dabei benutzt man wesentlich die Arbeiten von Whitney [10,11].

Andererseits wissen wir, daß die Matrizen der Schnittformen auf V_0 und V_1 bezüglich der Basen $x_1, \dots, x_{r_0}$ und $y_1, \dots, y_{r_1}$ gegeben sind durch

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_1 \end{pmatrix}.$$

Da sich $x_1, \dots, x_{r_0}, y_{c+1}, \dots, y_{r_1}$ durch c Klassen $z_1, \dots, z_c$ zu einer Basis von $H_n(\partial G)$ erweitern läßt, erhält man bei geeigneter Wahl der $z_1, \dots, z_c$ als Schnittzahlmatrix von ∂G :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & \tilde{S}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_1 & 0 \\ \pm E & 0 & 0 & Z \end{pmatrix}$$

Man kann die $v_1, \dots, v_r$ o.B.d.A. so wählen, daß

$v_1, \dots, v_k$ Linearkombinationen aus $x_1, \dots, x_c$,

$v_{k+1}, \dots, v_{k+p}$ Linearkombinationen aus $x_1, \dots, x_{r_0}, y_{c+1}, \dots, y_{r_1}$,

$v_{k+p+1}, \dots, v_{k+p+q}$ Linearkombinationen aus $x_1, \dots, x_{r_0}, y_{c+1}, \dots, y_{r_1}, z_1, \dots, z_c$,

sind mit $k \leq c$, $p \leq 2(r-c)$, $q \leq c$, $k+p+q = r$.

Mit Hilfe von Lemma 5 und der Schnittmatrix von ∂G läßt sich dann leicht zeigen, daß $k+q = c$ und $p = r-c$ ist. Die $v_{k+1}, \dots, v_{k+p}$ bilden nun zusammen mit $x_1 - y_1, \dots, x_c - y_c$ eine Basis von H . Daraus folgt, daß $x_1, \dots, x_c \notin H$ ist. Es läßt sich sogar zeigen

(5) $x_1, \dots, x_c$ läßt sich zu einer Basis von $(H_n^f(V_0) + H_n^f(V_1))/H$ ergänzen.

Wir haben damit 5 Bedingungen an die Seifertformen der Knoten K_0, K_1 abgeleitet, die erfüllt sind, wenn K_0 und K_1 cobordant sind. Umgekehrt sind diese Bedingungen für $n \geq 3$ auch hinreichend dafür, daß die Knoten cobordant sind.

Angenommen, wir haben zwei $(n-2)$ -zusammenhängende $(2n-1)$ -dimensionale Knoten K_0 und K_1 mit $(n-1)$ -zusammenhängenden Seifertflächen V_0 und V_1 , wobei $n \geq 3$ ist. Zunächst können wir erreichen, daß $\text{rg } H_n(V_0) = \text{rg } H_n(V_1) = r$ ist, indem wir für $i = 0$ oder $i = 1$ V_i ersetzen durch

$$V_i \# (S^n \times S^n) \# \dots \# (S^n \times S^n) .$$

Bezüglich geeigneter Basen $x_1, \dots, x_r$ von $H_n^f(V_0)$ und $y_1, \dots, y_r$ von $H_n^f(V_1)$ sollen die Seifertmatrizen M_0 und M_1 die Eigenschaft haben, daß

$$M_0 + (-1)^n M_0^t = S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r-c \end{matrix} , \quad |\det \tilde{S}_0| = 1 ,$$

$$M_1 + (-1)^n M_1^t = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r-c \end{matrix} , \quad |\det \tilde{S}_1| = 1 ,$$

und

$$M_0 = \begin{pmatrix} A & B_0 \\ \pm B_0^t & C_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r-c \end{matrix} ,$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & B_1 \\ \pm B_1^t & C_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} c \\ \} r-c \end{matrix} .$$

Wenn außerdem die Bedingungen (3), (4), (5) erfüllt sind, so läßt sich die Schnittmatrix von $V_0 \cup (-V_1)$ bezüglich einer geeignet gewählten Basis $s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_r$ von $H_n^f(V_0) \oplus H_n^f(V_1)$ in der Form

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & E & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ E & 0 & D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \quad r-c \\ \} \quad c \\ \} \quad r-c \\ \} \quad c \end{array}$$

schreiben.

Auf der Seifertfläche $V_0 \setminus (-V_1)$ des Knotens $K_0 \# (-K_1)$ führen wir Surgery entlang der Klassen $s_1, \dots, s_r$ durch (siehe [8]), und zwar wieder innerhalb der Kugel D^{2n+2} . Dadurch erhalten wir eine Mannigfaltigkeit $W^{2n} \subset D^{2n+2}$ mit

$$\begin{aligned} \partial W &= W \cap S^{2n+1} = K_0 \# (-K_1), \\ H_*(W) &= H_*(K_0 \setminus \overset{\circ}{D}^{2n-1}) = H_*(K_1 \setminus \overset{\circ}{D}^{2n-1}). \end{aligned}$$

Indem man die Wirkung der einzelnen Surgeries genau beobachtet, zeigt man, daß die Inklusionen

$$\begin{aligned} K_0 \setminus \overset{\circ}{D}^{2n-1} &\longrightarrow W \\ K_1 \setminus \overset{\circ}{D}^{2n-1} &\longrightarrow W \end{aligned}$$

Homotopieäquivalenzen sind. Wir können wieder Lemma 2 anwenden und haben bewiesen, daß die Knoten cobordant sind.

Wir können das folgende Ergebnis formulieren:

Satz 2: Für $n \geq 3$ gilt: zwei $(n-2)$ -zusammenhängende, einfache, $(2n-1)$ -dimensionale Knoten mit freier Homologie sind genau dann cobordant, wenn ihre Seifertformen bezüglich $(n-1)$ -zusammenhängender Seifertflächen die oben formulierten Bedingungen (1) - (5) erfüllen.

Wenn man auf die Voraussetzung verzichtet, daß die Knoten freie Homologie haben, lassen sich die Bedingungen (1) - (4) ohne Schwierigkeit, die Bedingung (5) nur in abgeschwächter Form beweisen. Die Umkehrung bereitet erhebliche Schwierigkeiten.

Literatur

1. Dieter Erle, Quadratische Formen als Invarianten von Einbettungen der Kodimension 2, *Topology* 8 (1969), S. 99-114.
2. Michel A. Kervaire, Les noeds de dimensions superieures, *Bull. Soc. Math. de France* 93 (1965), S. 225-271.
3. Michel A. Kervaire, Knot cobordism in codimension two, *Lecture Notes* 197, S. 82-105.

4. Michel A. Kervaire, John W. Milnor, Groups of homotopy spheres, Ann. of Math. 77 (1968), S. 504-537.
5. Jerome Levine, Knot cobordism groups in codimension two, Comm. Math. Helv. 44 (1969), S. 229-244.
6. Jerome Levine, Invariants of knot cobordism, Invent. math. 8 (1969), S. 98-110.
7. Jerome Levine, An algebraic classification of some knots in codimension two, Comm. Math. Helv. 45 (1970), S. 185-198.
8. John W. Milnor, A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds, Symposia in Pure Math. AMS vol. 3 (1961), S. 39-55.
9. C. T. C. Wall, Killing the middle homotopy groups of odd dimensional manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), S. 421-433.
10. Hassler Whitney, The singularities of a smooth n -manifold in $(2n-1)$ -space, Ann. of Math. 45 (1944), S. 247-293.
11. Hassler Whitney, The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables, Duke Math. Journal 10 (1943), S. 161-172.

Renate Vogt,
 Mathematisches Institut
 der Universität Bonn,
 Wegelerstraße 10,
 53 Bonn,
 West Germany