Philosophia Sc

Travaux d'histoire et de philosophie des sc

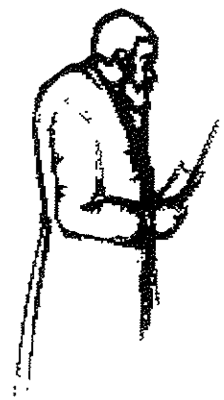
Studien zur Wissenschaftsgeschichte und -philosop e

Studies in History and Philosophy of Sciences

Revue périodique publiée par le
Laboratoire de Philosophie et d'Histoire des Sciences -
Archives Henri-Poincaré (LPHS - Archives Poincaré)
Université Nancy 2 – UMR 7117 du CNRS

Klaus Volkert

Das Homöomorphismusproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935



Klaus Volkert

2002
Cahier Spécial 4

Publié avec le concours de
l'Université Nancy 2 et du Centre
National de la Recherche Scientifique

Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences
Studien zur Wissenschaftsgeschichte und -philosophie
Studies in History and Philosophy of Sciences

Adresse de la rédaction
LPHS-Archives Poincaré
Université Nancy 2
23, bd Albert Ier – BP 33-97
F-54015 NANCY Cedex
Tél : 33/83 96 70 82
Fax : 33/83 96 70 83
e-mail : soler@univ-nancy2.fr

- Le périodique *Philosophia Scientiae* est une revue internationale qui constitue un forum de discussion et d'animation de recherche interdisciplinaire concernant l'épistémologie, l'histoire et la philosophie des mathématiques, de la physique et de la logique. Il existe sous deux formes, papier et électronique. Sur support papier, paraissent deux numéros par an, ainsi que des numéros spéciaux à thèmes, consacrés à des travaux de recherche ou à l'oeuvre d'auteurs passés ou contemporains. La périodicité des *Publications électroniques de Philosophia Scientiae* est quant à elle variable.
- Bulletin d'abonnement et conditions d'abonnement : voir en fin de volume. Les numéros 1.2 à 3.1 sont disponibles au prix de 22 euros/numéro à la rédaction, les numéros suivants sont en vente en librairie et aux éditions Kimé.
- Correspondance et manuscrits sont à adresser à la rédaction (adresse voir ci-dessus). Les manuscrits écrits en français, en allemand ou en anglais sont à soumettre en trois exemplaires. Ils doivent contenir un résumé en français et en anglais de 10 à 20 lignes. Le nom de l'auteur ne doit paraître que sur la première page. Le comité de rédaction, après soumission anonyme à deux membres du comité scientifique, se réserve le droit d'accepter ou de refuser les articles. Il avertit l'auteur de sa décision. Les articles qui paraissent dans la version papier sont indexés dans *Philosopher's Index*. L'auteur reçoit gratuitement un exemplaire du cahier contenant son article.

ISSN 1281-2463

Das Homöomorphieproblem, insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892 – 1935

Für G.

Dank

Die vorliegende Arbeit wäre ohne die Unterstützung und Ermutigung seitens vieler Personen wohl nie zustande gekommen. E. Scholz (Wuppertal) war es, der den Stein überhaupt ins Rollen brachte, indem er mich ermunterte, dieses Forschungsprojekt und das damit verbundene Habilitationsvorhaben überhaupt in Angriff zu nehmen. Er hat mich seither immer wieder mit Rat und Tat unterstützt. Ähnliches gilt für Herrn Prof. D. Puppe (Heidelberg), von dem ich nicht nur in lang zurückliegenden Studientagen, sondern auch in den Jahren als Lehrbeauftragter - besonders in unseren Montagabendgesprächen - viel gelernt habe. Herr Puppe war es auch, der sich der Geschichte der Mathematik an der Universität Heidelberg angenommen und sie entscheidend gefördert hat. Das ist mir in vielen Punkten zugute gekommen.

Für Auskünfte auf Anfragen bin ich J. Dieudonné, M. Kneser, L. Vietoris und B. L. van der Waerden verbunden; Herr Prof. Seifert war so freundlich, meine neugierigen Fragen in einem längeren Gespräch zu beantworten. Schließlich gilt mein Dank Herrn Prof. W. Metzler (Frankfurt) und R. Strebel (Fribourg) für ihre geduldigen und ausführlichen Antworten auf meine fachlichen Anfragen.

Viel Nutzen hatte ich von einem Gastaufenthalt an der Universität Mainz, von den Diskussionsbeiträgen zu meinem dortigen Vortrag „Zur Geschichte des Homöomorphieproblems", von Unterhaltungen mit D. Rowe und vor allem von gemeinsamer Arbeit und Diskussion mit M. Epple. Seine Ideen halfen mir auch in allgemeineren Fragen (vgl. 8) weiter. M. Epple hat mir darüber hinaus wertvolle Materialien zur Verfügunq gestellt.

Auch bei anderen Gelegenheiten (Neuhofen, Göttingen, Straßburg, Nancy, Louvain-la-Neuve), anläßlich derer ich über meine Forschungen zur Poincaré-Vermutung vortragen konnte, habe ich von Bemerkungen meiner Zuhörer viel profitiert. Dem Poincaré-Archiv in Nancy, insbesondere seinem Leiter G. Heinzmann, bin ich für vielfältige Unterstützung verpflichtet, insbesondere für die Möglichkeit, meine Arbeit in der vorliegenden Form als Buch zu publizieren. Bei der Drucklegung haben mich die Herren Egel und Neubarth vom Akademie-Verlag freundlich unterstützt.

Schließlich bleibt noch all denen zu danken, die mich in den nicht wenigen Jahren mühevoller Arbeit unterstützt, ermutigt und (gelegentlich) ertragen haben. Das gilt natürlich in allererster Linie für meine Familie, die mir den erforderlichen Rückhalt und die notwendige Solidarität schenkte. Weiter möchte ich die Studierenden nennen, welche meinen Lehrveranstaltungen zur Geschichte der Mathematik an der Universität Heidelberg, an der dortigen Pädagogischen Hochschule und an der Universität Nancy II folgten und die mich immer wieder in der Auffassung bestärkten, daß dieses Gebiet wichtig und nützlich ist. Der Arbeitskreis „Histoire des mathématiques" des IREM Straßburg ist mir seit vielen Jahren

zu einer Art zweiter Heimat geworden. Seinen Teilnehmern, insbesondere J. P. Friedelmeyer, gilt mein Dank für viele lehrreiche und schöne Stunden. Kollegen an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, vor allem J. Schönbeck und H. Struve (jetzt Köln), haben meine Arbeit nachhaltig gefördert.

Schließlich bin ich all denen zu Dank verpflichtet, welche mir halfen, aus einem Manuskript mit vielen nachträglichen Änderungswünschen ein hoffentlich wohlgestaltetes Buch zu machen: Frau Adrianyi-Evers, Frau Braun, Frau Schuster und vor allem Frau Klumpp und Frau Glock sind hier zu nennen. Die beiden letztgenannten haben mir mit größter Hilfsbereitschaft Texterfassung und -gestaltung sowie Herstellung eines Verlages in Personalunion ersetzt.

Bleibt noch festzustellen, daß alle verbleibenden Fehler und Ungereimtheiten zu meinen Schulden gehen, und mich bei all jenen, die ich noch nicht aufgeführt habe, die mich aber dennoch unterstützt haben, für die Nichtberücksichtigung zu entschuldigen.

Bexbach, im September 97

K. Volkert

Die Fakultät für Mathematik der Universität Heidelberg hat die vorliegende Abhandlung im Januar 1996 als Habilitationsschrift angenommen.

Inhalt

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Entwicklung des Homöomorphieproblems in der Topologie zwischen 1892 und 1935. Dabei wird unter Homöomorphieproblem allgemein die Frage verstanden, in welche Klassen bezüglich Homöomorphie die n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche meist als zusammenhängend und geschlossen, d. h. als kompakt ohne Rand, vorausgesetzt werden, eingeteilt werden können. Im betrachteten Zeitraum wurde fast ausschließlich das Homöomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten untersucht, wobei die Lösung des entsprechenden Problems im zweidimensionalen Fall, die Klassifikation der Flächen (vgl. 2), als Vorbild diente.

Aus heutiger Sicht wird man vom Homöomorphieproblem (Aufzählung aller Homöomorphieklassen) das Klassifikationsproblem unterscheiden: Gegeben eine Mannigfaltigkeit; zu bestimmen deren Homöomorphieklasse. Im betrachteten Zeitraum werden jedoch diese Aspekte nicht sorgsam unterschieden und die Begriffe Homöomorphie - und Klassifikationsproblem austauschbar gebraucht. Eine Trennung beider Bedeutungen wird wohl erst auf dem Hintergrund der Ergebnisse über die algorithmische Unlösbarkeit des Wortproblems erforderlich (vgl. 7). Ich werde im folgenden ebenfalls beide Termini als austauschbar verwenden.

Im betrachteten Zeitraum war die Topologie ein Teilgebiet der Mathematik, das sich von vorsichtigen Anfängen bis zu einer etablierten Disziplin entwickelte. Dies brachte natürlich eine Fülle von Methoden und Begrifflichkeiten mit sich. Deutlich wird das z. B. am Mannigfaltigkeitsbegriff, der seine Bedeutung erst allmählich stabilisierte. Diesen Aspekt habe ich zwar immer wieder ansprechen müssen, konnte aber keine umfassende und erschöpfende Darstellung desselben geben. Ähnliches gilt auch für den Methodenstreit zwischen kombinatorischer und kontinuumstopologischer, zwischen kombinatorischer und algebraischer Auffassung (vgl. 6). Positiv ausgedrückt liegt der Schwerpunkt meiner Arbeit auf den konkreten Ansätzen, welche man zur Lösung des Homöomorphieproblems entwickelte. Dabei lassen sich mehrere Hinsichten unterscheiden: Zum einen sind allgemeine Methoden zur Unterscheidung nichthomöomorpher Mannigfaltigkeiten zu nennen. Diese beruhen auf Invarianten, also Zahlen, Gruppen, Moduln oder dergleichen, welche bei homöomorphen Mannigfaltigkeiten gleich sind. Als solche tauchten schon früh die der Homologietheorie zuzurechnenden Zusammenhangszahlen (vgl. 2) auf, welche dann bei H. Poincaré zu Betti-Zahlen wurden, die noch durch Torsionskoeffizienten ergänzt wurden (vgl. 3.2 und 3.3), weiter die Fundamentalgruppe, eine der wichtigsten topologischen Entdeckungen Poincaré's überhaupt (vgl. 3.1 sowie 3.2), sowie später die Eigenverschlingungszahlen (vgl. 5.1.1) und die Reidemeister-Franz-Torsion (vgl. 5.4). Auch die Seifertschen Faserinvarianten (vgl. 5.2) wären hier zu nennen, während die höheren Homotopiegruppen (W. Hurewicz) für unseren Problemkreis keine Rolle spielen. Eine wichtige, in 6 besprochene Veränderung im Bereich der Topologie stellte die Algebraisierung der Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten dar, welche sich auch auf Eigenverschlingungszahlen und Reidemeister-Franz-Torsion ausdehnen ließ. Invarianten erlauben es, wie bereits bemerkt, nicht-homöomorphe Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden. Die Hoffnung dabei ist, daß diese so stark sind, alle nicht-homöomorphen Beispiele auch tatsächlich zu trennen. Wie wir sehen werden (vgl. 3) beschäftigte H. Poincaré die Auslotung dieser Frage, bei ihm konkret auf die Trias Betti-Zahlen, Fundamentalgruppe, Torsionskoeffizienten bezogen, sehr. Den Endpunkt der Bemühungen Poincaré's markierte die berühmte Poincaré-Vermutung: Eine zusammenhängende geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe ist der 3-Sphäre homöomorph; oder - wie man heute knapp formuliert - eine Homotopie-3-Sphäre ist eine 3-Sphäre. (Da wir im weitern fast nur zusammenhängende Mannigfaltigkeiten betrachten, sei diese Bedingung - außer das Gegenteil wird explizit gesagt - stets stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt.) Wie wir sehen werden, entwickelte sich diese Vermutung, die bei ihrem Urheber als bescheidene Frage auftritt (vgl. 3.4), zu einem zentralen Problem der Topologie der Mannigfaltigkeiten. J. W. Alexander konnte sieben Jahre nach Poincaré's Tod zeigen, daß dessen Invarianten jedenfalls nicht ausreichen, um allgemein den Homöomorphietyp einer 3-Mannigfaltigkeit zu fixieren (vgl. 5.1), was allerdings nicht den in der Poincaré-Vermutung formulierten Spezialfall berührte.

Definition und vor allem Berechenbarkeit der Invarianten hängen natürlich davon ab, wie die entsprechenden Mannigfaltigkeiten definiert sind. Hier zeichnete sich schon früh ein Spannungsverhältnis zwischen kontinuumstopologischen Vorstellungen einerseits, welche der Problemstellung als solcher am besten angepaßt erschien, und kombinatorischem Aufbau andererseits, welcher eine strengere Begründung der Theorie und eine effektive Berechnung der Invarianten erlaubte, ab. Um den Aufbau der kombinatorischen Auffassung haben sich vor allem M. Dehn, P. Heegard, E. Steinitz und H. Tietze verdient gemacht (vgl. 4), für die Fortentwicklung in Richtung simplizialer Techniken waren E. J. L. Brouwer, J. W. Alexander und M. H. A. Newman verantwortlich. Das angesprochene spannungsvolle Verhältnis fand seinen deutlichsten Ausdruck in der Hauptvermutung (Tietze, Steinitz, H. Kneser) und in der Frage nach Triangulierbarkeit (T. Radó). Wie bereits bemerkt, werden wir diesen Themenkomplex immer wieder ansprechen müssen, ohne ihn aber erschöpfend behandeln zu können.

Ein dritter für unsere Darstellung geradezu zentraler Gegenstand sind die Konstruktionsverfahren für 3-Mannigfaltigkeiten. Neben mehr oder weniger unsystematischen Ansätzen bei Poincaré (vgl. 3.2), der in Anknüpfung an seine Arbeiten über Kleinsche Funktionen (vgl. 3.1.1) hauptsächlich mit der Identifikation von Oberflächen von Polyedern - insbesondere Würfeln - arbeitete, werden wir die auf P. Heegard zurückgehende, aber bereits von W. Dyck (1884) antizipierte Methode kennenlernen (4.1), welche von H. Poincaré bei der Konstruktion seiner Homologiesphäre (3.4) eingesetzt wurde, sowie M. Dehns auf Knoten beruhende Methode (4.3). Ein weiteres Verfahren, das von W. Threlfall und H. Seifert untersucht wurde (5.2), gewinnt 3-Mannigfaltigkeiten als Orbiträume sphärischer Bewegungsgruppen. Dieses steht in der Tradition des klassischen Raumformenproblems (Clifford, Klein, Killing, Hopf - vgl. 2.5) und führte auf Seiferts Theorie der gefaserten Räume (5.2), welche das Homöomorphieproblem für eine bestimmte Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten zu lösen vermochte. Kann man zeigen, daß man jede (geschlossene, orientierbare) 3-Mannigfaltigkeiten durch ein bestimmtes Verfahren gewinnen kann, so ist man der

Lösung des Homöomorphieproblems ein Stück nähergekommen. Dies ist z. B. bei Heegards und bei Dehns Verfahren tatsächlich der Fall; es zeigt sich aber, daß die Konstruktionen selbst - obwohl diese in beiden Fällen wesentlich zweidimensionale Probleme stellen - so schwierig sind, daß bis heute eine Lösung für den dreidimensionalen Fall - insbesondere auch für die Poincaré-Vermutung - aussteht. Teilerfolge stellen die Klassifikation der Linsenräume (5.3) und der Nachweis der Homöomorphie der verschiedenen Ausformungen des Dodekaederraumes (Poincarésche Homologiesphäre, Dehnscher Kleeblattschlingenraum, Kreines' auf der Identifikation der Kugeloberfläche beruhende Darstellung, sphärischer Dodekaederraum nach W. Threlfall und H. Seifert, verzweigte Überlagerung) dar (5.2). Überhaupt habe ich einen Schwerpunkt meiner Schilderung auf die Behandlung der vielen oft außerordentlich instruktiven Beispiele gelegt, welche im Laufe der Jahrzehnte entdeckt wurden. Diese spielten - und die Vermutung liegt nahe, daß es in vergleichbaren Stadien der Theorieentwicklung im Rahmen der Mathematik immer so ist - eine ganz wesentliche Rolle als Ausgangspunkte und Prüfsteine der Theorie. Es ist sehr bemerkenswert, wie oft die Linsenräume aber auch der Dodekaederraum auftreten. Eine ausgewogene Behandlung der hier zu schildernden Geschichte scheint mir ohne gebührende Beachtung des Beispielmaterials nicht möglich. Das verwundert vielleicht in Anbetracht der ungeheuer umfassenden Theorie, welche heute die algebraische Topologie bereitstellt, und gängige historische Darstellungen (Dieudonné 1989, Hirsch 1985) spiegeln ja auch in etwa diese Verteilung der Gewichte wider. Ich hoffe, die hier vorgelegte Arbeit zeigt, daß die gerade formulierte Hochschätzung der Beispiele durchaus angebracht ist.

Zwei Themenkreise konnten in der vorliegenden Arbeit nicht ausführlich behandelt werden, nämlich die Entwicklung der kombinatorischen Gruppentheorie und diejenige der Morse-Theorie. Beide hängen eng mit dem Homöomorphieproblem zusammen: So ist es heute möglich, die klassische Poincaré-Vermutung in ein rein gruppentheoretisches Problem umzuformulieren, und die Morse-Theorie kann zur Beantwortung der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung herangezogen werden. Bezüglich der kombinatorischen Gruppentheorie verfügt man in Chandler-Magnus 1982 über eine umfassende Darstellung, hinsichtlich der Morse-Theorie läßt einen dagegen die Literatur leider weitgehend im Stich.

Die zeitliche Eingrenzung 1892-1935 leitet sich einerseits von H. Poincaré's erster, wenn auch kurzer Veröffentlichung zur Topologie, mit der die uns interessierende Entwicklung im wesentlichen einsetzte, und andererseits von den die kombinatorisch orientierte Phase abschließenden Arbeiten von H. Seifert, W. Threlfall, K. Reidemeister und anderen her. Insbesondere ist hier auf das 1934 erschienene „Lehrbuch der Topologie" von H. Seifert und W. Threlfall zu verweisen, welches ein Klassiker der dreidimensionalen Topologie geworden ist. In den 30er Jahren setzte die unter der Überschrift „Algebraisierung" laufende Veränderung der Topologie in großem Stil ein, die deren Erscheinung auch heute noch prägt. Das ursprünglich zentrale Problem, die Homöomorphie, gerät in den Hintergrund und wird in den 50er Jahren dann zum Thema der sogenannten geometrischen Topologie, obwohl natürlich die Grenzziehungen und Terminologien fließend sind. Diese Entwicklung sowie den Stand der Dinge bezüglich Poincaré-Vermutung und Homöomorphieproblem behandelt Kapitel 7. Einige allgemeinere Bemerkungen zur disziplinären Entwicklung der Topologie sowie zur Rolle der Beispiele in der Mathematik bringt das Kapitel 8. Das jetzt sich anschließende Kapitel 2 enthält einige Informationen zum Zeitraum vor 1892, insbesondere zur sogenannten Klassifikation der Flächen.

Noch eine abschließende Bemerkung: Im Interesse der Treue einer historischen Darstellung habe ich im Text weitgehend die Ausdrucksweise der behandelnden Autoren übernommen, ohne diese immer aus heutiger Sicht zu präzisieren und auch zu kritisieren. Dies geschieht gelegentlich in den gegen Schluß dieser Arbeit zu findenden Anmerkungen, welche oft als integraler Bestandteil und nicht bloß als Ergänzungen der Arbeit zu betrachten sind. Es kann also durchaus vorkommen, daß bestimmte Aussagen aus moderner Sicht zurechtzurücken sind, ohne daß das jedesmal ausdrücklich gesagt wird. Diese Behandlung des "Problems der zwei Sprachen" (E. Scholz) - gemeint ist die historisch-treue und die modern-interpretierende - bringt an einer Stelle eine gewisse Unbequemlichkeit mit sich. Bekanntlich hat sich in den 30er Jahren unter Berufung auf H. Weyl der Brauch durchgesetzt, die Betti-Zahlen gegenüber Poincaré und seinen Nachfolgern um 1 zu verringern. Um nicht alle Zitate ändern zu müssen, habe ich jeweils den Brauch der Zeit zugrunde gelegt. Die moderne Auffassung spielt deshalb erst ab 5.2 eine Rolle, vorher sind die Betti-Zahlen "poincarésch" zu nehmen.

Die Literaturverweise beziehen sich auf das am Ende dieser Arbeit zu findende Verzeichnis; hat dabei ein Autor in einem Jahr mehrere Titel veröffentlicht, so wird der zweite mit a, der dritte mit b und so weiter gemäß der im Literaturverzeichnis angegebenen Reihenfolge zitiert. Zusätze in Zitaten sind durch eckige Klammern kenntlich gemacht; gelegentlich wurden Symbole in Zitaten im Interesse der Einfachheit abgeändert, ohne daß dies ausdrücklich gesagt wird.

Die vorliegende Arbeit möchte einen Beitrag leisten zur Schließung jener Lücke, die Jean Dieudonné im Vorwort zu seiner monumentalen "History of algebraic and differential topology 1900 - 1960" folgendermaßen geschildert hat:

> "There is one part of the history of algebraic and differential topology that I have not covered at all, namely, that which is called "low-dimensional-topology". It was soon realized that some general tools could not give satisfactory results in spaces of dimensions 4 at most, and, conversely, methods that were successful for those spaces did not extend to higher dimensions. I feel that a description of the discovery of the properties of these spaces deserves a book by itself, which I hope somebody will write soon."
>
> (Dieudonné 1989, V)

Sollte mir dies ansatzweise gelungen sein, so würde mich das freuen.

2 Die Klassifikation der Flächen

Ein großer Erfolg der frühen topologischen Untersuchungen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die Klassifikation der Flächen. Dieses genuin geometrische Problem[1] fand bemerkenswerterweise erst breitere Aufmerksamkeit, als es sich im Rahmen der Funktionentheorie (Riemannsche Flächen, automorphe Funktionen) stellte, wobei die Klassifikation der Flächen Rückschlüsse auf die entsprechenden komplexen Funktionen ermöglichte. Das Klassifikationsproblem wurde von mehreren Mathematikern (Riemann, Listing, Möbius, Klein, Jordan, von Dyck, Dehn und Heegard, Levi, Brahana) mit unterschiedlichen Methoden und Grundbegriffen angegangen. Es gewann schnell ein eigenständiges Interesse und seine Lösung - das ist die Aufzählung der Homöomorphieklassen von (geschlossenen) Flächen sowie deren Charakterisierung durch einfache Eigenschaften (z.B. orientierbar/nicht-orientierbar) und numerische Invarianten („Geschlecht", „Euler-Charakteristik") - sollte für Poincaré das Modell für seine klassifikatorischen Bemühungen in höheren Dimensionen liefern.

Im Verlauf der Untersuchungen zum Klassifikationsproblem der Flächen wurden grundlegende Methoden und Techniken entwickelt, welche auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden konnten. Das Studium des Berandungsverhaltens geschlossener Kurven führte zur Homologie, die Fundamentalgruppe wurde durch das Studium der Deformierbarkeit von geschlossenen Kurven auf Flächen vorbereitet (wenn auch nicht klar ist, ob Poincaré diese kannte) und funktionentheoretische Betrachtungen über automorphe Funktionen lieferten erste Ansätze zur Darstellung von Gruppen durch Erzeugende und Relationen sowie zur Überlagerungstheorie. Weiter erkannte man nach und nach die Wichtigkeit des Phänomens der Nicht-Orientierbarkeit.

Neben diesen Gesichtspunkten, die eine analoge Übertragung ins Höherdimensionale erfahren können, zeichnete sich aber schon bei W. Dyck die Einsicht in wesentliche Besonderheiten der 3 - Mannigfaltigkeiten ab, insbesondere bezüglich des erst dreidimensional möglichen Verknotens und der Zerlegung in Henkelkörper.

Die in diesem Kapitel dargestellten Entwicklungen sind schon mehrfach untersucht und kommentiert worden (ich nenne etwa Bollinger 1972, Hirsch 1985, Pont 1974, Scholz 1980 und Vanden Eynde 1992/93), meist aber unter speziellen Gesichtspunkten (Homologie- oder Homotopietheorie, Mannigfaltigkeitsbegriff). Dagegen ist die Fragestel-

[1] Genuin geometrisch ist hier im weitesten, die Topologie umfassenden, Sinne gemeint. Man kann ja die Klassifikation der Flächen als eine Fortführung von Euklids Klassifikation der regulären konvexen Polyeder sehen, welche sich wiederum durch die Aufgabe, alle Polyeder zu klassifizieren, erweitern läßt. Letztere hat u. a. Möbius beschäftigt und veranlaßte ihn zu seinen topologischen Arbeiten.

lung, welche uns leiten wird, das Klassifikationsproblem mit seinen drei wesentlichen Aspekten:

> Was wird klassifiziert?,
> Wie wird klassifiziert? und
> Welche Methoden und Techniken werden verwendet?

Es erschien mir unter diesem Gesichtspunkt gerechtfertigt, die fragliche Geschichte trotz der guten Literaturlage nochmals auszugsweise aufzuarbeiten.

Zweifellos war und ist die Topologie eine mathematische Disziplin mit einem ausgeprägten Anschauungsbezug. Die frühe Phase in deren Entwicklung, welche uns diesem Kapitel beschäftigen wird, läßt sich einerseits geradezu als der Versuch kennzeichnen, das anschaulich Einfache („Ein Torus ist keine Sphäre") mit mathematischen Hilfsmitteln nachzuvollziehen - kurz: bestimmte Aspekte, die sogenannten qualitativen nämlich - der Anschauung zu mathematisieren. In dem Maße, wie dies gelang, gewann die im Entstehen begriffene mathematische Disziplin „Topologie" (oder wie man damals meistens sagte: „Analysis situs") an Konturen. Andererseits wurde schon früh topologischen Begriffsbildungen und Methoden gerade dort eine wichtige Funktion zugeschrieben, wo die Anschauung überfordert ist oder an ihre Grenzen stößt (etwa bei geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten; vgl. 3.1). Ersteres Phänomen trat u. a. im Zusammenhang mit der Erweiterung des Eulerschen Polyedersatzes bei nicht-konvexen Polyeder auf, wie sie vor allem von S. A. J. Lhuilier betrieben wurde. Dessen Annahme, die Anzahl der "Durchbohrungen" eines Polyeders sei intuitiv klar, wurde später von Listing kritisiert: "Nur ist hierbei die aus der inductorischen Ausdehnung des Falles o = 1 auf Fälle complicirter Durchbohrungen, wo der numerische Werth von o nicht sofort aus blosser Intuition hervorgeht, erwachsende Schwierigkeit weder erwogen noch erledigt." (Listing 1862, 98f): Auch hieraus ergab sich also das Bedürfnis nach einer möglichst präzisen Zusammenhangstheorie. Listing selbst betrieb als Konsequenz seiner Kritik einen streng kombinatorischen Aufbau (vgl. auch Anm.2). Eine ganz wesentliche Leistung Poincaré's sollte es dann sein, die verschiedenen Ansätze in einem mehr oder minder klaren Rahmen zu integrieren und das Modellhafte an der Lösung des Klassifikationsproblems der Flächen herauszuarbeiten, indem er dieses auf 3-Mannigfaltigkeiten übertrug und nachwies, daß hier ganz erhebliche Schwierigkeiten auftreten. Desweiteren gelang es ihm, viele der bis dahin verwendeten Methoden zu „arithmetisieren", das heißt dieselben in einen symbolischen Kalkül zu überführen.

Eine zentrale Rolle spielten in der darzustellenden Periode die Beispiele und anschaulichen Modellvorstellungen, welche man für Flächen entwickelte. Diese zeigten einerseits, „was alles möglich ist" (man denke an das Möbius-Band), andererseits aber auch, wie sich die verschiedenen Einzelfälle in eine Systematik bringen lassen (man denke nur an die Sphäre mit Henkeln und/oder Kreuzhauben). Auch hier ergibt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Zwei- und dem Dreidimensionalen: Während die Beispiele im ersten Fall vielfach seit Alters her bekannt waren, mußten interessante und informative Exemplare geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten allererst konstruiert werden. Auch hier erwarb sich Poincaré, wie wir im Kapitel 3 sehen werden, bedeutende Verdienste. Eine allgemeine und umfassende Modellvorstellung für geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten ist aber trotz aller Anstrengungen bis heute nicht gefunden worden, wenn auch klar geworden ist, daß diese bestimmt nicht so einfach und einheitlich sein kann wie ihr zweidimensionales Analogon. Im Kapitel 8 werde ich auf diese allgemeinen Gesichtspunkte der Entwicklung einer mathematischen Disziplin nochmals zu sprechen kommen.

2.1 B. Riemann

Der erste, der Methoden entwickelte, welche später in der Topologie allgemein und insbesondere bei der Klassifikation von Flächen[2] Anwendung fanden, ist Bernhard Riemann gewesen. In seiner Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen" (Göttingen, 1851) führte Riemann unter anderem die heute nach ihm benannten Flächen ein. Dabei ist zu bemerken, daß er an keiner Stelle erklärt, was Begriffe wie Fläche, Rand, Inneres bedeuten sollen. Wirft man einen Blick in die zeitgenössische Literatur, so findet man zwei Definitionen des Begriffes „Fläche": Eine Fläche ist die Begrenzung eines Körpers, also Fläche gleich Oberfläche[3], oder eine Fläche ist ein Gebilde von (global) nur zwei Dimensionen.[4] Es ist offenkundig, daß beide Vorstellungen (die erstere sicher noch mehr als die zweite) ungeeignet sind, die Idee einer Riemannschen Fläche mit ihren Verzweigungspunkten (bei Riemann 1851: Windungspunkte) zu fassen. Neben den beiden genannten, der klassischen Geometrie zuzurechnenden Definitionen des Flächenbegriffes gab es noch die auf C.F.Gauß' „Allgemeine Flächentheorie" (1827) zurückgehende intrinsische Auffassung, welche auch der traditionellen sphärischen Geometrie zu eigen war. Wenn auch Riemann hierzu explizit in seiner Dissertation nichts sagt, so darf man wohl doch annehmen, daß er Gaußens Zugang

---

[2] Die Vermutung liegt nahe, daß eine derartige Idee auch im Zusammenhang mit den Bemühungen, den Eulerschen Polyedersatz zu verallgemeinern - das heißt insbesondere auf Triangulierungen von Flächen wie Torus und Brezel auszudehnen - , entstanden wäre. Man könnte ja, hat man die Aufgabe der Verallgemeinerung bewältigt, gewissermaßen „rückwärts" alle Polyeder mit derselben Euler-Charakteristik zu einer Klasse zusammenfassen. Dies geschieht aber selbst bei Listing 1862 noch nicht.
Um eine solche Klassifikation sinnvoll zu machen, wäre ja wohl die Einsicht erforderlich, daß die Euler-Charakteristik eine Homöomorphieinvariante ist. Dies lag anscheinend jenseits der kombinatorischen Überlegungen von Listing, in denen die kontinuumstopologisch aufgefaßte Homöomorphie kaum eine Rolle spielt. Das Wechselspiel zwischen kombinatorischen und rein topologischen Methoden ist überhaupt ein wichtiges Thema in der Geschichte der Topologie; seinen prominentesten Ausdruck fand es in der „Hauptvermutung" (vgl. 6).
Anders gesagt bleibt bei Listing - ähnlich wie bei Riemann auch - der Aspekt der Charakterisierung einzelner Gegenstände dominant, während eine Klasseneinteilung derselben keine wichtige Rolle spielt.

[3] So z. B. G. S. Klügel in seinem „Mathematischen Wörterbuch": „Fläche, ist die Oberfläche eines Körpers (seine Begränzung) abgesondert von dem Körper gedacht. Sie ist eine ebene (s. Ebene) oder krumme Fläche." (Klügel 1805, 254) oder auch Lacroix in seinem recht verbreiteten Lehrbuch „Élémens de géométrie": „Un corps ne saurait être privé de l'une de ces dimensions sans cesser d'exister, les limites qui le terminent, sans lesquelles il ne peut être conçu, et qui n'ont point d'épaisseur, sont des surfaces." (Lacroix 1819, 2). Letzten Endes geht diese Definition natürlich auf Euklid zurück (XI, Def. 2).

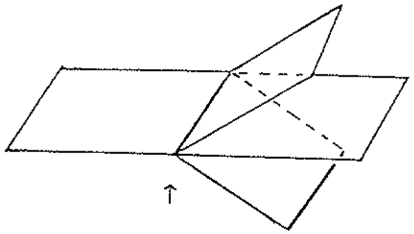
[4] Diese Auffassung vertrat Legendre in seinem epochemachenden Geometrielehrbuch („Éléments de géométrie", erste Auflage 1794, 29. Auflage 1889 - in viele Sprachen - unter anderem ins Deutsche von A. L. Crelle (1822) - übersetzt): „V. Surface est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur." (Legendre 1817, 1). Im übrigen entspricht dies der ersten Definition Euklids für den Begriff „Fläche" (I, Def. 5).

kannte. Deutlich wird das dann in seinem drei Jahre später gehaltenen Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen".

Die Idee der Riemannschen Fläche wird von Riemann folgendermaßen eingeführt:

> „Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Größen x,y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, daß der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke,..."
>
> (Riemann 1892, 7)

Die einzige Bedingung, die Riemann explizit erwähnt, ist, daß keine Verzweigungs-linien vorkommen dürfen, „so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt." (Riemann 1892, 7).



Verzweigungslinie

Im weiteren gelangt Riemann dann zu der Einsicht, daß eine solcherart definierte Fläche im wesentlichen durch ihre Blätterzahl, die Lage der Verzweigungspunkte sowie durch ihre Randkurve samt Orientierung festgelegt ist.

Die Zusammenhangstheorie, auf die es uns hier ankommt, wird im Paragraphen 6 der Dissertation entwickelt. Ihr Ausgangspunkt ist der Begriff „zusammenhängend", der zuerst für zwei Flächenteile eingeführt wird, später aber auch als Eigenschaft von Flächen schlechthin bezeichnet wird:

> „Wir betrachten zwei Flächentheile als zusammenhängend oder Einem Stück angehörig, wenn sich von einem Punkte des einen durch das Innere der Fläche eine Linie nach einem Punkte des andern ziehen lässt, als getrennt, wenn diese Möglichkeit nicht stattfindet."
>
> (Riemann 1892, 9)

Modern betrachtet läuft diese Festlegung auf den wegweisen Zusammenhang hinaus, der ja auch wesentlicher anschaulicher ist als sein mengentheoretisch formuliertes Pendant.[5]

[5] Man könnte allerdings Riemanns Definition auch so lesen: Zwei Flächenstücke heißen zusammenhängend, wenn sie in derselben Wegekomponenten der Gesamtfläche liegen. Allerdings wird - wie bereits angedeutet - bei Riemann anschließend nur noch von zusammenhängenden Flächen geredet, was in der obigen Lesart wenig Sinn macht. Aus moderner Sicht fällt weiter auf, daß Riemanns Definition eine falsche

Die Zusammenhangsverhältnisse von Flächen werden nun mit Hilfe von Querschnitten untersucht, „d.h. Linien, welche von einem Begrenzungspunkte das Innere einfach - keinen Punkt mehrfach - bis zu einem Begrenzungspunkte durchschneiden" (Riemann 1892, 9). Wir dürfen somit Querschnitte im wesentlichen als doppelpunktfreie Wege[6] auffassen, deren Anfangs- und Endpunkt im Rand der Fläche liegen. Dabei rechnet der Querschnitt selbst zum Rand der Fläche, so daß dessen Endpunkt mit einem anderen seiner Punkte zusammenfallen darf, was dann den einzigen zulässigen Doppelpunkt erzeugt. Insbesondere sind geschlossene, im Rand beginnende und endende Wege Querschnitte.

Ist eine berandete Fläche im obigen Sinne zusammenhängend - besteht sie also aus einem Stück -, so ist die Existenz von Querschnitten gesichert. Die Basis für alles weitere liefert nun die Definition von „einfach zusammenhängend":

> „Eine zusammenhängende Fläche heißt, wenn sie durch jeden Querschnitt in Stücke zerfällt, eine einfach zusammenhängende, andernfalls eine mehrfach zusammenhängende."
>
> (Riemann 1892, 9)[7]

Die wichtigsten Eigenschaften von Querschnitten werden von Riemann knapp in zwei Lehrsätzen formuliert[8]:

> „I. Eine einfach zusammenhängende Fläche A zerfällt durch jeden Querschnitt ab in zwei einfach zusammenhängende Stücke."
>
> (Riemann 1892, 9)

> „II. Wenn eine Fläche T durch n_1 Querschnitte q_1 in ein System T_1 von m_1 einfach zusammenhängenden Flächenstücken und durch n_2 Querschnitte q_2 in ein System T_2 von m_2 Flächenstücken zerfällt, so kann $n_2 - m_2$ nicht $> n_1 - m_1$ sein."
>
> (Riemann 1892, 10)

Der Beweis von I bereitet keine Schwierigkeiten: Angenommen, A zerfiele durch ab in die Teile A' und A", wobei A' nicht einfach-zusammenhängend wäre. Dann gäbe es in A' einen nicht-zerstückenden Querschnitt cd. Im übrigen ist hier wie auch sonst zu beachten - Riemann macht hierauf ausdrücklich aufmerksam (Riemann 1892, 10n) -, daß die Querschnitte sukzessive vorzunehmen sind: Ist der Querschnitt ab gezogen, so zählt ab zum Rand von A. Folglich können Querschnitte in anderen beginnen und enden, aber niemals diese kreuzen. Wir müssen somit mehrere Fälle unterscheiden:

1. Der nichtzerstückende Querschnitt cd von A' trifft ab nicht. Dann kann cd als Querschnitt von A angesehen werden, der A nicht zerstückt, im Widerspruch zur Voraussetz-

Quantifizierung enthält: Nicht ein Punkt muß mit einem weiteren Punkt verbindbar sein, sondern je zwei Punkte sollen nach unseren heutigen Vorstellungen diese Eigenschaft aufweisen.

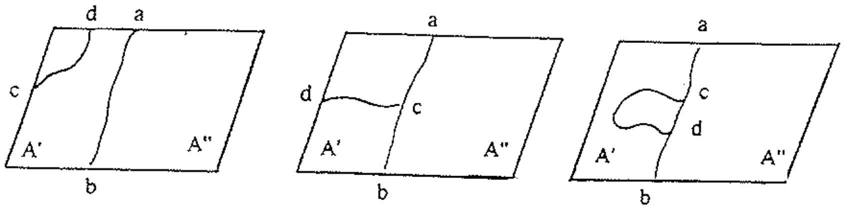
[6] Hierbei wird davon ausgegangen, daß Riemann die „Stetigkeit" einer Linie stillschweigend unterstellt.

[7] Ist F die fragliche wegzusammenhängende Fläche und bezeichnet $q: [0,1] \to F$ einen beliebigen Querschnitt, so gilt also im Falle des einfachen Zusammenhanges: $F \setminus q([0,1])$ ist nicht mehr wegzusammenhängend. Sollte F keinen Rand haben, so verschaffe man sich diesen künstlich durch Herausnehmen eines Punktes.

[8] Eine wesentlich ausführlichere und gut lesbare, wenn auch über Riemann inhaltlich kaum hinausgehende Darstellung findet sich in Durège 1873, 153-189. Man vergleiche darüber hinaus Neumann 1865, 6. Vorlesung § 1; 8. Vorlesung § 1-4.

zung. Man kann das auch so ausdrücken, daß der Querschnitt ab durch Verkleben wieder rückgängig gemacht wird. („Herstellung der Verbindung längs der ganzen Linie ab", sagt Riemann [Riemann 1892, 9]).

2. Liegt c auf ab, d aber nicht (oder umgekehrt), so verklebe man längs cb. Dann ist acd ein nicht zerstückender Querschnitt von A.[9]
3. Liegen c und d auf ab, so verklebe man das Stück von ab, das zwischen c und d liegt. Wieder erhält man einen nichtzerstückenden Querschnitt acdb.

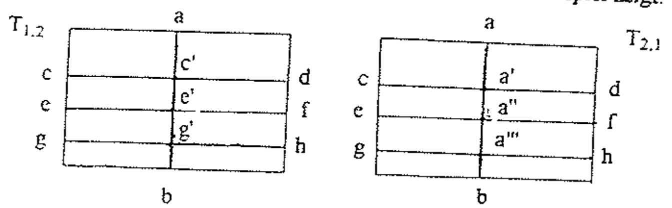


Die dieser Vorgehensweise zugrunde liegende Idee kann so ausgedrückt werden: Klebt man an eine Fläche, die nicht zerstückt wird, noch ein Stück an, so bleibt die Gesamtfläche zusammenhängend.

Wesentlich aufwendiger gestaltet sich dagegen der Beweis von Lehrsatz II. die Beweisidee ist jedoch ziemlich naheliegend: Man zerlege einmal T in das System T_1 und wende auf dieses die zu T_2 gehörigen Querschnitte an, zum andern zerlege man zuerst gemäß T_2 und dann mit den Querschnitten von T_1. Das Resultat muß beidesmal dasselbe sein.

Nebenbei bemerkt waren solche „Übereinanderlagerungen" von Zerlegungen in der Geometrie auch vor Riemann schon bekannt, etwa im Rahmen der Zerlegungsgleichheit von Polygonen (Gerwien 1833). Allerdings treten hier die von Riemann nicht berücksichtigten Schwierigkeiten (vgl. Anmerkung 13) nicht auf, da prinzipiell nur Polygone behandelt werden.

Genauer heißt dies: Die Überschneidungspunkte und die Teilflächen in T_{12} (erst T_1, dann T_2) und T_{21} (erst T_2, dann T_1) sind dieselben; Unterschiede gibt es aber möglicherweise bei den Querschnitten, wie schon das folgende einfache Beispiel zeigt:



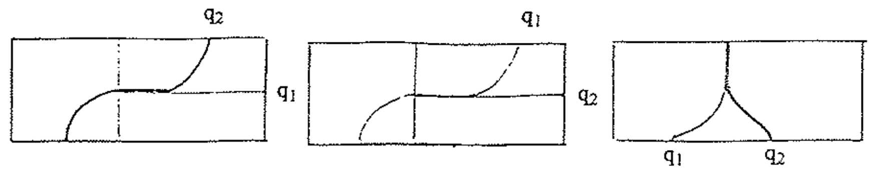
9 Interpretiert man die Querschnitte als Wege, so muß man natürlich beim Aneinanderhängen von Querschnitten analog der Zusammensetzung von Wegen geeignet umparametrisieren.

(Aus Gründen der Einfachheit nehmen wir eine einfach zusammenhängende Fläche als Ausgangspunkt.)

T_1 bestehe aus dem Querschnitt ab, T_2 aus cd, ef und gh. Führt man erst T_1 und dann T_2 aus, so erhält man gemäß den Vorschriften über das sukzessive Durchführen von Schnitten das System T_{12} mit den Querschnitten ab, cc', c'd, ee', e'f, gg' und g'h; beginnt man mit T_2 und führt dann T_1 aus, so ergibt sich T_{21} mit aa', a'a", a"a"', a"'b, cd, ef und gh als Schnitten. Im ersten Fall haben wir am Ende 7 Schnitte, im zweiten Fall ebenfalls; der Zuwachs aber, der sich jeweils im zweiten Schritt ergab, beläuft sich auf 7-1=6 bzw. 7-3=4.

Um genauere Aufschlüsse über den allgemeinen Fall zu erhalten, gilt es diesen Zuwachs genauer zu charakterisieren. Für ihn sind offensichtlich zwei Größen maßgeblich: die Anzahl m der Schnittpunkte von Schnitten aus T_1 und T_2, die ganz im Innern dieser Schnitte liegen, und die Anzahl der Endpunkte neu hinzukommender Schnitte. Dabei rechnet man die Schnittpunkte zweckmäßigerweise doppelt. Im Beispiel ist $m = 2*3 = 6$ und $n_2 = 6$ (bei T_{12}) bzw. $n_1 = 2$ (bei T_{21}). Alle diese Punkte ergeben Endpunkte der neu hinzukommenden Schnitte; somit ergibt sich beim Übergang von T_1 zu T_{12} ein Zuwachs von $\frac{1}{2}(6+6)=6$ Schnitten, bei demjenigen von T_2 zu T_{21} einer von $\frac{1}{2}(6+2)=4$ Schnitten.

Allerdings gilt diese Überlegung nur im einfachsten Falle, in dem die Querschnitte wirklich nur Schnittpunkte und nicht ganze Stücke gemeinsam haben.[10] Es sind im allgemeinsten Fall drei Möglichkeiten zu beachten:



Fall 1 Fall 2 Fall 3

10 Modern gesprochen geht es um eine Abschwächung der Transversalitätsbedingung. Die von Riemann angegebene Formulierung reicht allerdings nicht aus, wie man sich an einfachen Beispielen klarmacht. Die in Anmerkung 13 angesprochene Idee Neumanns läßt sich als „transversal machen" interpretieren. Anders gesagt: Riemanns Argumentation gilt auch für bestimmte nichttransversale Schnitte (eben solche, die der im Text genannten Bedingung genügen) und damit a fortiori für den Fall, daß alle Schnitte transversal sind bzw. gemacht wurden.
Natürlich wurde bei diesen Bemerkungen stillschweigend vorausgesetzt, daß der Begriff „Transversalität" in der betrachteten Kategorie von Flächen einen Sinn hat, daß man also Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hat.

1. Ein Endstück[11] eines q_1 aus T_1 fällt mit einem mittleren Stück eines q_2 aus T_2 zusammen. Die Gesamtzahl dieser Fälle sei s_1.
2. Ein Endstück eines q_2 aus T_2 fällt mit einem mittleren Stück eines q_1 aus T_1 zusammen. Die Gesamtzahl dieser Fälle sei s_2.
3. Ein Endstück eines q_1 aus T_1 und eines q_2 aus T_2 fallen zusammen. Es bezeichne s_3 die Gesamtzahl dieser Fälle.

Man beachte, daß bei einem Schnitt sowohl Fall 1. (bzw. Fall 2.) als auch Fall 3. simultan auftreten können; auch kann Fall 1 mehrfach bei einem Schnitt eintreten. Da die Fälle 1 und 2 analog sind und Fall 3 in T_1 und T_2 symmetrisch ist, stimmt für T_{12} und für T_{21} die Summe $s_1 + s_2 + s_3$ überein.

Wir können nun den Gesamtzuwachs, der sich beim Übergang von T_1 zu T_{21} (bzw. von T_2 zu T_{21}) einstellt, bestimmen:

a) alle Endpunkte von Schnitten aus T_2 (das sind $2n_2$ Stück), außer denjenigen dieser Endpunkte, die in einem End- oder mittleren Stück eines Schnittes aus T_1 liegen (das sind die Fälle 2 und 3 von oben; also lautet die entsprechende Anzahl von Ausnahmen $s_2 + s_3$;

b) alle im Innern der Schnitte liegenden Endpunkte („Schnittpunkte": siehe unten), außer denjenigen, die in ein Endstück eines Schnittes aus T_1 fallen (das sind s_1 Stück).

Wir müssen nun noch die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Schnittsysteme T_1 und T_2 ermitteln. Hierbei sind zu berücksichtigen:

gewöhnliche Schnittpunkte, die doppelt gerechnet werden;

die Fälle 1) und 2) von oben, wo wir jeweils zwei Schnittpunkte annehmen;

der Fall, daß ein Schnitt aus T_1 und einer aus T_2 ein inneres Stück gemeinsam haben, in dem wir auch zwei Schnittpunkte annehmen;

der Fall 3) von oben, wo wir nur einen Schnittpunkt rechnen.

Es bezeichne m die Gesamtanzahl von „Schnittpunkten" (eventuell mit entsprechender Vielfachheit), die sich gemäß dieser vier Fälle ergibt.[12]

Die Gesamtzahl der zu T_1 bei Ausführung der Schnitte aus T_2 hinzukommenden Schnitte läßt sich nun ermitteln:

Gemäß Fall a) von oben: $2n_1 - (s_2 + s_3)$,
gemäß Fall b) von oben: $m - s_1$
Zusammen macht das

[11] Hierunter sollen Restriktionen $q_A:[0,\varepsilon] \to F$ und $q_E:[1-\zeta,1] \to F$ von Querschnitten $q:[0,1] \to F$ mit $0 < \varepsilon, \zeta < 1$ verstanden werden. Wir unterscheiden also nicht terminologisch zwischen Anfang- und Endstücken (F sei die betrachtete Fläche). Ein mittleres Stück ist demnach eine Restriktion $q_M:[\alpha,\beta] \to F$ mit $0 < \alpha < \beta < 1$. Desweiteren heißen q(0) und q(1) Endpunkte von Schnitten.

[12] Riemann formuliert das so: Die Zahl m gibt an, „wie oft Linien beider Systeme während ihres Laufes zusammentreffen oder auseinandergehen (wo also ein einzelner gemeinsamer Punkt doppelt zu rechnen ist)..." (Riemann 1892, 10)

$$\frac{2n_2 - (s_2 + s_3) + (m - s_1)}{2} = n_2 + \tfrac{1}{2}(m - s_1 - s_2 - s_3) = n_2 + s$$

neue Querschnitte. Analog ergibt sich beim Übergang von T_2 zu T_{21} ein Zuwachs von $n_1 + s$ (mit demselben s, siehe oben) Querschnitten.

Da T_1 aus m_1 einfach-zusammenhängenden Stücken besteht, ergeben sich durch die $n_2 + s$ hinzukommenden Schnitte, genau $m_1 + n_2 + s$ einfach-zusammenhängende Flächen (pro Schnitt kommt nach Lehrsatz I immer eine Fläche hinzu!).

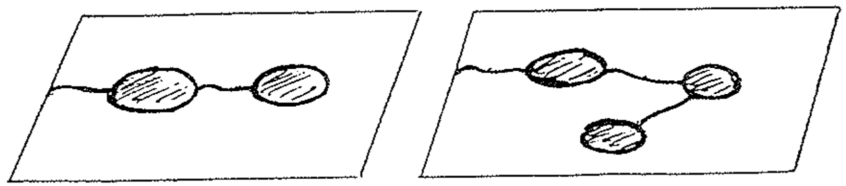
Wäre nun $n_2 - m_2 > n_1 - m_1$, also $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$, so müßte die Anzahl von Flächenstücken m_2 in T_2 durch die hinzukommenden $n_1 + s$ Schnitte um mehr als $n_1 + s$ vergrößert werden, was aber unmöglich ist (ein Querschnitt kann keine oder höchstens eine neue Fläche liefern): Aus obiger Ungleichung folgt nämlich $m_2 + n_1 + s < m_1 + n_2 + s$. Weil die Anzahl der Flächen in T_{21} und T_{12} übereinstimmt, müßte hier Gleichheit herrschen, was nur durch einen Zuwachs an Flächen, der größer als $n_1 + s$ ist, bewirkt werden kann. Dies läßt sich aber nicht mit $n_1 + s$ Querschnitten erreichen.[13]

Folgerung: Die Gleichheit $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$ gilt genau dann, wenn das System T_2 aus lauter einfach-zusammenhängenden Stücken besteht.

Das ist aufgrund der obigen Beweisführung klar; man kann aber auch mit Riemann argumentieren, daß unter der gemachten Voraussetzung über T_2 auch $n_1 - m_1 \leq n_2 - m_2$ gilt, woraus sich zusammen mit Lehrsatz II die Gleichheit ergibt.

Definition 1. Die Zahl n-m heißt Ordnung des Zusammenhangs einer Fläche. Dabei bedeutet n die Anzahl der Querschnitte, die erforderlich sind, um die Fläche in m einfach-zusammenhängende Teile zu zerlegen.

Definition 2. Eine Fläche heißt n-fach-zusammenhängend, wenn sie durch n-1 Querschnitte in eine einfach-zusammenhängende überführt werden kann.



dreifach-zusammenhängend　　　　vierfach-zusammenhängend

[13] Der Beweis dieses Satzes füllt bei Durège, der fast alle denkbaren Fälle explizit unterscheidet und behandelt, immerhin acht Seiten (Durège 1873, 166-173). Durège erwähnt noch einen kürzeren Beweis, der auf C. Neumann zurückgeht. Dieser hat allerdings den Nachteil, daß er von „unendlich kleinen Verschiebungen" (Durège 1873, 174) Gebrauch macht, also völlig andere Methoden verwendet (vgl. Anm. 10 oben). Maya Bollinger hat darauf aufmerksam gemacht, daß der Riemannsche Beweis - der ja abzählende Methoden benutzt - versagt, wenn sich bei der Überlagerung der Schnittsysteme unendlich viele Schnittpunkte ergeben (etwa in der Art des Schnittgebildes von y = x*sin(1/x) und y = 0): Vergleiche Bollinger 1972, 102.

Riemann listet im Anschluß an diese Definitionen noch einige Eigenschaften des Zusammenhanges auf. Von besonderem Interesse ist die Einsicht, daß der Rand einer einfach-zusammenhängenden Fläche „nothwendig aus Einer in sich zurücklaufenden Linie" (Riemann 1892, 11) besteht.

Von einer Klassifikation der Flächen kann allerdings in diesem Stadium bei Riemann noch nicht die Rede sein, da jeglicher Hinweis auf die Invarianz des Zusammenhanges bei Homöomorphie fehlt. Der Zusammenhangsbegriff bleibt bei ihm 1851 ein Mittel, um Flächen in ihrer Beziehung zu komplexen Funktionen individuell zu charakterisieren, nicht um Flächen miteinander zu vergleichen.[14]

Riemann ist in seinen veröffentlichten Werken nur noch einmal auf die topologische Charakterisierung von Flächen zurückgekommen und zwar in seiner 1857 erschienenen Arbeit „Theorie der Abel'schen Functionen". In dieser Abhandlung nimmt er einen anderen Zugang, der modern gesehen die Homologie - oder auch die (Co-)Bordismentheorie - vorbereitete. Im Unterschied zu den Entwicklungen von 1851, die gewissermaßen direkt der geometrischen Anschauung ohne weitere Begründung entnommen wurden, gibt Riemann diesmal eine Motivation, die außerhalb der Geometrie liegt:

Ist die Funktion $f(z) = X(x,y) + iY(x,y)$ mit $z = x+iy$ im Gebiet $U \in \mathbb{C}$ holomorph, so verschwindet $\int_{\partial U} f(z)dz = \int_{\partial U} (Xdx + Ydy)$.[15] Hieraus schließt er:

> „Das Integral $\int (Xdx + Ydy)$ hat daher, zwischen zwei festen Punkten auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt, denselben Werth, wenn diese beiden Wege zusammengenommen die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche T bilden."
>
> (Riemann 1892, 92)[16]

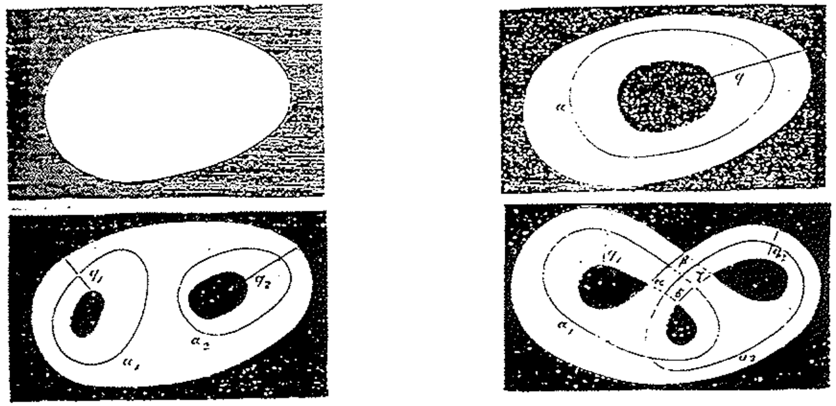
Hieran schließt sich unmittelbar eine neue Definition des Begriffes „einfach-zusammenhängend" an:

> „Dies veranlasst zu einer Unterscheidung der Flächen in einfach zusammenhängende, in welchen jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig begrenzt - wie z. B. ein Kreis - und mehrfach zusammenhängende, für welche dies nicht stattfindet, - wie z. B. eine durch zwei concentrische Kreise begrenzte Ringfläche."
>
> (Riemann 1892, 92)

[14] Ein Ergebnis, das in gewisser Weise in Richtung auf eine Klassifikation geht, ist natürlich der Riemannsche Abbildungssatz, der bei diesem so lautet:
„Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so aufeinander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen ein mit ihm stetig fortrückender Punkt der anderen entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind;..." (Riemann 1892, 40)
Als Spezialfall hiervon ergibt sich dann die heute übliche Formulierung mit dem Einheitskreis.

[15] Die Beschäftigung mit Wegintegralen und deren Abhängigkeiten von den gewählten Wegen sowie vom Verhalten des Integranden im umschlossenen Bereich - oder anders gesagt, vom Zusammenhang des umschlossenen Bereichs - spielte eine wichtige Rolle auch bei der Herausbildung des Homotopiebegriffes (vergleiche hierzu Vanden Eynde 1992/93). Zur Frühgeschichte des Cauchyschen Integralsatzes kann man Stäckel 1900 heranziehen.

[16] Riemann betrachtet den allgemeineren Fall einer auf einer Riemannschen Fläche definierten Funktion.



Hinsichtlich der Präzisierung der verwendeten Begriffe - vor allem des Begriffs der „Fläche" - sind gegenüber 1851 keine Fortschritte zu verzeichnen.[17] Es wird auch nicht gesagt, was denn unter einer geschlossenen Kurve zu verstehen sei; allerdings ist es naheliegend anzunehmen, daß hiermit das homöomorphe Bild der Kreislinie - eine Jordan-Kurve also - gemeint war. Dann hätte man es mit einer Art von simplizialer Homologie zu tun.[18]

Die Definition des einfachen Zusammenhanges wird anschließend erweitert zu einer des n-fachen:

> „Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser Fläche F vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Curve die vollständige Begrenzung eines Theiles der Fläche F bilden kann, so heisst die Fläche eine (n+1)-fach-zusammenhängende."
>
> (Riemann 1892, 93)

Diese Definition wird durch einen ihr vorausgehenden Satz gerechtfertigt, der wie die anderen Sätze des Abschnittes für „beliebig im Raume liegende Flächen" (Riemann 1892, 92) gilt: Sind in einer Fläche F zwei Kurvensysteme a und b gegeben, die zusammen ein Flächenstück vollständig beranden, so bildet jedes weitere System c, das mit a zusammen vollständig berandet, auch mit b ein vollständig berandendes System. Dies rechtfertigt die Definition des n-fachen Zusammenhangs insofern, als gezeigt ist, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Auswahl des Kurvensystems $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ist: Ist d die laut Definition erforderliche Kurve, die zusammen mit $a_1,a_2,\ldots,a_n$ einen vollständigen Rand bildet, so ist auch $b_1,b_2,\ldots,b_m$,d ein vollständiger Rand. Somit ist der Zusammenhang wirk-

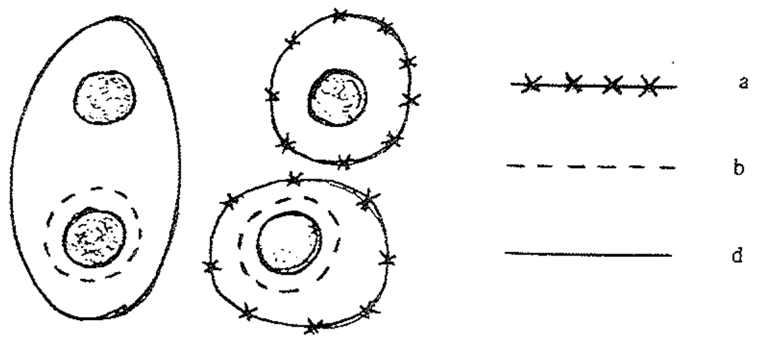
[17] Allerdings hatte Riemann zwischenzeitlich in seinem Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Riemann 1892, 272-287) die Idee der n-dimensionalen (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit eingeführt. Diese findet aber 1857 keine Verwendung etwa im Sinne einer Präzisierung des Begriffs „Riemannsche Fläche". Letztere mußte wohl bis Hermann Weyls Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche" (1913) warten - vergleiche Scholz 1980, 193-198.

[18] M. Bollinger meint sogar, daß Riemann auf die Forderung nach Homöomorphie verzichtet habe, also - modern gesprochen - eher singuläre Homologietheorie betrieben hätte.

lich ein Charakteristikum der Fläche, was allerdings noch nicht besagt, daß er eine topologische Invariante darstellt.

Riemann beweist seinen Satz in naheliegender Weise mit dem Verfahren, das wir heute den Steinitzschen Austauschsatz nennen. Allerdings enthält Riemanns Beweis eine Lücke, insofern nicht vorausgesetzt wird, daß die Kurven des Systems wirklich alle zum Beranden erforderlich sind, das heißt, daß $a_1, a_2, \ldots, a_n, d$ tatsächlich eine Basis der eindimensionalen Homologiegruppe bilden. Hierauf hat 1875 A. Tonelli aufmerksam gemacht: „Von diesem Satze, welcher als Fundament für die ganze Theorie des Zusammenhangs benutzt worden ist, kenne ich keinen Beweis, der sich über die Betrachtung einzelner Beispiele erhebt." (Tonelli 1875, 388). [Tonelli betrachtet im Anschluß an Betti den n-dimensionalen Fall.] Tonelli gibt darüber hinaus eine korrekte Formulierung des Satzes (Tonelli 1875, 389f).

Beispiel: Man stelle sich die Kugeloberfläche - die 2-Sphäre S^2 also - mit vier Löchern vor.

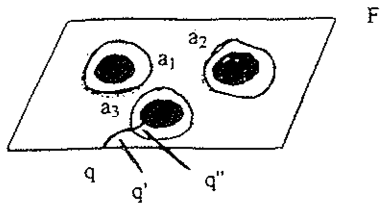


Es ist $a + b \sim 0$ und $a + d \sim 0$, aber nicht $b + d \sim 0$ (vgl. Bollinger 1972, 103).

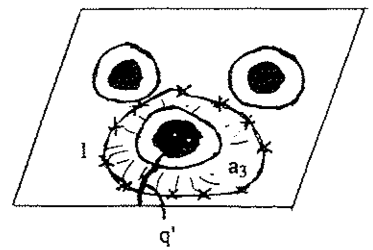
Im weiteren stellt Riemann dann die Verbindung zu seiner früher formulierten Querschnittstheorie her, da diese „wichtige Dienste bei der Untersuchung der Integrale algebraischer Functionen leistet" (Riemann 1892, 92). Zentral hierfür ist die Einsicht, daß sich eine (n+1)-fach zusammenhängende Fläche F durch einen geeigneten Querschnitt q in eine n-fach zusammenhängende F' überführen läßt. Riemann Argument hierfür ist das folgende: Nach Voraussetzung gibt es ein System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Kurven, das keinen vollständigen Rand in F bildet. Betrachtet man nun die Kurve a_n, so kann man von dieser in beiden Richtungen[19] zum Rand von F gelangen. Gehen zwei Verbindungslinien von a_n aus, so kann man diese als einen Querschnitt betrachten, der dann das Gewünschte leistet.

[19] Um dies zu präzisieren, muß man der Kurve eine Orientierung geben; es ist aber nicht erforderlich, daß F selbst orientierbar ist.

Beispiel:



Riemann zeigt noch, daß die entstehende Fläche F' tatsächlich n-fach zusammenhängend ist: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bilden in F, also auch in F' keinen vollständigen Rand. Nun ist zu zeigen, daß ein vollständiger Rand entsteht, wenn man zu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ noch eine geschlossene, im Innern von F' verlaufende Kurve ℓ hinzunimmt. Nach Voraussetzung berandet das System $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ell$ vollständig einen Teil f von F. Dabei kann aber a_n nicht zum Rand von f gehören: Wäre a_n Rand von f und liegt beispielsweise f auf der linken Seite von a_n, so verbindet der Schnitt q' einen Punkt, von f mit einem Randpunkt von F, also mit einem Punkt, der außerhalb von f liegt (da $f \subset \mathrm{Int}(F)$). Also müßte q' den Rand von f schneiden. Das widerspricht aber der Annahme, daß die Kurven $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ell$ alle im Innern von F' liegen sollen.



Hieraus ergibt sich als Folgerung: Jeder nichtzerstückende Querschnitt p führt eine n-fach zusammenhängende Fläche F in eine (n-1)-fach zusammenhängende über. Insbesondere läßt sich eine n-fach zusammenhängende Fläche durch n nichtzerstückende Querschnitte in eine einfach-zusammenhängende transformieren. Damit ist die Äquivalenz der alten Definition des Zusammenhangs mit der neuen nachgewiesen.[20]

Zum Schluß geht Riemann auf das Problem der Flächen „ohne Begrenzung" (Riemann 1892, 94), womit geschlossene Flächen gemeint sind, ein. Hier muß man - will man Querschnitte ziehen - erst künstlich einen Rand schaffen, was durch Herausnahme eines belie-

[20] Der Beweis hierfür beruht im wesentlichen auf dem Vorhandensein einer geschlossenen Kurve, die im nicht-zerstückenden Querschnitt anfängt, durch das Flächeninnere läuft und dann von der anderen Seite wieder in ihren Ausgangspunkt zurückläuft (vergleiche Riemann 1892, 94).

bigen Punktes geschieht. Die erste Zerlegung geschieht dann durch eine einfach geschlossene Kurve mit dem ausgezeichneten Punkt als Anfangs- und Endpunkt.[21]

Die geschilderten Betrachtungen werden vom Verfasser dann zum Studium der eingangs erwähnten Integrale herangezogen. Dabei werden mehrfach zusammenhängende Flächen - der Fall also, daß das Wegintegral von eben diesem abhängt - durch Zerschneiden in einfach-zusammenhängende verwandelt, wobei zu untersuchen ist, wie sich das Integral beim Überschreiten eines Querschnittes ändert.

Ähnlich wie schon 1851 bleiben also topologische Aspekte hier im Hintergrund: Die Topologie steht noch ganz im Dienste der Funktionentheorie. Dennoch kommt Riemann das doppelte Verdienst zu, sich erstmals intensiv mit den Zusammenhangsverhältnissen von Flächen beschäftigt und entsprechende Hilfsmittel hierfür entwickelt zu haben. Insbesondere kommt bei Riemann in Gestalt des Superpositionsprinzips deutlich die Spannung zwischen kombinatorischer und kontinuumstopologischer Vorgehensweise, der wir in der weiteren Geschichte noch öfter begegnen werden, erstmals zur Geltung.

Daß Riemann in der Topologie dennoch mehr als eine Hilfswissenschaft gesehen hat, zeigt die Einleitung zu dem von uns untersuchten Abschnitt, in der er diese Wissenschaft zu charakterisieren versucht:

> „Mit diesem von Leibnitz, wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen [Analysis situs; K.V.] darf wohl ein Theil der Lehre von den stetigen Grössen bezeichnet werden, welcher die Größen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander messbar betrachtet, sondern von den Massverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft."
>
> (Riemann 1892, 91)[22]

[21] Nach der Definition des Querschnitts ist dies nicht zwingend, da ja dieser auch in sich zurücklaufen darf. Also muß man wohl die entsprechende Aussage bei Riemann 1892, 94 als Forderung lesen. Als Beispiel erwähnt dieser den Torus, der durch eine geschlossene Kurve und einen Querschnitt in eine einfach-zusammenhängende Fläche verwandelt wird (im wesentlichen ein Rechteck).

[22] Vermutlich hatte Riemann hier die vielfach zitierte (u.a. auch bei Listing 1847, 812 Anm.1) Stelle bei Leibniz vor Augen, die da lautet:
„Mais après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, je ne suis pas encore content de l'algèbre, en ce qu'elle ne donne ni les plus courtes voies, ni les plus belles constructions de géométrie; c'est pourquoi, lorsqu'il s'agit de cela, je crois qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou liniaire qui nous exprime directement situm, comme l'algèbre exprime magnitudinum." (Huygens 1899, no. 2192) [Vergleiche auch Leibniz 1858, 178-183 sowie Couturat 1903, 406 n. 1].
Im Anschluß an H. Freudenthal (Freudenthal 1954) wird Leibniz heute meist zu den 'Pseudovorgängern' der Topologie gerechnet (so auch Pont 1974, 7f); eine umfassende Würdigung aller Textstellen bei Leibniz steht allerdings noch aus.
Euler schreibt in seiner Abhandlung über das Königsberger Brückenproblem zum Thema Topologie:
„Neben jenem Teil der Geometrie, der von den Größen handelt und zu allen Zeiten eifrig studiert wurde, gibt es noch einen anderen, bis jetzt beinahe unbekannten, den Leibniz zuerst erwähnt und Geometrie der Lage genannt hat. Dieser Teil beschäftigt sich mit dem, was allein durch die Lage bestimmt werden kann und mit der Ergründung der Eigenschaften der Lage" (zitiert nach Levi 1929, 40).
Instruktiv ist es auch, die Auffassungen Riemanns mit jenen von Listing zu vergleichen, die dieser in seinen 'Vorstudien zur Topologie' folgendermaßen formulierte: „Die Topologie wird, um den Rang einer exacten Wissenschaft zu erreichen, zu dem sie berufen scheint, die Thatsachen der räumlichen Anschauung auf möglichst einfache Begriffe zurückführen müssen, mit welchen sie unter Beihilfe geeigneter, den mathematischen analog gewählten Bezeichnungen und Symbole die vorkommenden Operationen nach einfachen Regeln, gleichsam rechnend vollzieht." (Listing 1847, 814)

Riemann ist auf den Themenkreis „Zusammenhangseigenschaften" von Flächen bzw. Mannigfaltigkeiten noch einmal zu sprechen gekommen in einem Fragment, dessen Datierung nicht möglich war und das Riemanns Herausgeber Heinrich Weber mit „Fragment aus der Analysis Situs" überschrieben hat. Es handelt sich dabei um Andeutungen, keinesfalls aber um eine ausgefeilte fertige Darstellung.

Riemanns Ziel war es hier offenbar, seine Zusammenhangstheorie auf den Fall einer n-dimensionalen „stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit" auszudehnen[23], wobei diese mit

Dabei wird diese neuzuschaffende Wissenschaft folgendermaßen definiert:
„Unter der Topologie soll nun also die Lehre von den modalen Verhältnissen räumlicher Größen verstanden werden, oder von den Gesetzen des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihren Theilen oder ihren Aggregaten im Raume, abgesehen von den Maß- und Größenverhältnissen." (Listing 1847, 814)
Die Auffassungen von Riemann und Listing stimmen also weitgehend überein, was vielleicht nicht so verwunderlich ist, da ja Riemann in Göttingen in dem von Listing geleiteten Seminar arbeitete (vgl. auch Klein 1979, I 249).
Listing seinerseits hat mehrfach auf den Einfluß hingewiesen, den Gauß in Sachen Topologie auf ihn ausgeübt habe. So heißt es beispielsweise in den „Vorstudien":
„Bei öfteren Gelegenheiten durch den größten Geometer der Gegenwart auf die Wichtigkeit des Gegenstandes aufmerksam geworden, habe ich mich seit längerer Zeit verschiedentlich in der Analysis einzelner hierher gehöriger Fälle versucht, zu denen die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen vielfache Veranlassung darbieten,..." (Listing 1847, 813)
Fast ist man geneigt zu konstatieren: Alle Wege führen zu Gauß. Fest steht jedenfalls - wie vor allem Pont 1974, 31-38 zeigt -, daß der Prinz der Mathematiker auch in der Frühgeschichte der Topologie eine wichtige Rolle gespielt hat. Darüber hinaus konnte es natürlich vorteilhaft sein, ein neuentstehendes Gebiet mit einem so großen Namen in Verbindung zu bringen (man vergleiche etwa die Rolle, die der Briefwechsel Gauß-Schumacher bei der Durchsetzung der nichteuklidischen Geometrie gespielt hat). Im übrigen sei noch angemerkt, daß gerade Listing die Topolgie in engem Zusammenhang mit den Naturwissenschaften sah, was schon die „Vorstudien" belegen, in denen naturwissenschaftliche Beispiele unter anderem aus der Biologie eine wichtige Rolle spielen.
Als Beleg für Gaußens Wertschätzung der Topologie sei die folgende 1833 geschriebene Stelle zitiert:
„Von der Geometria situs, die Leibniz ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahrhunderten noch nicht viel mehr als nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzbereich der Geometria situs und der Geometria magnitudinis wird die sein, die Verschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen." (Gauß 1877, 605)
Der letzte Satz spielt auf die von Gauß begonnenen, später von Maxwell und Böddicker weitergeführten Untersuchungen über verschlungene elektrische Leiter an (vergleiche Dingeldey 1890, 3f).

[23] Diese Ausdrucksweise legt die Vermutung nahe, daß Riemann sein Fragment nach dem sekulären Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854 niedergeschrieben hat, in dem er den Begriff „n-fach ausgedehnte Größe" oder auch „stetige Mannigfaltigkeit" eingeführt hatte:
„Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im ersten Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit." (Riemann 1892, 274)
Beispiele stetiger Mannigfaltigkeiten sind nach Riemann „die Orte der Sinnengegenstände und die Farben" (Riemann 1892, 306). Der Farbenraum spielte übrigens auch in Helmholtz' Untersuchungen zu den Grundlagen der Geometrie eine Rolle als 'Nichtstandardmodell' eines Raumes (vergleiche Helmholtz 1868, 201); auch H. Grassmann, neben Riemann und Helmholtz ein weiterer Vorkämpfer für die Erweiterung des Raumbegriffes, beschäftigte sich mit der Farbenlehre.

Rand zu denken ist. Grundlegend ist der Begriff des „n-Strecks", den Riemann allerdings nicht definiert. Zur Erläuterung können die einführenden Bemerkungen zu Ein- und Zweistrecken dienen:

„Zwei Einstrecke werden derselben oder verschiedenen Gruppen zugerechnet, je nachdem das eine stetig in das andere übergehen kann oder nicht.

Je zwei Einstrecke, welche durch dasselbe Punktepaar begrenzt werden, bilden zusammen ein zusammenhängendes unbegrenztes Einstreck, und zwar kann dies die ganze Begrenzung eines Zweistrecks bilden oder nicht, je nachdem sie derselben oder verschiedenen Gruppen angehören.

Ein inneres, zusammenhängendes, unbegrenztes Einstreck kann, einmal genommen, entweder zur ganzen Begrenzung eines innern Zweistrecks ausreichen oder nicht."

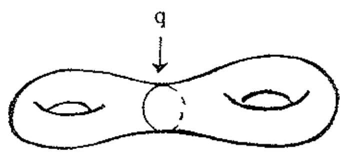
(Riemann 1892, 479)

Offenkundig tragen die Einstrecke den Charakter von Wegen, wobei man wohl davon ausgehen muß, daß diese nicht allzu bizarr sein durften. Deshalb liegt es nahe, die Einstrecke als homöomorphe Bilder von Einssimplizes zu interpretieren, die Zweistrecke wären dann homöomorphe Bilder von Zweisimplizes und so weiter. Diese an modernen Vorstellungen (simpliziale Homologietheorie) orientierte Auffassung stößt allerdings rasch an ihre Grenzen, da Riemann seine „n-Strecke" als Teilmengen auffaßt und nicht als Abbildungen, deren Quelle standardisierte geometrische Objekte - Simplizes eben - sind.

Bemerkenswert ist ferner, daß in diesem Fragment im Unterschied zu den früheren Ausführungen Riemanns zur Analysis situs der Homotopiebegriff von vorneherein einfließt und dieser mit der Berandung in Verbindung gebracht wird:
Ein unbegrenztes Einstreck, das aus zwei gewöhnlichen Einstrecken hervorgeht, die homotop zueinander sind, berandet ein Zweistreck vollständig.[24]

Zweifellos sind Riemanns Ausführungen an dieser Stelle ebenso vage wie innovativ. H.Weyl kommentierte diese 1923 folgendermaßen:
„In neuerer Zeit ist versucht worden, durch präzise Axiome festzulegen, welche Eigenschaften man allgemein einer stetigen Mannigfaltigkeit zuschreiben muß, damit dieser Begriff ein sicheres Fundament für die mathematische Analyse abgeben kann." (Weyl 1923, 23)
Dabei verweist Weyl auf seine Abhandlung „Die Idee der Riemannschen Fläche" (1913) und auf Hausdorffs „Grundzüge der Mengenlehre" (1914). Zu dem in dieser Anmerkung angesprochenen Fragenkomplex vergleiche man Scholz 1980, Spivak 1979, 132-178 sowie Dombrowski 1990. Zum Problem der n-Dimensionalität siehe auch Anmerkung 27 dieses Kapitels.

24 Die Umkehrung hiervon ist falsch, wie der bekannte Taillenschnitt der Brezelfläche zeigt:



q ist nullhomolog, da es ein Flächenstück vollständig berandet, aber nicht nullhomotop. Zerlegt man q in zwei Teilwege q = q'+q", so sind q' und q" nicht homotop zueinander bei festgehaltenen Endpunkten. Der genannte Unterschied war im übrigen auch Poincaré anfänglich nicht klar (vergleiche 3.2 unten).

Zentraler Punkt des Fragmentes ist die Definition des Zusammenhangs (in einer Dimension n) einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit: Gibt es m nicht-berandende n-Strecke, wohingegen (m+1) n-Strecke stets beranden, so heißt die Mannigfaltigkeit (m+1)-fach zusammenhängend in der Dimension n. Diese Begriffsbildung wird durch den Satz gerechtfertigt, daß die Zusammenhangszahl unabhängig von den gewählten n-Strecken ist (vergleiche Bollinger 1972, 105-111).

Die Ansätze Riemanns wurden von Betti (1871) aufgegriffen und weiterentwickelt, der durchaus von Riemann beeinflußt wurde (u.a. traf Riemann Betti öfter während seiner Italienaufenthalte).[25] Dabei ist zu beachten, daß das Riemannsche Fragment erstmals durch Heinrich Weber 1876 im Rahmen der „Gesammelten Werke" von Riemann der Öffentlichkeit zugänglich gemacht worden ist, weshalb Betti eindeutig die Priorität der Publikation gehört. Poincaré's Urteil in seiner Ankündigung „Sur l'analysis situs" von 1892 ist also durchaus zuzustimmen:

„C'est parce que les recherches de ce genre peuvent avoir des applications en dehors de la Géométrie qu'il peut y avoir quelque interêt à les poursuivre en les étendant aux espaces à plus de trois dimensions. Riemann l'a bien compris; aussi, désireux de géneraliser sa belle découverte, il s'est appliqué à l'étude de ces espaces au point de vue de l'Analysis situs et il a laissé sur ce sujet des fragments malheureusement très incomplèts. Betti,..., a retrouvé et completé les résultats de Riemann."

(Poincaré VI, 189)

Im übrigen sei noch erwähnt, daß M. Bollinger Riemanns Ansatz als singuläre Homologie modulo 2 interpretiert (in Bollinger 1972), weil dieser nicht-orientierte n-Strecke verwendet, eine Auffassung, die meiner Ansicht nach über das von Riemann Intendierte hinausgeht.
Im weiteren Verlauf des Fragments versucht Riemann noch, eine der Homotopie zwischen Einstrecken analoge Beziehung für n-Strecke zu formulieren. Diese besagt, daß das n-Streck A in das n-Streck B veränderlich sei, „wenn durch A und durch Stücke von B ein inneres (n+1)-Streck vollständig begrenzt wird." (Riemann 1892, 479)
Es ist sehr merkwürdig, daß diese Festlegung in A und B asymmetrisch ist: Während ganz A gebraucht wird, sollen Teile von B genügen. Ansonsten wird auch hier auf das Berandungsverhalten zurückgegriffen, um die Vorstellung der Deformierbarkeit auszudrücken. Zur Entwicklung des Homotopiebegriffes vergleiche man Vanden Eynde 1992/3, insbesondere 143-147.

25 Man vergleiche hierzu die folgenden Äußerungen von Dehn und Heegard:
„Dieselbe Definition wie Betti gibt Riemann in seinem Fragment über An. sit. Werke 2. Aufl., p.479. Es ist nicht unmöglich, daß die Arbeiten von Betti und Riemann nicht unabhängig voneinander entstanden sind (Riemanns Aufenthalt in Italien, vgl. R. Werke 2. Aufl., p.555f)." (Dehn-Heegard 1907, 182 n.72).
Nun hat Betti aus dem Einfluß von Riemann kein Geheimnis gemacht (er erwähnt ihn mehrfach in der in 2.2.1 zu besprechenden Arbeit, ausführlicher noch in den Briefen an Tardy (vergleiche Scholz 1980, 243-245 oder Pont 1974, 76-78)), dennoch ist schon die Behauptung, Riemanns und Bettis Definitionen seien die gleichen, wie wir sehen werden, überzogen. Eine ausführliche Würdigung des Verhältnisses von Riemann und Betti gibt Bottazini 1977; man vergleiche aber auch Weil 1979.

Wichtig ist auch der Hinweis Poincaré's, daß es sich bei Riemann und Betti um Arbeiten zur n-dimensionalen Geometrie oder Topologie handelt, daß also hier der Schritt über die gewohnte Dreidimensionalität hinaus getan wurde. Das war zu Riemanns Zeiten ziemlich ungewöhnlich - man kann sagen, daß Riemanns Habilitationsvortrag erstmals eine n-dimensionale Differentialgeometrie im Wortsinn anstrebte - und auch 1871 noch keineswegs selbstverständlich.

Riemanns Werk entfaltete keineswegs sofort die große Wirkung, die es verdient hätte. Dem stand einerseits seine enorme Schwierigkeit entgegen, die erst durch die vermittelnden Arbeiten von Carl Neumann, H. Durège, E. Betti und anderen als Hindernis beseitigt wurde, zum anderen aber auch seine (in Teilen) recht späte Publikation. Dennoch wurden gegen Ende des 19. Jahrhunderts Riemanns Ideen zum Ausgangspunkt vieler topologischer Forschungen (vergleiche Poincaré von oben, aber auch die Aussagen von F. Klein). Ihm gebührt zweifellos das Verdienst, zentrale Begriffsbildungen - etwa den Zusammenhang - vorgenommen und entsprechende Methoden entwickelt zu haben. Während die Querschnitte im Rahmen der Topologie wenig Beachtung fanden, entfalteten die Idee des Berandens und der Deformation später ihre volle Wirkung und begründeten wichtige Teilgebiete der algebraischen Topologie. Die Homologiegruppen sowie die Fundamentalgruppe wurden zum wichtigsten Werkzeug bei der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten, ein Aspekt, der - wie oben ausgeführt - allerdings bei Riemann noch völlig fehlt.

Was die Methoden anbelangt, so kann man Riemann, trotz der Tatsache, daß seine wenn auch nur unscharf charakterisierten Grundbegriffe im Unterschied etwa zu Listing deutlich kontinuumstopologisch aufgefaßt sind - was ja auch auf dem funktionentheoretischen Hintergrund fast unausweichlich scheint -, am ehesten der kombinatorischen Richtung zuordnen (vgl. 6). Aus moderner Sicht wäre also mit triangulierten (Riemannschen) Flächen zu arbeiten, so etwa, wie das Hermann Weyl in den ersten Auflagen seiner berühmten „Idee der Riemannschen Fläche" getan hat (1913/1923).

2.2 Weiterentwicklung und Einführung neuer Methoden

In diesem Abschnitt werden wir die Beiträge einiger Mathematiker zur frühen Topologie untersuchen, welche in einem engen zeitlichen (Möbius, Jordan) oder in einem engen inhaltlichen Bezug (Betti) zu Riemann standen.

2.2.1 E. Betti

Unmittelbar knüpfte Enrico Betti (1823-1892) an Riemann an: Das gilt sowohl für seine Arbeiten zur Topologie, über die hier zu reden ist, als auch für seine Beschäftigung mit der mathematischen Physik. Betti, dessen ursprüngliches Arbeitsgebiet die Galois-Theorie gewesen ist, deren erste systematische Darstellung er 1851 gab (vgl. Waerden 1985, 114f),

beschäftigte sich später mit elliptischen Funktionen und dann eben mit Topologie[26] sowie mathematischer Physik, insbesondere mit Potentialtheorie. Er hat in der Entwicklung der italienischen Mathematik eine entscheidende Rolle gespielt, u.a. als Teilnehmer der berühmten „Europareise" (1858); zu seinen Schülern zählten u.a. Dini, Bianchi und Volterra.

Als Betti 1871 seine Arbeit mit dem programmatischen Titel „Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni" (über die Räume beliebiger Dimension) veröffentlichte, war es - wie bereits erwähnt - noch keineswegs selbstverständlich, daß eine derartige Begriffsbildung als sinnvoll akzeptiert wurde.[27] Verglichen mit Riemanns Fragment finden wir bei Betti zwei Neuerungen:

1. Er stellt seine Theorie von vorneherein auf analytische Grundlagen.
2. Er ersetzt die n-Strecke durch n-dimensionale wegzusammenhängende Teilräume.

Grundlegend für Betti ist der n-dimensionale R^n (bei ihm als S_n bezeichnet), der vermittels Koordination charakterisiert wird. Im R^n werden nun durch Gleichungen oder auch Ungleichungen Teilräume definiert, so etwa Hyperebenen $F(z_1,\dots,z_n)=0$ und offene Teilmengen der Form $F(z_1,\dots,z_n)>0$ oder $F(z_1,\dots,z_n)<0$ sowie (n-m)- dimensionale Unterräume, welche durch m Gleichungen (m<n)

$$F_1(z_1,\dots,z_n)=0,\dots,F_m(z_1,\dots,z_n)=0$$

gegeben werden. Dabei unterstellte Betti, daß man derartige Gleichungssysteme stets auf die Form

$$z_1=z_1(u_1,u_2,\dots,u_{n-m}),\dots,z_n=z_n(u_1,u_2,\dots,u_{n-m})$$

bringen könne, setzt also (ähnlich wie später H. Poincaré [vgl. 3.2]) die Anwendbarkeit des Satzes über implizite Funktionen voraus. Alle genannten Gebilde werden von Betti als „Räume" (spazio) bezeichnet, welche meist noch durch Dimensionsangaben näher bestimmt werden.[28]

Ein Raum heißt linear-zusammenhängend, wenn man je zwei seiner Punkte durch eine kontinuierliche Linie verbinden kann, die ganz in diesem fraglichen Raum liegt. Somit darf man diesen Begriff als Äquivalent zum modernen Wegzusammenhang sehen, der uns schon bei Riemann begegnet ist. Weiter wird ein Teilraum S_{n-1} des S_n geschlossen (chiuso) genannt, wenn er letzteren in zwei wegweise zusammenhängende Stücke zerlegt,

[26] Bettis Arbeit zur Topologie ist mehrfach ausführlich untersucht worden (Bollinger 1972, 105-111; Pont 1974, 76-87, Scholz 1980, 243-249), weshalb ich mich hier auf das für das weitere Wesentliche beschränken kann.

[27] So nennt Sommerville in seiner Bibliographie (Sommerville 1970, IX) im Zeitraum bis 1870 insgesamt 41 Arbeiten zum Bereich n-dimensionale Geometrie, 1871 bis 1880 waren es dann 120, wovon mehr als die Hälfte in deutscher Sprache geschrieben wurde.
Ein einflußreicher Gegner dieser neuen Ideen in Italien war Giusto Bellavitis. Aber auch in Deutschland gab es - trotz der großen Zahl von Veröffentlichungen zu diesem Thema - Widerstände, wie etwa der Titel eines Vortrages zeigt, den Oskar Schlömilch 1885 auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Straßburg hielt: „Über die Unzulässigkeit der Geometrie in vier- und mehrdimensionalen Räumen". Selbst ein so bedeutender Geometer wie Theodor Reye lehnte die höherdimensionale Geometrie ab, wie sein Biograph H. Timerding zu berichten weiß.

[28] Vom modernen Standpunkt aus betrachtet, stehen Bettis Ausführungen der algebraischen Geometrie näher als der Topologie. Eine derartige Unterscheidung war aber zu jener Zeit noch nicht geläufig, und die enge Durchdringung und Abhängigkeit beider Gebiete sollte noch längere Zeit fortbestehen, zum Beispiel auch noch bei Poincaré.

derart, daß ein Weg, der zwei Punkte (je einen aus einer Wegekomponente) miteinander verbindet, den S_{n-1} schneiden muß.[29] Analog[30] wird ein S_{n-2} im S_{n-1} geschlossen genannt, wenn er diesen ebenfalls in der geschilderten Weise zerlegt, usw. Schließlich wird noch der Rand eines Teiles R des S_n, der durch die Ungleichungen $F_1 < 0, F_2 < 0, \ldots, F_m < 0$ gegeben wird, eingeführt: Dieser setzt sich aus allen Punkten des S_n zusammen, für die $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$ gilt.[31] Endlich heiße ein Raum beschränkt, wenn alle Koordinaten seiner Punkte endlich sind.

Nun kann Betti seine Zusammenhangszahlen einführen. Dabei wird zuerst erklärt, was es bedeutet, daß ein n-dimensionaler Raum R mit Rand in der Dimension $m<n$ einen einfachen Zusammenhang besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn jeder geschlossene m-dimensionale Teilraum ein (m+1)-dimensionales Stück von R vollständig berandet. Sind alle Zusammenhänge eines Raumes einfach, so heißt er einfach-zusammenhängend (semplicemente connesso):[32] .Allgemeiner hat R einen (p_m+1)-ten Zusammenhang in der Dimension m, wenn es in R höchstens p_m geschlossene Räume gibt, die nicht den vollständigen Rand eines wegweise zusammenhängenden, (m+1)-dimensionalen Teilraumes von R bilden (vergleiche Betti 1871, 145).

Diese Begriffsbildung wird vom Autor anhand von drei Beispielen illustriert, die sämtlich berandete 3-Mannigfaltigkeiten sind:

1. Der Volltorus ist in der Dimension zwei einfach-zusammenhängend, während seine Zusammenhangszahl in der Dimension eins zwei beträgt.

2. Der Raum, der zwischen zwei konzentrisch ineinander liegenden Tori eingeschlossen ist, hat in der Dimension zwei einen doppelten Zusammenhang und in der Dimension eins einen dreifachen.
   (Räume dieser Art spielen später - bei H. Poincaré [sechstes Beispiel, vgl. 3.2] und H. Seifert [dort Schalenräume genannt, vgl. 5.2] - eine wichtige Rolle bei der Konstruktion geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten. Solche entstehen nämlich, wenn man geeignete Identifizierungen zwischen den beiden berandenden Torusflächen vornimmt.) Ansonsten muß man natürlich eine standardmäßige Einbettung der Tori - insbesondere keine Verknotung - unterstellen.

[29] Modern gesprochen geht es also um Zykel beliebiger Dimension.

[30] Merkwürdigerweise verlangt Betti, daß S_{n-2}, welches S_{n-1} zerlegt, wegzusammenhängend sein soll, während eine derartige Forderung an den den S_n zerlegenden S_{n-1} nicht erhoben wird. (Betti 1871, 144)

[31] Zu den mit dieser Definition verbundenen Schwierigkeiten vergleiche man Scholz 1980, 245f.

[32] Nicht zu verwechseln mit der auf Poincaré zurückgehenden Bedeutung dieses Wortes, welche ihrerseits nicht zu verwechseln ist mit der modernen Bedeutung dieses Begriffes, welche das Verschwinden der Fundamentalgruppe verlangt. Bettis einfacher Zusammenhang bedeutet das Verschwinden aller Betti-Zahlen. Poincaré gebraucht einfach-zusammenhängend meist synonym mit homöomorph zur Sphäre (entsprechender Dimension).
Es sei hier noch erwähnt, daß Betti im weiteren versucht, eine Beziehung zwischen seiner Zusammenhangstheorie und der Zerschneidung mittels Querschnitten herzustellen: Besitzt der n-dimensionale Raum R in den Dimensionen n-1, n-2, ..., 2, 1 die Zusammenhänge $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_2, p_1$, so braucht man p_{n-1} eindimensionale, p_{n-2} zweidimensionale,..., p_1 (n-1)-dimensionale Schnitte, um R einfach - zusammenhängend (im modernen Sinne) zu machen (Betti 1871, 148-151). Diese Behauptung wurde später von Heegard in seiner Dissertation kritisiert (vergleiche Heegard 1916, 216-218).

3. Der Raum zwischen einer Sphäre und einem Torus - also eine Vollkugel, aus der man einen (unverknoteten) Volltorus angebohrt hat - hat in den Dimensionen 1 und 2 einen doppelten Zusammenhang.

Schließlich versucht Betti nachzuweisen, daß seine Definition der Zusammenhangszahlen unabhängig von der speziellen Wahl der Unterräume ist. Das geschieht mit einem Argument, das dem Riemannschen im zweidimensionalen Falle analog ist, und das ähnlich wie sein Vorbild Gegenstand der Kritik von Tonelli wurde.[33]

Bettis Bedeutung für die Entwicklung der algebraischen Topologie liegt hauptsächlich darin, daß er die von Riemann nur vage angedachten Ideen zur Zusammenhangstheorie oder zur - modern gesprochen - Homologietheorie im n-dimensionalen zu präzisieren versuchte und sie durch seine Veröffentlichung dem breiteren Publikum zugänglich machte. Insofern war Poincaré's Vorschlag, fortan von Betti-Zahlen zu sprechen[34], durchaus gerechtfertigt. Sieht man von Riemanns Fragment ab, so war Bettis Arbeit der erste größere Beitrag zur n-dimensionalen Topologie überhaupt; insofern darf sie als Wegbereiterin gerade für die Anstrengungen im Bereich der dreidimensionalen Topologie gelten, die systematisch erst mit Dyck und Poincaré begannen und uns im weiteren Verlauf dieser Abhandlung interessieren werden.

2.2.2 A. F. Möbius

August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), Astronom auf der Pleißenburg in Leipzig und einer der wenigen Schüler von Carl Friedrich Gauß, erlangte in mehrerer Hinsicht Bedeutung für die Geschichte der Topologie:

Zum einen verdanken wir ihm die erste, erstaunlich modern anmutende (Henn-Puppe 1990, 675) Definition von Homöomorphie (die bei ihm „elementare Verwandtschaft" heißt), wodurch Möbius zum Wegbereiter aller topologischen Klassifikationen wurde. Diesen Beitrag zum Klassifikationsproblem werden wir in 2.2.2.1 behandeln.

Weiter geht die Einführung einseitiger Flächen und damit der Nichtorientierbarkeit als allgemeines Phänomen auf Möbius (und unabhängig von ihm auf Listing [vergleiche Listing 1862, 109n1]) zurück (2.2.2.2).

Schließlich entwickelte Möbius eine Methode, die unserer modernen Morse-Theorie ziemlich nahekommt, um orientierbare Flächen zu klassifizieren. Da diese für den weiteren Gang der hier vorgelegten Untersuchung keine große Bedeutung hatte, wollen wir hier auf eine ausführliche Darstellung derselben verzichten[35] . Allerdings ist das Ergebnis, zu dem Möbius gelangte, nämlich die erste Klassifikation orientierbarer geschlossener Flächen, für uns von größter Bedeutung. Wir werden hierauf ebenfalls in 2.2.2.1 eingehen.

[33] Tonelli 1875, vergleiche hierzu auch Bollinger 1972, 106 und Scholz 1980, 247-249.

[34] Diese Bezeichnung taucht bei Poincaré erstmals auf, nämlich in der Note „Sur l'Analysis situs" (1892 = Poincaré VI, 189-192; man vergleiche auch Dehn-Heegard 1907, 182 Anm. 72); an früheren Stellen, zum Beispiel im Briefwechsel mit Klein, ist dagegen schlicht von Zusammenhang die Rede. Vergleiche auch Kapitel 3 Anmerkung 6.

[35] Zu diesem Aspekt von Möbius' Werk vergleiche man Pont 1974, 91-100 und Dombrowski 1990, 330-332 oder auch Stewart 1993.

2.2.2.1 Der Homöomorphiebegriff und die Klassifikation der geschlossenen orientierbaren Flächen

Das geometrische Hauptwerk von A. F. Möbius, der 1827 erschienene „Barycentrische Calcul" (Möbius I, 1-388), entfaltete wenig Wirkung auf seine Zeitgenossen. Dennoch enthielt es einige Errungenschaften,[36] welche für die Topologie später durchaus von Wichtigkeit wurden: Da ist zuerst einmal die Technik der baryzentrischen Unterteilung, welche im Zusammenhang mit simplizialen Komplexen von großer Bedeutung für die kombinatorische Topologie werden sollte, sowie der bei Möbius erstmals zu findende freie Umgang mit Symbolen geometrischen Ursprungs zu nennen. Der Leipziger Astronom scheint als erster mit negativen Strecken, Flächeninhalten und dergleichen gerechnet zu haben; eine Übung, ohne die Poincaré's späterer Kalkül mit Homologien (vgl. 3.2) kaum denkbar ist. Der für uns hier wichtigste Gedanke im „Barycentrischen Calcul" ist aber der der Klassifikation oder, anders gesagt, die Unterscheidung verschiedener Arten von Verwandtschaften zwischen geometrischen Figuren,[37] welche Möbius in die Entwicklungslinie des Erlanger Programmes stellt.[38] Dabei verwendet er den Begriff der geometrischen Abbildung in dem Sinne, wie wir ihn heute kennen, also als eine Abbildung, die die ganze Ebene auf eben diese punktweise abbildet.[39] So erstaunt es nicht, daß Möbius 1863 in seiner Arbeit „Theorie der elementaren Verwandtschaft" (Möbius II, 435-471) eine ziemlich modern anmutende Definition dessen gibt, was wir heute Homöomorphie nennen[40]:

> „Zwei geometrische Figuren sollen einander elementar verwandt heissen, ..., wenn je einem Puncte der einen Figur ein Punct der anderen also entspricht, dass von je zwei einander unendlich nahen Puncten der einen auch die ihnen entsprechenden der anderen einander unendlich nahe sind."
>
> (Möbius II, 435)[41]

---

[36] Vergleiche hierzu auch Klein 1979, I 116.

[37] Vergleiche hierzu Struve 1990, 173-183.

[38] Klein selbst ist erst in den 80er Jahren näher mit den Überlegungen von Möbius in Berührung gekommen, als er die Herausgabe des zweiten Bandes von dessen gesammelten Werken übernahm, der 1886 erschien. (Klein war 1880-1885 in Leipzig tätig.) In seinen „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" (Teil I) bemerkt Klein: „Wenn auch Moebius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft" ein Äquivalent. Moebius wird dadurch genau zu einem Vorläufer des „Erlanger Programmes"." (Klein 1979, I 118 Anm. 1)

[39] Vergleiche hierzu Struve 1990, 173-183. Auch F. Klein hat diese für uns vielleicht unscheinbar wirkende, aber dennoch hochwichtige Neuerung bei Möbius hervorgehoben:
„3. Moebius faßt klar den Gedanken einer Punkt für Punkt sich entsprechenden Beziehung von zwei Räumen und schafft damit den Begriff der einfachsten, systematisch abgestuften „Verwandtschaften".
4. Mit dieser Klassifikation [Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität, Kollineation usw.; K.V.] verbindet er nun sogleich die Idee, nach den Ausdrücken oder Gebilden zu fragen, die bei irgend einer dieser Verwandtschaften ungeändert bleiben." (Klein 1979, I 118)

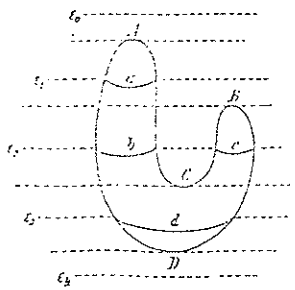
[40] Eine vergleichbare Definition gab erst wieder W. Dyck (vgl. 2.3.3) und dann A. Hurwitz 1897; vergleiche hierzu auch 3.1.

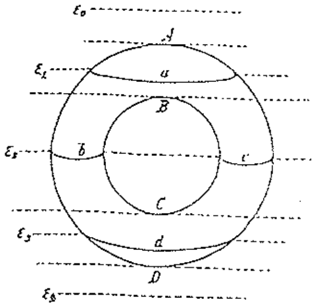
[41] Man vermißt bei Möbius die Stetigkeit der Umkehrabbildung, auch eine explizite Erwähnung der Bijektivität.
Im übrigen fährt der Autor mit der Bemerkung fort, daß die elementare Verwandtschaft nur zwischen Linien und Linien, Flächen und Flächen oder körperlichen Räumen und ebensolchen statthaben könne, unterstellt also die Dimensionserhaltung bei Homöomorphismen als etwas Selbstverständliches (Möbius II, 435). Man muß aber die Errungenschaften Möbius' auf dem im Text erwähnten Hintergrund sehen, erst dann wird der von ihm erzielte Fortschritt richtig deutlich.

Ziel der Arbeit[42] ist es nun, geschlossene Flächen gemäß ihrer elementaren Verwandtschaft zu klassifizieren. Von diesen Flächen wird verlangt, daß sie zusammenhängend sind, ganz im Endlichen liegen und daß sie „der leichteren Auffassung willen" (Möbius II, 440) „stetig gekrümmt und sich selbst nicht schneidend" (Möbius II, 440) seien. Das klingt zunächst so, als habe der Verfasser an Flächen im Sinne der Differentialgeometrie gedacht, eine Vermutung, die sich im weiteren an gewissen Punkten - nämlich da, wo von der Berührung zwischen Fläche und Tangentialebene die Rede ist - bestätigt.

Der erste Schritt bei der Klassifikation besteht nun darin, ebene Flächenstücke - also wegzusammenhängende, von einfachen geschlossenen Kurven begrenzte Teile der Ebene - einzuteilen. Es ergibt sich der Satz (Möbius II, 439), daß diese Gebilde durch die Anzahl ihrer Randkurven vom Standpunkt der elementaren Verwandtschaft eindeutig festgelegt sind.

Im Falle der geschlossenen Flächen bedient sich Möbius der Zerlegung derselben durch Ebenen[43], wie sie in den folgenden beiden Figuren aus seinem Aufsatz angedeutet ist:





---

[42] Zu deren Vorgeschichte vergleiche man Pont 1974, 88f sowie die Anmerkungen von C. Reinhardt - dem Entdecker des Heptaeders (vergleiche 4.2) - in Möbius II, 517f.

[43] Hier setzt natürlich die Analogie zur modernen Morse-Theorie an, welche solche Zerlegungen ebenfalls betrachtet. Allerdings ist das wesentliche Werkzeug in der modernen Theorie die Morse-Funktion, welche man sich im vorliegenden Fall, in dem sie explizit nicht auftritt, als „Höhenfunktion" der schneidenden Ebenen vorstellen könnte. Letztere wiederum kennzeichnen die „Niveaus", auf denen sich der Homotopietyp der im Aufbau befindlichen Mannigfaltigkeit ändert. Sieht man einmal von der Morse-Funktion ab, so findet man die wesentlichen Ideen der modernen Theorie in geometrischer Einkleidung alle schon bei Möbius. In 3.4 werden wir sehen, daß auch H. Poincaré unabhängig von Möbius Ansätze der Morse-Theorie entwickelte. Eine moderne Würdigung aus der Sicht des Mathematikers von Möbius' Ideen gibt Dombrowski 1990, 330-332; mehr mathematikhistorisch orientiert ist Pont 1974, 90-100, der allerdings keinen Bezug zur Morse-Theorie herstellt. Eine populäre Darstellung ist Stewart 1993.

Aus beiden Figuren ergibt sich dasselbe Schema:

$$\begin{array}{c|l} \varepsilon_1 & a \\ \varepsilon_2 & bc \\ \varepsilon_3 & d \end{array}$$

Dabei bedeuten die ε_i die in den Figuren angegebenen Schnittebenen mit nichtleerem Durchschnitt mit der Fläche; a, bc, d sind die Wegekomponenten dieser Durchschnitte. Für die zwischen diesen Wegekomponenten, die als geschlossene, einfache Kurven unterstellt werden, gelegenen Stücke der betrachteten Fläche werden folgende Bezeichnungen eingeführt:
Ein von einer einzigen Kurve berandetes Flächenstück heißt Union, ein von zwei Kurven berandetes Flächenstück Binion und ein von drei Kurven begrenztes Ternion (Möbius II, 444); symbolisch (f), (fg), (fgh).


Union


Binion


Ternion

Somit ergibt sich folgender Aufbau in den obigen Beispielen:

$$\begin{array}{lll} & & (a) \\ \varepsilon_1 & a & (ab)(c) \\ \varepsilon_2 & bc & (bcd) \\ \varepsilon_3 & d & (d) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & & (a) \\ \varepsilon_1 & a & (abc) \\ \varepsilon_2 & bc & (bcd) \\ \varepsilon_3 & d & (d) \end{array}$$

φ'' Torus φ'''

wofür Möbius (Möbius II, 444) auch schreibt:

$$\varphi'' = (a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d)$$
$$\varphi''' = (a) + (abc) + (bcd) + (d) \qquad \text{(Torus)}$$

Man erhält also einen sehr übersichtlichen Aufbau für die betrachteten Flächen, dessen Abhängigkeit von den verwendeten Schnittflächen noch zu klären ist. Es stellt sich heraus (Möbius II, 445):

„1) Alle Linien [das sind die begrenzenden Kurven; K. V.] sind von einander verschieden.

2) Die erste und die letzte aller Linienreihen besteht nur aus einer Linie.

3) Bei drei oder mehreren Linienreihen sind die Zahlen der Linien je zweier nächstfolgender Reihen um die Einheit verschieden."

Folglich wechseln gerade und ungerade Anzahlen ab; da gemäß 1) mit 1 begonnen und geendigt wird, kann man die Anzahl der Schnittebenen geradzahlig nehmen. Zwischen je zwei Schnitten, welche eine Veränderung der Kurvenanzahl um +1 oder -1 bewirken, liegt aber immer eine Stelle, in der die Fläche die entsprechende Schnittebene berührt:[44]

„Mithin ist die Zahl aller Berührungen eine gerade, d.h. eine stetig gekrümmte geschlossene Fläche wird von einer parallel sich fortbewegenden Ebene in einer geraden Anzahl von Puncten berührt."

(Möbius II, 445)

Um ein minimales Schema zu gewinnen, muß man also zuerst die Berührstellen ermitteln, und dann zwischen zwei aufeinander folgenden[45] jeweils die Struktur der Fläche untersuchen.

Betrachtet man nun die Flächenstücke, welche zwischen den berandenden (Schnitt-) Kurven liegen, so können sich gemäß 3) in einer Linienreihe nur drei Arten ergeben, nämlich die Union, die Binion (Übergang von f nach g) und die Ternion (Übergang von f nach gh oder umgekehrt). Natürlich werden diese Gebilde je nach Fläche, zu der sie gehören, noch ziemlich unterschiedlich ausfallen. Es stellt sich aber heraus, daß es eine Art von (topologisch gesehen) universellem Modell für sie gibt, nämlich das von einer geschlossenen einfachen Kurve berandete Ebenenstück (topologisch eine Kreisscheibe), das von zwei geschlossenen disjunkten einfachen Kurven, wobei die eine im inneren Bereich der anderen liegen soll, berandete Ebenenstück (topologisch ein Kreisring) und das analoge Gebilde mit drei Randkurven (topologisch eine Kreisscheibe, aus der zwei disjunkte Kreisscheiben herausgenommen worden sind). Dies zeigt Möbius im § 10 seiner Arbeit (Möbius II, 447-450):

„..., dass jede Union, jede Binion und jede Ternion resp. mit einer von einer, von zwei und von drei geschlossenen Linien begrenzten ebenen Fläche in elementarer Verwandtschaft steht."

Da die elementare Verwandtschaft symmetrisch und transitiv ist, ergibt sich hieraus, daß zwei Flächen mit (bis auf Umbenennungen) gleichen Schemata elementar verwandt sind.

Als Grundform der ersten Klasse, die ein weiteres Standardmodell für die Union liefert, bezeichnet Möbius die Sphäre, aus der eine topologische Kreisscheibe herausgenommen wurde; analog gibt es Grundformen der zweiten, dritten usw. Klasse. Folglich läßt sich jede geschlossene Fläche in Grundformen der ersten drei Klassen zerlegen. Beachtet man, daß

[44] Diese Stellen sind vom Standpunkt der Morse-Theorie gesehen jene, in denen die Morse-Funktion nicht-ausgeartet singulär wird. Möbius hat also durchaus deren Wichtigkeit gesehen.

[45] Wenn man sich die Fläche geeignet in den Raum eingebettet vorstellt und die Schnittebenen horizontal legt, kann man zur Ordnung der kritischen Punkte die Höhenfunktion verwenden.
Die Frage, ob und falls ja inwieweit die Fläche geeignet eingebettet werden muß, wird von Möbius nicht behandelt. Daß dies aber eine gewisse Rolle spielt, beziehungsweise daß hier etwas zu beweisen ist, zeigt schon das Beispiel der „falsch hingelegten" Brezelfläche:

man aus diesen elementaren Grundformen durch Zusammenfügen höhere Grundformen bilden kann, so ergibt sich, daß jede geschlossene Fläche durch zwei Grundformen höherer Klasse (aber natürlich der gleichen Klasse!) darstellbar ist.

Konkret werden dabei Grundformen, welche eine und nur eine gemeinsame Grenzlinie besitzen, zusammengefaßt. Für den Torus φ''' ergeben sich zwei derartige Kombinationen:

$$(a) + (abc) = (bc)$$
$$(bcd) + (d) = (bc)$$

Also wird aus $\varphi''' = (a) + (abc) + (bcd) + (d)$ zuerst einmal $\varphi''' = (bc) + (bc)$. Das heißt, daß sich der Torus darstellen läßt als Vereinigung zweier Grundformen zweiter Klasse. Sein Hauptergebnis formuliert Möbius schließlich so:

> „...eine geschlossene Fläche lässt sich immer durch eine gewisse Anzahl auf ihr gezogener geschlossener Linien in zwei Grundformen zerlegen, deren jede von allen diesen Linien begrenzt ist und daher eine der Zahl der Linien gleiche Klassenzahl hat. Nach derselben Zahl wollen wir nun auch die geschlossenen Flächen selbst klassifizieren und eine geschlossene Fläche der n-ten Klasse diejenige nennen, welche in zwei Grundformen der n-ten Klasse zerlegbar ist."
>
> (Möbius II, 456)[46]

Es stellt sich heraus, daß zwei geschlossene Flächen dann und nur dann elementarverwandt sind, wenn sie zur selben Klasse gehören (Möbius II, 458 - 460) und daß n-1 (wenn n die Klassenzahl angibt) die Maximalanzahl nicht zerstückender geschlossener Wege ist.[47] Als anschauliches Modell für eine geschlossene Fläche n-ter Klasse bietet Möbius seinen Lesern unter anderem zwei durch n Röhren verbundene n-fach gelochte Kugeloberflächen an.[48]

Die Möbiussche Arbeit schließt unter anderem mit hochinteressanten Überlegungen zum Themenkreis „Eulerscher Polyedersatz",[49] auf die wir hier nicht eingehen wollen. Im Hinblick auf die dreidimensionale Topologie, die ja das Hauptthema dieses Buches sein wird, sei hier noch erwähnt, daß sich Möbius auch mit berandeten 3-Mannigfaltigkeiten („Körper" sagt er) beschäftigt. Er gelangt hier allerdings zu falschen Ergebnissen, wenn er behauptet (Möbius II, 472):

> „Zwei Körper, deren jeder von einer Fläche der ersten und einer Fläche der zweiten Klasse begrenzt ist, sind demnach stets in elementarer Verwandtschaft, mögen die äusseren Grenzflächen für sich, und damit auch die innern für sich, entweder zu einerlei Klasse oder zu verschiedenen gehören."

Gegenbeispiele hierzu erhält man, worauf Dehn und Heegard schon hingewiesen haben (Dehn-Heegard 1907, 188 Anm. 86), wenn man zwei Tori unterschiedlich ineinander einbettet (oder einen Volltorus aus einem andern herausnimmt). Andere Gegenbeispiele kann

[46] Man beachte den Terminus „klassifizieren".

[47] Das erinnert natürlich an Riemanns Querschnitte von 1851 (vergleiche 2.1). Allerdings waren diese ursprünglich nur für berandete Flächen erklärt, geschlossene mußten erst durch Punktieren zu berandeten gemacht werden.
Ob Möbius Riemans Ideen gekannt hat, ist unklar. Pont meint, dies sei eher unwahrscheinlich wegen der unterschiedlichen Arbeitsgebiete dieser Mathematiker (Pont 1974, 97). Zu beachten ist auch, daß Riemanns Ideen erst langsam rezipiert wurden und durchaus einer aufarbeitenden Vermittlung bedurften.

[48] Vergleiche Möbius II, 456f. Das heute übliche Henkelmodell geht auf W. K. Clifford und F. Klein zurück (vergleiche 2.2.4).

[49] Vergleiche hierzu Pont 1974, 98 - 100 und Dombrowski 1990, 330 - 332.

man mit Hilfe von Alexanders gehörnter Sphäre bekommen. Es wird auch hier wieder deutlich, daß Möbius (und auch seine Zeitgenossen) nur an Standardeinbettungen dachten.

Geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten waren für Möbius, der die Möglichkeit einer vierten Dimension ausdrücklich verwarf (Möbius I, 171f), nur mit Singularitäten (Selbstdurchdringungen) vorstellbar (vgl. unten).

Fassen wir zum Abschluß dieser Betrachtungen den Stand des Klassifikationsproblems der Flächen, wie er bei Möbius erreicht wird, nochmals zusammen. Da ist zuerst einmal hervorzuheben, daß Möbius wohl der erste gewesen ist, der dieses Problem präzise formuliert hat, indem er sich bemühte, die Äquivalenzrelation, nach der klassifiziert werden soll, begrifflich klar zu fassen. Was dagegen die Gegenstände, welche klassifiziert werden sollen, die geschlossenen Flächen eben, anbelangt, so verblieb Möbius im klassischen Rahmen der Differentialgeometrie; hier unternimmt er keine Anstrengungen in Richtung auf eine begriffliche Präzisierung oder auch Verallgemeinerung. Obwohl ihm das Phänomen der Nichtorientierbarkeit zu diesem Zeitpunkt bereits bekannt war (vgl. 2.2.2.2), beschränkt er seine Betrachtungen de facto - ohne dies aber zu erwähnen - auf geschlossene orientierbare Flächen[50], ähnlich wie nach ihm C. Jordan (vgl. 2.3). Trotz gewisser Anleihen bei der Analysis darf man Möbius' Ansatz als geometrisch kennzeichnen, unterstützt durch eine Art von symbolischen Kalkül in Gestalt der Schemata und ihrer Umformung. An eine Präzisierung mit analytischen Hilfsmitteln im Sinne der Morse-Theorie hat anscheinend weder Möbius noch Poincaré noch sonst irgend jemand damals gedacht. Mit diesem geometrischen Charakter hängt auch zusammen, daß eine Erweiterung auf höhere Dimensionen - wie sie dann von Poincaré fürs Dreidimensionale geleistet wurde - nicht auf der Hand liegt. Insbesondere arbeitet Möbius fast ausschließlich mit dem, was man später (z.B. Dehn-Heegard 1907, 190f) Normalform[51] nennen sollte; topologische Invarianten wie etwa bei Riemann treten explizit so gut wie gar nicht auf.

Möglich, daß all dies die Rezeption der Ideen von Möbius behinderte. Das größte Hindernis war aber wohl doch, daß sie erst nach Erscheinen des zweiten Bandes seiner Werke 1886 einem größeren Publikum zugänglich wurden und daß erst ab diesem Zeitpunkt der allgegenwärtige F. Klein auf Möbius lobend aufmerksam machte. Zu diesem Zeitpunkt aber war das Klassifikationsproblem längst zur allgemeinen Befriedigung erledigt.

Wohl im Gefolge Kleins hat sich später vor allem W. Dyck mit den topologischen Ideen Möbius' beschäftigt (vergleiche 2.3). In seiner ersten größeren Arbeit zur Topologie würdigt Dyck dessen Einsichten ausführlich:

> „Der Gedanke, die Beziehungen der besonderen Punkte derartiger Curvensysteme zu der Grundzahl [i. w. die Riemannsche Zusammenhangszahl; K. V.] einer geschlossenen Fläche aufzusuchen, ist zu-

[50] Man könnte hier einwenden, daß das Möbius-Band eine berandete Fläche ist und daß es möglicherweise nicht klar war, daß das Phänomen der Nichtorientierbarkeit auch bei geschlossenen Flächen auftreten kann. Dem widerspricht aber die weiter unten betrachtete Arbeit „Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", in der Möbius ein geschlossenes nichtorientierbares Polyeder untersucht. (Das sogenannte Dekaeder, das durch Schließung des Möbius-Bandes entsteht. Topologisch gesehen ist das eine Sphäre mit einer Kreuzhaube, also eine projektive Ebene.)

[51] Dieser Begriff fällt allerdings bei Möbius nicht. Die Idee, ebene Normalformen für Flächen zu betrachten, scheint - wie man einer Bemerkung von Möbius entnehmen kann (Möbius II, 541 Anm.*) - im Spezialfall des Torus schon Gauß gehabt zu haben. Der Gaußsche Ansatz, der im übrigen dem später von J. Petersen propagierten (vergleiche 4.1) sehr ähnlich ist, wird von Möbius in einem Nachlaßtext erläutert (Möbius II, 540-542). Etwa zur gleichen Zeit wie bei Möbius tritt eine Normalform für Flächen und Körper bei J. B. Listing unter der Bezeichnung 'Diagramm' auf (Listing 1862, 115-117).

erst von Möbius in seiner „Theorie der elementaren Verwandtschaft" in diesen Berichten Bd. 15 (1863) [das ist Leipziger Akademie; K. V.] ausgeführt und es waren gerade dessen anschauliche und dem Wesen der Fragestellung angepasste Methoden, welche mich zu den vorliegenden Untersuchungen geführt haben. Und in der That trifft gerade diese Herleitung der Grundzahl das Wesen der Aufgabe, insofern durch ein solches Curvensystem gewissermassen der Werdeprocess der Fläche geschildert wird, ihr Wachsthum in schmalen Streifen, welche zwischen je zwei benachbarten Curven enthalten sind, wobei dann die Verwachsungen, von denen ja die Grundzahl abhängt, jedesmal in den singulären Stellen des Curvensystems ihren Ausdruck findet."

(Dyck 1885, 315)

Gebührende Anerkennung wurde Möbius dann auch im Enzyklopädieartikel von Dehn und Heegard zuteil, wo es unter anderem heißt:

„Wesentlich in der vorliegenden Formulierung ist das [Klassifikations-; K. V.] Problem vor Jordan von Möbius für zweiseitige geschlossene Flächen in unbedingt ausreichender Strenge erledigt worden (...), indem er von den als elementarverwandt (...) nachzuweisenden Flächen voraussetzt, daß sie endliche Ausdehnung haben, stetig gekrümmt und ohne Doppellinien sind."

(Dehn-Heegard 1907, 190 Anm. 91)

Wenn man heute auch nicht mehr die Behauptung, Möbius' Behandlung wäre „in unbedingt ausreichender Strenge" erfolgt, unterschreiben wird, so bleibt doch der Eindruck einer herausragenden, zu ihrer Zeit zu Unrecht nicht gewürdigten Pionierleistung.

2.2.2.2 Die Entdeckung nicht-orientierbarer Flächen

Im Jahre 1858 entdeckten J. B. Listing und A. F. Möbius unabhängig voneinander - aber vielleicht beide von Gauß angeregt[52] - die Fläche, die wir heute Möbius-Band nennen. Auf dem Hintergrund der traditionellen Auffassung von Fläche als Begrenzung eines Körpers mußte die Existenz „einseitiger" Flächen, wie man lange Zeit sagte, geradezu schockieren. Spätestens sie machten deutlich - wollte man daran festhalten, daß es sich bei ihnen tatsächlich um Flächen handelt, was ja vom Standpunkt ihrer inneren Geometrie durchaus gerechtfertigt war - daß der traditionelle Flächenbegriff einer Revision bedurfte. Sie zeigten

[52] Vergleiche Pont 1974, 109f. Auf den Seiten 100 bis 111 dieses Buches findet man eine ausführliche Darstellung der Entdeckungsgeschichte des Möbius-Bandes. Die Datierung der Entdeckung Listings stützt sich auf eine Notiz, welche sich in dessen Nachlaß gefunden hat (Pont 1974, 109), diejenige der Entdeckung Möbius' auf eine Mitteilung von C. Reinhardt (Möbius II, 513), wo man auch weitere interessante Informationen findet. Die simultane Entdeckung der einseitigen Flächen durch Listing und Möbius wurde von F. Klein folgendermaßen gesehen:
„Als Mann von 68 Jahren gelang ihm [das ist Möbius; K.V.] noch eine kapitale Entdeckung, von den einseitigen Flächen und Polyedern, für die das Kantengesetz nicht gilt und die keinen definierbaren Inhalt haben. Das „Moebiussche Band",..., ist ja jetzt [Erster Weltkrieg; K.V.] hinlänglich bekannt. Merkwürdigerweise wurde es im selben Jahr 1858 auch von Listing entdeckt und 1862 im „Zensus räumlicher Komplexe" bekanntgegeben - wieder ein Beispiel für den zwangsläufigen Charakter der Entwicklung der Wissenschaft." (Klein 1979, I 119)

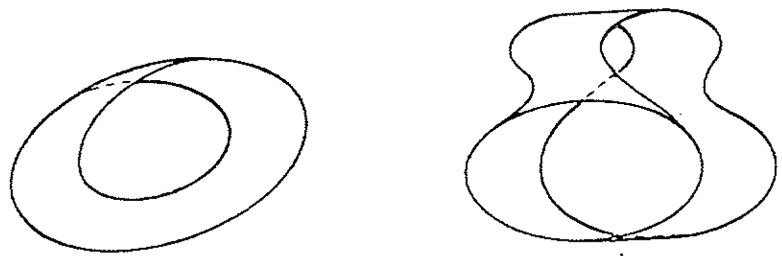
auch, daß bei einer vollständigen Klassifikation der Flächen wesentlich mehr Gebilde zu berücksichtigen sind, als herkömmlicherweise bekannt waren.[53]

Bei Listing spielt die einseitige Fläche nur eine ganz untergeordnete Rolle. Er erwähnt sie in seinem „Census" nur ein einziges Mal in einer Fußnote. An der entsprechenden Textstelle geht es darum, daß man bei einer gewöhnlichen berandeten Fläche, um von einer Seite auf die andere zu gelangen, stets den Rand passieren muß. Listing merkt an:

„Es mag nicht überflüssig erscheinen, schon bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, daß eine von einer cyklischen unverknoteten Curve vollständig begrenzte Fläche ganz andere Eigenschaften haben kann, als die angeführten."

(Listing 1862, 109 Anm. 1)

Dies wird dann durch zwei Abbildungen illustriert.



a *b*

[53] Möbius scheint sich dieser Problematik durchaus bewußt gewesen zu sein, wie das folgende Zitat zeigt:
„Weil endlich jede Grundform in elementarer Verwandtschaft zu einer ebenen Fläche steht und daher gleich einer solchen, zwei verschiedene Seiten hat; so muss auch jede in zwei Grundformen zerlegbare geschlossene Fläche zwei Seiten haben. Eine einseitige geschlossene Fläche lässt sich daher nicht in zwei Grundformen zerlegen und kann folglich auch nicht unter den jetzt nach Klassen geordneten geschlossenen Flächen begriffen sein." (Möbius II, 545f)
Dieser Abschnitt stammt aus dem Original der zu Möbius' Lebzeiten unveröffentlicht gebliebenen Pariser Preisschrift, aus welcher dann die beiden Abhandlungen 'Theorie der elementaren Verwandtschaft' und 'Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders' als separate Publikationen hervorgegangen sind. Die Tatsache, daß Möbius ausdrücklich fordert, daß die geschlossenen Flächen, welche er klassifizieren möchte, keine Linien der Selbstdurchdringung aufweisen sollen, könnte man als Hinweis darauf werten, daß er nicht-orientierbare Flächen bewußt ausschloß oder ausschließen mußte. Dies bestätigt sich in dem Aufsatz über den Polyederinhalt.

Listings Werk enthält noch manch anderes, was vom Standpunkt des Klassifikationsproblems von Interesse ist, so z. B. seine Idee einer topologischen Klassifikation der Komplexe („Unter den Constituenten der einzelnen Curven gibt es verschiedene Arten oder Kategorien, deren Unterscheidung lediglich von topologischen Eigenschaften, d.i. solchen abhängt, die sich nicht auf die Quantität und das Maass der Ausdehnung, sondern auf den Modus der Anordnung und Lage beziehen. Die Modalität des Zusammenhangs der Theile innerhalb jedes einzelnen Constituenten ist es, welche die nunmehr in Betracht kommenden Unterschiede bedingt." [Listing 1862, 109]), seine Methode der „Dialyse", welche den Riemannschen Rückkehrschnitten nahekommt (Listing 1862, 111-114) und seine vielfältigen Ausführungen zum Eulerschen Polyedersatz. Dennoch blieb Listings Werk für den uns hier interessierenden Themenkreis soweit festzustellen fast ohne Wirkung. Das mag an der Terminologie - die man vielleicht „klinisch" nennen könnte - und an der sehr mühsam wirkenden kombinatorischen Grundtendenz gelegen haben; auch daran, daß der als Physiker berufene Listing keine mathematischen Schüler hatte (allerdings nimmt F. Klein einen Einfluß auf Riemann an: vgl. Klein 1979, I 249).

Rezipiert wurde Listing hauptsächlich in England - allen voran durch P.G. Tait und J. Cl. Maxwell. Allerdings bleibt diese Rezeption weitgehend auf Listings Knotentheorie und damit verwandte Fragestellungen beschränkt, wovon auch Taits Nachruf ein beredtes Zeugnis ablegt:

„... we come to the two masterpieces, on which (...) Listing's fame must chiefly rest. They seem scarcely to have been noticed in this country, until attention was called to their contents by Clark Maxwell."

(Tait 1883, 316)

Eine ausführliche Darstellung der genannten Arbeiten Listings gibt Pont 1974, 41-58.

Ganz anders als bei Listing liegen die Dinge bei Möbius. Dieser entwickelt das Beispiel einer einseitigen Fläche aus einem allgemeineren Zusammenhang - nämlich aus der Betrachtung von Polyedern[54] und deren kohärenten Orientierungen. Triangulierte Polyeder, also solche, die aus lauter Dreiecken aufgebaut sind, heißen bei Möbius Trigonalpolyeder. Letztere lassen sich vollständig beschreiben durch Angabe der Ecken und Kanten sowie deren Orientierung („Sinn" sagt Möbius).[55] Besteht ein Trigonalpolyeder aus n Dreiecken, so muß bei Aufzählung einander benachbarter Dreiecke spätestens nach (6n+1) Dreiecken ein bereits aufgeführtes auftreten. Die kleinste Zahl, für die dies der Fall ist, nennt Möbius „Periode" (Möbius II, 480). Faßt man alle in einer Periode vorkommenden Dreiecke zusammen, so erhält man eine „Zone". Es gibt nun Polyeder, die nur aus einer Zone bestehen (wie das Tetraeder), aber auch solche, die in mehrere Zonen zerfallen (wie das Oktaeder).

Ein Polyeder ohne Selbstdurchdringung heißt bei Möbius „gewöhnlich". Im folgenden ist stets von gewöhnlichen Polyedern die Rede.

[54] „Aehnlicherweise lässt sich ein Polyeder als ein im Raum enthaltenes System dergestalt mit einander verbundener ebener Vielecke definiren, dass jede Kante eines jedes Vielecks die Kante noch eines und nur eines der übrigen Vielecke ist." (Möbius II, 476)

[55] Zwei Dreiecke, die eine gemeinsame Kante haben, sind so zu orientieren, daß die auf der gemeinsamen Kante induzierten Orientierungen einander entgegengesetzt sind (vergleiche Möbius II, 477). Dies ist das Gesetz der Kanten, welches „für alle von den Geometer bisher in Betracht genommenen Polyeder" gegolten hat (Möbius II, 477) Später wurde für derartige Festsetzungen der Orientierung die Bezeichnung „Indikatrix" üblich, die wohl auf F. Klein zurückgeht. Eine ausführliche Darstellung dieses Themas gibt Levi 1929,51-52.

Möbius zeigt im Anschluß hieran die Existenz von Polyedern, welche das Gesetz der Kanten nicht erfüllen. Er vermutet weiter, daß diese Polyeder nicht gewöhnlich sein können.

Da das Tetraeder - so argumentiert der Autor - aus vier Dreiecken besteht, muß ein Kandidat für ein nicht-gewöhnliches Polyeder mindestens aus fünf Dreiecken zusammengefügt sein. Genauer gesagt muß ein derartiges Polyeder mindestens eine Zone enthalten, die dem Kantengesetz widerspricht und folglich eine ungerade Anzahl von Elementen besitzen muß[56] :

„Die einfachste mit dem Kantengesetz in Widerspruch stehende Reihe ist demnach

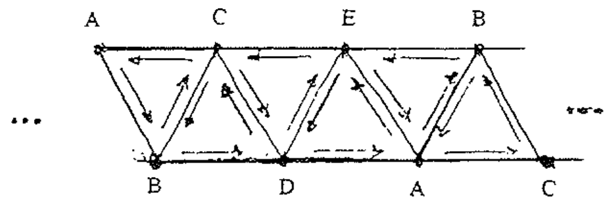
...ABCDEABC...

In der That folgt hieraus rückwärts die sich wiederholende Reihe von Dreiecken

(R) ..., ABC, BCD, CDE, DEA, EAB,...

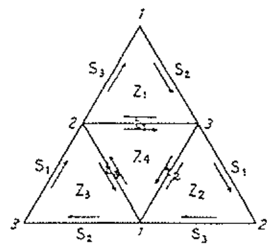
von denen, da man ihre Sinne abwechselnd positiv und negativ zu nehmen hat, das erste ABC und auf EAB nächstfolgende ABC, als das sechste Dreieck - sowie überhaupt je zwei nächstfolgende identische Dreiecke, der nach beiden Seiten fortgesetzten Reihe - entgegengesetzten Sinnes werden."

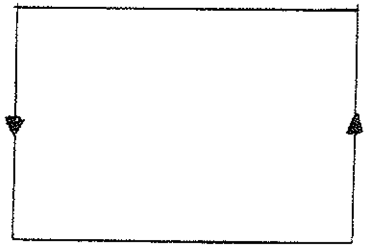
(Möbius II, 482)



(Das „erste" Dreieck ABC ist in dieser Reihenfolge orientiert, während das „zweite" die Orientierung CBA trägt.) Die Zone ABAB - ein gleichschenkliges Trapez - liefert das heute noch üblich Identifikationsschema des Möbius-Bandes:

[56] In der Tat genügt schon eine dreigliedrige Zone (etwa Z_3, Z_4 und Z_2 in der nachfolgenden Abbildung aus Levi 1929,53), welche man durch ein viertes Dreieck schließt:





(vgl. auch Möbius II, 484)

Mit Hilfe fünf weiterer Dreiecke schließt Möbius das eben definierte Polyederstück zum sogenannten Dekaeder, topologisch gesehen eine projektive Ebene P_2R (vgl. auch Reinhardt 1885), ab. Er schließt:

> „Unter den Trigonalpolyedern, welche mit dem Kantengesetze in Widerspruch sind und daher ohne gegenseitiges Durchschneiden ihrer Flächen nicht construirt werden können, ist demnach das durch die Dreiecke (R) [das ist die Zone von oben; K. V.] und (S) [die diese Zone schließenden Dreiecke; K. V.] ausgedrückte als das einfachste anzusehen. Es hat sechs Ecken, zehn Flächen und fünfzehn Kanten (ist also kein Euler'sches)..."
>
> (Möbius II, 483)

Es fällt auf, daß sich Möbius bezüglich der Selbstdurchdringung, die ein nichtorientierbares Polyeder bei Einbettung in den dreidimensionalen Raum notwendig aufweisen muß, durchaus im klaren war. Anzumerken ist aber, daß er für diese Tatsache keinen Beweis besaß.[57]

Das Wesen nichtorientierbarer Polyeder formulierte Möbius folgendermaßen (wobei auch deutlich wird, wie er wohl auf die Idee der Selbstdurchdringung gekommen sein mag):

> „Die Eigenthümlichkeit der Struktur eines Polyeders, welches mit dem Kantengesetze in Widerspruch ist, kann dadurch sehr bezeichnend ausgedrückt werden, dass man, auf der Oberfläche eines solchen Polyeders fortgehend, ohne auf diesem Weg irgend einmal die Fläche, auf welcher man geht, zu durchbrechen, auf die entgegengesetzte Seite der Fläche, von welcher man ausging, gelangen kann."
>
> (Möbius II, 483)[58]

[57] Ergebnisse über Einbettungen sind erst viel später erzielt worden; das erste in die topologische Richtung gehende Resultat dürfte Hilberts Satz aus dem Jahre 1900 (vgl. Hilbert 1972, Anhang V) über die Nichteinbettbarkeit der Pseudosphäre gewesen sein. Im Bereich der algebraischen Geometrie sind Betrachtungen zu Einbettungsfragen wohl schon früher anzutreffen, etwa im Zusammenhang mit Desingularisierungen. So hat E. Picard bewiesen, daß man jede algebraische Fläche im (komplex) fünfdimensionalen Raum singularitätenfrei einbetten kann (vgl. Wirtinger 1901, 173 Anm. 239).

[58] Sehr anschaulich wird die Eigenart des Möbius-Bandes an anderer Stelle von dessen Entdecker beschrieben:
„Auch hat diese Fläche nur eine Seite; denn wenn man sie - um dieses noch auf andere Weise vorstellig zu machen - von einer beliebigen Stelle aus mit einer Farbe zu überstreichen anfängt und damit fortfährt, ohne mit dem Pinsel über die Grenzlinie hinaus auf die andere Seite überzugehen, so werden nichtsdestoweniger zuletzt an jeder Stelle die zwei daselbst einander gegenüberliegenden Seiten der Fläche gefärbt sein." (Möbius II, 485)

Im Anschluß hieran führt Möbius die Bezeichnungen „einseitig" und „zweiseitig" (zuerst für Zonen, dann für ganze Polyeder) ein, die lange Zeit in Gebrauch geblieben sind (siehe unten).

Im weiteren wollen wir noch einige knappe Anmerkungen zum Themenkreis nicht-orientierbare Flächen machen. Der nächste Autor, der sich nach Möbius mit der Klassifikation der Flächen beschäftigte, Camille Jordan (vgl. 2.2.3), erwähnt dieses Problem überhaupt nicht, weshalb man folglich annehmen darf, daß er es - im Unterschied zu Möbius - gar nicht gesehen hat.

Der erste, der dieser Problematik eine gewisse Aufmerksamkeit gewidmet hat, scheint F. Klein gewesen zu sein. In einem durch seinen Briefwechsel mit L. Schläfli angeregten Artikel „Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen" [= Klein 1874] leistete Klein mehreres:

1. Er unterschied absolute und relative Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten; erstere sind unabhängig vom umgebenden Raum, letztere nicht. Diese sehr wichtige Unterscheidung, die - wie wir sehen werden - noch einige Zeit brauchen sollte, bis sie sich durchsetzen konnte, drängt sich fast auf, wenn man die Lage geschlossener Kurven in orientierbaren und nichtorientierbaren Flächen untersucht, wie es die Riemannsche Zusammenhangstheorie erfordert. Es liegt nahe anzunehmen, daß Klein die hier interessierende Einsicht im Zusammenhang mit seinen Betrachtungen über den Zusammenhang der projektiven Ebene gewonnen hat.[59]
2. Er gibt eine absolute Definition der Orientierbarkeit.
3. Er erkennt, daß die projektive Ebene, aber auch die topologisch ihr gleichwertige Steinersche Fläche, nicht-orientierbar[60] sind. Das Möbius-Band tritt ebenfalls auf; es wird als „bekanntes Beispiel" (Klein 1874, 551) bezeichnet.

Klein stellt auch ausdrücklich eine Beziehung zum Klassifikationsproblem her, welches er durch C. Jordan weitgehend gelöst sieht:[61] Dabei scheint er der - unrichtigen - Ansicht gewesen zu sein, daß eine entsprechende Festlegung der Zusammenhangszahlen gewis-

[59] Klein nennt später nicht-orientierbare Flächen „Doppelflächen" (Klein 1874, 550f), ein Begriff, den man heute eher auf die zweiblättrige Orientierungsüberlagerung solcher Flächen beziehen würde als auf die Fläche selbst. Während Klein bei der Behandlung nicht-orientierbarer Flächen den Umweg über die Orientierungsüberlagerung nahm, versuchte L. Schläfli sich an an der direkten Berechnung der Zusammenhangszahl von P_2R und fand den Wert 1, während Klein (aus moderner Sicht zutreffend) für 2 plädierte; beide sollten den ursprünglich vermuteten Wert 0 ersetzen.

[60] Das auf Möbius zurückgehende Begriffspaar einseitig/zweiseitig bezeichnete ursprünglich eine relative Eigenschaft, da es mit Hilfe der Flächennormalen präzisiert wurde. Dagegen ist die Kleinsche Indikatrix, eine genügend kleine geschlossene Kurve, die längs geschlossener Kurven in der Fläche verschoben wird, offenkundig vom umgebenden Raum unabhängig. Der Unterschied zwischen einseitig/zweiseitig und orientierbar/nicht-orientierbar sollte noch des öfteren diskutiert werden, so zum Beispiel bei W. Dyck (2.3.2) und E. Steinitz (4.2). Warnend sei hier hinzugefügt, daß gelegentlich - zum Beispiel bei Dehn-Heegard 1907, 158f sowie dort die Anmerkungen 13) und 14) - einseitig/ zweiseitig synonym mit orientierbar/nicht-orientierbar verwendet wurden. Folglich sind diese Begriffe dann - in Kleins Terminologie - absolute.

[61] „Daß diese Bedingung für die Transformierbarkeit zweier Flächen in der That hinreichend sind, findet sich kurz und übersichtlich bei C. Jordan bewiesen in Liouville's Journal, Bd. 11 (1866)." (Klein 1874, 552)

sermaßen automatisch zwischen geschlossenen orientierbaren und geschlossenen nicht-orientierbaren Flächen unterscheide, daß also - anders gesagt - eine Trennung dieser beiden Fälle durch Einführung entsprechender Voraussetzungen nicht notwendig sei (vgl. Klein 1874, 551f). (Dies ist ja durchaus plausibel, solange man nur die projektive Ebene als geschlossene nicht-orientierbare 2-Mannigfaltigkeit kennt. Man vergleiche auch Dyck 1888, 480, wo ausdrücklich hervorgehoben wird, daß nicht-orientierbare geschlossene Flächen sowohl gerade als auch ungerade Charakteristik besitzen können.)

Klein ging es in diesem Zusammenhang ganz allgemein darum, die projektive Geometrie den Methoden der neuentstandenen Topologie zugänglich zu machen (vgl. Scholz 1980, 163-167); die projektive Ebene ist dabei nur das einfachste konkrete Beispiel. In seinen 1882 erschienenen Leipziger Vorlesungen „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" teilte Klein das heute als Kleinsche Flasche oder Kleinscher Schlauch (auch gelegentlich „nicht-orientierbare Ringfläche" genannt [Seifert-Threlfall 1934, 3]) bekannte weitere Beispiel einer nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche mit. Diese unterscheidet sich zusammenhangsmäßig (im traditionellen Sinne) nicht vom Torus.[62]

Insgesamt jedoch blieb das Interesse am Themenkreis nicht-orientierbare Flächen eher gering. Zu erwähnen ist noch das Heptaeder, ein einseitiges Polyeder, das der Möbius-Schüler C. Reinhardt 1885 publizierte. Das Desinteresse dürfte vor allem im Umkreis der Topologie dadurch bedingt gewesen sein, daß Riemannsche Flächen - und diese bildeten den bevorzugten Gegenstand der topologischen Flächentheorie von damals - stets orientierbar sind. Die Topologie stand eben anfänglich überwiegend in Diensten der Funktionentheorie. Auf diesem Hintergrund erstaunt es nicht, daß das Phänomen der Nichtorientierbarkeit von eher traditionell ausgerichteten Geometern wie Schläfli und Klein aber auch Heß entsprechend gewürdigt wurde.

Ein weiteres Motiv für diese Nichtbeachtung führt C. Reinhardt in der bereits genannten Abhandlung an:

> „Er [Möbius; K. V.] überlässt es dem Leser selbst, sich ein Bild von der Configuration der Ecken, Flächen und Kanten eines jeden Polyeders zu machen. Dies ist aber gerade das Schwierigste, insbesondere dann, wenn die Flächen sich gegenseitig durchdringen, und unerlässlich, wenn man die Modelle solcher Polyeder construiren will. Vermuthlich ist auch die Schwierigkeit der Modellirung ganz besonders der einseitigen Polyeder der Grund gewesen, warum man bis jetzt so wenig mit diesen interessanten Gebilden sich beschäftigt hat. Auch sind die von Möbius angegebenen Beispiele nicht gerade derart einfach, dass sich an ihnen besonders leicht die Eigenthümlichkeit der Einseitigkeit erkennen liesse."
>
> (Reinhardt 1885, 107)

In der Zeit zwischen Möbius' Entdeckung und diesem Kommentar von Reinhardt gab es neben den Bemerkungen bei Klein mindestens noch eine Arbeit, die sich einseitigen Polyedern widmete: Hess 1877. A. E. Heß stand in der Tradition der Polyedertheorie; er hat seinen Angaben in Hess 1877, 4 f. zufolge auf der Basis des Triakontaeders vier nicht-orientierbare Polyeder konstruiert.

[62] Vergleiche Hilbert/Cohn-Vossen 1973, 271-273. Eine gewisse Bedeutung für die Geschichte der Topologie hatte auch Kleins 'Erlanger Programm', in dem die Analysis situs in den gruppentheoretisch geordneten Kanon der Geometrie eingeordnet wird. Vergleiche hierzu Kapitel 3.2.

Der erste, der nichtorientierbare Flächen systematisch behandelte und in das allgemeine Klassifikationschema eingliederte, ist W. Dyck (vgl. 2.3.2) gewesen. Ehe wir uns diesem Mathematiker widmen, müssen wir uns noch Camille Jordan zuwenden, dem eine weitere Klassifikation der Flächen zu verdanken ist.

2.2.3 Jordans Beiträge

Jordans Name ist auch heute noch bekannt im Bereich der Topologie. Dies liegt fast ausschließlich an dem nach ihm - gelegentlich wird auch noch „Brouwer" hinzugefügt - benannten Kurvensatz, welchen Jordan aber erst in seinem berühmten „Cours d'analyse" (3. Band, 1887; 1. Band, ^{2}1893) veröffentlichte. Viel weniger bekannt ist, daß Jordan am Beginn seiner Karriere (er war damals als Ingenieur in Chalon-sur-Saône tätig), nämlich 1866, zwei wichtige Arbeiten zur Topologie[63] verfaßte: „Sur la déformation des surfaces" und „Des contours tracés sur les surfaces" (Jordan IV, 85-89 bzw. Jordan IV, 91-111).[64] Diese beiden Aufsätze bilden, vor allem, was die verwendete Methode anbelangt, eine Einheit. Aus moderner Sicht läßt sich der jeweilige Inhalt einfach auf den Begriff bringen: Die erstgenannte Abhandlung ist der Klassifikation der berandeten und kompakten orientierbaren Flächen (insbesondere der geschlossenen) gewidmet, die zweite der Bestimmung der Fundamentalgruppe einer derartigen Fläche. Dabei gibt Jordan Erzeugende und Relationen an, ohne aber explizit den Gruppenbegriff zu verwenden. Methodisch gesehen setzt Jordan - ähnlich wie vor ihm schon Riemann - Rückkehrschnitte und (gelegentlich) auch Querschnitte ein, die er aber als (geschlossene) Wege auffaßt und der Homotopierelation[65] unterwirft. Damit wird Jordan zum wichtigsten Vorläufer bezüglich Poincaré's Einführung der Fundamentalgruppe (vgl. 3.2).

Die von Jordan betrachteten Flächen sind zuerst einmal Riemannsche Flächen (ohne daß Riemann genannt würde), da ausdrücklich die Möglichkeit von Verzweigungen zugestanden wird. (Jordan IV, 86 Anm. *), allerdings werden diese Komplikationen ausgeklammert, indem man sich auf jeweils ein Blatt beschränkt. Wie andere Textstellen aus jener Zeit zeigen, kannte Jordan die einschlägigen Arbeiten Riemanns zu diesem Thema (Jordan IV, 3-10). Erstaunlich ist, daß Jordan zumindest explizit kein anschauliches Modell für die von ihm betrachteten kompakten Flächen mit oder ohne Rand gibt. Seine ganze Vorgehensweise wird aber erst durchsichtig, wenn man z.B. das Henkelmodell (vgl. 2.2.4)

[63] Andere Arbeiten Jordans, die man der Topologie zuordnen kann, betrafen die Polyedertheorie, auch die Kristallographie. Ebenso streiften Jordans Ausführungen zur Theorie der komplex-algebraischen Funktionen topologische Fragestellungen (vergleiche Vanden Eynde 1993, 149-151).

[64] Darstellungen der beiden genannten Artikel von Jordan geben Pont 1974, 112 - 116, Scholz 1980, 154 - 158 und Vanden Eynde 1992/93, 147 - 149. Eine Detailkritik der zweiten Jordanschen Arbeit, welche gerade unter dem Gesichtspunkt der gewachsenen Strengeanforderungen interessant ist (vergleiche das Zitat von Klein in Anmerkung 61 oben), findet sich bei Gieseking 1912, 19 - 22.

[65] Dabei ist allerdings deren Fassung noch ziemlich vage:
„Deux contours fermés quelconque, tracés sur une surface donnée, seront dits réductibles l'un à l'autre, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation progressive." (Jordan IV, 91) Der Begriff „contour" (geschlossener Weg, Schleife) erfährt keinerlei Präzisierung; man darf sich darunter eine entsprechende Teilmenge der Fläche vorstellen, sollte allerdings sicher nicht an einen Weg im modernen Sinne - also an eine Abbildung - denken (vergleiche Kapitel 3 Anmerkung 91).

zugrunde legt. Es scheint mir kaum denkbar, daß Jordan ohne eine derartige Vorstellung seinen Zugang entwickelt haben könnte. Möglicherweise hat er ihn aus Rücksicht auf die analytische Tradition der Ecole polytechnique, die ja auch er durchlaufen hat, welche solchen anschaulichen Repräsentationen ziemlich ablehnend gegenüberstand, verschwiegen.

Desweiteren stellt sich heraus, daß die von Jordan betrachteten Flächen wegzusammenhängend und orientierbar sein müssen, da sonst einige seiner Überlegungen - etwa jene, die „Zweiseitigkeit" geschlossener Kurven betreffend (Jordan IV, 87) - nicht mehr haltbar sind. Da er das Problem der Nichtorientierbarkeit nicht anspricht, darf man wohl annehmen, daß Jordan dieses 1866 noch gar nicht gesehen hat (vgl. 2.2.2.2).[66]

Die betrachteten Flächen werden von Jordan durch zwei Angaben charakterisiert:

1. die Anzahl m der Randkurven (m ist gleich Null, falls die Fläche geschlossen ist);
2. die Maximalanzahl n nicht-zerstückender Schleifen (Rückkehrschnitte).

Letztere sollen einfache - also sich nicht schneidende - Kurven sein, die auch einander nicht treffen dürfen. Als Modell stelle man sich also eine Sphäre mit m herausgenommenen topologischen offenen Kreisscheiben und n Henkeln vor. Nicht-zerstückende Schleifen sind dann z.B. die Meridiane der Henkel.

Um nun modern gesprochen ein System von Erzeugenden für die Fundamentalgruppe einer derartigen Fläche vom Typ (m, n), wie Jordan in Jordan IV, 3-10 sagt, zu bekommen, nimmt Jordan zu jedem der genannten Rückkehrschnitte b_i ($i = 1, \ldots, n$) eine weitere Schleife hinzu, welche

1.) b_i in genau einem Punkt trifft,

2.) kein b_j für $j \neq i$ schneidet, und

3.) eine einfache Kurve ist.

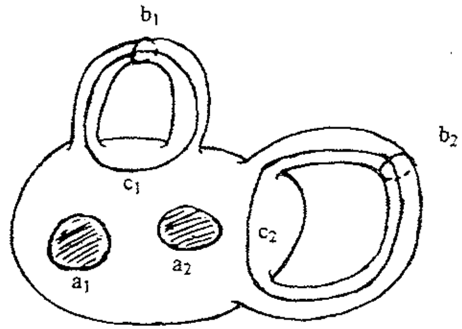
Anschaulich gesprochen handelt es sich also um geschlossene Kurven, welche jeweils einen Henkel durchlaufen.[67] Wir bezeichnen diese den b_i konjugierte Erzeugende mit c_i ($i = 1, \ldots, n$) Bezeichnen wir schließlich mit a_t ($t = 1, \ldots, m$) noch die Randkurven der Fläche, so sind die Erzeugenden[68] der Fundamentalgruppe gegeben als

[66] Dieses Übersehen wird Jordan von Dehn und Heegard kritisch angelastet:
„Charakteristisch für die anschauungsmäßige Beweisführung ist endlich, daß die Voraussetzung der Zweiseitigkeit gar nicht ausdrücklich gemacht wird, sondern nur in abgeleiteten Eigenschaften (...) zu Tage tritt." (Dehn-Heegard 1907, 190 Anm. 92)

[67] Jordan erläutert, wie man diese Kurven finden kann (Jordan IV, 113): Man verbinde zwei Punkte, welche „links" und „rechts" von b_i im Henkel liegen, so, daß b_i durch die Verbindungskurve nicht geschnitten wird. Anschließend vervollständige man in der naheliegenden Weise zu einer Schleife. Soweit ich sehe, gibt aber Jordan kein wirkliches Argument, warum diese Schleifen nicht die anderen Rückkehrschnitte treffen sollten. Auch deshalb scheint es mir plausibel, daß sich Jordan auf ein anschauliches Modell gestützt hat, dem er diese Einsicht entnommen hat.

[68] Natürlich - und das macht auch Jordan (Jordan IV, 95f) klar - sind diese geschlossenen Wege noch auf einen festen Grundpunkt zu beziehen. Die auf einen Grundpunkt bezogenen Wege werden von Jordan durch eckige Klammern kenntlich gemacht und als „contours élémentaires" bezeichnet (Jordan IV, 96). Poincaré wird später von „contours fondamentaux" und dergleichen sprechen (vergleiche unten 3.2). Ich erlaube mir an dieser Stelle die Bequemlichkeit, die punktierten Schleifen nicht ausdrücklich von den „freien" zu unterscheiden. Im übrigen ist auch noch zu beachten, daß Jordan in der Regel mit freien Homotopien arbeitet, was gewisse Mehrdeutigkeiten erzeugt (vergleiche Vanden Eynde 1992/3,148f) und

$$\langle a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n \rangle$$



Um die zwischen diesen Erzeugenden herrschende Relation herzuleiten, benutzt Jordan eine Art von Seifert-van Kampen-Argument. Hierzu betrachtet er eine einfache Schleife E, welche beispielsweise die Schleifen a_1, b_1 und c_1 in ihrem „Innern" enthalten soll, während alle anderen Schleifen im „Äußeren" liegen sollen.[69] Dann stelle man E auf zweierlei Arten durch die Erzeugenden dar, was schließlich die bekannte Relation

daß weder begrifflich noch notationell zwischen Wegen und deren Homotopieklassen - um die es ja hier geht - unterschieden wird.
Es sei hier noch erwähnt, worauf auch in der oben genannten Literatur hingewiesen wird, daß Jordan die Verknüpfung zweier geschlossener Elementarschleifen einführt und als Produkt notiert, daß er ausdrücklich zwischen den beiden Durchlaufungsrichtungen eines Weges unterscheidet und C beziehungsweise C^{-1} schreibt sowie schließlich auch die Exponentialschreibweise allgemein verwendet. Auch der Punktweg und die auf diesen „reduzierbaren" Schleifen treten bei ihm auf. Und dennoch spricht der Verfasser des 'Traité des substitutions et des équations algébriques' (1870) nicht von Gruppe. Begründung: Wo keine Substitutionen, da - nach damaliger Ansicht - auch keine Gruppe. Poincaré wird diese Kluft mit Hilfe der Überlagerungstheorie überbrücken (vergleiche 3.2).
Endlich sei noch bemerkt, daß die Hilfswege, mit denen Jordan seine Schleifen an einen festen Grundpunkt anbindet, in ähnlicher Weise bei Poincaré als „Stacheln" wieder auftreten werden (vergleiche 3.2). Da sich diese Konstruktion aus der Sachlogik ergibt, sollte man hierin nicht unbedingt einen Hinweis auf eine (meines Wissens nicht nachgewiesene) Abhängigkeit sehen.

[69] Bezeichnet I das „Innere" von E (einschließlich E) und A das „Äußere" (einschließlich E) sowie F die Gesamtfläche, so wäre die Situation die folgende:

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ \cup & & \cap \\ (A \cap I) = E & & F = (A \cup I) \\ \cap & & \cup \\ & A & \end{array}$$

Allerdings sind diese Teilräume nicht offen, weshalb man Seifert-van Kampen nicht ohne weiteres anwenden kann.
Das Argument, warum sich E durch a_1, b_1 und c_1 darstellen läßt, beruht darauf, daß das „Innere" von E, wenn man die von a_1, b_1 und c_1 umschlossenen Flächenstücke herausnimmt, durch jeden Querschnitt zerstückt wird (Jordan IV, 115f). Hierbei ist es allerdings wichtig, die Schleifen mit dem Grundpunkt zu

$$a_1 \ldots a_m b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \ldots b_n c_n b_n^{-1} c_n^{-1}$$

ergibt (Jordan IV, 96-103).[70] Damit hat Jordan das, was wir heute die Struktur der Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden kompakten orientierbaren Fläche mit Rand nennen würden, im wesentlichen aufgeklärt. Er beschließt seine Ausführungen mit einem weiteren Struktursatz, der feststellt, wann zwei Erzeugendensysteme äquivalent (im Sinne der Homotopierelation) sind (vgl. hierzu Gieseking 1912, 19-22).

Die der Klassifikation gewidmete Abhandlung „Sur la déformation des surfaces" ist kurz nach der geschilderten Arbeit über geschlossene Kurven (Februar bzw. Januar 1866) entstanden. Sie beginnt mit einer Bemerkung, die die Beziehung zur aktuellen Forschung herstellt und damit wissenschaftshistorisch sehr interessant ist. Es heißt bei Jordan:

> „Un des problèmes les plus connus de la Géométrie, est le suivant:
>
> Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature. On peut se proposer un problème analoque, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géometrie de situation, et nous allons la résoudre en démontrant le théorème suivant:..."
>
> (Jordan IV, 85)[71]

Das erste Problem kann man mit der vor allem in der Differentialgeometrie unter dem Terminus „Verbiegbarkeit" diskutierten Frage nach der isometrischen Abbildung zweier Flächen oder Flächenstücke aufeinander[72] identifizieren, während das zweite Problem als das topologische Homöomorphieproblem eingeordnet werden darf. Dabei muß natürlich zugegeben werden, daß Jordans Ausdrucksweise hier ziemlich vage ist (wir werden darauf zurückkommen.)[73]

Gegenstand der Arbeit Jordans ist der Beweis des nachfolgenden Satzes:

---

verbinden, der nach Voraussetzung auch auf E liegen soll. (Nimmt man aus dem von E berandeten Bereich alle eingezeichneten Kurven nebst der von ihnen berandeten Bereiche heraus, so erhält man ein einfach-zusammenhängendes Flächenstück.)

[70] Im allgemeinen (das heißt für n>2) ist es nicht möglich, die Darstellung der Fundamentalgruppe wesentlich zu vereinfachen (vergleiche Massey 1989, 132), weshalb man bei der Klassifikation der Flächen dann meist diese Gruppen abelsch macht, also mit der ersten Homologiegruppe arbeitet (so zum Beispiel bei Massey in dem erwähnten Buch).
In den 1920er Jahren hat vor allem J. Nielsen die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen unter gruppentheoretischem Aspekt - insbesondere ihre Automorphismen, welche für die Abbildungsklassengruppe maßgeblich sind, - untersucht (vergleiche Hansen 1993 für einen Überblick).

[71] Die Bezeichnung „géométrie de situation", welche an Leibniz' „geometria situs" erinnert und den deutschen Leser eher irreführend an von Staudts „Geometrie der Lage" denken läßt, wurde von Poncelet 1858 gebraucht (vergleiche Pont 1974, 113). Sie tritt gelegentlich beim frühen Pooincaré auf (vergleiche Anmerkung 90 im 3. Kapitel) und wurde noch von Hadamard im Titel seiner Antrittsvorlesung am Collège de France „La géométrie de situation et son rôle en mathématiques" verwendet (Hadamard II, 805 - 829). Die Redeweise „sans déchirure ni duplication" erinnert dagegen an C. Neumann (siehe unten).

[72] Vergleiche Dombrowski 1990, 334f.

[73] In der Forderung nach beliebiger Dehnbarkeit kann man den Anfang der heute noch beliebten Charakterisierung der Topologie als „Gummituchmathematik" sehen. Bei der Erläuterung seiner „Flasche" bemühte Klein später erstmals explizit die Vorstellung eines Kautschukschlauches: „Es gehören hierher endlich gewisse unberandete Doppelflächen. Man kann sich von denselben ein Bild machen, indem man etwa ein Stück eines Kautschukschlauches umstülpt und nun sich so sich selbst durchdringen läßt, daß bei Zusammenbiegung der Enden die Außenseite mit der Innenseite zusammenkommt." (Klein 1882, 571)

> „Pour que deux surfaces ou portions de surface flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplication, il faut et il suffit:
>
> 1° Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surface soit le même. (Si les surfaces considérées sont fermées, ce nombre et nul.) [m von oben; K.V:]
>
> 2° Que le nombre maximum des contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et de l'autre." [n von oben; K.V.]
>
> (Jordan IV, 85)

Für den Flächenbegriff gilt das weiter oben Gesagte. Um die Notwendigkeit seiner Bedingungen zu zeigen, benutzt Jordan die mehr oder minder unbewiesen unterstellte Tatsache, daß die Anzahlen m und n bei Homöomorphismen („déformations" [Jordan IV, 86]) erhalten bleiben. Zum Nachweis dafür, daß seine Bedingungen auch hinreichen, verwendet er das folgende als evident zu betrachtende Prinzip:[74]

> „Deux surfaces S, S' sont applicables l'une sur l'autre si l'on peut les décomposer en éléments infiniments petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de S correspondent des éléments contigus des S'."
>
> (Jordan IV, 86)

Was dieses Prinzip bewerkstelligen soll, - und das zeigt auch eine genauere Betrachtung des Jordanschen Beweises (Jordan IV, 88f) - ist eine Art von „lokal-global-Übergang":[75] Beide Flächen vom Typ (m,n) werden durch meridianes Zerschneiden der jeweils n Henkel in Kugelflächen mit m + 2n Löchern überführt, wobei die aufgeschnittenen Henkelstücke wegdeformiert werden[76] und so die 2n Löcher geben. Das Problem reduziert sich somit darauf, die Homöomorphie dieser beiden gelochten Sphären nachzuweisen. Hierzu wiederum ersetzt Jordan die gelochten Sphären, indem er deren Löcher durch eine Art von in der betrachteten Fläche liegenden Kanalsystem verbindet, durch Flächen, deren Rand jeweils nur noch aus einer wegzusammenhängenden Komponente besteht.

Die beiden Komponenten des Komplementes des geschilderten Systems von Kurven[77] werden durch jeden Querschnitt zerlegt, sind also im damaligen Sinne „einfach-zusammenhängend". Folglich kann man diese, da ein „einfach-zusammenhängendes" Gebiet durch jeden Querschnitt in genau zwei ebensolche zerschnitten wird, und damit die Restfläche durch hinreichend häufiges Schneiden in „unendliche kleine Elemente" zerlegen.[78] Analoges gilt natürlich für die zweite Fläche vom Typ (m,n), was für Jordan hinreicht, um

---

[74] Wörtlich heißt es: „Nous nous appuierons pour cela sur le principe suivant qu'on peut regarder comme évident, et prendre au besoin pour définition:.." (Jordan IV, 86). Diese Formulierung zeigt eigentlich schon deutlich, daß Jordan nicht einfach der Ansicht war, dieses Prinzip sei äquivalent seiner Auffassung von Homöomorphie, wie Pont dies darstellt (Pont 1974, 113).

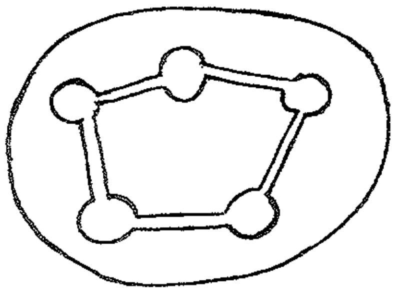
[75] Solche Übergänge bewerkstelligt man heute zum Beispiel mit Partitionen der Eins, welche Überdeckungen der fraglichen Räume subordiniert sind. Diese Technik wird etwa im bekannten Schnitterweiterungssatz von A. Dold verwendet (vergleiche Dieck-Kamps-Puppe 1970, §§ 8 und 9 oder Dold 1963).

[76] „La surface T est d'ailleurs limitée par m+2n contours, à savoir $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ [das sind die Randkurven; K.V.] et les deux bords des sections faites lelong de chacun des n contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$." (Jordan IV, 107)

[77] Man beachte, daß dieses dem heute gebräuchlichen Fundamentalpolygon einer orientierbaren geschlossenen Fläche schon recht nahe kommt (vergleiche Massey 1989, 133).

[78] „En multipliant indéfiniment les transversales, on arrivera à découper la surface considérée en éléments infiniment petits." (Jordan IV, 88)

die Homöomorphie der beiden Komplemente anzunehmen, wobei natürlich die Elemente in geeignete Beziehung gesetzt werden müssen. Dies geschieht mit Hilfe der Zuordnung der Randkurven und der Rückquerschnitte - also der Ränder der Löcher, welche Jordan explizit diskutiert (Jordan IV, 108f).



Fläche vom Typ (3,1) mit Kanälen

Sieht man einmal von den zweifellos vorhandenen Mängeln und Lücken ab, deren gravierendster vielleicht das oben erwähnte „Prinzip" ist[79], so enthält doch Jordans Arbeit eine Menge interessanter und tragfähiger Ideen, deren wichtigste wohl die Präsentation der Fundamentalgruppe und die Rückführung auf eine Normalform sowie das hiermit zusammenhängende, bei Jordan allerdings nur andeutungsweise vorhandene Fundamentalpolygon sein dürften. Methodisch gesehen ist die Verschmelzung von topologischer Tradition (Zusammenhangstheorie nach Riemann) und funktionentheoretischer (Homotopie von Wegen), welche Jordan vornahm, von größter Bedeutung gewesen. Seine Betrachtungen sind weitgehend frei von Überlegungen der traditionellen Geometrie und Analysis;[80] die

79 Wie schon erwähnt, fällt die Kritik von Dehn und Heegard an Jordan ziemlich scharf aus (Dehn-Heegard 1907, 189f Anm. 92). Dabei mag eine Rolle gespielt haben, daß Jordan ausschließlich kontinuumstopologisch arbeitete, während Dehn und Heegard ja entschieden die kombinatorische Richtung als die strengere betrachteten (vergleiche 4.2 und 6).
An der angegebenen Stelle heißt es unter anderem:
„Wann sind zwei M_2 in E_3 miteinander homotop, oder, anschaulicher, ineinander stetig transformierbar? In dieser Form ist das Problem von Jordan (...) formuliert und für zweiseitige Flächen behandelt worden. Daß hierbei alle möglichen sogenannten anschaulichen Annahmen gemacht werden, ist von vorneherein klar. Es wird z.B. die Endlichkeit des Geschlechts (...) vorausgesetzt, ferner folgende Annahme über die stetige Deformierbarkeit gemacht: [Folgt Jordans Prinzip; K.V.]. Naturgemäß werden nachher beim Beweis auch stillschweigend Annahmen über die Entstehung solcher unendlich kleiner Teile gemacht." Vergleiche aber auch unten Anm. 82

80 Insbesondere macht Jordan kaum Gebrauch von der Einbettung der zu untersuchenden Flächen in den gewöhnlichen Raum. Sein Standpunkt ist also eher derjenige der Gaußschen Differentialgeometrie.

Topologie beginnt bei ihm ein eigenständiges Dasein zu führen (vgl. 8). Hemmend wirkt sich bei Jordan das Fehlen der Gruppentheorie aus. Hätte er diese ins Spiel gebracht, so wäre der Nachweis, daß Flächen nicht homöomorph sein können, wenn sich ihre Fundamentalgruppen unterscheiden, einfacher und strenger zu führen gewesen. Bemerkenswerterweise setzte aber selbst Poincaré die von ihm dann eingeführte Fundamentalgruppe (vgl. 3.2) nicht im Zusammenhang mit den Klassifikationsproblem der Flächen ein, wohl, weil er dieses Problem als anderweitig gelöst betrachtete. Überhaupt läßt sich inhaltlich keine Beziehung zwischen Jordans Überlegungen, wie wir sie gerade kennengelernt haben, und Poincaré's Einführung der Fundamentalgruppe erkennen. Während Jordan ausschließlich Flächen betrachtete, war Poincaré fast genauso ausschließlich am drei- und höherdimensionalen Fall interessiert.

2.2.4 Weitere Entwicklungen, insbesondere Modellvorstellungen

Mit Jordans Arbeit war das topologische Klassifikationsproblem für kompakte berandete zusammenhängende orientierbare Flächen, sieht man einmal von einigen Unvollkommenheiten ab, gelöst. Wie wir gesehen haben, gab Jordan aber kein anschauliches Modell für eine n-fach zusamenhängende Fläche an, obwohl er vielleicht mit einem solchen gearbeitet hat. Bei Möbius hingegen, dessen Ausführungen (vgl. 2.2.2.1) lange Zeit nur wenig Beachtung fanden, begegneten wir dem „Zwei-Sphären-Modell" für eine n-fach zusammenhängende geschlossene Fläche. Dies ist allerdings nicht die einzige anschauliche Vorstellung, die Möbius seinen Lesern anbietet, wenn auch die von ihm in den Vordergrund gerückte: Wir finden bei ihm auch noch zwei (n-1)-fach gelochte Ebenenstücke, welche durch entsprechende Röhren miteinander verbunden sind, sowie das folgende Modell: „Dieselbe [Fläche; K.V.] kann man sich daher auch als die Oberfläche eines von n-1 Kanälen durchbohrten Körpers vorstellen, vorausgesetzt, dass die Oberfläche vor der Durchbohrung zur ersten Klasse gehörte, und dass keine zwei der Kanäle einen Theil mit einander gemein haben." (Möbius II, 457).[81] Topologisch handelt es sich somit um eine gelochte, von disjunkten Kanälen, gewissermaßen ins Innere umgestülpte Henkel, durchzogene Sphäre.

Auf dem Hintergrund der Arbeit von Jordan, die mehr Beachtung fand als diejenige von Möbius[82], genügte es, ein besonders anschauliches Modell für die n-fach zusammenhän-

81 Man beachte die in der traditionellen Flächenauffassung stehende Formulierung, die von der Oberfläche eines Körpers spricht. Im übrigen war das Thema "Durchbohrungen" ein Klassiker der Polyedertheorie, insbesondere im Zusammenhang mit dem Eulerschen Satz.

82 So würdigt Dyck in seiner großen Arbeit von 1888 Jordan als denjenigen, der das Klassifikationsproblem als erster gelöst habe:
„Der Satz, dass für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen) die Uebereinstimmung der sogleich zu besprechenden „Zusammenhangszahl" und der Anzahl der eindimensionalen Begrenzungen (Randcurven) derselben als einzige absolute Eigenschaften von aus einem einzigen Stück bestehenden Mannigfaltigkeiten (Flächen) nothwendig und hinreichend ist für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger Beziehung zwischen allen Elementen solcher Mannigfaltigkeiten, ist wohl zuerst von C. Jordan bewiesen worden." (Dyck 1888, 458 Anm.**)
Vergleiche auch Gieseking 1912, 22 Anm. 22 und Klein 1874, 552 Anm.*.

gende Fläche, die dann als geschlossen vorausgesetzt wurde, auszuwählen. Die Idee, hierfür eine Sphäre mit n Henkeln („Handhaben", „Anhängsel") zu nehmen, geht im Falle Riemannscher Flächen auf W.K. Clifford (Clifford 1877) zurück; populär gemacht hat sie dann F. Klein in seinem auf Vorlesungen basierenden Buch „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale..." (Klein 1882); der Text der zugrunde liegenden Vorlesungen ist in Klein 1987 zugänglich. Im Kapitel 9 seiner Vorlesungen „Einschiebung aus der Analysis Situs (Topologie) mit verschiedenen Anwendungen" (Klein 1987, 144-165) definiert Klein das Geschlecht einer geschlossenen Fläche als die Maximalzahl nicht-zerstückender Rückkehrschnitte (Klein 1987, 148) und erwähnt den Satz, daß geschlossene (orientierbare) Flächen gleichen Geschlechtes „eindeutig stetig ineinander überführbar" sind. Schließlich wird die Kugel mit Henkeln als Normalform eingeführt (Klein 1987, 149), welche mit der folgenden Abbildung illustriert wird:

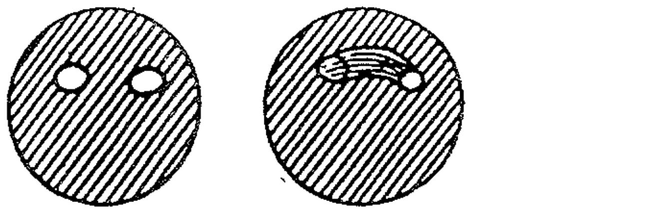


Abbildung aus Klein 1987, 149

Diese Modellvorstellung ist bis heute in Gebrauch geblieben; an ihre Seite trat (wann?) viel später noch die zusammenhängende Summe von n Tori. Man beachte, daß beide nur den orientierbaren Fall erfassen.

Zum Abschluß seien hier noch zwei Entwicklungen erwähnt, die für die Topologie von großer Bedeutung werden sollten, ohne direkt zu dieser gerechnet werden zu können:

Da ist einmal die Untersuchung automorpher, also (wie man sich damals etwas irreführend ausdrückte) „mehrfach periodischer" komplexer Funktionen, welche mit Beginn der 1880er Jahre vor allem von F. Klein und H. Poincaré in Angriff genommen wurde. Neben vielen anderen Impulsen, die wir in 3.2 kennenlernen werden, ergab sich hier erneut (nach Möbius), aber diesmal systematisch, die Idee, geschlossene orientierbare Flächen durch Identifikationen aus Fundamentalbereichen (Polygonen der hyperbolischen Ebene) zu erhalten, weshalb man auch gelegentlich (z. B. Threlfall 1932, 32) vom "Poincaréschen Fundamentalpolygon" sprach. Das Fundamentalpolygon hat allerdings im 19. Jahrhundert als Hilfsmittel zur Klassifikation der (geschlossenen) Flächen keine wichtige Rolle gespielt. Es wird eigentlich erst dann interessant, wenn man mit der Fundamentalgruppe arbeiten will, weil es für diese Erzeugende und Relation liefert (vgl. auch 2.5).

Das Problem der Normalform nicht-orientierbarer geschlossener Flächen wurde erstmals 1883 von G. Weichold in Angriff genommen, der ausgebohrte Kreisscheiben mit Kreuz-

hauben verschloß (vgl. Pont 1974, 128-131). Ausführlich diskutiert wurde es dann bei Dyck 1888, 479 - 483, wo neben den Kreuzhauben auch die Einsicht zu finden ist, daß man bei Verbleiben von mindestens einer Kreuhaube zwei Kreuzhauben stets in einen Henkel überführen kann.

2.3 Die Beiträge von W. Dyck

Das Klassifikationsproblem hatte mit den oben besprochenen Arbeiten und der anschaulichen Deutung von deren Ergebnis eine für damalige Verhältnisse recht befriedigende Lösung gefunden. Das heißt natürlich nicht, daß nicht einzelne Punkte kritisiert und verbessert worden wären, wie das etwa A. Tonelli getan hat.

Summarisch gesprochen blieben aber doch mindestens noch zwei Aufgaben:

1. Systematisierung und Strukturierung des vorhandenen Materials, insbesondere Klärung des Normalformenproblems (das ja, wie wir gesehen haben, bei Jordan weitgehend offengeblieben war, während der hierin deutlichere Möbius erst sehr spät rezipiert wurde);
2. Einbeziehung des nichtorientierbaren Falles in die Klassifikation.

Hinzu kam eine weitere Fragestellung, die sich aus dem vorhandenen Material zwar nicht zwangsläufig ergab, die aber auf dem Hintergrund des „Aufbruchs in höhere Dimensionen", welcher in den 1870er Jahren einsetzte,[83] sehr naheliegend war:

3. Übertragung der gewonnenen Einsichten auf drei und mehr Dimensionen.

Es ist bemerkenswert, daß die Arbeiten von W. Dyck in allen drei Hinsichten Fortschritte brachten. Dyck entstammte der Kleinschen Schule, dessen Assistent er 1879 in München wurde, nachdem er bei ihm eine Dissertation über Riemannsche Flächen geschrieben hatte, und dem er 1881 nach Leipzig[84] folgte, wo er sich 1882 habilitierte. Ab 1884 war Dyck dann in München tätig an der Polytechnischen Hochschule. Die wichtigsten Beiträge zur Topologie stammen aus den Anfängen von Dycks Münchner Zeit.

Im folgenden möchte ich auf zwei Themenkreise[85] eingehen: einmal auf eine kurze Note von Dyck aus dem Jahre 1884, wo er über 3-Mannigfaltigkeiten spricht, sodann auf seine beiden Artikel „Beiträge zur Analysis situs", welche 1888 und 1890 in den Mathematischen Annalen erschienen und die eine Zusammenfassung der Bemühungen Dycks um die Topologie und zugleich deren Endpunkt darstellen.

[83] Vergleiche hierzu Schlegel 1886, Scholz 1980, 230-242 und Volkert 1993.
[84] In Leipzig hatte Dyck die erste etatmäßige Assistentenstelle Deutschlands im Fach Mathematik inne; vergleiche Lorey 1916, 16.
[85] Ausführliche Darstellungen von Dycks Beiträgen findet man bei Pont 1974, 131-154, Bollinger 1972, 111-116 und Scholz 1980, 249-258.

2.3.1 Der Vortrag von 1884

Im Spätsommer 1884 reiste W. Dyck zum 54. Treffen der British Association for the Advancement of Science, welches in Montreal abgehalten wurde. Er hielt dort einen Vortrag mit dem Titel „On the „Analysis Situs" of Threedimensional Spaces", von dem eine Art Zusammenfassung im entsprechenden Report der Vereinigung gedruckt wurde (Dyck 1885). Wie die bei Pont veröffentlichten Briefe zeigen, arbeitete Dyck in den 1880er Jahren intensiv am Homöomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten; die Einsicht, daß hier keine Lösung für ihn zu erzielen war, fällt in etwa mit dem Ende seiner topologischen Arbeiten insgesamt zusammen (vgl. Pont 1974, 134f). Besonders bemerkenswert in unserem Zusammenhang ist der Brief Dycks an F. Klein vom 27. Februar 1884, in dem ein verknoteter Torus auftaucht. Mit ihm belegt Dyck seine Behauptung, daß es geschlossene Flächen gibt, welche den Raum - womit wohl S^3 gemeint war - in zwei nicht-homöomorphe Teile zerlegen.[86] Damit kommt Dyck einer Idee nahe, die von M. Dehn 1910 entwickelt werden sollte und welche dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeiten durch heute so genannte Dehn-Chirurgie aus Knoten oder Verkettungen erhält (vgl. 4.3).

Der eigentliche Vortrag beginnt mit einem Hinweis auf die Funktionentheorie, welche die Untersuchung „dreidimensionaler Räume"[87] motiviert habe, um dann sofort die zentrale Frage zu stellen:

> „The object is to determine certain characteristical numbers for closed three-dimensional spaces, analogous to those introduced by Riemann in the theory of his surfaces, so that their indenzity [so im Original; K. V.] shows the possibility of its 'one-one geometrical correspondence'."
>
> (Dyck 1885, 648)

Die grundlegende Idee der algebraischen Topologie, das Homöomorphieproblem zu lösen, indem gezeigt wird, daß die Übereinstimmung eines Systems von Invarianten - im einfachsten Fall: Zahlen - notwendig und hinreichend für Homöomorphie ist, wird hier erstmals klar und deutlich formuliert, wobei der zweidimensionale Fall als Paradigma angeführt wird. Man darf sicher einen Einfluß Kleinscher Sichtweisen, insbesondere aus dem Erlanger Programm, annehmen. Auffallend ist weiterhin die Formulierung „one-one-geo-

[86] Der Wortlaut liest sich in der Übersetzung Ponts so:
„Les recherches sur la connexion des espaces fermés â trois dimensions sont encore compliquées par le fait qu'il existe des surfaces partageant l'espace en parties, qui ne possêdent pas la méme connexion. Cela n'est toutefois possible que pour les surfaces enlacées ...Ainsi dans le cas d'un tore noué, on ne peut pas établir une correspondance univoque-continue entre l'extérieur et l'intérieur." (Pont 1974, 134)
Dyck hat also genau gesehen, daß die Möglichkeit des Verknotens, die ja erst im Dreidimensionalen gegeben ist, die dreidimensionale Topologie schwierig machen kann.
Vermutlich bezog sich hier Dyck auf einen Satz, die Gleichheit des Zusammenhangs einer Mannigfaltigkeit und ihres Komplementes betreffend, der zu seiner Zeit anscheinend recht verbreitet war. Man findet ihn z. B. in der Einleitung zu Maxwells "Treatise on Electricity and Magnetism" (1873)

[87] Gemeint sind nach heutiger Terminologie dreidimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten. Leider sagt Dyck hier nicht, welche funktionentheoretischen Forschungen er meint. Es liegt aber nahe, an die Untersuchungen Poincaré's über automorphe Funktionen ohne Grenzkreis zu denken, über die Dyck aufgrund seiner engen Beziehungen zu Klein sicher bestens informiert war und die auch M. E. Goursat als Ausgangspunkt für seine Untersuchungen über Raumteilung dienten (in Goursat 1889 - vgl. 5.2). Vergleiche hierzu 3.1.1.

metrical correspondence" als Umschreibung des Homöomorphiebegriffs, die merkwürdig unbestimmt wirkt für den modernen Leser.[88]

Anschließend formuliert Dyck ein sehr allgemeines Verfahren, mit dem man „alle möglichen geschlossenen dreidimensionalen Räume" erhalten könne:[89] Man nehme in S^3 k Paare Henkelkörper des Geschlechtes p_1, p_2, ..., p_k und identifiziere paarwiese deren Oberflächen. Man erhält so k geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten. Dies ist die Grundidee des Verfahrens, das wir heute - bei Beschränkung auf ein Paar von Henkelkörpern - Heegard-Chirurgie nennen, und das von P. Heegard 1898 in seiner Dissertation beschrieben (vgl. 4.1) und von H. Poincaré 1904 mit großem Erfolg verwendet wurde.(vgl. 3.4).

Dyck führt dann aus, daß man die Zahlen p_1, p_2, ..., p_k sowie die Zuordnungsvorschriften als Charakteristiken der entstehenden 3-Mannigfaltigkeiten ansehen könne.[90] Er fährt dann fort, diese Charakteristiken mit der Existenz geschlossener nicht-berandender Flächen sowie geschlossener Kurven, die weder ineinander noch in einen Punkt transformierbar sind, in Beziehung zu setzen, erkennt also, daß sich die entstehenden 3-Mannigfaltigkeiten wesentlich vom gewöhnlichen Raum unterscheiden.[91]

Dieser Punkt wird anschließend an einem einfachen Beispiel erläutert: Man nehme zwei Volltori, die längs ihrer homöomorphen Begrenzungsflächen - das sind natürlich gewöhnliche Tori - miteinander identifiziert werden. Um die Art der Identifikation festzulegen, wird gesagt, wie der Meridian des einen Torus auf den anderen gelegt werden soll. Dabei betrachtet Dyck zwei „wesentlich verschiedene Möglichkeiten":

> „First, for example, we can make them correspond so that meridian curves fall on meridian curves, and latitudinal curves into latitudinal curves. Then there exist curves which cannot be contracted into one point. For if we put a closed curve surrounding the first ring, the curve, by all expansions and deformations it is liable to, always encloses one of the two rings. On the contrary, supposing we had made the meridional curves to correspond to the latitudinal ones and vice versa, curves of the above description would not have been found. For a curve surrounding the one ring can first be contracted into a meridional curve of the ring. This curve is identical with a latitudinal curve of the second ring, and this last-mentioned curve can be removed from the ring into our space, and therefore be contracted into a point."
>
> (Dyck 1885, 648)

[88] Einige Zeilen weiter wird diese Formulierung wieder aufgegriffen, um auszudrücken, daß alle homöomorphen „Räume" als äquivalent zu betrachten sind: „Collecting under one representative all those spaces, between which a one-to-one correspondence is possible,..." (Dyck 1885, 648), wobei hier wie im Text der Bezug zur Stetigkeit vermißt wird.

[89] „...we can form all possible closed threedimensional spaces by the following procedure" (Dyck 1885, 648) Diese Behauptung ist in der Tat (im orientierbaren Fall) richtig; vergleiche 4.1.

[90] Wir sprechen heute von einer Heegard-Zerlegung des Geschlechts p_j. Allerdings ist diese Kennzahl bei weitem nicht hinreichend, um 3-Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren (vergleiche 4.1 und 7), wie auch *Dyck sofort erwähnt.*

[91] So jedenfalls würde ich die folgende, zugegebenermaßen dunkle Stelle bei Dyck interpretieren:
„This characteristic is determined:
1. By the existence of certain closed surfaces, which are not able to isolate a part of the space. These are surfaces surrounding the above-named surfaces of the deficiency p_1, p_2,...,p_k.
2. By the existence of certain closed curves in our space, which can be neither be transformed into each other, nor be drawn together into a point." (Dyck 1885, 648)
Dabei bezieht sich die erste Aussage auf die zweidimensionale Homologie, die zweite auf die Fundamentalgruppe (beides natürlich modern gesprochen). Nicht-berandende Flächen gibt es allerdings nicht immer, ebensowenig wie nicht-nullhomotope Kurven. Das zeigt schon die gleich zu besprechende S^3.

Dyck betrachtet hier die beiden einfachsten Fälle eines Heegard-Diagrammes auf dem Torus (vgl. 4.1), welche Veranlassung geben zu den beiden einfachsten Linsenräumen (vgl. 4.2 und 5.4), nämlich zu $L(0,1) \cong S^1 \times S^2$ und zu $L(1,0) \cong S^3$. Der angegebenen Darstellung der S^3 liegt die fundamentale Einsicht zugrunde, daß man, nimmt man aus S^3 einen Volltorus heraus, als Abschluß des Komplementes wieder einen Volltorus erhält, wobei Meridiane und Breitenkreise aufeinander zu liegen kommen.

Allein - Dyck hat nicht nur diese einfachsten Fälle untersucht, wie seine Schlußbemerkung andeutet:

> „In this way the particular correspondence above described, between every two of our surfaces give rise to 2p new periods from the periods $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{2p}$ in the theory of Abelian integrals, according to Kronecker. I hope to develope this subject further on another occasion."
>
> (Dyck 1885, 648)

Was Dyck hier im einfachsten Falle gemeint haben könnte - seine Ankündigung des letzten Satzes hat er leider nicht in die Tat umgesetzt (vgl. aber Dyck 1890) -, wird vielleicht im Spezialfall des Verklebens zweier Volltori (den wir schon betrachtet haben) deutlich: Um diese Verklebung vorzunehmen, bedarf es allgemein als Identifikationsvorschrift eines Automorphismus' des Torus. Die Abbildungsklassengruppe des Torus ist aber, wie J. Nielsen 1913 gezeigt hat, isomorph SL(2.Z). Diese Gruppe wiederum und ihre Beziehung zum Torus war aber aus der Theorie der elliptischen Funktionen wohlbekannt (vgl. Stillwell 1993, 206).

Trotz der Kürze seines Beitrages wird deutlich, daß Dyck zu diesem Zeitpunkt bereits ein tiefgehendes Verständnis für die Natur von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten besaß. Ihm kommt daher das Verdienst zu, dieses topologische Neuland erstmals betreten zu haben. Sieht man von Dycks eigenen Beiträgen (vgl. den nächsten Abschnitt) ab, so war Poincaré der erste, der wesentlich über Dyck hinausgegangen ist, was den Bereich der 3-Mannigfaltigkeiten anbelangt (vgl. 3).

2.3.2 Die „Beiträge zur Analysis situs"

Dyck veröffentlichte nach seiner Übersiedlung nach München in der zweiten Hälfte der 1880er Jahre in den Sitzungsberichten der Leipziger Akademie mehrere „Beiträge zur Analysis situs", die er später dann zu zwei gleichnamigen Artikeln für die Mathematischen Annalen umarbeitete (Dyck 1888 und Dyck 1890). Wie die bei Pont veröffentlichten Briefe zeigen, hatte Dyck wohl ursprünglich vor, die 1884 gemachte Versprechung wahrzumachen und das Normalformenproblem und damit das Homöomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten zu lösen. Dies ist ihm (und auch sonst niemand nach ihm) nicht gelungen: Die wichtigsten Errungenschaften der beiden Aufsätze aus den Jahren 1888 und 1890 liegen denn auch im Bereich der 2-Mannigfaltigkeiten (Klassifikation der geschlossenen Flächen unter Einbezug des nichtorientierbaren Falles) und im Methodischen (Dyck als Wegbereiter der kombinatorischen Methode). Daneben findet man bei Dyck viele ausführliche Literaturhinweise, was vor allem Dyck 1888 zu einer wichtigen Quelle bezüglich der Frühgeschichte der (kombinatorischen) Topologie macht.

Die beiden genannten Arbeiten stützen sich wie bereits erwähnt auf drei Mitteilungen, welche W. Dyck in den Sitzungsberichten der Leipziger Akademie zuvor veröffentlicht hatte (Dyck 1885, Dyck 1886, Dyck 1887). Dabei verdient vor allem die zweite Mitteilung Beachtung, weil hier Dyck Kurvensysteme auf geschlossenen und offenen 3-Mannigfaltigkeiten betrachtet, wobei lerstere entweder analytisch als Nullstellengebilde gegeben sind oder aber durch Randidentifikationen gewonnen werden: „Wir stellen uns dann „geschlossene Mannigfaltigkeiten" dadurch her, dass wir bei den ebenen M_2 die begrenzenden Randcurven paarweise einander zugeordnet denken, und ebenso für die bisher betrachteten M_3 eine paarweise Zuordnung ihrer Begrenzungsflächen gegeben denken." (Dyck 1886, 59). Die Randidentifikation sollte später für H. Poincaré Ausgangspunkt für seine Arbeiten über 3-Mannigfaltigkeiten werden (vgl. 3.2), während sie bei Dyck eher Episode blieb, da dieser stärker in analytischer Richtung arbeitete. Dennoch ist bemerkenswert, wie selbstverständlich Dyck mit 3-Mannigfaltigkeiten umgegangen ist.

Anders als seine Vorgänger (Möbius, Jordan), die einen mehr oder minder vagen Flächenbegriff zugrunde legten, um dann diese Flächen zu zerlegen oder ihr Berandungsverhalten zu studieren, baut Dyck diese in der Regel systematisch kombinatorisch auf:

> „Das Elementargebilde E^{II}, aus welchem wir unsere allgemeinen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten M^{II} herleiten, ist geometrisch gegeben als ein von einem nicht sich selbst durchsetzenden Curvenzug begrenztes, in eine Ebene ausbreitbares Flächenstück, also etwa als das Innere eines Kreises in der Ebene.
>
> Die allgemeinste zweidimensionale Mannigfaltigkeit M^{II} betrachten wir als aus solchen Elementargebilden zusammensetzbar, indem wir voraussetzen, dass dieselbe in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte mit einem Elementargebilde identifiziert werden darf. Dabei bleibt ganz ausser Betracht, ob wir diese Zusammensetzung aus einer endlichen Anzahl solcher E^{II} bewerkstelligen können, oder etwa einer unendlichen Zahl bedürfen. Die Zusammensetzung erfolgt dadurch, dass wir jene E^{II} einmal längs gewisser Randstücke, dann aber auch längs ganzer geschlossener Randcurven vereinigen."
>
> (Dyck 1888,472f)[92]

Diese Definition wurde dann 1890 unter Hinzunahme einer expliziten Regularitätsbedingung (jeder innere Punkt der Mannigfaltigkeit soll eine der n-dimensionalen euklidischen Kugel homöomorphe Umgebung besitzen [modern gesprochen]) auf den n-dimensionalen Fall verallgemeinert.

Anschließend an seine Definition führt der Verfasser die „Charakteristik" einer Mannigfaltigkeit[93] ein (Dyck 1888, 474ff):

a) Das Elementargebilde E^{II} erhält die Charakteristik +1;

---

92 Das klingt zuerst einmal überraschend modern; man muß aber beachten, daß Dyck gar nicht sagen konnte, was eine Mannigfaltigkeit unter Absehung von ihrer lokal-euklidischen Struktur eigentlich ist (nämlich ein topologischer Raum). Was er auszudrücken vermochte, ist dieses: Ein Gebilde, das durch Randidentifikationen aus Kreisscheiben entsteht, ist eine 2-Mannigfaltigkeit. Neben diesem eher kombinatorischen Mannigfaltigkeitsbegriff, den man vielleicht konstruktiv nennen könnte, verwandte Dyck auch noch durch Gleichungen und Ungleichungen beschriebene (dann notwendig eingebettete) Mannigfaltigkeiten. Natürlich bedarf modern gesehen auch die Rede vom Identifizieren der Präzisierung im Sinne der Bildung eines Quotientenraumes.

93 Dyck stellte sich ausdrücklich in die Kroneckersche Tradition, was die Wahl gerade dieses Terminus motiviert haben könnte. Über Kroneckers Arbeiten zur Charakteristikentheorie heißt es bei Dyck: „Gleichzeitig sind damit die Grundlagen für die analytische Behandlung aller Fragen der Analysis gegeben." (Dyck 1888, 461)

b) bei einem Vorgang, der ein Elementargebilde durch Ziehen einer Querlinie in zwei Elementargebilde zerlegt, ist die Charakteristik um 1 zu erhöhen;
c) bei einem Vorgang, der aus zwei Elementargebilden eines macht - vermittels Verheftens entlang eines Teiles des Randes - ist die Charakteristik um 1 zu verringern.

Die Auswirkungen der Transformationen b) und c) werden im Anschluß von Dyck noch genauer untersucht; z. B. verfolgt er die Frage, was passiert, wenn man eine 0-dimensionale (oder 1-dimensionale oder 2-dimensionale) Mannigfaltigkeit anheftet bzw. ausschneidet.

Wesentliche Einsichten im Themenkreis „Klassifikation der Flächen" enthält der dritte Paragraph des ersten Teiles von Dyck 1888, welcher überschrieben ist: „Unveränderlichkeit der Charakteristik für verschiedene Erzeugungsweisen einer Mannigfaltigkeit. Normalformen für die Mannigfaltigkeiten mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indikatrix" (Dyck 1888, 476). Ausgangspunkt hierfür - und dies wird von Dyck im wesentlichen kommentarlos unterstellt[94] - ist die Überführbarkeit von kompakten berandeten Flächen in eine Normalform. Für orientierbare ist dies ein von n geschlossenen Kurven begrenztes Stück der Ebene, das natürlich zusammenhängend sein soll (die „Grundform"), in dem „wir einige dieser Randcurven paarweise aufeinander beziehen, und zwar „gleichsinnig"." (Dyck 1888, 477).[95]

Die Charakteristik einer orientierbaren Fläche mit r Randkurven und s Henkeln (d.h. 2s identifizierten Löchen bzw. s nicht-zerstückenden Rückkehrschnitten) ergibt sich dann zu[96]

$$K^{II} = 2 - s - 2r$$

Für geschlossene orientierbare Flächen ergibt sich hieraus sofort, daß ihre Charakteristik stets gerade ist.

[94] Dieser Punkt wird von Dehn und Heegard kritisch hervorgehoben:
„Der allgemeinste Fall des Problems [Klassifikation der Flächen; K..V.] wird von Dyck (...) behandelt. Jedoch ist die Behandlung nicht als vollständig zu bezeichnen, weil die Überführbarkeit der Flächen in gewisse Normalformen ohne Beweis angenommen wird. Gerade hierin liegt die Schwierigkeit (...)." (Dehn-Heegard 1907, 190 Anm. 92)
Merkwürdigerweise wird Möbius, auf den sich Dyck ja beruft, nicht in ähnlicher Weise kritisiert (vergleiche 2.2.2.1 oben). Im übrigen sollte ein ähnlicher Vorwurf später Dehn und Heegard selbst treffen (siehe unten 2.4).
Das Verhältnis der Begriffe „2-Mannigfaltigkeit" (im Dyckschen Sinne) und „Fläche" wird bei Dyck nicht explizit geklärt. Die nachfolgend zitierte Stelle legt allerdings die Vermutung nahe, daß er "Fläche" als zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit interpretierte: "Betrachten wir unter allen so entstehenden M^{II} diejenigen, welche eine einzige zusammenhängende Fläche bilden, ..." (Dyck 1888, 471). Trifft diese Interpretation zu, so haben Dycks Flächen von vorneherein eine kombinatorische Struktur und die gerade wiedergegebene Kritik verliert viel an Plausibilität. Natürlich bleibt dann aber Dycks Lösung bezüglich Allgemeinheit hinter modernen Vorstellungen zurück. Ansonsten wird die Zurückführbarkeit auf Normalformen von Dyck mehr oder minder als bekannte Tatsache behandelt, wobei er sich auf A. F. Möbius, F. Klein und A. Weichold beruft (Dyck 1888, 477 Anm. **).

[95] Wie ein Vergleich mit 2.2.2.2 zeigt, ist das nicht exakt die von Möbius angegebene Normalform, sondern im wesentlichen die von Klein/Clifford angegebene Sphäre mit Henkeln.

[96] Hierzu muß man wissen, daß die geschilderte Grundform (mit n „Löchern") die Charakteristik 1-n besitzt (oder auch 2-R, wenn R die Gesamtanzahl der Randkurven der Grundform angibt) und daß das Verheften zweier Ränder vermöge eines Henkels die Charakteristik ungeändert läßt (vergleiche Dyck 1888, 477), das heißt, es ist R = r +2s.

Auch für nicht-orientierbare Flächen (also solche mit „umkehrbarer Indikatrix" in Dycks Terminologie [à la Klein]) läßt sich die angegebene Grundform verwenden. Allerdings sind hier die Identifikationen anders vorzunehmen:

> „Wenn wir eine Oeffnung der Grundfläche [=Grundform; K.V.], die wir der einfacheren Ausdrucksweise halber uns kreisförmig denken wollen, dadurch schliessen, dass wir die jedesmal diametral gegenüberliegenden Punkte aufeinander beziehen, so ist die so aus der ursprünglichen entstandene Fläche eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix, auf welcher jene auf sich selbst bezogene Kreislinie als Rückkehrschnitt erscheint und zwar dergestalt, dass die Indicatrix längs eben dieser Linie sich umkehrt.
>
> Die Zahl der Randcurven ist also bei diesem Process um eins verringert worden, während dagegen nach unserem pag. 475 formulirten Princip der Zählung die Charakteristik sich nicht geändert hat."
>
> (Dyck 1888, 479)

Die letzte Bemerkung führt unmittelbar auf die Formel

$$K^{II} = 2 - r - s'$$

wobei r die Anzahl der Randkurven und s' die Anzahl der nicht-zerstückenden Rückkehrschnitte (also der gemäß der oben geschilderten Prozedur verschlossenen Löcher) ist. Aus der Formel folgt, daß eine geschlossene nicht-orientierbare Fläche sowohl gerade als auch ungerade Charakteristik haben kann.[97] Heute pflegt man den von Dyck geschilderten Vorgang als Anheften einer Kreuzhaube[98] zu bezeichnen: Der Rand des Loches wird dabei mit dem Rand eines Möbius-Bandes identifiziert und so das Loch verschlossen. Weiter führt Dyck aus, daß man zwei von drei Kreuzhauben durch einen Henkel (in moderner Ausdrucksweise) ersetzen kann (eine Kreuzhaube muß wegen des Orientierbarkeitscharakters übrig bleiben!).

Dyck stellt auch die Verbindung zwischen seiner Charakteristik und Riemanns Zusammenhang Z her:

$$K^{II} = \begin{cases} 3 - Z & \text{bei geschlossenen Flächen} \\ 2 - Z & \text{bei berandeten Flächen} \end{cases}$$

sowie zum „ungewöhnlichen Zusammenhang" Z' (F. Klein) , der für geschlossene Flächen gleich Z-1 sonst aber gleich Z ist:

$$K^{II} = \begin{cases} 2 - Z' & \text{bei geschlossenen Flächen} \\ 2 - Z' & \text{bei berandeten Flächen} \end{cases}$$

Zum Geschlecht p einer geschlossenen orientierbaren Fläche besteht dagegen die Beziehung

$$p = \frac{2 - K^{II}}{2} \qquad \text{(vgl. Dyck 1888, 485).}$$

[97] Folglich kann man durch die Charakteristik alleine die orientierbaren Flächen nicht immer von den nicht-orientierbaren unterscheiden. Diesen Gesichtspunkt hebt Dyck in der Einleitung seiner Arbeit eigens hervor (vergleiche Dyck 1888, 462): Man vergleiche auch das oben (gegen Ende von 2.2.2.2) im Text zu Klein Gesagte.

[98] Vergleiche Hilbert/Cohn-Vossen 1932, 279. Die Bezeichnung selbst ist aber älter, sie findet sich schon (erstmals?) bei Dehn-Heegard 1907, 198.

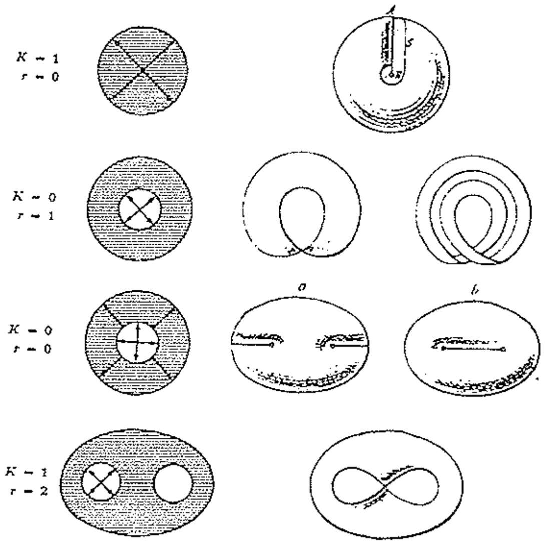
Der genannte Paragraph schließt mit Ausführungen zum Invarianzcharakter der Charakteristik, welche schließlich die Formulierung des zentralen Satzes (in § 5) erlauben:

> „Indem man von der Erzeugung aller Flächen aus den Grundformen ausgeht, ergeben sich für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger stetiger Abbildung aller Punkte [99; K. V.] zweier (je aus einem Stück bestehender) Flächen aufeinander die folgenden Bedingungen als nothwendig und hinreichend:
>
> 1. Die Flächen müssen zur gleichen Classe, Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix bez. Flächen mit umkehrbarer Indicatrix gehören.
> 2. Ihre Charakteristiken müssen übereinstimmen.
> 3. Die Anzahl der Randcurven muss bei beiden dieselbe sein."
>
> (Dyck 1888, 488)

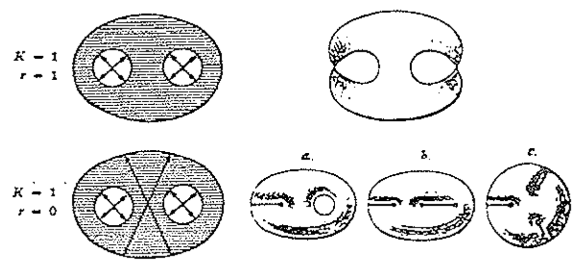
Die Bedingung 2. läßt sich in Jordanscher Tradition auch so formulieren:

> „2a. Die Maximalanzahl der nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte (welche also „ein vollständiges System" bilden) muss in beiden Fällen dieselbe sein."
>
> (Dyck 1888, 488)

Damit ist eine Fläche im Sinne der Analysis situs eindeutig festgelegt, - genauer gesagt, wie auch Dyck betont - bezüglich ihrer absoluten Eigenschaften im Sinne Kleins. Seine theoretischen Ausführungen illustriert Dyck durch folgende Abbildung:



99 Man beachte die relativ präzise Formulierung des Homöomorphiebegriffes, die Dyck hier gibt.



Der zweite Teil der Abhandlung von 1888 ist Fragen der Charakteristikentheorie gewidmet und soll hier übergangen werden; einige Hinweise hierzu kann man Scholz 1980, 249-257 entnehmen.

Der zweite Aufsatz, die 1890 erschienenen „Beiträge zur Analysis situs" behandelt den Fall höherdimensionaler, insbesondere auch dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Der Aufbau dieser Mannigfaltigkeiten sowie die Definition der Charakteristik verlaufen analog zum zweidimensionalen Fall, wobei natürlich die Dinge durch die Vielfalt, welche höhere Dimensionen gestatten, komplexer werden. Dyck kann dennoch für zwei Klassen von Beispielen - nämlich die Sphären S^n und die reell-projektiven Räume P_nR - die Charakteristik explizit ermitteln. Er findet:

- die Charakteristik von S^n ist 2 oder 0, je nachdem n gerade oder ungerade ist;
- die Charakteristik von P_nR ist 1 oder 0, je nachdem n gerade oder ungerade ist (vgl. Dyck 1890, 282f).[100]

Diese Ergebnisse zeigen eigentlich schon, daß die Charakteristik höherdimensional eine viel zu schwache Invariante ist, um das Homöomorphieproblem ernsthaft in Angriff nehmen zu können. Diesen Mangel hat Dyck durchaus gesehen, wie seine „Schlußbemerkungen" zeigen, in denen er vor allem auf die höherdimensional nicht vorhandene Normalform zu sprechen kommt:

100 Im weiteren erkennt Dyck auch, daß P_nR für gerades n stets nicht-orientierbar, für ungerades n hingegen orientierbar ist (Dyck 1890, 284). Im dritten und letzten Abschnitt seiner Arbeit untersucht Dyck noch spezielle Untermannigfaltigkeiten des R^n, welche durch die Gleichung

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_t^2 - X_{t+1}^2 - \ldots - X_n^2 - 1 = 0$$

definiert sind. Speziell für n = 4 findet er bestimmte „Kernformen", nämlich ein Paar von Kugeln, einen dreidimensionalen Kreisring (= Volltorus) sowie einen von zwei konzentrischen Kugeloberflächen begrenzten Schalenraum (vergleiche 5.2), die durch Identifizierungen zu schließen sind (Dyck 1890, 312f). Das Kugelpaar und der Kreisring „repräsentiren, wenn wir wieder die Begrenzungspunkte paarweise einander zuordnen; die typischen Formen für die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten." (Dyck 1890, 312) Dieses „typisch" ist natürlich stark zu relativieren; es bezieht sich nach Lage der Dinge nur auf solche Mannigfaltigkeiten, welche in der eben erwähnten Form darstellbar sind. Die erste Mannigfaltigkeit ist wohl nichts anderes als die S^3, die zweite kann man als Linsenraum interpretieren.

> „Durch die Zurückführung unserer Abzählungen auf die Kronecker'sche Darstellung ist deren invariante Bedeutung (bei Abänderung der zu Grunde gelegten Entstehungsprocesse, sowie bei Umformungen der Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis situs) erwiesen. Für die Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen war es nun möglich, speciell auch auf geometrischem Wege die invariante Bedeutung dieser charakteristischen Zahlen (ganz unabhängig von der Kronecker'schen Formulierung) zu erweisen. Es war nämlich, wie schon in der Einleitung erwähnt, möglich, für alle Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen Normalformen herzustellen, an welchen direkt die charakteristischen Zahlen abgelesen werden konnten.
>
> Die gleiche Darstellung für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension würde auch hier die Aufstellung von Normalformen verlangen, als Repräsentanten aller möglichen Mannigfaltigkeiten. Eine solche scheint aber zunächst noch nicht zu bewältigende Schwierigkeiten zu bieten. In der That ist die Frage nach solchen Mannigfaltigkeiten eine viel umfassendere. Sie erfordert die Berücksichtigung aller Charakteristiken, welche eine M_n bis auf eindeutige Umformungen (im Sinne der Analysis situs) charakterisieren und dazu ist durch die vorliegenden Untersuchungen nur erst ein erster Schritt gemacht."
>
> (Dyck 1890, 306f)

Insgesamt darf man feststellen, daß Dycks Untersuchung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten der erste größere, systematisch angelegte Versuch dieser Art gewesen ist. Er führte zwar nicht zu Lösungen oder Teillösungen, machte aber wenigstens die Probleme sehr deutlich. Das gilt in erster Linie für das Normalformenproblem. Auf der Seite der Invarianten dagegen blieb Dyck hinter Riemann-Betti zurück, insofern er nur mit einer einzigen Invariante, seiner Charakteristik nämlich, arbeitete. Dies hing sicherlich damit zusammen, daß Dyck methodisch gesehen festen Boden zu gewinnen suchte, was ihn einerseits zum kombinatorischen Aufbau von Mannigfaltigkeiten und zu deren kombinatorischer Behandlung (letzteres hauptsächlich im zweidimensionalen Fall) sowie andererseits zum Arbeiten mit durch eine Gleichung bzw. Ungleichung festgelegten Mannigfaltigkeiten (höherdimensional) führte.

Anders verhalten sich die Dinge im zweidimensionalen Falle, wo Dyck das Klassifikationsproblem für kompakte berandete Flächen durch Angabe des richtigen Ergebnisses unter Einbeziehung des nichtorientierbaren Falles klärte. Sein Beweis hierfür war aber noch unvollständig - wie Dyck selbst wohl auch gesehen hat - insofern die Zurückführbarkeit einer beliebigen Fläche (zumindest wenn man diesen Begriff modern auffaßt - vgl. Anm. 94 oben) auf Normalform nicht gezeigt wird. Diese Entwicklungslinie wird in 2.4 kurz beleuchtet.

Methodisch gesehen ist hervorzuheben, daß Dyck vielleicht der erste gewesen ist, der überhaupt im Rahmen der Topologie über verschiedene konkurrierende Methoden (kombinatorisch - diskret, analytisch-kontinuierlich) nachgedacht hat. Für die kombinatorische Auffassung wegweisend hätte die folgende Bemerkung Dycks zur Erzeugung von 2-Mannigfaltigkeiten sein können: „Es kann hierbei zweckmäßig sein, eine solche Vereinigung von Randcurven nicht wirklich (geometrisch) auszuführen, sondern nur durch „Zuordnung" der betr. Randstücke - etwa mit Hülfe einer Tabelle - zu fixieren." (Dyck 1888, 473) [In einer Anmerkung verweist der Verfasser auf „den ausgedehnten Gebrauch, der gerade von dieser Vorstellung der „Zuordnung der Randcurven eines Fundamentalpolygons" in neueren funktionentheoretischen Untersuchungen (Schwarz, Klein, Poincaré) gemacht wird. Für die Betrachtung dreidimensionaler Gebilde wird diese Vorstellung, sofern es sich um anschauliche Discussion handelt, nothwendig." (Dyck 1888, 473 Anm.*)] Poincaré's Inzidenzmatrizen (vgl. 3.3) sind hier nicht mehr allzu fern.

Dycks Aufsätze blieben anscheinend weitgehend unbeachtet; seine Ideen fanden keine Weiterentwicklung. Dabei mag eine Rolle gespielt haben, daß Dyck selbst sich 1890 von der Topologie abwandte im Gefühl der Aussichtslosigkeit;[101] und daß es zu diesem Zeitpunkt keine auf dem Gebiet der Topologie (im Sinne von algebraisch/kombinatorischer Topologie) aktiven Forscher gab. Erst Poincaré sollte hier ab 1892 eine Wende bringen. Aber auch er blieb - wie wir sehen werden (vgl. 3.5) - lange Zeit fast allein. Im übrigen wußte Poincaré um Ergebnisse von Dyck, insbesondere um dessen Dissertation „Ueber regulär verzweigte Riemannsche Flächen und die durch diese definierten Irrationalitäten" (München, 1875), welche bei F. Klein entstanden war. Letzterer war es wohl auch, der Poincaré auf Dyck aufmerksam machte. Dennoch knüpfte Poincaré nicht an Dycks Untersuchungen zur Topologie an, sondern ging eigene, wesentlich fruchtbarere Wege.

2.4 Ausblick: Das Klassifikationsproblem der Flächen im 20. Jahrhundert

Auch in der Zeit nach Dyck wurde das Klassifikationsproblem der Flächen immer wieder aufgegriffen. Da dieses als Paradigma für die analogen Bemühungen in höheren Dimensionen stets eine wichtige Rolle spielte, sind hier vielleicht noch einige systematische und historische Bemerkungen angebracht.

Geht man von unserem heutigen Kenntnisstand der Dinge aus, so wird man drei Aspekte unterscheiden:

1. Eine allgemeine Definition des Begriffes Fläche im Sinne einer zweidimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit (eventuell mit zusätzlicher Struktur);
2. der Nachweis, daß man jede gemäß 1. definierte Fläche auf eine Normalform bringen kann;
3. der Nachweis, daß Flächen, welche auf verschiedene Normalformen führen, nicht homöomorph sind, während solche, welche auf dieselbe Normalform führen, stets homöomorph sind.

Die Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffes ist von E. Scholz in seinem Werk Scholz 1980 eingehend untersucht worden. Für den zweidimensionalen Fall wurde das Problem der Definition der Fläche durch Weyl 1913 in seinem Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche" gelöst im Sinne eines Hausdorff-Raumes, der lokal homöomorph gewöhnlichen Umgebungen in der Ebene ist (modern gesprochen) mit der zusätzlichen Eigenschaft, triangulierbar zu sein (vgl. Weyl 1913, 17f und 21f). Wichtige Klärungen brachte dann noch der Aufsatz „Über den Begriff der Riemannschen Fläche" von T. Radó (Radó 1925), welcher durch die Lektüre des Weylschen Buches angeregt wurde. Deren Hauptergebnis (in unserem Zusammenhang) lautet:

[101] Vergleiche den Briefauszug vom 9.Mai 1890 (an Klein), den Pont publiziert hat (Pont 1974, 135).

„Ist R eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit [102 ; K. V.], für welche das Abzählbarkeitsaxiom [103 ; K. V.] erfüllt ist, so kann dieselbe trianguliert werden."

(Radó 1925, 111)

Zusammen mit der für das Zweidimensionale bereits 1908 von H. Tietze (vgl. 4.2) bewiesenen Hauptvermutung zeigt das Radósche Resultat die Gleichwertigkeit kombinatorischer und kontinuumstopologischer Ansätze für diesen Bereich. Das war von großer Bedeutung insofern, als sich das Normalformenproblem (Punkt 2. also) nur kombinatorisch behandeln ließ.

Es sei noch angemerkt, daß mit Weyl und Radó die moderne Auffassung auch insofern erreicht wird, als Flächen nicht mehr eingebettet (und natürlich auch nicht trianguliert) sein müssen (vgl. etwa „Unsere zweidimensionale Mannigfaltigkeit liegt aber nicht im anschaulichen Raume, sie ist auch nicht trianguliert." [Radó 1925, 106]).

Wir haben in diesem Kapitel 2 bereits mehrere Normalformen kenngelernt (z. B. bei Möbius [vgl. 2.2.2.2] und bei Dyck [vgl. 2.3.2]); eine weitere, die sich anschaulich als eine durch gedrehte (nichtorientierbarer Fall) bzw. nicht gedrehte Bänder (orientierbarer Fall) bestückte Kreisscheibe beschreiben läßt, geht auf Julius Petersen zurück (Petersen 1898, 63-80). Sie wurde von seinem Schüler P. Heegard aufgegriffen (vgl. 4.1, aber auch 2.3.1). Schließlich hielt die Petersensche Normalform Eingang in den Enzyklopädieartikel von Dehn und Heegard, der unter der Überschrift „Nexus von Flächen" das Homöomorphieproblem der Flächen ausführlich behandelt (Dehn-Heegard 1907, 189-205). Seiner Grundtendenz gemäß (Topologie als durch seine Anschaulichkeit ausgezeichneter Teil der Kombinatorik [vgl. 4.2 und 6]) wird auch der Flächenbegriff kombinatorisch im Sinne eines aus Null-, Eins- und Zweizellen geeignet aufgebauten Komplexes gefaßt (vgl. Dehn-Heegard 1907, 157). Ist eine derartige (kompakte, berandete) kombinatorische Fläche gegeben, so wird diese in die oben geschilderte Normalform überführt. Die Ergebnisse lauten:[104]

102 „Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit wird nun erklärt als ein zusammenhängender topologischer Raum, für welchen es ein Umgebungssystem gibt, dessen Umgebungen zweidimensionale Elementargebiete sind." (Radó 1925, 106)
Die Hausdorffsche Trennungseigenschaft wird von Radó in die Definition des topologischen Raumes mit aufgenommen (vergleiche Radó 1925, 104).

103 „Abzählbarkeitsaxiom: Es existiert eine Folge, d.h. eine abzählbare Menge von Elementargebieten, welche die zweidimensionale Mannigfaltigkeit vollständig überdecken." (Radó 1925, 110)

104 Berandete kompakte Flächen werden durch Einfügen von Elementarflächenstücken zuerst geschlossen. Dieser Prozeß ist eindeutig bestimmt, sobald man die Anzahl der zu schließenden „Löcher" kennt (vergleiche Dehn-Heegard 1907, 194): Im übrigen wird die kombinatorische Struktur bei der Überführung in Normalform verwendet. Diese geschieht im ersten Schritt dadurch, daß man von einem beliebigen polygonalen Bestandteil ausgehend, angrenzende Polygone mit diesem verschmilzt, falls beide nur eine gemeinsame Kante besitzen; usw. Das Endergebnis dieses Prozesses ist die sogenannte Punktierungsfläche P_2^0. Ein analoger Vorgang liefert zu der verbleibenden Restfläche R_2^0 die sogenannte Zentralfläche Z_2 nebst den daran hängenden Bändern (vgl. Dehn - Heegard 1907, 191 - 195), wobei auf die Ränder geachtet werden muß. Eine ähnliche Vorgehensweise liegt auch anderen Methoden zur Gewinnung einer Normalform zugrunde; vgl. etwa Stillwell 1993, 69-75. Es ist aber klar, daß man, um einen Verschmelzungsprozeß durchführen zu können, einer kombinatiorischen Struktur auf der Fläche bedarf.

„Jede geschlossene zweiseitige [105 ; K. V.] M_2^0 kann überdeckt werden mit:

1) einem Elementarflächenstück („Punktierungsfläche" P_2^0);

2) einer „Restfläche" R_2^0, die besteht

a) aus einem Elementarflächenstück („Zentralfläche") Z_2,

b) aus p Paaren von Elementarflächenstücken („Bändern").

Jedes Band ist ungedreht und hat mit der Berandung von Z_2 zwei „Anheftungsstrecken" gemeinsam, die voneinander getrennt sind durch die zwei Anheftungsstrecken desjenigen Bandes, das mit dem ersten zusammen ein Paar bildet. Die Anheftungsstrecken eines Paares von Bändern werden durch diejenigen anderer Paare nicht getrennt."

(Dehn-Heegard 1907, 194f)

Im entsprechenden Resultat für nichtorientierbare Flächen treten in 2b) „k an Z_2 mit zwei Strecken angeheftete Elementarflächenstücke („gedrehte Bänder")" [Dehn-Heegard 1907, 194] auf. Die relative Anordnung der Bänder entspricht in moderner Terminologie der Henkel- bzw. Kreuzhaubennormierung beim Fundamentalpolygon.

Die eigentliche Klassifikation steckt in folgendem Satz, der auf Dyck zurückgeführt werden kann (vgl. 2.3.2 und Anm. 92 bei Dehn-Heegard 1907, 190):

„Sei α_2 resp. α_2' die Anzahl der (Elementar-)Flächenstücke, aus denen M_2 resp. M_2' zusammengesetzt sind, α_1 resp. α_1' die Anzahlen der auf ihnen liegenden Strecken, α_0 resp. α_0' die Anzahlen der auf ihnen liegenden Punkte. Dann sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus von M_2 und M_2':

1) M_2 und M_2' haben gleich viel Randkurven

(A) 2) M_2 und M_2' sind entweder beide einseitig oder beide zweiseitig

3) $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$

Daß 1), 2) und 3) notwendige Bedingungen sind, ist sofort einzusehen."

(Dehn-Heegard 1907, 190)

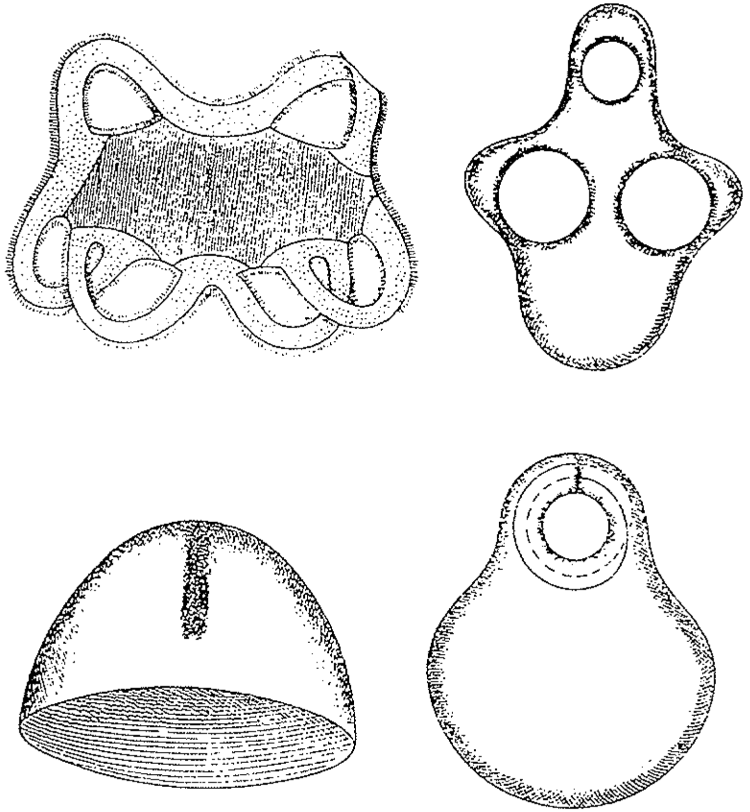
Die in 3) auftretenden Wechselsummen heißen bei Dehn-Heegard, wie schon bei Dyck, Charakteristiken (die beiden Definitionen unterscheiden sich durchs Vorzeichen). Um nun zu zeigen, daß die Bedingungen A. auch hinreichen, muß man nur noch nachweisen, daß die Restflächen in der Normalform eindeutig durch die Charakteristiken der Ausgangsflächen bestimmt sind und umgekehrt. Dies geschieht bei Dehn und Heegard auf den Seiten 195f. Anschließend werden andere Normalformen, insbesondere die Sphäre mit Henkeln bzw. Kreuzhauben besprochen (Dehn-Heegard 1907, 196-198).

Der von Dehn und Heegard gegebene Beweis hält wohl auch modernen Anforderungen an Strenge noch stand. Insofern darf man mit Recht sagen, daß wir es hier mit der ersten befriedigenden Lösung des Klassifikationsproblems der Flächen zu tun haben.[106] Allerdings war dieses Ergebnis noch nicht allgemein, da es ja nur kombinatorisch abgeleitet werden konnte. Diese Einschränkung fiel erst mit der oben erwähnten Arbeit Radó 1925,

105 Zweiseitig ist bei Dehn und Heegard intrinsisch definiert, bedeutet also orientierbar (vergleiche Anmerkungen 13 und 14 bei Dehn-Heegard 1907, 158).

106 Man vergleiche das Urteil von Seifert und Threlfall: „Er [der Hauptsatz der Flächentopologie; K.V.] wurde zuerst kombinatorisch bewiesen von Dehn und Heegard..." (Seifert-Threlfall 1934, 319 Anm. 22)

denn gemäß dieser kann man jede topologische 2-Mannigfaltigkeit (Abzählbarkeit der Basis vorausgesetzt) triangulieren und dann nach dem Vorbild von Dehn-Heegard weitermachen.



Die heute übliche Form der Normalform, das an die Theorie der automorphen Funktionen erinnernde Fundamentalpolygon, trat erst später in Brahana 1921 und Levi 1929 auf.[107] Bei letzterem heißt es:

„Durch die Überlegungen dieses Paragraphen [zum Fundamentalpolygon; K. V.] ist also folgender Hauptsatz bewiesen:

[107] Historisch bemerkt F. Levi: „Ein rein kombinatorischer Beweis des Hauptsatzes...wurde erstmalig von H. R. Brahana...veröffentlicht; im Text hat aber der Verfasser eine seit 1922 mehrfach in Vorlesungen vorgetragene etwas abweichende Fassung beibehalten." (Levi 1929, 297)

Satz 17. „Zwei Flächen F_1 und F_2 sind dann und nur dann verwandt, wenn sie beide orientierbar oder beide nicht orientierbar sind und beide zu derselben Zahl P-1 gehören. Zu jeder ganzen Zahl k ≥ 1 gibt es orientierbare Flächen F, für die P-1 = 2p = 2(k-1), und nicht orientierbare F, für die P-1 = k ist."

(Levi 1929, 77)

[p ist das Geschlecht der orientierbaren Fläche, also die Anzahl der Henkel, k diejenige der Kreuzhauben im nichtorientierbaren Fall.]

Das von Brahana angegebene Verfahren läßt sich knapp so charakterisieren: Man zerschneide die geschlossene Fläche, so daß eine der bekannten Normalformen (z. B. die Dehn-Heegardsche) entsteht. Durch Randidentifikationen sorge man dann dafür, daß nur noch ein Polygon auftritt. Weiter ist es möglich, das Polygon so einzurichten, daß es nur noch eine Klasse äquivalenter Eckpunkte auf seinem Rand gibt (also hat die entsprechende Polyederfläche, die man durch Identifizieren erhält, nur noch eine 0-Zelle). Schließlich werden noch gewisse Normierungen durchgeführt, insbesondere bei Vorhandensein von Henkeln und Kreuzhauben erstere durch je zwei Kreuzhauben ersetzt. Man erhält dann die bekannten Identifikationsschemata

aa^{-1}	(2-Sphäre)
$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_1a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$	(Sphäre mit p Henkeln)
$a_1a_1a_2a_2\dots a_ka_k$	(Sphäre mit k Kreuzhauben)

Diese liefern verschiedene Charakteristiken, nämlich -2, 2(p-1) und k-2, was ihre topologische Unterschiedlichkeit zeigt, wobei allerdings noch (um Sphären mit p Henkeln und Sphären mit k Kreuzhauben im Falle, daß 2(p-1) = k-2, also k = 2p, gilt, zu unterscheiden) der unterschiedliche Orientierbarkeitscharakter hinzugezogen werden muß. In moderneren Darstellungen wird die Charakteristik durch die Fundamentalgruppe bzw. durch die erste Homologiegruppe ersetzt.

Die Anfänge dieses Verfahrens, das von Brahana in Brahana 1921 unter Bezugnahme auf O. Veblen und J. W. Alexander erstmals veröffentlicht wurde, liegen wohl weiter zurück - jedenfalls, wenn man Tietzes Besprechung dieser Arbeit im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" Glauben schenkt (und es gibt eigentlich keinen Grund, dies nicht zu tun):

„..., während sie [die Vorgehensweisen Brahanas; K. V.] bisher zwar bekannt waren (bezüglich nicht-orientierbarer Flächen vgl. auch W. Dyck, Math. Ann. 32, Fig. 3 und 4 zu S. 480), wohl auch schon (wie dem Ref. bekannt) in rein kombinatorischer Auffassung verschiedentlich in Vorlesungen vorgetragen waren, aber noch nicht in allgemein zugänglicher Form vorlagen."

(Tietze 1921-22, 662)

Das Fundamentalpolygon ist insofern der Dehn-Heegardschen Normalform überlegen, als man ihm die Erzeugenden und die Relation der entsprechenden Fundamentalgruppe direkt entnehmen kann;[108] seine Vorherrschaft hängt somit direkt mit der der Fundamentalgruppe zusammen, welche bis heute in der zwei- und dreidimensionalen Topologie unbestritten sein dürfte, aber zu Dehn und Heegards Zeiten noch keineswegs gegeben war.[109]

[108] Man vergleiche etwa Massey 1989, 129 - 136.

[109] Auch Levi arbeitet im übrigen rein kombinatorisch, was er einerseits durch das Hauptanliegen seines Buches - die Konfigurationen - begründet (Levi 1929, 40), andererseits (wenn auch nicht explizit) durch

Levis Ansatz[110] fand dann Eingang in Reidemeister 1932 sowie in das stilbildende „Lehrbuch der Topologie" von Seifert und Threlfall, in dem die Klassifikation der Flächen ebenso ausführlich wie gut verständlich behandelt wird (Seifert-Threlfall 1934, sechstes Kapitel).[111] Damit war in etwa der heutige Stand der Dinge erreicht.

Bezüglich des eingangs genannten Punktes 3., wo es hauptsächlich um die verwendeten Invarianten ([Euler-]Charakteristik bei Dyck und Dehn-Heegard, Fundamentalgruppe bzw. erste Homologiegruppe bei Jordan [natürlich nur in Vorformen] und Seifert-Threlfall) wurde schon einiges gesagt. Ansonsten sei auch auf die weiteren Ausführungen dieser Arbeit hingewiesen, wo diese Fragen immer wieder auftauchen werden.[112] Auch das Invarianzproblem der verwendeten Merkmale (Euler-Charakteristik z.B.) fanden wir bereits angesprochen, was ja eine wichtige Einsicht im Zusammenhang mit der Klassifikationsfrage darstellt.

2.5 Das Clifford-Kleinsche Raumproblem

Vorbemerkung: Die Betrachtung Clifford-Kleinscher Raumformen (oder kurz auch Räume) muß sich nicht auf geschlossene Mannigfaltigkeiten als Träger der geometrischen Struktur beschränken. Da dieser Fall aber für uns der interessanteste ist, werden im folgenden fast ausschließlich geschlossene Raumformen, das heißt kompakte ohne Rand, zugrunde gelegt.

Ein anders gearteter Zugang zum Klassifikationsproblem der geschlossenen Flächen ergab sich aus einer Problemtradition, welche man heute im Anschluß an Killing 1891 als Clifford-Kleinsches Raumproblem bezeichnet. Dieses wurzelte ursprünglich im Gebiet der Differentialgeometrie: Klein hatte 1890 anknüpfend an die Entdeckung einer geschlossenen Fläche mit konstant verschwindender Krümmung im elliptischen Raum durch W.K.Clifford (1873)[113] aufgefordert, „alle Zusammenhangsarten anzugeben, welche bei

folgende Bemerkung: „Der eigenartige Reiz der kombinatorischen Topologie rührt von der seltsamen Vereinigung von größter Abstraktheit mit ganz elementarer Anschaulichkeit." (Levi 1929, 40)

110 „Das Fundamentalpolygon verwendet zum rein kombinatorischen Beweise des Fundamentalsatzes Levi,..ebenso Reidemeister..." (Seifert-Threlfall 1934, 339 Anm. 22). Die Tatsache, daß hier Brahana nicht erwähnt wird, wurde von A.W. Tucker in seiner Rezenzion des 'Lehrbuchs der Topologie' gerügt (Tucker 1935).

111 Bemerkenswerterweise wird bei diesen Autoren der Begriff Fläche nicht als 2-Mannigfaltigkeit eingeführt, sondern ähnlich wie bei Dyck als Ergebnis der Identifizierung von Polygonkanten (vergleiche Seifert-Threlfall 1934, 130f). Das mag daran gelegen haben, daß Mannigfaltigkeiten bei ihnen immer kombinatorisch aufgefaßt werden, während bei Flächen zwischen diesen und den entsprechenden kombinatorischen Gebilden, den Polyederflächen, unterschieden wird.
Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens von Brahana gibt Stillwell 1993, 69-75.

112 Mir ist nicht bekannt, auf wen die heute gängige Flächenklassifikation mit Hilfe der Morse-Theorie (vergleiche etwa Gramain 1971) zurückgeht, die allerdings eine differenzierbare Struktur voraussetzt (was hier keine wesentliche Einschränkung ist). Weiter wäre noch das sogenannte Raumformenproblem zu erwähnen und die damit verbundene Klassifikationsmöglichkeiten, auf das wir im nächsten Abschnitt kurz eingehen

113 Diese Entdeckung wurde von W.K.Clifford selbst nicht veröffentlicht; einen Überblick zur Geschichte gibt Klein 1890, 544-547.

geschlossenen Mannigfaltigkeiten irgendwelchen konstanten Krümmungsmasses überhaupt auftreten können." (Klein 1890, 554). Man bemerkt, daß diese Fragestellung - und das hat vor allem W. Killing in seiner ausführlichen Darstellung Killing 1893, 271-279 hervorgehoben -, letztlich in der von Gauß und Minding begründeten Tradition der Untersuchung aufeinander abwickelbarer Flächen steht. Dies erklärt auch die Dominanz der lokalen (differentialgeometrischen) Sichtweise[114], welche vom topologischen Standpunkt aus eher hinderlich war aber selbst noch bei Killing bestimmend blieb. Dennoch war es jener, der mit seiner Arbeit von 1891 und dann ausführlicher und systematischer in seinem Buch von 1893 das Problem in die Richtung weiterentwickelte, die sich später für die Topologie als äußerst fruchtbar erweisen sollte.[115] Killing war es nämlich, der erkannte, daß die Bestimmung Clifford-Kleinscher Raumformen - von ihm als einem der traditionellen geometrischen Räumen lokal-isometrische Gebilde von n Dimensionen gefaßt[116] - mit Hilfe von Untergruppen der Bewegungsgruppen der entsprechenden Geometrien erfolgen kann. Damit war die Anknüpfung an das abbildungsgeometrische Programm in der Geometrie erfolgt, welches mit Namen wie Helmholtz und Klein bis heute verknüpft geblieben ist. Die genannte Rückführung wird von Killing als „analytische Aufgabe" gefaßt (Killing 1893, 322), welche lautet:

> „Man suche alle diskontinuierlichen r-gliedrigen Gruppen von Transformationen..., welche den Bedingungen (3) und (4) genügen und zudem die weitere Forderung erfüllen, daß mit Ausschluß der identischen Transformation keine Transformation der Gruppe ein Wertesystem an sein transformiertes beliebig nahe heranbringt."
>
> (Killing 1893, 322)

Diskontinuierlich bedeutet bei Killing nicht-kontinuierlich, also beispielsweise endlich, allgemeiner diskret. Die Forderungen, welche an die Gruppe gestellt werden, sind in moderner Ausdrucksweise Fixpunktfreiheit und das Fehlen von Häufungspunkten.[117] Konkret wird eine solche Bestimmung dann für die zweidimensionalen Raumformen durchgeführt, wobei sich Killing der Darstellung der entsprechenden Bewegungen durch Gleichungssy-

114 Dies betont zum Beispiel F. Klein in seiner Rückschau Klein 1979, wo er anmerkt, daß die Untersuchung des Quadrats des Bogenelements nur lokal die Geometrie kennzeichnet, um dann fortzufahren: „Um das von Clifford entdeckte charakteristische Beispiel zu nennen: Mannigfaltigkeiten konstanter verschwindender Krümmung (also mit durchweg Euklidischem Bogenelement) können sehr wohl geschlossen in sich zurückkehren, so daß sie nur endlichen Gesamtinhalt darbieten."

115 Also liegt auch hier (vgl. etwa 4.) ein Problemtransfer vor, welcher mit einer typischen Dekontextualisierung verknüpft ist.

116 Killings Ausführungen in seinem Buch wirken auf den modernen Leser recht weitschweifig; die Suche nach präzisen Definitionen gestaltet sich schwierig. Zwei Zitate aus den vorbereitenden Betrachtungen über zweidimensionale Raumformen mögen die im Text gemachte Behauptung belegen: „So lange man also die Fläche nur in sich, ohne Rücksicht auf den äußeren Raum betrachtet, zeigt sie in ihren Sätzen keinen Unterschied von der zweidimensionalen euklidischen Geometrie; die Fläche muß daher als eine euklidische Raumform von zwei Dimensionen betrachtet werden." (Killing 1893, 273) Konkret geht es in diesem Zitat um den Zylinder. „An jeder Stelle der Fläche läßt sich ein Gebiet abgrenzen für das die Gesetze der euklidischen Ebene gelten, und an jeder anderen Stelle giebt es, nachdem das erste Gebilde passend gewählt ist, ein zweites, das ihm im weiteren Sinne kongruent ist." (Killing 1893, 278)
Trotz dieser eher abstrakten Ansätze blieben Killings Untersuchungen, wie wir gleich sehen werden, in einer charakteristischen Weise beschränkt.

117 Die Operation soll also eigentlich diskontinuierlich erfolgen.

steme bedient.[118] Für die euklidischen Raumformen von zwei Dimensionen findet der Autor zwei Gruppen: diejenige, welche von einer Translation erzeugt wird (also Z), und jene, welche von zwei Translationen mit linear unabhängigen Verschiebungsvektoren erzeugt wird (also $Z \oplus Z$). Erstere führt auf den Zylinder (eine nicht-geschlossene Raumform), was auch Killing so sagt (Killing 1893, 326), letztere auf den Torus. Das sagt aber Killing keineswegs so: Er spricht vielmehr nur über das zugehörige Identifikationsschema, welches er als Parallelogramm darstellt (vgl. Killing 1893, 281). Eine globale Charakterisierung der Raumform erfolgt weder hier noch beim sphärischen (elliptischen) oder hyperbolischen Fall. Killing gelangt zu Kennzeichnungen der entsprechenden Raumformen wie der folgenden:

> „Eine elliptische Raumform von zwei Dimensionen ist entweder als Ganzes beweglich oder sie ist doch mit Ausschluß einzelner Linien oder Punkte eindeutig auf eine Riemannsche Ebene oder deren Polarform abwickelbar."
>
> (Killing 1893, 328)[119]

Trotz dieser Einschränkungen gelang es Killing, topologische Charakteristika, insbesondere den Zusammenhang, für einige der von ihm betrachteten Raumformen zu ermitteln (zum Beispiel für den Torus; vgl. Killing 1893, 284). Schließlich sei noch auf die Beschreibung des 3-Torus verwiesen, welche Killing gibt (vgl. Killing 1893, 288f). Gerade hier wird die Überlegenheit der Poincaréschen Methoden, was das qualitative und globale Verständnis dieser Mannigfaltigkeiten anbelangt, deutlich (vgl. 3.2). Halten wir fest, daß mit Killings Arbeit der Bezug des Raumformenproblems zu den Untergruppen der Bewegungen der traditionellen Geometrien hergestellt war. Umgekehrt war seit Poincaré's Abhandlungen über Fuchssche Funktionen, insbesondere seit der Arbeit von 1882 (vgl. 3.1) klar, daß man aus hyperbolischen 2p-Ecken alle orientierbaren geschlossenen Flächen des Geschlechts zwei und größer gewinnen kann, wobei die notwendigen Identifizierungen durch hyperbolische Bewegungen bewirkt werden, welche eine Untergruppe („Fuchssche Gruppe") der Bewegungsgruppe erzeugen. Dies wird allerdings bei Killing nicht thematisiert. Einen Überblick zum Stand der Dinge um die Jahrhundertwende gibt Enriques 1907, 114-117.

Den Verdienst, diese aus der Funktionentheorie bekannte Tatsache explizit mit dem Raumformenproblem in Verbindung gebracht zu haben, kommt H. Gieseking mit seiner Dissertation Gieseking 1912 zu. Er war es auch, der den nicht-orientierbaren Fall in seine Betrachtungen einbezog. Schließlich sind im Zusammenhang mit dem Raumformenproblem auch die Arbeiten Bieberbach 1911 und 1912 zu nennen, in denen L. Bieberbach Konjugationen von diskontinuierlichen euklidischen Bewegungsgruppen mittels affinen Bewegungen untersuchte, was eine direkte Verallgemeinerung von Poincaré's sechstem Beispiel darstellt (wo diskontinuierliche affine Gruppen betrachtet wurden, siehe 3.2 unten); vergleiche hierzu Sarkaria 1996, 257.

---

118 Also - in Vorform - der linearen Algebra.

119 Die 2-Sphäre ist die einzige geschlossene Raumform konstanter positiver Krümmung der Dimension zwei.

Den topologischen Gehalt des Raumformenproblems klar erkannt und formuliert hat aber erst H. Hopf in seiner Abhandlung Hopf 1926. Hierzu waren vor allem die Begriffe (topologische) Überlagerung und Fundamentalgruppe erforderlich, welche erst - wie Hopf selbst bemerkt - mit Weyl 1913 und Poincaré's Analysis situs Serie (1892 bis 1904) zur Verfügung standen. Kurz gesagt handelte es sich um folgenden heute wohlbekannten Zusammenhang: Ist M ein Clifford-Kleinscher Raum, so betrachte man dessen universelle Überlagerung[120] M'. Die geometrische Struktur von M läßt sich nach M' hochheben, was dazu führt, daß M' einer der klassischen geometrischen Räume sein muß. Die Fundamentalgruppe von M ist isomorph der Decktransformationsgruppe von M', welche ihrerseits eine eigentlich-diskontinuierlich und fixpunktfrei operierende Untergruppe der Bewegungsgruppe des fraglichen geometrischen Raumes (sphärisch, hyperbolisch, euklidisch) ist. Somit ist - was ja auch schon Killing gesehen hatte - das Raumformenproblem auf eines von Untergruppen von Bewegungsgruppen zurückgeführt. Hopf konnte aber, gestützt auf die von ihm entwickelten topologischen Techniken, über Killing hinausgehend noch zeigen, daß man auf die geschilderte Art und Weise ausgehend von eigentlich-diskontinuierlich und fixpunktfrei operierenden Bewegungsgruppen tatsächlich alle Raumformen erhält (vgl. Hopf 1926, 317-319).

Insbesondere ergibt sich, daß die zweidimensionalen geschlossenen Raumformen mit den aus der Klassifikation der geschlossenen Flächen bekannten Typern zusammenfallen, daß hier also trotz der unterschiedlichen Zugangsweisen kein wesentlicher Unterschied besteht.[121] Die Hopfsche Arbeit enthielt noch zahlreiche andere wichtige und interessante Ergebnisse: Neben der Untersuchung von Untergruppen der SO(4) nebst zugehörigen Raumformen[122] , welche in manchen Punkten Threlfall und Seiferts Ergebnisse von 1931

---

120 Hopf bemerkt ausdrücklich, daß er diesen hier ja nicht mehr auf das Zweidimensionale beschränkten Begriff in direkter Verallgemeinerung von Weyl 1913 übernommen hat. Wir haben es somit mit einer sehr frühen - vielleicht sogar mit der ersten - Stelle zu tun, an der eine rein topologische Überlagerungstheorie für mehr als zwei Dimensionen formuliert wird.

121 Dies wird allerdings nicht explizit bei Hopf gesagt. Threlfall und Seifert stellen andererseits diese Einsicht 1931 als allgemein bekannte Tatsache hin, ohne eine Belegstelle zu nennen (vgl. Threlfall-Seifert 1931, 2).

122 Ähnlich wie Killing verzichtete auch Hopf oft auf eine globale topologische Charakterisierung der Raumformen. Hier lag dann gerade ein wesentliches Verdienst von Threlfall und Seifert; vgl. 5.2. Das zu Hopf Gesagte wird etwa in seinem Hauptergebnis über sphärische bzw. elliptische Raumformen deutlich:

> „Außer denjenigen dreidimensionalen elliptischen Raumformen, deren Gruppen reine Schiebungsgruppen sind und auf die oben beschriebene Weise aus je einer beliebigen Polyedergruppe gebildet werden, sowie denen mit zyklischen Schraubungsgruppen gibt es noch unendlich viele andere Raumformen mit komplizierten untereinander nicht isomorphen Gruppen, unter deren Decktransformationen sich Schraubungen befinden." (Hopf 1926, 326)

Um hier vom topologischem Standpunkt aus weiter zu kommen, müßte man die Fundamentalbereiche nebst den zugehörigen Identifizierungen untersuchen; genau das haben Threlfall und Seifert in gewissen Fällen geleistet. Da die aufgeführten Gruppen teilweise endlich sind, liefern sie neue Beispiele geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe (neben endlichen zyklischen Gruppen wie im Falle des projektiven reellen Raumes, der binären Ikosaedergruppe bei Poincaré's Homologiesphäre und der multiplikativen Gruppe der Einheiten im Schiefkörper der Quaternionen beim Quaternionenraum), wie Hopf ausdrücklich hervorhebt, um schließlich festzustellen: „Die Antwort auf die Frage, ob mit den Gruppen der sphärischen Raumformen die endlichen Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten erschöpft sind, scheint nicht bekannt zu sein." (Hopf 1926, 326)
Man bemerkt, daß auch bei Hopf Aspekte des Homöomorphieproblems für 3-Mannigfaltigkeiten gegenwärtig sind. Die Frage nach geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe wurde später von J. W. Alexander in seinem Vortrag Alexander 1932 wieder aufgegriffen (vgl. 5.1.2). Beispiele

vorwegnahm (vgl. 5.2), behandelte Hopf den Jordanschen Satz in Clifford-Kleinschen Raumformen und vor allem Abbildungseigenschaften derselben. Hier lag wohl der Beginn für die berühmten Ergebnisse von Hopf über den Abbildungsgrad und das Abbildungsverhalten von Sphären (S^3 läßt sich eigentlich auf S^2 abbilden); vgl. hierzu Dieudonné 1989, 314-320. Bemerkenswert ist dabei noch, daß Hopf Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie verwandte, insbesondere Betrachtungen über Geodätische. Nach einer Periode der Autonomisierung der Topologie (von Dyck bis in die 30er Jahre) zeichnet sich wieder eine zunehmende Vernetzung mit anderen Teilgebieten der reinen Mathematik ab (vgl. auch 5.2 und 8).

Versucht man zusammenfassend das für unseren Problemkreis Wesentliche in der Geschichte des Clifford-Kleinschen Raumformenproblems herauszuarbeiten, so wird man dieses in der Idee des (modern gesprochen) homogenen Raumes (oder Orbitraumes) sehen müssen zusammen mit der Einsicht, daß man durch die Betrachtung der operierenden Gruppen zu topologisch wichtigen Einsichten gelangen kann. Bei letzterer wiederum ist eine gute Kenntnis der geometrischen Situation, insbesondere der konkreten Wirkung der operierenden Gruppe, unerläßlich. Insofern weist gerade die hier betrachtete Situation auf die engen Beziehungen zwischen Geometrie und dreidimensionaler Topologie hin, die auch heute wieder aktuell sind (vergleiche 7 unten).

2.6 Zusammenfassung

Die Klassifikation der Flächen war zweifellos der erste große Erfolg der Topologie und darf deshalb eine nachhaltige Bedeutung für die Etablierung dieser Disziplin für sich beanspruchen. Insbesondere löste sich dieses Problem aus seinen ursprünglichen Kontexten (Funktionstheorie, Polyedertheorie), um zu einer Frage eigenständigen Interesses, welche mit eigens entwickelten Methoden anzugehen ist, zu werden, übernahm also eine Art Vorreiterrolle für die im Entstehen begriffene Diziplin Topologie (vgl. 8). Die entsprechenden Bemühungen führten zu einer schrittweisen Präzisierung der Grundbegriffe „Fläche" und „Homöomorphismus" und leisteten damit Vorarbeit für den dreidimensionalen Fall. Auch die Art und Weise, wie Poincaré anfänglich 3-Mannigfaltigkeiten konstruierte (nämlich durch Identifikationen an einem Polyeder) steht in direkter Analogie zum zweidimensionalen Fall (vgl. 3.2), wenn dies auch nicht wichtig für ihn gewesen ist. Die von Riemann eingeführten Zusammenhangszahlen wurden bereits bei diesem und dann bei Betti auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Selbst die Fundamentalgruppe, die erst von Poincaré explizit eingeführt wurde und die in der dreidimensionalen Topologie eine ganz zentrale Rolle spielt, war - gewissermaßen als „tacit knowledge" - implizit bei Jordan vorhanden. Wie wir gesehen haben, läßt sich das Klassifikationsproblem im Zweidimensionalen auch mit anderen Invarianten, z. B. mit der Euler-Charakteristik, lösen. Die grundlegende Einsicht, daß diese bereits im Dreidimensionalen nicht mehr ausreicht, findet sich bei Dyck ebenso wie ein tiefes

für hyperbolische geschlossene dreidimensionale Clifford-Kleinsche Raumformen findet man bei Löbell 1931; das erste Beispiel dieser Art, das Löbell anscheinend unbekannt gewesen ist, geht auf H. Gieseking zurück (vgl. Gieseking 1912, 160f sowie 5.2 unten).

geometrisches Verständnis für die Besonderheiten von 3-Mannigfaltigkeiten. Selbst der Gegensatz zwischen kombinatorischer und kontinuumstopologischer Auffassung, der ja hier nach Radó 1925 nur ein scheinbarer ist, ist uns begegnet, wenn allerdings auch erst zu einem Zeitpunkt (Dehn-Heegard 1907), zu dem die dreidimensionale Topologie in voller Entwicklung war.

Die Bedeutung der Klassifikation der Flächen für unser Thema hier lag also einerseits in ihrem Vorbildcharakter, andererseits in der Bereitstellung verallgemeinerbarer Begrifflichkeiten und Methoden.

3 Poincaré's Arbeiten zur Topologie, insbesondere zur Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten

Die Serie der großen Arbeiten, die Jules Henri Poincaré der Topologie gewidmet hat und mit der er zum Begründer der kombinatorischen Topologie wurde[1], entstand in den Jahren 1892 (Note „Sur l'analysis situs", gelesen am 31. Oktober vor der Académie des sciences) bis 1904 („Cinquième complément à l'Analysis situs"). Diese Arbeiten schließen, wie wir bald sehen werden, inhaltlich und zeitlich an Untersuchungen zu den Themenkomplexen „automorphe Funktionen" und „qualitative Theorie der Differentialgleichungen" an, wobei letztere wiederum in enger Beziehung zu Poincaré's Beiträgen zur Himmelsmechanik („Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste" Bd. I 1892, Bd. II 1893, Bd. III 1899) stehen.

---

[1] Man vergleiche hierzu etwa das Urteil von S. Lefschetz, das sich im Vorwort zu seinem Topologielehrbuch von 1930 findet:

„Perhaps no branch of mathematics did Poincaré lay his stamp more indelibly than on topology. To him we owe the basic notions of complex, the boundary relations and related numerical invariants, the first duality theorem. But Poincaré quickly centered his efforts upon the classification of manifolds and other questions, leaving the foundations in rather equilibrium."

Die Fundamentalgruppe hätte als einer der wichtigsten Beiträge Poincaré's sicherlich Aufnahme in Lefschetz' Liste verdient. Erste Begriffsbildungen im Rahmen der kombinatorisch/algebraischen Topologie, die wesentlich über Poincaré hinausgingen, waren erst die höheren Homotopiegruppen, deren Einführung von E. Cech auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Zürich 1932 skizziert und dann systematisch von W. Hurewicz 1935 durchgeführt wurde (vgl. Anmerkung 77 in Kapitel 4).

Eine Bemerkung zur Terminologie ist hier angebracht: Im folgenden werde ich meist die Bezeichnung „kombinatorische" Topologie für den Zeitraum bis Mitte der 1930er Jahre verwenden, um danach von „algebraischer" Topologie zu sprechen. Damit soll natürlich nicht geleugnet werden, daß auch schon Poincaré algebraische Methoden - vor allem im Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe - verwandt hat. Inwieweit die Methoden sich verändert haben, wird noch einer eingehenderen Betrachtung bedürfen (vergleiche 6). Soll dieser erste große Abschnitt in der Geschichte der Topologie unter inhaltlichen Gesichtspunkten charakterisiert werden, so spreche ich auch von der „Theorie der Mannigfaltigkeiten" in Abgrenzung zu der nachfolgenden eher algebraisch beeinflußten „Theorie der topologischen Strukturen". Der Begriff „Topologie" wird im folgenden fast immer im eingeschränkten Sinne von „Theorie der Mannigfaltigkeiten" gebraucht, insbesondere wird die mengentheoretische Topologie in unseren Betrachtungen eine untergeordnete Rolle spielen.

Die weiteren Ausführungen dieses Kapitels behandeln zuerst den Ausgangspunkt Poincaré's, dann den Stand, den das Klassifikationsproblem in der zentralen Abhandlung von 1895 erreichte, und schließlich die weitere Entwicklung bei Poincaré, die endlich im 5. Komplement zu jener „unschuldig klingenden Frage" (C. Rourke/I. Stewart) führte, die in die Geschichte der Topologie als deren berühmteste Vermutung eingehen sollte (V ist eine zusamenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit): „Est-il possible que le groupe fondamental de V se reduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?" (Poincaré VI, 498)

Unser Ziel wird es dabei nicht sein, eine umfassende Darstellung des topologischen Werkes von Poincaré zu geben (welche meines Wissens noch zu leisten wäre; Ansätze hierzu bei Bollinger 1972 und Scholz 1980, mehr summarisch natürlich auch bei Dieudonné 1989). Vielmehr werden wir uns auf die Aspekte konzentrieren, die mit unserem Thema - dem Klassifikationsproblem und der Poincaré-Vermutung eben - in engerem Zusammenhang stehen. An einigen Stellen erschien mir dennoch angebracht, etwas weiter auszuholen und auch die Entwicklung der Invarianten und der Methoden zu ihrer Berechnung, des Mannigfaltigkeitsbegriffes und anderes mehr darzustellen, da diese Dinge entscheidend in das Grundproblem der Theorie der Mannigfaltigkeiten, das Homöomorphieproblem eben, einfließen.

3.1 Einführende Bemerkungen

Die beiden bereits erwähnten Arbeitsgebiete, Theorie der Differentialgleichungen und Theorie der automorphen Funktionen, führten Poincaré bereits vor seinen eigentlich topologischen Arbeiten zu Einsichten, welche mit der Topologie aufs engste verknüpft sind (vergleiche hierzu auch Volkert 1997). In diesem Zusammenhang ist vor allem die 1882 erschienene Abhandlung „Théorie des groupes fuchsiens" zu nennen (Poincaré II, 1-62), in der Poincaré explizit die Klassifikation der geschlossenen orientierbaren Flächen durch ihr Geschlecht erwähnt: „On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres..." (Poincaré II, 41). Wie man dem Briefwechsel mit F. Klein entnehmen kann (Poincaré XI, 26-65 oder Dugac 1989, 89-140), kannte Poincaré 1881 noch gar nicht den Begriff „Geschlecht im Sinne der Analysis situs" (vgl. Dugac 1989, 96), weshalb er Klein um Aufklärung bat. Diese erfolgte umgehend, wobei Klein die Definition des Geschlechtes über die Maximalanzahl disjunkter nicht-zerstückender Rückkehrschnitte (Dugac 1989, 97) mitteilte. Poincaré selbst formulierte dann die entsprechende Definition in der bereits genannten Arbeit (Poincaré II, 41) sowie im dritten Teil seiner Abhandlung über die durch Differentialgleichungen definierten Kurven, welche auf den 15. Januar 1885 datiert ist (vgl. Poincaré I, 11). Als Beispiele führte er die Sphäre (Geschlecht 0) und den Torus (Geschlecht 1) an. Im zuletzt genannten Zusammenhang bemühte sich Poincaré auch um eine Begründung der Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes auf geschlossene Flächen vom Geschlecht p, welche er in seiner Arbeit über Fuchssche Funktionen von 1882 noch kommentarlos verwendet hatte. Diese Verallgemeinerung besagt, daß für eine zusammenhängende geschlossene orientierbare Fläche des Geschlechtes p, welche polygonal zerlegt ist, die Beziehung $F-K+E = -2p+2$ gilt, wobei F die Anzahl der Flächen, K diejenige der Kanten und E die der Ecken ist. 1885 weist Poincaré ausdrücklich darauf hin, daß

diese Formel auch für nicht-ebenflächig begrenzte Polyeder gelte (vgl. Poincaré I, 124), weil man sich in der „Geometrie der Lage" (géométrie de situation - vgl. Anm. 3 unten) nicht um die Form der Begrenzungsflächen kümmern müsse. Drei Jahre früher wurde dies noch stillschweigend vorausgesetzt - wohl ein Zeichen dafür, daß Poincaré seinerzeit noch wenig über dieses neue Gebiet nachgedacht hatte, das er ja gerade erst für sich zu erschließen begann. In technischer Hinsicht bedeutsam ist Poincaré's Idee, das Geschlecht der zu einer automorphen Funktion gehörigen Fläche mit Hilfe des Fundamentalpolygons, aus dem diese hervorgeht, zu berechnen - ein, wie wir in 2.4 gesehen haben, später bei der Klassifikation der Flächen durchaus übliches Verfahren. Vermutlich war Poincaré der erste, der diese Vorgehensweise wählte (vgl. auch Anmerkung 114 dieses Kapitels für Details).

Im Hinblick auf die 3-Mannigfaltigkeiten, welche uns im weiteren ja hauptsächlich interessieren werden, ist noch die Tatsache wichtig, daß Poincaré im Rahmen seiner funktionentheoretischen Studien - genauer gesagt ging es um die von ihm Kleinsche Funktionen genannten automorphen Funktionen - 1883 Raumteilungen des hyperbolischen Raumes durch hyperbolische Polyeder betrachtet hatte, welche durch die Elemente einer auf diesem Raum operierenden diskreten Untergruppe der Bewegungsgruppe aufeinander abgebildet werden (vgl. Poincaré II, 274-280).[2] Da im Falle der (zweidimensionalen) Fuchsschen Gruppen die entsprechenden geschlossenen Flächen vermöge ihres Geschlechtes eine Klassifikation der Funktionen erlaubten, wobei die Tatsache, daß es sich beim Geschlecht um eine topologische Invariante handelt, wichtig war (vgl. Anmerkung 10 unten), lag eine ähnliche Frage im dreidimensionalen Fall nahe. Damit war die Grundfrage für Poincaré's topogische Arbeiten (Topologie im Sinne von Theorie der Mannigfaltigkeiten) gestellt, wenn dies auch 1883 noch nicht explizit gesagt wird. Wahrscheinlich hatte auch Dyck, der 1884 in Montreal (vgl. 2.3.1) davon gesprochen hatte, daß seine Untersuchungen zur Analysis situs des dreidimensionalen Raumes durch funktionentheoretische Fragen erforderlich geworden seien, die geschilderten oder ähnliche Probleme vor Augen.

Im Hinblick auf spätere Entwicklungen (vgl. 5.2 und 7) ist es bemerkenswert, wie eng ursprünglich der Zusammenhang zwischen dreidimensionaler Topologie und hyperboli-

[2] In moderner Ausdrucksweise hatte Poincaré folgenden Zusammenhang entdeckt: Die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien des hyperbolischen Raumes (der hyperbolischen Ebene) ist isomorph der Gruppe PSL(2,C) (der Gruppe PSL(2,R)), wobei P andeutet, daß alle Matrizen, die durch Multiplikation mit einem Skalar auseinander hervorgehen, miteinander identifiziert werden. Die Kleinschen (Fuchsschen) Funktionen sind solche, welche unter den Elementen einer geeigneten Untergruppe der genannten Gruppen PSL(2,C) bzw. PSL(2,R) invariant bleiben - das heißt, sie sind spezielle automorphe Funktionen. Andererseits liefert eine derartige Untergruppe stets eine Raumteilung des hyperbolischen Raumes bzw. eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene durch die iterierten Bildes ihres Fundamentalbereiches. Nimmt man den Fundamentalbereich nebst den Identifizierungen auf seinem Rand, welche sich aus den Erzeugenden der zugehörigen Gruppe (bei Poincaré heißt diese Kleinsche bzw. Fuchssche Gruppe) ergeben, so erhält man eine orientierbare geschlossene 3-Mannigfaltigkeit (Fläche). Diese geht aus einem Polyeder des hyperbolischen Raumes (aus einem Polygon der hyperbolischen Ebene) durch Randidentifikationen hervor. Damit ist exakt Poincaré's Ausgangspunkt für die Konstruktion seiner geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten gewonnen, falls man die hyperbolische Raumgeometrie durch die euklidische ersetzt. Eine Art „Steilkurs" zu den geschilderten Zusammenhängen bietet Saldanha 1994, ausführlich ist Ratcliffe 1994; man vgl. auch Milnor 1982 sowie für historische Hintergrundinformationen Gray 1986 und Poincaré 1997.

scher Geometrie bzw. Funktionentheorie gewesen ist. Dieser trat im weiteren im topologischen Werk Poincaré's völlig zurück - ein bemerkenswertes Beispiel für den Vorgang der Dekontexualisierung (vgl. 8) -, um gerade heutzutage wieder eine ganz wichtige Rolle zu spielen.

Vor der Analysis-situs-Serie, auf die wir gleich ausführlich zu sprechen kommen werden, blieb die Topologie bei Poincaré eine Hilfsdisziplin, weitgehend ohne eigenständiges Interesse und Profil. Die Logik der Dinge selbst war es, die Poincaré - der sich offenkundig erst zu topologischen, insbesondere höherdimensionale Untersuchungen entschließen mußte - zur Topologie führte, wie er auch selbst in einer bekannten Passage in seiner „Analyse de ses travaux scientifiques" betonte:

> „Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis sitûs."
>
> (Poincaré 1921, 101)

Als Belege führte er dann die Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung, die Untersuchung mehrwertiger Funktionen zweier Variablen, das Studium der Perioden mehrfacher Integrale nebst deren Anwendungen in der Störungstheorie sowie das Untergruppenproblem an. Man bemerkt erneut, daß sich die topologischen Probleme erst in anderen mathematischen Kontexten stellten, um sich allmählich aus diesen unter dem Aspekt einheitlicher Behandelbarkeit zu lösen und so einer neuen Disziplin zur Entstehung zu verhelfen. Vergleiche hierzu Kapitel 8 unten.

Schließlich möchte ich auf zwei eher technische Aspekte hinweisen, welche sich ebenfalls in den genannten Arbeiten finden und die für die Entwicklung der Topologie bei Poincaré nicht unerheblich waren: Zum einen sind da die Ansätze zur kombinatorischen Gruppentheorie zu nennen, welche Poincaré bei seiner Untersuchung Fuchsscher Gruppen entwickelte und die ihn zu einer - wenn auch noch nicht expliziten - Beschreibung von Gruppen durch Erzeugende und Relationen führten (Poincaré II, 44-48), zum andern die explizite Betrachtung geschlossener Wege auf Flächen im Zusammenhang mit der Untersuchung von Integralkurven. Beides waren wichtige Vorarbeiten zur Einführung der Fundamentalgruppe, eine der wichtigsten topologischen Leistungen Poincaré's überhaupt.

Bevor wir uns im weiteren Verlauf dieses Kapitels den mathematischen Entwicklungen, welche auf Poincaré im Bereich der Topologie zurückgehen, zuwenden, erscheint es angebracht, kurz auf die Stellung, die dieser der neuen Disziplin im Rahmen seiner wissenschaftsphilosophischen Überlegungen zuerkannte, einzugehen. Dabei sollte vor allem deutlich werden, daß die Topologie für Poincaré ab einem gewissen Stand der Entwicklung mehr war als nur ein Teilgebiet der Mathematik und daß sein Interesse am Homöomorphieproblem durchaus tiefergehende Wurzeln hatte.

Der Einfluß der Topologie auf Poincaré's Wissenschaftsphilosophie begann sich gegen Ende des 19. Jahrhunderts bemerkbar zu machen. Hier ist in erster Linie der Artikel „On the foundations of Geometry" (1898 - 1899) zu nennen, der etwas später in leicht veränderter Form in Französisch erschien und dann Eingang in Poincaré's Buch „La valeur de la science" fand (1905).

Die Poincarésche Philosophie der Geometrie (hier durchaus im weiteren Sinne zu nehmen) entwickelte sich in zwei Stufen: Verarbeitung der nichteuklidischen Geometrie (um 1890 herum), insbesondere in dem bekannten Aritikel „Les géométries non-euclidiennes" von 1890, die zur Ausbildung von Poincaré's geometrischen Konventionalismus führte, und erkenntnistheoretische Auswertung der Topologie (etwa seit 1898), was unter Einbeziehung der Ideen Helmholtz' schließlich in die physiologische Fundierung der Dreidimensionalität des Raumes mündete („De tous les théorèmes de l'Analysis Sitûs, le plus important est celui que l'on exprime en disant que l'espace a trois dimensions." (Poincaré 1970, 60)).

Geometrie im engeren Sinne ist für Poincaré metrisch und deshalb quantitativ, folglich - da jede Metrik konventionell ist - kann sie nicht die Wissenschaft des im Raume anschaulich Gegebenen sein. Das ist vielmehr die Topologie:

> „Et voici ce que fait pour nous l'intérêt de cette Analysis Situs; c'est que c'est là qu'intervient vraiment l'intuition géométrique"
>
> (Poincaré 1963, 124).

Genauer ausgeführt wurde dieser Gedanke in der zirka 1901 niedergeschriebenen „Analyse de ses travaux scientifiques":

> „On a dit, écrivais-je (ou à peu près) dans une préface (199), que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. Oui, sans doute, mais à une condition. Les proportions de ces figures peuvent être grossièrement altérés, mais leurs éléments ne doivent pas être transposées et ils doivent conserver leur situation relative. En d'autres termes, on n'a pas à s'inquiéter des propriétés quantitatives, mais on doit respecter les propriétés qualitatives c'est à dire précisément celles dont s'occupe l'Analysis Situs.
>
> Cela doit nous faire comprendre qu'une méthode qui nous ferait connaître les relations qualitatives dans l'espace à plus de trois dimensions, pourrait, dans une certaine mesure, rendre des services analoques à ceux qui rendent les figures. Cette méthode ne peut être que l'Analysis Situs à plus de trois dimensions."
>
> (Poincaré 1921, 100f)

Die Zahl 199 bezieht sich dabei auf die Abhandlung „Analysis Situs" (Poincaré VI, 193-288), in deren Vorwort sich die angesprochene Formulierung sowie grundlegende Überlegungen zur Wichtigkeit und zum Wesen der Topologie - ähnlich den hier wiedergegebenen - finden (vgl. auch unten 3.2).

Man versteht nun gut, welche Bedeutung das Homöomorphieproblem in Poincaré's Augen hatte, denn der Homöomorphietyp ist im Falle von geschlossenen Flächen (oder höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten) die wichtigste qualitative Eigenschaft eines derartigen Gebildes überhaupt. Im Dreidimensionalen vermittelt die Topologie - indem sie die Flächen nach Homöomorphie klassifiziert - deren anschaulich wichtigstes Charakteristikum; läßt uns die Anschauung im Stich, wie im höherdimensionalen Fall oder bei nicht-orientierbaren geschlossenen Flächen, so wird die Topologie sogar zu einer Art von Ersatzanschauung. Diesen Aspekt hat Poincaré ebenfalls in seiner bereits zitierten „Analyse de ses travaux scientifiques" hervorgehoben:

> „Pour aller plus loin, il me fallait un instrument destiné à remplacer l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace à plus de trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé à aborder l'étude de l'Analysis Situs.. "
>
> (Poincaré 1921, 64)

Gemäß der Zielsetzung, die die vorliegende Arbeit verfolgt, mögen diese Andeutungen genügen, um zu zeigen, daß Poincaré der Topologie in seiner Wissenschaftsphilosophie eine wichtige Rolle zudachte. Wir wollen uns nun der Mathematik selbst zuwenden, wo das Homöomorphieproblem, zumindest im Falle der geschlossenen Flächen, ja durchaus schon zu Poincaré's Zeiten eine Tradition gebildet hatte.

Die Serie der großen Arbeiten zur Topologie von Poincaré, der im übrigen stets die auf G.W. Leibniz zurückgehende Bezeichnung „Analysis situs"[3] verwendete, begann 1892 mit einer kurzen Note „Sur l'Analysis situs" (Poincaré VI, 189-192), welche vor der Akademie gelesen wurde.[4] Diese umreißt in knapper Form sein Anliegen, gibt Auskunft über Vorarbeiten und Motive und enthält die Einführung der Fundamentalgruppe.

ad 1: Nachdem Poincaré Nutzen und Bedeutung topologischer Betrachtungen auch in höheren Dimensionen herausgestellt hat, nennt er als seine wesentlichen Vorläufer B. Riemann („il a laissé sur ce sujet des fragments malheureusement très incomplets" [Poincaré VI, 184][5]), E. Betti (qui „a retrouvé et complété les résultats de Riemann"

[3] In Briefen und Arbeiten aus den 1880er Jahren findet man auch die Ausdrucksweise „Geometria situs" oder „géometrie de situation" (was hier synonym zu Topologie ist und nicht mit der von Staudtschen „Geometrie der Lage", die ja wesentlich projektive Geometrie gewesen ist, verwechselt werden darf). Der Terminus „Topologie", der von J.B. Listing 1847 in seinen „Vorstudien zur Topologie" eingeführt wurde und der sich im deutschsprachigen Raum vor allem unter den Knotentheoretikern halten konnte (O. Simony, F. Dingeldey), setzte sich erst in den 1930er Jahren allgemein durch. In aller Regel wurden die Bezeichnungen „Analysis situs" und „Topologie" synonym verwendet; eine Ausnahme hiervon bildet P. Heegard, der in seiner Dissertation 1898 zwischen „Analysis situs" als der speziellen Disziplin, in der es um Dinge wie den Eulerschen Polyedersatz, das Vierfarbenproblem, um Graphen und Knoten sowie um die Verallgemeinerung der Zusammenhangszahlen auf höhere Dimensionen geht, von der Topologie allgemein, die im Sinne Listing alle qualitativen Untersuchungen umfaßt (Heegard 1916, 121f), unterschied; ähnlich noch Müller 1909, 155. Mit modernen Augen betrachtet könnte man Heegards Unterscheidung in etwa mit der zwischen allgemeiner = mengentheoretischer (analytischer) Topologie und spezieller = algebraischer Topologie (= Theorie der Mannigfaltigkeiten) gleichsetzen. Poincaré verwendet im übrigen oft auch die Bezeichnung „Hypergeometrie", um geometrisch-topologisch orientierte Betrachtungsweisen im n-dimensionalen Raum ($n \geq 4$) zu charakterisieren, deren Wert und Sinnhaftigkeit er immer nachzuweisen suchte.

[4] Poincaré war zu diesem Zeitpunkt schon Akademiemitglied (er wurde am 31.01.1887 gewählt [vgl. Gilain 1991, 215 n.2]). Im übrigen hatte Poincaré schon zu Beginn der 80er Jahre die Fortschritte in seinen Forschungen durch kurze Noten, welche vor der Akademie gelesen wurden, noch vor ihrer eigentlichen Publikation in Gestalt von Abhandlungen zu dokumentieren versucht.

[5] Es ist bemerkenswert, daß Poincaré, dessen Unkenntnis der zeitgenössischen Fachliteratur geradezu notorisch war („Il lisait peu, en effet - je ne parle ici, bien entendu, que de ses lectures scientifiques -, et il lisait d'une façon très particulière", schreibt P. Boutroux über seinen Onkel (Poincaré XI, 148)), das 1876 von H. Weber aus dem Nachlaß herausgegebene „Fragment aus der Analysis situs" kannte.
Ähnlich wie Boutroux - wenn auch mit deutlich negativer Tendenz - äußert sich L. Couturat in einem Brief an B. Russell über seinen philosophischen Widersacher Poincaré: „Je crois qu'il les a à peine lues [les explications de Russell; K. V.]. (En général, il lit très vite et très mal, comme les esprits primesautiers; cela se voit) ... il ne veut rien entendre ni apprendre, il reste „entêté" de tous ses préjugés." (Couturat 1973, 91)

[Poincaré VI, 189][6]) sowie E. Picard (der die Betti-Zahlen[7] in Arbeiten zur „reinen Analysis" und zur „gewöhnlichen Geometrie" verwendet hat).

ad 2: Der nachfolgende Abschnitt ist geradezu programmatisch für Poincaré's topologische Arbeiten allgemein (vgl. auch Lefschetz' in Anm. 1 gegebene Bemerkung sowie oben 3.1.1 für die Hintergründe):

> „La question n'est pas épuisée cependant. On peut se demander si les nombres de Betti suffisent pour déterminer une surface fermée au point de vue de l'Analysis situs, c'est-à-dire si, étant données deux surfaces fermées qui possèdent mêmes nombres de Betti, on peut toujours passer de l'une à l'autre par voie de déformation continue. Cela est vrai dans l'espace à trois dimensions et l'on pourrait être tenté de croire qu'il en est encore de même dans un espace quelconque. C'est le contraire qui est vrai."
>
> (Poincaré VI, 189 f)

Wir finden hier zuerst einmal eine klare Beschreibung der Grundaufgabe der Topologie, nämlich der Klassifikation topologischer Gebilde („surfaces")[8] nach Homöomorphie („déformation continue").[9] Sodann wird gesagt, daß dieses Grundproblem - das Klassi-

[6] Poincaré verweist hier auf den vierten Band der „Annali di matematica" (2. Serie), der die entsprechende Arbeit Bettis (Betti 1871) enthält. Sowohl Poincaré als auch Picard/Simart betrachteten im übrigen Betti als weitgehend unabhängig von Riemann (vgl. „Indépendamment de Riemann, Betti avait de son côté étudié les divers ordres de connexion dans les espaces à n dimensions,..." (Picard/Simart 1897, 19)). Eine ganz andere Auffassung vertrat dagegen P. Heegard:
„Après la mort de Riemann, Betti publia un Mémoire à ce sujet (...). Il ne parle pas de collaboration avec Riemann; mais, à juger par les fragments d'une théorie, réunis par Weber d'après les notes écrites par Riemann (...), Riemann a pendant son séjour en Italie (...) essentiellement contribué aux pensées exprimées dans le Mémoire de Betti." (Heegard 1916, 192)
Eine moderne Stellungnahme zu der hier angesprochenen Frage ist Bottazini 1977; vgl. aber auch Weil 1979.

[7] Dies ist die früheste mir bekannte Verwendung des Terminus „Betti-Zahlen" („nombres de Betti"), welcher folglich eine Schöpfung Poincaré's sein müßte (in Picard/Simart 1897, 28 heißen sie „Riemann-Betti-Zahlen"). Zu Picard und seinen Arbeiten über algebraische Geometrie vergleiche man Houzel 1991; zu deren topologischen Aspekten dort insbesondere die Seiten 253-255 sowie Scholz 1980, 258-263. Am Ende der Note von Poincaré wird der Hinweis auf E. Picard noch durch die Anmerkung konkretisiert, daß dieser gezeigt habe, daß die eindimensionalen Zykel algebraischer Flächen im „allgemeinsten" Fall verschwinden (vgl. Houzel 1991, 254 oder Picard 1889, 175-181).

[8] Wie wir sehen werden und wie E. Scholz in seiner Arbeit Scholz 1980 ausführlich dargelegt hat, war dieser Grundbegriff, den wir heute mit „Mannigfaltigkeit" übersetzen würden, bei Poincaré und auch später durchaus schwankend. Die Bezeichnung „surface", welche der traditionellen Geometrie entlehnt ist, verschwindet bei Poincaré bereits 1895 zugunsten von „variété". Diese terminologische Verschiebung ist ein Ausdruck der „Dekontextualisierung" der neuentstandenen Disziplin Topologie (vgl. 8). Im übrigen gehen viele Termini technici der Topologie auf Poincaré zurück, z.B. Homöomorphismus und homolog (in seiner topologischen Bedeutung). Die Stabilisierung des Vokabulars ist ein Merkmal für einen gewissen Entwicklungsstand einer Disziplin.

[9] Der Frage, wie nahe Poincaré's „déformation continue" unserem modernem Homöomorphiebegriff kommt, soll hier nicht weiter nachgegangen werden (wir kommen hierauf zurück). Angemerkt werden muß aber, daß Poincaré die topologischen Invarianten (Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten, Fundamentalgruppe) stets als solche betrachtete, ohne aber hierfür einen Nachweis zu führen. Diesen mag man in gewissen Fällen - etwa bei der Fundamentalgruppe (so z.B. Tietze 1908, 69 n1) - aufgrund der getroffenen Definition als überflüssig erachten; im allgemeinen stellt er aber ein keineswegs triviales Problem dar (vgl. hierzu Henn/Puppe 1990, 677 f), das erstmals im Kontext der kombinatorischen Topologie systematisch von H. Tietze angegangen wurde in Tietze 1908, 69 - 77 (Fundamentalgruppe), 39-48 (Betti-Zahlen) und

fikationsproblem - für den Fall des dreidimensionalen Raumes gelöst sei. Wie wir an anderer Stelle (Poincaré VI, 247) erfahren, ging Poincaré davon aus, daß diese Frage „zum Beispiel durch das Studium der Perioden abelscher Funktionen"[10] beantwortet sei. Allerdings - und dessen scheint sich Poincaré bewußt gewesen zu sein, wie seine ausdrückliche Formulierung „im dreidimensionalen Raum"[11] vermuten läßt - erhält man so nur orientierbare Flächen, wenn man deren Geschlossenheit verlangt (im Falle Riemannscher Flächen algebraischer Funktionen ergibt sich diese von selbst, ansonsten wird sie an der oben genannten Stelle von Poincaré explizit erwähnt). Das von Poincaré im weiteren fast ausschließlich angegangene Klassifikationsproblem für 3-Mannigfaltigkeiten ergab sich, wie wir gesehen haben, einerseits als Analogie zum zweidimensionalen Fall, andererseits aber auch in natürlicher Weise im Rahmen der Untersuchung automorpher Funktionen. Die in diesem Zusammenhang entwickelten Invarianten haben somit zuerst einmal den Charakter von Mitteln zum Zweck. Dabei entsteht eine bemerkenswerte Wechselbeziehung zwischen den Invarianten als methodologischem Werkzeug und den zu klassifizierenden Gegenständen, das heißt konkret, den verschiedenen Fassungen des Mannigfaltigkeitsbegriffes. Diese wird wie ein roter Faden die gesamte Geschichte des Homöomorphieproblems durchziehen.

ad 3: Zweifellos ist die Einführung der Fundamentalgruppe[12] die wichtigste Errungenschaft der Note „Sur l'Analysis situs" Es sei hierzu V eine zusammenhängende Teilmenge des R^{n+1}, die als Nullstellengebilde einer Gleichung festgelegt wird (V wird von Poincaré eine „Fläche" genannt). Weiter seien

$$F_1: R^{n+1} \supset V \to R, \ldots, F_p: R^{n+1} \supset V \to R$$

p (in der Regel nicht einwertige) reellwertige Funktionen. Beschreibt nun der (modern gesprochen) Grundpunkt $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in V$ einen geschlossenen Weg in V, so werden die ursprünglichen Funktionswerte $F_1(x_1,\ldots,x_{n+1}),\ldots,F_p(x_1,\ldots,x_{n+1})$ übergehen in $F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})',\ldots,F_p(x_1,\ldots,x_{n+1})'$. Diese Änderung wird von Poincaré als „Substitution" gedeutet und in der Form $(F_1, \ldots, F_p; F_1', \ldots, F_p')$ geschrieben.[13]

Weiter heißt es:

53-56 (Torsionskoeffizienten). Später ist dann vor allem J. W. Alexander mit Invarianzbeweisen hervorgetreten (vgl. 5.1).

10 Ausführlich heißt das Zitat:
„On sait que deux variétés fermées à deux dimensions qui ont même nombre de Betti sont homéomorphes. C'est ce qui résulte, par exemple, de l'étude des périodes des fonctions abéliennes. Considérons une surface de Riemann R et soit z la variable imaginaire correspondante; on pourra introduire une variable imaginaire nouvelle t, telle que z soit une fonction fuchsienne de t et que t, consideré comme fonction de z, n'ait aucun point singulier sur la surface R. Tous les groupes fuchsiens correspondant à diverses surfaces de Riemann ayant même ordre de connexion seront isomorphes.
Ce groupe fuchsien ne sera, d'ailleurs, évidemment autre chose que le groupe fondamental g, relatif à la surface R considérée comme une variété à deux dimensions". (Poincaré VI, 247)
Vergleiche hierzu Kapitel 2 oben, insbesondere 2.5.

11 Hier ist also die Frage der Einbettbarkeit nichtorientierbarer Flächen angesprochen.

12 Die Bezeichnung „Fundamentalgruppe" („groupe fondamental") findet sich erst 1895 in der großen Abhandlung „Analysis situs" (z.B. in der Überschrift zu § 12; vgl. Poincaré VI, 239), 1892 ist schlicht von „der Gruppe" die Rede.

13 Man bemerkt, daß diese Definition exakt dem Monodromieverhalten komplexer Funktionen nachgebildet ist.

> „Toutes les substitutions correspondant aux divers contours fermés que l'on peut tracer sur la surface forment un groupe qui est discontinu (au moins en ce qui concerne sa forme)."
>
> (Poincaré VI, 190)

Die Tatsache, daß man auf die angegebene Art und Weise eine Gruppe erhält, wird von Poincaré kommentarlos unterstellt. Das liegt sicherlich daran, daß es ihm gelungen ist, durch die Zurückführung auf „Substitutionen" den neu einzuführenden Gegenstand in einen wohlbekannten Kontext einzubetten, in dem die fragliche Eigenschaft selbstverständlich ist („Substitutionen" bilden gewissermaßen von Natur aus immer eine Gruppe). Man erkennt hier - und darauf hat E. Scholz zurecht hingewiesen (Scholz 1980, 313 - 315) -, daß Poincaré's Gruppenbegriff zu diesem Zeitpunkt noch weitgehend an ein konkretes Modell (das Substitutionsmodell eben) gebunden bleibt und keineswegs einen allgemein-abstrakten Charakter besitzt. Dies erklärt auch die für den modernen Leser überraschende Tatsache, daß Poincaré niemals im Bereich der Homologie von Gruppen spricht, obwohl er deutlich erkennt, daß man beim Übergang von den der Fundamentalgruppe zugrunde liegenden Äquivalenzen (sprich: Relationen zwischen deren Erzeugenden) zu den Fundamentalhomologien, welche die Betti-Zahlen mitbestimmen, nur abelsch rechnen muß (Poincaré VI, 241 und 243).[14] Die Homologie entzieht sich eben dem begrifflichen Rahmen der Substitutionen.[15]

Im Anschluß an die Einführung der Fundamentalgruppe bemerkt Poincaré, daß diese im allgemeinen von der Wahl der Funktionen F abhänge. Eine andere Auswahl führe aber in der Regel zu einer isomorphen Gruppe.

Schließlich kehrt Poincaré am Ende seiner Note zum Ausgangsproblem - der Klassifikation - zurück. Er teilt ein Beispiel mit zweier geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten, deren Betti-Zahlen übereinstimmen, die aber nicht-isomorphe Fundamentalgruppen besitzen. Dieses Beispiel, das als sechstes und zentrales Beispiel 1895 wieder auftreten und dort ausführlich zu behandeln sein wird, umfaßt genauer gesagt eine ganze Klasse von konkreten Mannigfaltigkeiten. Diese gehen aus dem Einheitswürfel im R^3 vermöge folgender Identifikationen hervor:

$$S_1: R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+1,y,z)$$
$$S_2: R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,y+1,z)$$
$$S_3: R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1)$$

wobei $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, Z)$ sein soll.

14 Modern und einfach ausgedrückt ist die erste Homologiegruppe die abelsch gemachte Fundamentalgruppe.

15 Der Gruppenbegriff wurde erst relativ spät in den Rahmen der Homologietheorie eingeführt, wobei diese Idee (nicht ganz gerecht) üblicherweise E. Noether zugeschrieben wird. Vgl. hierzu 6.

Die entstehende Mannigfaltigkeit $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, die eine Unterlagerung des R^3 ist, verallgemeinert den dreidimensionalen Torus T^3. Dieser ergibt sich, wenn man in S_3 von oben $\alpha = \delta = 1$ und $\beta = \gamma = 0$ wählt. Wir bemerken, daß die Konstruktion von $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ analog zur Randidentifikation bei Fundamentalpolygonen automorpher Funktionen verläuft und daß die Gruppe SL(2, Z) aus dieser Theorie Poincaré vertraut war.[16]

Wählt man nun zwei verschiedene Matrizen M und M' aus SL(2,Z) zur Definition von S_3, so erhält man verschiedene Identifikationen. Poincaré nennt diese Substitutionen S_3 und S_3'. Die von S_1, S_2 und S_3 beziehungsweise von S_1, S_2 und S_3' erzeugten Gruppen[17] können nur dann isomorph sein, wenn die beiden zugehörigen Matrizen konjugierte Elemente von SL(2, Z) sind.[18] Da es nicht-konjugierte Elemente in SL(2, Z) gibt, kann Poincaré[19] schließen: „Cela n'arrivera pas en général." (Poincaré VI, 191) Folglich gibt es Mannigfaltigkeiten $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ und $V(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ mit nicht isomorphen Fundamentalgruppen.

Schließlich behauptet Poincaré bezüglich der Betti-Zahlen von $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ [vgl. Poincaré VI, 192][20]:

$$\beta_2 = 4$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 4, & \text{falls M Einheitsmatrix} \\ 3, & \text{falls } \alpha + \delta = 2 \text{ aber M nicht Einheitsmatrix} \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

---

[16] Das Studium von SL(2,Z) in Zusammenhang mit bestimmten automorphen Funktionen („Modulfunktionen") geht auf Ch. Hermite (1858) zurück; die fragliche Gruppe spielt natürlich schon bei den elliptischen Funktionen eine wichtige Rolle. Vergleiche auch Anmerkung 76 unten.

[17] Modern gesprochen handelt es sich hier um Decktransformationsgruppen, welche den entsprechenden Fundamentalgruppen isomorph sind, da die Überlagerungen universelle sind (R^3 ist ja einfach zusammenhängend). Der Zusammenhang zwischen der Gruppe der Decktransformationen und der Fundamentalgruppe wird zuvor von Poincaré kurz skizziert.

[18] Dies läßt sich relativ leicht einsehen, weil ja im Falle der Isomorphie die Decktransformationen

$$(x,y,z) \mapsto \left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}(x,y)^T, z+1\right)$$

und

$$(x,y,z) \mapsto \left(\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}(x,y)^T, z+1\right)$$

zum gleichen Ergebnis führen müssen. Somit hat man dann

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}(x,y)^T = \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}(x,y)^T)^T$$

Wesentlich schwieriger ist es, zu zeigen, daß die Bedingung nicht nur notwendig sondern auch hinreichend für die Isomorphie der Fundamentalgruppen ist. Das machte Poincaré in seiner Abhandlung von 1895 (Poincaré VI, 248-257), wobei allerdings sein Ergebnis nicht ganz korrekt ist (vergleiche Sarkaria 1996, 255 -257).

[19] Auch dieses wird 1895 bewiesen (Poincaré VI, 256 f). Konkret sind $\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & h'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dann nur dann konjugiert, wenn $|h| = |h'|$ gilt.

[20] Der erste Unterfall ($\beta_1 = 4$) ist der Fall des gewöhnlichen dreidimensionalen Torus T^3. Im übrigen ist zu beachten, daß Poincaré's Betti-Zahlen grundsätzlich um 1 größer sind als die modernen. In den Kapiteln 3 und 4 folgen wir der Auffassung Poincaré's.

Hieran ist gleich mehreres bemerkenswert: Zum einen teilt Poincaré erstmals in der Geschichte der Topologie eine zweite Betti-Zahl einer komplizierten Mannigfaltigkeit, wenn auch ohne jeglichen Hinweis auf die Art und Weise ihrer Berechnung, mit, was zuvor weder E. Picard (vgl. Scholz 1980, 262) noch E. Betti selbst gelungen war.

Zum anderen zeigen Poincaré's Angaben, daß er 1892 offenkundig noch keine Kenntnis des Dualitätssatzes gehabt hat:
Da alle $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ orientierbar sind, muß für sie stets nach dem Poincaréschen Dualitätssatz $\beta_1 = \beta_2$ sein (der entsprechende Fehler wurde 1895 von Poincaré stillschweigend korrigiert; vgl. Poincaré VI, 246 f).[21] Sieht man von diesem Fehler einmal ab, so hat Poincaré ohne Beweis gezeigt, daß zwei geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten zwar gleiche Betti-Zahlen, aber dennoch unterschiedliche Fundamentalgruppen haben können. Folglich ist die Fundamentalgruppe eine stärkere Invariante als die beiden ersten nichttrivialen Betti-Zahlen.[22] Vielleicht ist die Fundamentalgruppe der Stein der Weisen, der das Klassifikationsproblem löst? Im weiteren werden wir unter anderem sehen, wie Poincaré diesen Gedanken verfolgt.

Bereits in dieser kurzen Note wird deutlich, welch zentrale Rolle das Homöomorphieproblem der geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten für Poincaré spielte. Die von ihm neu eingeführte Invariante, die Fundamentalgruppe, wird gleich an diesem Problem getestet. Es erweist sich, daß die Analogie zum zweidimensionalen Fall zusammenbricht. Das zeigt eine Klasse von Beispielen geschlossener Mannigfaltigkeiten - das später sogenannte 6. Beispiel - , welche erstmals (sieht man einmal von Beispielen, die der algebraischen Geometrie entstammen) nicht-triviale geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten enthielt. Wie wir später sehen werden (in 3.2) ist die Konstruktion dieser Beispielklasse sehr gut der Definition der Fundamentalgruppe angepaßt, so daß eine Ermittlung der letzteren nicht schwer fällt.

3.2 Das Klassifikationsproblem in der Arbeit von 1895

Die große[23] Arbeit „Analysis situs", die 1895 im Jubiläumsband des „Journal de l'Ecole polytechnique" anläßlich des hundertjährigen Bestehens dieser Elitehochschule - zu deren

---

[21] Die Unkenntnis Poincaré's erstaunt insofern, als E. Picard schon 1889 die Dualität, wenn auch ohne Beweis, verwendete (vgl. Houzel 1991, 253 oder Picard 1889, 180): „...on démontre que $p_m = p_{n-m}$" - mehr steht bei Picard nicht.

[22] Die Tatsache, daß hierbei die Dreidimensionalität der Mannigfaltigkeit und ihre Orientierbarkeit eine wichtige Rolle spielen, hat Poincaré erst später ausgesprochen (siehe unten).

[23] Dies gilt in allererster Linie für die in dieser Arbeit auftretende Fülle von äußerst fruchtbaren Ideen, in zweiter Linie auch für ihre Länge im Wortsinne: 96 Seiten in den Oeuvres (Poincaré VI, 193 - 288). Nebenbei bemerkt war - wie wir der Schilderung seines Neffen Pierre Boutroux (Poincaré XI, 146 - 151) entnehmen können - Poincaré's Art und Weise, Abhandlungen zu schreiben, ziemlich ungewöhnlich:
„Dans son paisible cabinet de travail, rue Claude-Bernard, ou sous les ombrages de son jardin à Lozère, Henri Poincaré s'asseyait quelques heures par jour devant une main de papier écolier réglé, et l'on voyait alors les feuillets se couvrir, avec une rapidité et une régularité surprenantes, de son écriture fine et anguleuse. Presque jamais une rature, très rarement une hésitation. En quelques jours un long Mémoire se trouvait achevé, prêt à être imprimé, et mon oncle ne s'y interessait plus désormais que comme à une chose du

Studenten ja Poincaré selbst auch gehört hat (1872-75) - erschien, darf im eigentlichen Sinn als Ausgangspunkt der kombinatorischen und algebraischen Topologie gelten. Es kann hier keine Rede davon sein, eine umfassende und erschöpfende Analyse dieses Meisterwerkes geben zu wollen[24]; wir werden uns vielmehr auf die für uns wichtigen Punkte konzentrieren: Mannigfaltigkeitsbegriff, Fundamentalgruppe, konkrete Beispiele, Hilfsmittel zu deren Untersuchung (z.B. Betti-Zahlen[25]) - also uns auf die Frage beschränken „Was wird klassifiziert und wie wird klassifiziert?".

Dennoch ist es vielleicht nützlich, an dieser Stelle eine knappe Übersicht zum Inhalt der in 16 Paragraphen gegliederten Abhandlung zu geben: Die §§ 1-4 beschäftigen sich mit verschiedenen Definitionen des Mannigfaltigkeitsbegriffes und Eigenschaften derselben, §§ 5-7 sind der (modern gesprochen) Homologietheorie gewidmet, wobei auch Zusammenhänge zur Theorie der Differentialformen hergestellt werden, § 8 behandelt das Problem der Ein- und Zweiseitigkeit von Mannigfaltigkeiten, und § 9 ist dem Poincaréschen Dualitätssatz gewidmet. Ausführlich beschäftigen werden wir uns mit den §§ 10-15, in denen Poincaré das Klassifikationsproblem anhand mehrerer Beispiele diskutiert, die Fundamentalgruppe einführt und gruppentheoretische Überlegungen zum Homöomorphieproblem anstellt. Dabei erfährt der Mannigfaltigkeitsbegriff eine bemerkenswerte Erweiterung, indem - wie schon 1892 - Mannigfaltigkeiten als Unterlagerungen konstruiert werden. Die abschließenden §§ 16-18 sind der Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes, für den Poincaré drei verschiedene Beweisversuche entwickelt, gewidmet.

Auch der Abhandlung von 1895 geht eine Einleitung voraus, in der Poincaré versucht, seine Betrachtungsweise - insbesondere die Ausdehnung geometrisch/topologischer Fragestellungen auf mehr als drei Dimensionen - zu rechtfertigen (siehe hierzu 3.1) und in der er Vorläufer nennt sowie verwandte Fragestellungen. Wie schon drei Jahre zuvor werden Riemann und Betti als Wegbereiter „der Analysis situs in mehr als drei Dimensionen"[26] erwähnt. Als Belege für die Nützlichkeit dieser Betrachtungsweise werden von Poincaré drei Problemzusammenhänge genannt:

passé. A peine consentait-il - ses éditeurs en savent quelque chose - à jeter un rapide coup d'oeil sur les épreuves." (Poincaré XI, 146 f)
Vielleicht ist diese Schilderung etwas übertrieben; diese Annahme wird jedenfalls durch die Tatsache nahegelegt, daß es sehr wohl Manuskripte von Poincaré gibt, welche mehrere Bearbeitungsstadien ein- und desselben Textes darstellen. Aber dennoch sind die Endergebnisse Poincaréscher Bemühungen gemessen an den heute üblichen Standards bei der mathematischen Manuskriptgestaltung recht ungewöhnlich. So vermißt man meist eine klare Gliederung in Definitionen, Beispiele, Sätze, Beweise und so weiter. Man hat vielmehr den Eindruck, daß man es in Poincaré's Arbeiten mit einem Denken zu tun hat, das sich eben erst entfaltet. Diesen Prozeß erlebt der Leser gewissermaßen „live" mit. Das hat beispielsweise zur Folge daß Hilfsmittel bei Poincaré in aller Regel erst da eingeführt werden, wo sie wirklich notwendig sind, daß das Fortschreiten der Gedankenführung in eine bestimmte Richtung durch Fragen gelenkt wird und daß oft Theoreme erst als Zusammenfassung ihres vorangegangenen Beweises formuliert werden.

24 Ausführlichere historisch orientierte Darstellungen neueren Datums sind: Bollinger 1972, 116-144, Dieudonné 1989, 15-35 und Scholz 1980, 230-336, wobei Bollinger sich auf die Homologietheorie, Scholz auf den Mannigfaltigkeitsbegriff beschränkt.

25 Auf Fragen der Homologietheorie wird im folgenden nur kurz eingegaben; eine ausführliche Darlegung gibt Bollinger 1972.

26 „.... il y a donc une Analysis situs à plus de trois dimensions, comme l'ont montré Riemann et Betti." (Poincaré VI, 194)

1. Die Klassifikation der (komplexen) algebraischen Kurven nach ihrem Geschlecht. Diese wurde durch Riemann mit der topologischen Klassifikation reeller geschlossener Flächen in Verbindung gebracht. E. Picard hat diese Fragestellung auf komplexe algebraische Flächen und deren birationaleTranformationen verallgemeinert und festgestellt, daß diese auf engste verknüpft ist mit der Klassifikation der geschlossenen Flächen im fünfdimensionalen reellen Raum.[27]
2. Die qualitative Theorie der Differentialgleichungen. Hier verweist Poincaré auf seine Arbeiten „Sur les courbes définies par les équations différentielles", in denen er die gewöhnliche Analysis situs des dreidimensionalen Raumes beim Studium linearer Differentialgleichungen angewendet habe. Dieser Ansatz sei durch Walther Dyck ebenfalls verfolgt worden. Weiter lasse sich leicht erkennen, daß die verallgemeinerte Analysis situs die Behandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung - insbesondere jener der Himmelsmechanik - erlaube.[28]
3. Die Bestimmung von Untergruppen. Hier ist C. Jordan zu nennen, der die endlichen Untergruppen von GL(n, R) bestimmt hat, sowie F. Klein, der mit „einer geometrischen Methode von ungewöhnlicher Eleganz"[29] das gleiche Problem im Fall von SL(2,Z) gelöst hat.[30] Die allgemeinste Fragestellung, nämlich die Bestimmung aller Untergruppen einer beliebigen kontinuierlichen Gruppe, über die Poincaré nach eigenem Bekunden lange erfolglos nachgedacht hat, könnte mit topologischen Problemen, insbesondere mit dem Eulerschen Polyedersatz, zusammenhängen.[31]

Die Argumentationsstrategie, die Poincaré mit diesen Hinweisen wählte, läßt sich auf dem Hintergrund der Disziplingenese bestens verstehen: Zum einen wollte Poincaré eine rein topologische Arbeit schreiben, das heißt, den Prozeß der Dekontextualisierung zu seinem Ende bringen (vgl. 8), zum andern fühlte er sich dennoch verpflichtet, auf die Bezüge zu anderen etablierten Disziplinen einzugehen. Letztere spielen aber im weiteren Verlauf der Abhandlung Poincaré's überhaupt keine Rolle mehr.

Wenden wir uns nach diesen einleitenden Bemerkungen, die Poincaré's Stellung zur Tradition und in der damals zeitgenössischen Mathematik verdeutlichen sollten, nun der Frage zu „Was soll klassifiziert werden?". Die Antwort hierauf, die - um es gleich vorweg

27 Vermutlich hat Poincaré hier die Arbeit Riemanns über Abelsche Funktionen (Riemann 1857) sowie Picard 1889 gemeint. Einen kurzen Überblick zu diesem Problemkreis gibt Scholz 1980, 359-363; eine ausführlichere Darstellung findet sich bei Dieudonné 1974, Kapitel V und VI. Zu E. Picard vergleiche man auch Houzel 1991.

28 Die fragliche Serie von Artikeln findet sich in Poincaré I, 1-222, die Arbeit von Dyck dürfte dessen Dissertation (Dyck 1879) gewesen sein. Poincaré's Beiträge zur qualitativen Theorie der Differentialgleichungen wurden von Christian Gilain ausführlich untersucht: vgl. Gilain 1977 und Gilain 1991sowie Mawhin 1994; weiter vgl. man Gray 1986 und Volkert 1997.

29 „M. Klein avait antérieurement, par une méthode géométrique d'une rare élégance, résolu le même problème pour le groupe linéaire à deux variables." (Poincaré VI, 195)

30 Die Untersuchungen Kleins, welche Poincaré hier anspricht, finden sich zusammenhängend dargestellt in Klein/Fricke 1890 und Klein/Fricke 1892.

31 „Ne pourrait-on pas étendre la méthode de M. Klein au groupe à n variables, ou même à un groupe continu quelconque? Je n'ai pu jusqu'ici y parvenir, mais j'ai beaucoup réflechi à la question et il me semble que la solution doit dépendre d'un problème d'Analysis situs et que la généralisation du célèbre théorème d'Euler sur les polyèdres doit y jouer un rôle." (Poincaré VI, 195)
Meines Wissens nach sollte diese Vision von Poincaré unerfüllt bleiben.

zu sagen - keineswegs eindeutig ausfällt, besteht in der Definition des Begriffs „Mannigfaltigkeit".[32]

Ein erster Zugang, den Poincaré wählt, geht von einem nach Art der algebraischen Geometrie durch p Gleichungen

$$F_1(x_1,\dots,x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_p(x_1,\dots,x_n) = 0$$

definierten Nullstellengebilde im R^n ($n \geq p$) aus, das zusätzlichen Bedingungen in Gestalt von q Ungleichungen unterworfen werden kann:

$$\varphi_1(x_1,\dots,x_n) > 0$$
$$\varphi_2(x_1,\dots,x_n) > 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_q(x_1,\dots,x_n) > 0$$

Dabei werden die Funktionen F_i und φ_j als stetig-differenzierbar vorausgesetzt mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die Jacobi - Matrix von $F = (F_1,\dots,F_p)$ für alle zur Mannigfaltigkeit gehörigen Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ den maximalen Rang p haben soll. Die solcherart definierte Mannigfaltigkeit besitzt die Dimension n-p; wir würden heute von einer differenzierbaren (n - p)-Mannigfaltigkeit sprechen, oder genauer noch, von einer offenen Untermannigfaltigkeit einer (n - p)-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit (welche durch die Gleichungen definiert wird) im R^n.[33]

Im weiteren führt Poincaré verschiedene Begriffe zur näheren Charakterisierung seiner Mannigfaltigkeiten ein.

Eine Mannigfaltigkeit heißt „continue" (stetig), wenn man von einem beliebigen Punkt zu einem beliebigen anderen durch stetige Veränderung der Koordinaten gelangen kann. Wir würden dies heute als Wegzusammenhang bezeichnen. Akzeptiert man das, so kann man eine entsprechende Aussage Poincaré's (vgl. Poincaré VI, 197) dahingehend interpretieren, daß jede Mannigfaltigkeit in eine endliche oder unendliche Anzahl von Wegkomponenten zerfällt. Die Mannigfaltigkeiten, welche Poincaré konkret betrachtet, sind immer wegzusammenhängend.

---

[32] Während in der Note von 1892 mit einer einzigen Ausnahme, wo „variété à n dimension" als Synonym zu „surface" angeführt wird (Poincaré VI, 189), immer nur von „surface" gesprochen wird im Sinne von (modern formuliert) n-dimensionaler Mannigfaltigkeit (vgl. Anmerkung 8 oben), tritt 1895 ganz eindeutig „variété" in den Vordergrund. In älteren nicht-topologischen Arbeiten Poincaré's findet sich dagegen die Ausdrucksweise „multiplicité", die wohl als Entsprechung zur deutschen „Mannigfaltigkeit" zu verstehen ist. Vgl. auch Scholz 1980, 287. Terminologisch gesehen war in Frankreich sicherlich die von J.Houel 1870 publizierte Übersetzung von Riemanns Habilitationsvortrag wichtig, in der ersterer ausdrücklich „Mannigfaltigkeit" mit „variété" übersetzte (Houel 1870, 309).

[33] Vgl. hierzu Bollinger 1972, 116-120, Dieudonné 1989 17f und Scholz 1980, 287-290. Man kann hier eine Parallele zur Geschichte der Differentialgeometrie aufweisen, in der ja auch (z.B. bei L. Euler und A. C. Clairault) anfangs durch eine Gleichung beschriebene Flächen betrachtet wurden. Der diese Einschränkung überwindende intrinsische Standpunkt wurde erst durch C. F. Gauß 1827 in die Differentialgeometrie der Flächen eingeführt.
Die Frage, ob die solcherart definierten Mannigfaltigkeiten im modernen Sinne Singularitäten aufweisen können, wird von Poincaré an dieser Stelle nicht behandelt. Sie hat ja auch in seinem Kontext wenig Sinn. Beim Studium konkreter Mannigfaltigkeiten stellt er später im Zusammenhang mit seiner zweiten Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffes sehr wohl diese Frage (im § 10, siehe weiter unten).

Eine Mannigfaltigkeit heißt „fini" (endlich), wenn alle ihre Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ der Bedingung $x_1^2+\dots+x_n^2 < K$ mit einer Konstanten K genügen. Hier geht es also um die Beschränktheit einer Teilmenge von R^n.
Als Komponente des Randes einer Mannigfaltigkeit werden alle die Punktmengen bezeichnet, die den die Mannigfaltigkeit definierenden Gleichungen sowie einer in eine Gleichung verwandelten Ungleichung (unter Beibehaltung der restlichen) genügen. Der vollständige Rand ergibt sich als Vereinigung aller Randkomponenten, welche ihrerseits einzeln Mannigfaltigkeiten der Dimension n-p-1 sind (nach Definition).
Ist der vollständige Rand leer, so heißt die Mannigfaltigkeit unbegrenzt. Eine unbegrenzte, stetige und endliche Mannigfaltigkeit ist geschlossen.

Die letzte Festlegung bedeutet in moderner Ausdrucksweise, daß eine wegzusammenhängende, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand geschlossen genannt werden soll, was ja durchaus den aktuellen Vorstellungen entspricht. Im weiteren werden auch wir - es sei denn, es wird ausdr4ücklich anders gesagt - davon ausgehen, daß Mannigfaltigkeiten stets zusammenhängend sind.

Im nachfolgenden Paragraphen 2 entwickelte Poincaré dann den Begriff des Homöomorphismus.[34] Dies geschieht wieder in der Sprache der Substitutionen; das heißt hier von stetig partiell - differenzierbaren Abbildungen, die die Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ einer Mannigfaltigkeit V in solche $(x_1',\dots,x_n')$ einer Mannigfaltigkeit V' überführen:

$$(1) \quad x_k' = \psi_k(x_1,\dots,x_n) \qquad (k = 1,\dots,n)$$

Die ψ_k sollen so beschaffen sein, daß ihre Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) stets ungleich null ist, weswegen sich das Gleichungssystem (1) nach den x_k ($k = 1,\dots,n$) „auflösen" läßt: $x_k = \chi_k(x_1',\dots,x_n')$. Die χ_k besitzen dann die Eigenschaften der ψ_k.[35] Die Betrachtung dieser „Homöomorphismen" ist die Aufgabe der Analysis situs:

> „Il est clair que l'ensemble des substitutions qui satisfont à ces conditions forme un groupe, et ce groupe est un des plus généraux que l'on puisse imaginer. La Science dont l'objet est l'étude de ce groupe et de quelques autres analoques a reçue le nom d'Analyse situs."
>
> (Poincaré VI, 198)[36]

Der Inhalt der zitierten Aussage Poincaré's erinnert uns heute sofort an eine Stelle in Kleins „Erlanger Programm", wo es heißt:

---

[34] Möglicherweise - mir ist jedenfalls nichts Gegenteiliges bekannt - stammt dieser Begriff von Poincaré. Allerdings ist, wie darzustellen sein wird, hier konkret der moderne Diffeomorphismus gemeint.

[35] Modern gesprochen handelt es sich um stetig-differenzierbare Abbildungen (vgl. Anmerkung 37 unten), die in einem Gebiet U, welches V umfaßt, regulär sind. Die Aussage im Text beruht dann auf der Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung (vgl. Blatter 1974, 11f).

[36] Es ist bemerkenswert, wie konsequent Poincaré an der Beziehung Substitution/Gruppe festhält. Aus unserer heutigen Sicht ist die Aussage, die Gesamtheit dieser Substitutionen bilde eine Gruppe, anfechtbar, da man ja nur Abbildungen $\psi_1: X \to X'$ und $\psi_2: X^* \to X^{**}$ zusammensetzen kann, wenn $\mathrm{Bild}(\psi_1) \subset X^*$. Die Vorstellungen Poincaré's entsprechen darum eher dem modernen Begriff des Gruppoids.
Alternativ hierzu könnte man davon ausgehen, daß sich die ψ immer zu Homöomorphismen $\psi: R^n \to R^n$ erweitern und damit auch zusammensetzen lassen. Das käme wohl dem aus der gewöhnlichen Geometrie bekannten Verfahren (Bewegungen, Kongruenzabbildungen), wie es dem „Erlanger Programm" zugrunde lag, am nächsten.

„In der sog. Analysis situs sucht man das Bleibende gegenüber solchen Umformungen, die aus unendlich kleinen Verzerrungen durch Zusammensetzung entstehen."

(Klein 1893, 140)

Die Ausdrucksweise „unendlich klein", die Klein hier verwendet, soll die Stetigkeit der Abbildung formulieren: Unendlich kleine Änderungen müsseen auf ebensolche abgebildet werden, wie man sich damals auszudrücken pflegte.

Sehr deutlich wird die Parallelität zu Klein auch in der folgenden Bemerkung aus der Einleitung zur „Analysis situs":

„La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombe sur nos sens: elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux."

(Poincaré VI, 192)

Überhaupt spielte der Gruppenbegriff in Poincaré's mathematischem und wissenschaftstheoretischem Schaffen eine wichtige, anscheinend noch kaum untersuchte Rolle. Von daher verwundern Beziehungen zu Klein keineswegs; diese müssen, anders gesagt, nicht unbedingt von einer direkten Beeinflussung herrühren, sondern drücken vielleicht nur ähnliche Ausgangspunkte an. Die Annahme eines direkten Einflusses erscheint sogar eher unwahrscheinlich, da Poincaré ähnliche Ideen wie Klein schon sehr früh, nämlich im ersten Supplement zu seiner Preisschrift zur Theorie der Differentialgleichungen (bei der Akademie eingegangen am 28. Juni 1880), formulierte (vgl. auch Gray 1986, 360). Dort heißt es:

„Qu'est-ce en effet qu'une géométrie? C'est l'étude du groupe d'opérations formé par les déplacements que l'on peut faire subir à une figure sans la déformer."

(Poincaré 1997, 35)

Der soeben gewonnene „Homöomorphiebegriff" wird dann von Poincaré auf Mannigfaltigkeiten angewandt: Zwei Mannigfaltigkeiten V und V' gleicher Dimension[37] heißen

[37] Eine vom modernen Standpunkt überrascht zutreffende Beschreibung der Aufgaben der Topologie gab A. Hurwitz, übrigens ein Schüler von F. Klein, 1898 beim Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich:
„Eine abgeschlossene Punktmenge P sei auf eine andere abgeschlossene Punktmenge Q derart bezogen, daß jedem Punkt der Menge P ein bestimmter Punkt der Menge Q entspricht. Die Beziehung soll folgendermaßen beschaffen sein: Wenn die Punkte A_1, A_2, A_3, usf. der Menge P eine einzige Grenzstelle A besitzen, so sollen die entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_3 usf. der Menge Q ebenfalls eine einzige Grenzstelle B besitzen, und die Grenzstelle A soll dann jedesmal der Grenzstelle B entsprechen.
Unter dieser Veraussetzung heiße die Punktmenge Q stetig auf die Punktmenge P bezogen oder ein stetiges Bild der Punktmenge P.
Die abgeschlossene Punktmenge Q sei ein stetiges Bild der abgeschlossenen Punktmenge P, zugleich sei aber die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Mengen eindeutig umkehrbar (...)
Zwei Punktmengen, die in dieser Weise eindeutig umkehrbar und stetig aufeinander bezogen werden können, will ich äquivalent nennen und auf diesen Äquivalenzbegriff eine Einteilung der Punktmengen in Klassen gründen. Zwei abgeschlossene Punktmengen werden hiernach in dieselbe Klasse gerechnet oder nicht, je nachdem sie äquivalent sind oder nicht. Diese Einteilung der Punktmengen in Klassen bildet, beiläufig bemerkt, die allgemeinste Grundlage der Analysis situs. Die Aufgabe der Analysis situs ist es, die Invarianten der einzelnen Klassen von Punktmengen aufzusuchen." (Hurwitz 1898, 101 f)

„vom Standpunkt der Analysis situs aus äquivalent" oder kurz „homöomorph", wenn es Gebiete $D \supset V$ und $D' \supset V'$ gibt, die im oben definierten Sinne „homöomorph" sind.[38]

„Si toutes ces conditions sont remplies, nous dirons que les deux variétés V et V' sont équivalentes au point de vue de l'Analysis situs, ou, pour abréger le language, qu'elles sont homéomorphes, c'est - à - dire de forme pareille."

(Poincaré VI, 199)

Obwohl Poincaré hier also überwiegend in der modern gesehen differenzierbaren Kategorie arbeitet, möchte ich dennoch die These vertreten, daß er die Topologie aus prinzipiellen Gründen als Stetigkeitsbetrachtung aufgefaßt hat. Nur aus beweistechnischen Motiven heraus sah er sich oft genötigt, in der differenzierbaren Kategorie Zuflucht zu suchen, eine Haltung übrigens, die mit Fortschreiten der Analysis-situs-Serie deutlich seltener wird. Insgesamt läßt sich feststellen, daß Poincaré die Unterschiede zwischen der stetigen und den verschiedenen differenzierbaren, insbesondere der reell-analytischen, Kategorie kaum beachtete, was sich post festum durch Approximationssätze - wie sie erstmals von Brouwer bewiesen wurden - oft rechtfertigen läßt. Belege für die oben vertretene These werden wir im weiteren noch öfters finden.

Abschließend bemerkt Poincaré noch, daß sich der Begriff der Homöomorphie auf „kompliziertere, aus einer beliebigen Anzahl von Mannigfaltigkeiten bestehenden Figuren" erweitern läßt[39], beispielsweise auf Polygone.

Insgesamt betrachtet bleibt Poincaré's erster Mannigfaltigkeitsbegriff noch stark der Tradition der algebraischen Geometrie und der „vor-Gaußschen" Differentialgeometrie verhaftet, wobei ein Nachteil offenkundig wird: Gestützt auf diese Definition ist es schwie-

Eine erste, den modernen Anschauungen nahekommende Definition des Homöomorphiebegriffes findet sich übrigens schon bei A.F. Möbius 1863 in Gestalt seiner „elementaren Verwandtschaft" (vgl. 2.2.2.1).
Bemerkenswerterweise setzt Poincaré die Gleichheit der Dimensionen der betrachteten Mannigfaltigkeiten voraus, unterstellt also nicht, daß seine „Homöomorphismen" dimensionserhaltend seien.

[38] Die Gebiete D und D' - also für uns offene zusammenhängende Teilmengen des R^n - gehen aus den Mannigfaltigkeiten V (gegeben durch $F_\alpha = 0$ und $\varphi_\beta > 0$) und V' (gegeben durch $F_\alpha' = 0$ und $\varphi_\gamma' > 0$ [α ist in beiden Fällen das gleiche, weil V und V' gleiche Dimensionen - nämlich n-p - haben sollen] dadurch hervor, daß man von den Gleichungen $F_\alpha = 0$ und $F_\alpha' = 0$ zu den Ungleichungen $-\varepsilon < F_\alpha < \varepsilon$ beziehungsweise $-\varepsilon' < F_\alpha' < \varepsilon'$ mit geeignetem ε und ε' übergeht.
Poincaré selbst sagt nichts darüber, warum er diese komplizierte Konstruktion vornimmt; es ist jedoch anzunehmen, daß er dies tat, um Problemen mit der Differenzierbarkeit in Randpunkten aus dem Weg zu gehen; ihre moderne Entsprechung wäre die Verwendung von sogenannten Tubenumgebungen. Neben diesem „Homöomorphie-" = Diffeomorphiebegriff tritt bei Poincaré - wie bereits oben bemerkt - noch die „stetige Deformation" auf. Dieudonné schlägt vor, letztere als Isotopie im modernen Sinne zu interpretieren (Dieudonné 1989, 18), also auch sie in die differenzierbare Kategorie einzubeziehen. Diese Auffassung scheint mir doch insgesamt zu restriktiv, ohne bestreiten zu wollen, daß sie an manchen Stellen die zutreffendste ist.

[39] „Je pourrai dire aussi que deux figures plus compliquées, composées d'un nombre quelconque de variétés, sont homéomorphes quand on passera de l'une à l'autre par une transformation de la forme (5)." (Poincaré VI, 199) Homöomorphismen, so Poincaré, erhalten Eigenschaften wie Zusammenhang, Endlichkeit und Unbeschränktheit von Mannigfaltigkeiten. Allerdings bleibt Poincaré's Homöomorphiebegriff auf Mannigfaltigkeiten beschränkt, ein Zeichen dafür, daß für ihn Topologie in erster Linie Theorie der Mannigfaltigkeiten war.

rig, topologische Invarianten zu berechnen.[40] Sie wird dann auch im weiteren Gang der Abhandlung selten im Zusammenhang mit konkreten Beispielen verwendet, wohl aber, wenn es um theoretische Erörterungen geht. Der große Vorteil für Poincaré bei dieser Definition lag darin, daß sich Bezüge zur Substitutionstheorie leicht herstellen ließen (vgl. unten die Einführung der Fundamentalgruppe).

Poincaré gibt ein Beispiel zu dieser Definitionsart von Mannigfaltigkeiten: Es handelt sich dabei um die Kurve vierten Grades $x_1^4 - 4x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$, welche in die beiden Äste $x_1^4 - 4x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ mit $x_1 > 0$ und $x_1^4 - 4x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ mit $x_1 < 0$ zerfällt. Folglich besteht diese Mannigfaltigkeit aus zwei Zusammenhangskomponenten. Später findet man u.a.

- den Torus $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$ (Poincaré VI, 204),
- die Hypersphären $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ (Poincaré VI, 257) und $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2 = 1$ (Poincaré VI, 261) sowie
- die gewöhnliche Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ (Poincaré VI, 260).

Auch das von Poincaré so genannte achte Beispiel (Poincaré VI, 261), das aus zwei Hypersphären $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2 = 1$ und $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_q^2 = 1$ entsteht und auf das wir weiter unten noch zu sprechen kommen werden, ist in diesem Kontext zu nennen.[41]

Eine zweite Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffs wird von Poincaré in § 3 gegeben. Hierbei geht er wieder von Punkten $(x_1,\ldots,x_n)$ des R^n aus und setzt voraus, daß sich diese in der Form $(m < n)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(y_1,\ldots,y_m) \\ x_2 &= \theta_2(y_1,\ldots,y_m) \\ &\vdots \\ x_n &= \theta_n(y_1,\ldots,y_m) \end{aligned}$$

darstellen lassen, wobei die θ_i als analytische Funktionen[42] angenommen werden, deren Definitionsbereich D_i durch Ungleichungen $\psi_\#(y_1,\ldots,y_m) > 0$ geeignet eingeschränkt wird. Weiter wird verlangt, daß die Funktionaldeterminanten von m der Funktionen θ_i nicht sämtliche für einen Punkt $(y_1,\ldots,y_m)$ verschwinden.

Modern gesprochen kann man $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$ als Immersion und dessen Umkehrung (auf dem Bild) als Karte (oder als lokale Parametisierung) in einem reell-analytischen Atlas einer Mannigfaltigkeit V auffassen:

$$R^n \supset V \supset U \xrightarrow{\theta^{-1}} \theta^{-1}(U) \subset R^m.$$

Letzteres wird vor allem durch die weiteren Ausführungen Poincaré's nahegelegt, in denen er den Prozeß der „analytischen Fortsetzung" beschreibt, den man als Überdeckung einer

[40] Ähnlich scheiterte Picard 1889 weitgehend bei seinem Versuch, β_2 algebraischer Flächen zu bestimmen: „Quant à la recherche précise du nombre de ces cycles [à deux dimensions, K.V.], c'est une question que je n'ai pas encore entièrement élucidée...." (Picard 1889, 194)

[41] Im Verlauf der Diskussion dieses achten Beispiels treten bei Poincaré noch einige weitere Mannigfaltigkeiten vom Typus eins auf (vgl. Poincaré VI, 262): Kreis $x^2 + y^2 = 1$ und Halbkreis $x^2 + y^2 = 1$ mit $y > 0$ sowie die Drehfläche der Lemniskarte (um ihre große Achse)
$$x^2 + y^2 - z^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

[42] Zuerst wird nur verlangt, daß die Funktionen θ endlich und stetig sein sollen. Für solche Funktionen sei es aber stets möglich, analytische Funktionen θ^* zu finden, „qui diffèrent des θ aussi peu que nous voudrons." (Poincaré VI, 200). Also geht es darum, stetige Funktionen durch analytische zu approximieren, was etwa auf kompakten Teilmengen des R^n nach dem Satz von Stone-Weierstraß möglich ist.

Mannigfaltigkeit durch ihre Kartenumgebungen interpretieren wird. Das Ergebnis lautet so:

> „On pourra alors considérer l'ensemble de toutes les variétés d'une même chaîne ou d'un même réseau comme formant une variété unique. C'est là une définition plus étendue encore que la première."
>
> (Poincaré VI, 201)

Letztere Behauptung wird anschließend von Poincaré bewiesen.[43] Der Parapraph drei schließt mit dem Beispiel des Torus, der einmal durch seine Gleichung (siehe oben) und dann durch eine Parametrisierung dargestellt wird:

$$\begin{aligned} x_1 &= (R + r\cos y_1)\cos y_2 \\ x_2 &= (R + r\cos y_1)\sin y_2 \\ x_3 &= r\sin y_1 \end{aligned}$$

Poincaré macht ausdrücklich auf die durch die Periodizität der trigonometrischen Funktionen hervorgerufene Nicht-Injektivität aufmerksam; Injektivität kann aber durch die Einschränkungen $0 \leq y_1 < 2\pi$, $0 \leq y_2 < 2\pi$ erzwungen werden. Man erhält so die übliche Parametisierung des Torus.

Die geschilderte zweite Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffes bei Poincaré war zweifellos - wie die weitere Entwicklung zeigen sollte[44] - die zukunftsträchtigere, wenn auch die mit erheblichen technischen Schwierigkeiten behaftete. Sie steht in der Tradition der intrinsischen = Gaußschen Auffassung in der Differentialgeometrie, welche dann von Riemann zu seinem allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff erweitert werden sollte. Poincaré weist - wie wir bereits gesehen haben - ausdrücklich darauf hin, daß sein zweiter Mannigfaltigkeitsbegriff der umfassendere sei (Poincaré VI, 201f), was zum Beispiel aus der Tatsache hervorgeht, daß alle Mannigfaltigkeiten im ersten Sinne orientierbar sind, während das bei der zweiten Definition nicht der Fall sein muß: Hier können sich auch nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten ergeben.[45]

[43] Im wesentlichen geht es darum, aus den Gleichungen $F_1,\ldots,F_p$, die gemäß der ersten Definition eine Mannigfaltigkeit der Dimension n-p (=m) beschreiben, durch „Auflösen" - also durch Anwenden des Satzes über inverse Funktionen - eine Parametrisierung zu gewinnen.
Um auf die „richtige" Anzahl - nämlich n - von Funktionen zu kommen, ergänzt Poincaré das gemäß der ersten Definition gegebene System von Funktionen $F_1,\ldots,F_p$ durch beliebige „holomorphe" Funktionen (vermutlich soll „holomorph" hier „reell analytisch" bedeuten):
$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1,\ldots,x_n) & x_1 &= \theta_1(y_1,\ldots,y_n) \\ y_2 &= F_2(x_1,\ldots,x_n) & x_2 &= \theta_2(y_1,\ldots,y_n) \\ &\vdots & &\vdots \\ y_p &= F_p(x_1,\ldots,x_n) & x_p &= \theta_p(y_1,\ldots,y_n) \\ &\vdots & &\vdots \\ y_n &= F_n(x_1,\ldots,x_n) & x_n &= \theta_n(y_1,\ldots,y_n) \end{aligned}$$
(Folglich ist jede Mannigfaltigkeit im ersten Sinne auch eine im zweiten.) Wir wollen hier auf die weiteren, ziemlich dunklen Beweisschritte Poincaré's nicht eingehen (Poincaré VI, 201-204)

[44] Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit in seiner heutigen Form findet sich weitgehend bei Veblen-Whitehead 1931. Allgemein wird auch Ch. Ehresmann eine wichtige Rolle auf dem Weg zum modernen Mannigfaltigkeitsbegriff zugeschrieben, auf den u.a. die Begriffe „Karte" und „Atlas" zurückgehen (Ehresmann 1943, 628).

[45] Siehe unten sowie Poincaré VI, 215.

Mit den beiden genannten Mannigfaltigkeitsbegriffen hatte Poincaré die Basis für die weitere Entwicklung seiner Theorie gelegt, insofern jetzt die Frage "Was soll klassifiziert werden ?" beantwortbar war. Der nächste wichtige Schritt, der bei Poincaré ungleich viel mehr Raum beansprucht, ist die Entwicklung von Invarianten, von Hilfsmitteln zur Klassifikation also. Obwohl hier vor allem Betti Vorarbeiten geleistet hatte (vgl. 2.2.1), ging Poincaré doch - wie wir sehen werden - wesentlich über diesen hinaus, hauptsächlich dadurch, daß er die Homologietheorie zu einer Art Kalkül ausbaute.

Damit scheint die Frage "Welchen Mannigfaltigkeitsbegriff hatte denn Poincaré?" in folgendem Sinne vorläufig beantwortbar: Er betrachtete reell-analytische Untermannigfaltigkeiten eines geeigneten R^n, wobei er durchaus die Idee hatte, diese durch Zusammenfügen mehrerer Kartenumgebungen zusammenzusetzen. Allerdings zieht sich diese Idee keineswegs durch alle Untersuchungen Poincaré's hindurch: In der Regel macht er beispielsweise von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und von der Einbettung überhaupt gar keinen Gebrauch. Er verwendet gewissermaßen immer die schwächste Version des Mannigfaltigkeitsbegriffes, die das gerade leistet, was er an der betreffenden Stelle braucht. Insofern bleibt sein Mannigfaltigkeitsbegriff eklektisch, und alle Versuche, Poincaré hier auf "einen Begriff zu bringen", sind meiner Ansicht nach zum Scheitern verurteilt. Dies hängt natürlich auch mit der schon erwähnten Art und Weise zusammen, wie Poincaré seine Abhandlungen verfaßte. Grundsätzliche Auskünfte, wie Poincaré das Wesen der Topologie verstand, geben aber seine wissenschaftstheoretischen Arbeiten (vgl. 3.1.2) und da ist die Antwort: Topologie ist Stetigkeitsbetrachtung. Deshalb meine ich - wie bereits oben bemerkt -, daß Differenzierbarkeitsbedingungen für Poincaré technische Notwendigkeiten ohne prinzipielle Bedeutung waren.

Nach einem kurzen Exkurs im Paragraphen 4 über die Orientierung einer Mannigfaltigkeit und deren Umkehrung entwickelt Poincaré in den Paragraphen 5 und 6 die Grundlagen der Homologietheorie (die Bezeichnung „homolog" im hier interessierenden Sinne geht auf Poincaré zurück). Dabei wird der soeben geschilderte Mannigfaltigkeitsbegriff zugrunde gelegt, das heißt, es wird das Berandungsverhalten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten studiert. Deshalb entspricht die von Poincaré dargelegte Theorie eher einer (Co-)Bordismustheorie als einer Homologietheorie im modernen Sinne, was aber im weiteren keine Rolle spielen wird.

Ist V eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit, $W \subset V$ eine q-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V (mit $q < p$), deren (vollständiger) Rand aus den s (q-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $v_1, v_2, \ldots, v_s$ besteht, so schreibt Poincaré hierfür symbolisch[46] $v_1 + v_2 + \ldots v_s \sim 0$.

[46] Da es sich hierbei um eine rein symbolische Notation - also nicht um eine Summe im gewöhnlichen Sinne - handelt, unterliegt sie a priori nicht unbedingt der Bedingung, endlich zu sein. Das ist aber in allen von Poincaré gegebenen Anwendungen selbstredend der Fall.
Das formale Rechnen mit Symbolen, welche geometrische Bedeutungen tragen, scheint auf A.M. Möbius zurückzugehen, welcher in seinem „Barycentrischen Calcül" (1817) erstmals umgekehrt orientierte Strecken als negative Größen (also BA als - AB) auffaßte und mit ihnen rechnete. Diese Idee wurde im 19. Jahrhundert als „Prinzip der Zeichen" bekannt. In diesem Zusammenhang verdient auch die Graßmannsche „Ausdehnungslehre" (1844) und die auf ihr begründete u.a. von V. Schlegel vertretene Schule geometrischen Rechnens Erwähnung.
Schließlich sei noch auf die Knotentheorie hingewiesen, wo man ebenfalls schon frühzeitig formale Kombinationen von Zeichen mit geometrischer Bedeutung bildete.

Allgemein bedeutet eine Beziehung wie $k_1v_1 + k_2v_2 \sim k_3v_3 + k_4v_4$, daß es eine Mannigfaltigkeit W der Dimension q gibt, deren vollständiger Rand aus k_1 (q-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeiten v_1, aus k_2 (q-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeiten v_2, aus k_3 entgegen ihrer ursprünglichen Orientierung orientierten (q-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeiten v_3 und aus k_4 entgegen ihrer ursprünglichen Orientierung orientierten (q-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeiten v_4 besteht. Man darf aber hier die natürlichzahligen Koeffizienten $k_1,\ldots,k_4$ nicht im Sinne einer Torsion lesen. Anders gesagt denkt Poincaré hier noch nicht an die Möglichkeit, daß eine Mannigfaltigkeit V nicht berandet, wohl aber nV ($n \in N$, $n>1$), wie das etwa in der projektiven Ebene der Fall ist. Diese Schwachstelle, die auch Konsequenzen für den Dualitätssatz hat, wurde 1898 von P. Heegard in seiner Dissertation kritisiert und von Poincaré in den beiden ersten Komplementen korrigiert.[47]

„Les relations de cette forme pourront s'appeler des homologies." (Poincaré IV, 207)

Homologien darf man - so schreibt Poincaré weiter - „wie gewöhnliche Gleichungen kombinieren" (Poincaré VI, 207), wobei sich Ausdrücke wie $w_1 + w_2 + \ldots + w_q$ durch ε abkürzen lassen.[48]

Im anschließenden Paragraphen 6 kommt Poincaré zur Einführung der Betti-Zahlen. Ist V eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und sind $v_1, v_2, \ldots v_s$ Teilmannigfaltigkeiten von V ein- und derselben Dimension, so heißen diese linear (heute: homolog) unabhängig, wenn es keine Homologie der Form $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_sv_s \sim 0$ mit ganzzahligen[49] Koeffizienten zwischen ihnen gibt. Existieren in der Dimension $0 < n < m$ P_n-1 geschlossene homolog unabhängige Teilmannigfaltigkeiten in V, sind aber P_n geschlossene n-dimensio-

[47] Weiter überrascht vielleicht, daß Poincaré hier die Orientierung der Randmannigfaltigkeiten ins Spiel bringt. Das erklärt sich aber relativ einfach auf dem Hintergrund seiner oben geschilderten ersten Mannigfaltigkeitsdefinition, gemäß derer die Randmannigfaltigkeiten eine „natürliche" Orientierung bekommen (vgl. die Ausführungen von Dieudonné in Dieudonné 1989, 19f). Da die Orientierung umgekehrt werden kann, können die entsprechenden Koeffizienten auch negativ werden.
Schließlich bedarf noch die Anmerkung Poincaré's, daß die k_i (i=1,...,4) Mannigfaltigkeiten v_i (i= 1,...,4) „nur wenig verschieden" von den Mannigfaltigkeiten seien, die den tatsächlichen Rand von W bilden, eines Kommentars. Hier soll gesagt werden, daß die Randmannigfaltigkeiten nur bis auf „Homöomorphie" (die hier - wie weiter oben gezeigt - modern gesprochen eine Diffeomorphie sind) bestimmt sind: So müssen beispielsweise die k_{1i} Mannigfaltigkeiten v_i nicht alle exakt übereinstimmen in ihren definierenden Gleichungen und Ungleichungen, sondern können bis auf Homöomorphie abgeändert werden [eine berandende S^1 kann z.B. zu einer Elipse werden].
Im Original heißt es:
„Plus généralement la notation $k_1v_1 + k_2v_2 \sim k_3v_3 + k_4v_4$, où les k sont des entiers et les v des variétés à q-1 dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de V et dont la frontière complète se composera de k_1 variétés peu différentes de v_1, de k_2 variétés peu différentes de v_2, de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée à v_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à v_4." (Poincaré IV, 207)

[48] Dies alles scheint mir auf dem Hintergrund einer symbolischen Auffassung der Homologien unproblematisch und auch naheliegend. Hingegen sieht Dieudonné hierin eine wesentliche und tiefliegende Errungenschaft (vgl. Dieudonné 1989, 19 Anm. *).

[49] Anstatt $k_1v_1 + k_2v_2 \sim k_3v_3 + k_4v_4$ schreibt Poincaré also auch $k_1v_1 + k_2v_2 - k_3v_3 - k_4v_4 \sim 0$.

nale Teilmannigfaltigkeiten von V stets homolog abhängig, so ist P_n die n-te Betti-Zahl der Mannigfaltigkeit V.[50]

„Ainsi se trouvent définis, en ce qui concerne une variété V à m dimensions, m-1 nombres que j'appellerai P_1, P_2, ..., P_{m-1} et qui sont les ordres de connexion de V par rapport aux variétés de 1, 2, ..., m-1 dimensions. Je les appellerai dans la suite les nombres de Betti."

(Poincaré VI, 208)

Anschließend erläutert Poincaré seine Definition anhand eines Beispiels: Es sei $D \subset R^3$ ein Teilraum des R^3, dessen vollständiger Rand von den disjunkten geschlossenen orientierbaren Flächen $S_1, S_2, ..., S_n$ gebildet wird..[51]

Bezeichnen $2Q_1 + 1$, $2Q_2 + 1$, ..., $2Q_n + 1$ die ersten (und für Poincaré einzigen) Zusammenhangszahlen[52] der Flächen $S_1, \ldots, S_n$, so gilt für die Betti-Zahlen von D:

$$\beta_1 = Q_1 + \ldots + Q_n + 1$$
$$\beta_2 = n$$

In dieser Allgemeinheit ist Poincaré's Behauptung schwerlich korrekt. Beschränkt man sich jedoch auf die beiden einfachsten Fälle - nömlich den von einer geschlossenen orientierbaren Fläche begrenzten Raum bzw. den zwischen zwei homöomorphen Flächen S_1 und S_2 liegenden Schalenraum - und geht man davon aus, daß die Einbettungen der Flächen in den Raum hinreichend zahm sind (was für Poincaré keine Frage war), so liefert Poincaré's Formel zutreffende Ergebnisse: Im ersten Falle wird eine Sphäre mit p Henkeln "ausgefüllt", was zu einer Erniedrigung der Zusammenhangszahl 2p + 1 zu p + 1 führt; im zweiten Falle ist der Schalenraum zwischen S_1 und S_2 homöomorph zu $S_1 \times I$ und damit homotopieäquivalent zu S_1. Folglich liefern Poincaré's Formeln $\beta_1 = Q_1 + Q_2 + 1 = 2Q_1 + 1$ und $\beta_2 = 2$ (der Wert für β_2 ist für orientierbare geschlossene S_1 korrekt!)

Weiterhin fügt Poincaré folgende Resultate als Anwendungsbeispiele seiner Formeln hinzu:[53]

1.) Ist V gleich dem Inneren von S^2 (also gleich B^3), so gilt:
$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$
2.) Ist V der Raum zwischen zwei konzentrischen Sphären, so gilt:
$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$
(Dieser Schalenraum - eine Bezeichnung, welche auf H. Seifert zurückgeht; vgl. 5.2 - ist der 2-Sphäre homotopieäquivalent.)

[50] Man beachte, daß unsere modernen Betti-Zahlen stets um 1 kleiner als die Poincaréschen sind. Im folgenden werden Betti-Zahlen mit β_i bezeichnet (abweichend von Poincaré).

[51] Der Text bei Poincaré lautet folgendermaßen:
„Soit D un domaine faisant partie de l'espace ordinaire et limité par n surfaces fermées S_1, S_2, ..., S_n qui ne se coupent pas. Ce domaine est une variété à trois dimensions." (Poincaré IV, 208)
„Domaine" wird als „une portion de l'espace à n dimensions", das heißt als n-dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit Rand) des R^n bestimmt (Poincaré IV, 196)

[52] An dieser Stelle unterstellt Poincaré, daß die Zusammenhangszahlen von Riemann-Betti ($2Q_i+1$, wobei $2Q_i$ die Maximalanzahl nicht-zerstückender Querschnitte ist [wozu S_i punktiert wird]) mit seiner ersten Betti-Zahl übereinstimmen, was im Fall zweidimensionaler orientierbarer Mannigfaltigkeiten ja auch zutrifft. Bei höherdimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten braucht dies wegen des Auftretens von Torsion in der Dimension 1 (auch im orientierbaren Fall) nicht richtig zu sein - ein Punkt, den Heegard in seiner Dissertation kritisieren sollte.

[53] Die drei letzten Beispiele finden sich schon bei Betti (Betti 1871, 145).

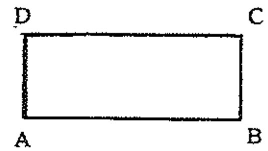
3.) Ist V das Innere eines Torus, so hat man:
$\beta_1 = 2, \beta_2 = 1$
4.) Ist schließlich V der Raum zwischen zwei ineinander liegenden Tori, so ist:
$\beta_1 = 2, \beta_2 = 2$

(Geht man davon aus, daß die beiden Tori konzentrisch ineinander liegen, so ist der entstehende Schalenraum zwischen ihnen homotopieäquivalent zum Torus. Folglich müßte die erste Betti-Zahl $\beta_1 = 3$ sein. Natürlich gibt es noch viele andere Möglichkeiten, einen Torus in einen anderen zu legen; vgl. 2.3.2; Poincaré's Behauptung dürfte aber in keinem Fall zutreffend sein. Betti gibt im übrigen an der angegebenen Stelle das korrekte Ergebnis.)

Im Paragraphen 8 folgen dann Ausführungen zu den Begriffen „einseitig" (unilatère) und „zweiseitig" (bilatère).[54] Dabei wird zuerst die zweite Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffs zugrunde gelegt und die fragliche Mannigfaltigkeit mit einer Kette von Teilmannigfaltigkeiten überdeckt. Wenn nun die Funktionaldeterminanten der Abbildungen, die in einem gemeinsamen Bereich zweier Teilmannigfaltigkeiten den Übergang von der einen zur anderen beschreiben - modern gesprochen geht es also um die Kartenwechsel - stets positiv sind, heißt die Gesamtmannigfaltigkeit „bilatère", andernfalls „unilatère".[55]

Anschließend beweist Poincaré, daß eine Mannigfaltigkeit nicht zugleich „bilatère" und „unilatère" sein kann und daß alle Mannigfaltigkeiten gemäß Definition eins „bilatère" sind.

Als Beispiel einer „unilatèren" Fläche - wir wollen im folgenden von „nicht-orientierbar" sprechen - nennt er das Möbius-Band (diese Bezeichnung findet sich allerdings nicht bei Poincaré), das „jedermann" kenne und das man aus dem „Papierrechteck"



dadurch erhält, „daß man die Kanten AB und CD so aufeinander legt, daß A mit C und B mit D verklebt wird".[56]

[54] Felix Klein hat als erster darauf hingewiesen, daß man die Begriffspaare „ein- und zweiseitig" sowie „orientierbar/nicht-orientierbar" auseinanderhalten müsse, weil nur letzteres eine intrinsische Eigenschaft der Mannigfaltigkeit ausdrückt (vgl. 2.2.2.2). Poincaré's Vorgehensweise ist aber intrinsisch („absolut" sagt Klein), weshalb „unilatère" bei ihm doch so viel wie „nicht-orientierbar" heißt.

[55] Bedenkt man, daß die fraglichen Funktionaldeterminanten mit den entsprechenden linearen Abbildungen zwischen den Tangentialräumen zusammenhängen, so ist die Poincaré'sche Definition auch vom modernen Standpunkt durchaus akzeptabel.

[56] Im Original heißt es: „Tout le monde connaît l'exemple de surface unilatère que l'on obtient en ployant un rectangle de papier ABCD (dont les côtes opposés sont AB et CD d'une part, BC et DA d'autre part), et en collant ensuite ensemble les côtés AB et CD de façon que A soit colé avec C et B avec D." (Poincaré VI, 215)

Beispiele für orientierbare (= bilatère) Mannigfaltigkeiten im R^n sind:

1. Jedes Gebiet (domaine - vgl. Anm. 51) von n Dimensionen,
2. jede eindimensionale Kurve,
3. jede geschlossene (n-1)-dimensionale Mannigfaltigkeit (im R^n).

Wie wir sehen werden, treten bei Poincaré keine nicht-orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten auf (obwohl man gemäß Beispiel 6 auch nicht-orientierbare bekommen kann - vgl. unten). Überhaupt spielt der nicht-orientierbare Fall bei 3-Mannigfaltigkeiten eine recht untergeordnete, nicht demjenigen der Flächen vergleichbare Rolle. Die erste geschlossene nicht-orientierbare 3-Mannigfaltigkeit wurde 1912 von H. Giesking angegeben und wird heute nach diesem benannt (vgl. 5.2). Allerdings hat Gieseking selbst auf die genannte Eigenschaft nicht hingewiesen. Einfache Beispiele nicht-orientierbarer geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten erhält man durch Produkte (z. B. $S^1 \times P_2R$), welche aber erst relativ spät in Gebrauch kamen (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 273 sowie 4.2 unten).

Der anschließende Paragraph 9 ist dem (inkorrekten) Beweis des Poincaréschen Dualitätssatz gewidmet.[57] Auf diese umfangreiche und schwierige Problematik möchte ich an dieser Stelle nicht näher eingehen (vgl. Bollinger 1972, 124-126 oder auch Dieudonné 1989, 21 f). Im uns hier interessierenden Falle der 3-Mannigfaltigkeiten verwendet Poincaré seinen Dualitätssatz vor allem dazu, sich die Berechung der zweiten Betti-Zahlen zu ersparen, da diese - vorausgesetzt, die Bedingungen des Dualitätssatzes sind erfüllt - ja gleich den ersten Betti-Zahlen sind. Letztere sind aber in der Regel viel einfacher zu bestimmen (etwa aus der Fundamentalgruppe durch abelschmachen).

Von zentraler Bedeutung für uns sind die Beispiele von (geschlossenen) 3-Mannigfaltigkeiten, die Poincaré im Paragraph 10 anführt. Es ist dies eine der ersten Stellen in der mathematischen Fachliteratur, an der solche Gebilde systematisch untersucht werden (ansonsten ist vor allem auf Dyck 1885 und Dyck 1890 hinzuweisen). Diese Beispiele, die bisher in der mathematikhistorischen Forschung kaum Beachtung gefunden haben (eine Ausnahme bildet Scholz 1980), sind meiner Ansicht nach sehr wichtig gewesen für den Fortschritt, welche die Theorie der Mannigfaltigkeiten bei Poincaré erfuhr. Sie waren es nämlich, die es ihm erlaubten, seine Invarianten zu berechnen und zu testen und damit seine Theorie, insbesondere seine Ansichten zum Homöomorphieproblem, weiterzuentwickeln. Vor Poincaré war die Welt der geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten so gut wie unbewohnt (vgl. 2.3.1 und 2.3.2) und somit wenig informativ. Erst Poincaré hat sie bevölkert mit Individuen, deren Studium sich lohnte. Die fraglichen Beispiele ziehen sich wie ein roter Faden durch die Analysis-situs-Reihe hindurch; ein radikal neues Objekt wird erst die Homologiesphäre im 5. Komplement sein (vgl. 3.4). Im übrigen sollte man nicht an-

Zur Vorgeschichte des Möbius-Bandes vgl. man 2.2.2.2.

57 Dieser besagt, daß bei einer geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n folgende Gleichheit für die Betti-Zahlen gilt: $\beta_{n-k} = \beta_k$ mit k = 1, ..., n-1 (Poincaré VI, 228).
Der Dualitätssatz wurde von Poincaré im ersten Complément aufgrund der Kritik von Heegard präzisiert und im zweiten Complément um eine entsprechende Aussage für die Torsionskoeffizienten ergänzt (diese stimmen in den Dimensionen n-k-1 und k überein - vgl. Poincaré VI, 364).
Die Aussage des Dualitätssatzes findet sich ohne Beweis wie bereits erwähnt schon 1889 bei E. Picard (Picard 1889, 180) Zu seiner Bedeutung heißt es bei H.W. Henn und D Puppe: „Der Poincarésche Dualitätssatz ist zugleich eine der größten und der frühesten Entdeckungen der Algebraischen Topologie". (Henn/Puppe 1990, 680).

nehmen, daß die fraglichen Beispiele von Poincaré erfunden wurden, um eine zeitlich vorausgehende Theorie zu illustrieren. Vielmehr dürfte die Reihenfolge, etwa bezüglich der Fundamentalgruppe, eher umgekehrt gewesen sein (siehe unten). Insofern ist schon die Ausdrucksweise "Beispiel" irreführend (vgl. 8). Schließlich sei noch daraufhin gewiesen, daß diese Beispiele in engem Zusammenhang zu Poincaré's in 3.1 besprochenen Untersuchungen über Kleinsche Funktionen stehen. Sie sind keineswegs beliebig, sondern wachsen gewissermaßen organisch aus jenen hervor. Allerdings geht Poincaré hier - und das unterscheidet ihn z. B. von W. Killing (vgl. 2.5) - einen ganz entscheidenden Schritt weiter, indem er von Raumteilungen und ihren Gruppen zu geschlossenen Mannigfaltigkeiten übergeht.

Dieser Paragraph 10 ist mit „geometrische Repräsentation" überschrieben und beginnt mit einer recht allgemein gehaltenen Beschreibung des Vorganges, den man heute Identifikation[58] nennt: Sind im dreidimensionalen Raum die (ausgefüllten) Polyeder $P_1, \ldots, P_n$ gegeben und zu diesen homöomorphe, dreidimensionale Teilmannigfaltigkeiten $Q_1, \ldots, Q_n$ der Mannigfaltigkeit Q im vierdimensionalen Raum (also φ_1: $P_1 \cong Q_1 \subset Q, \ldots, \varphi_n$: $P_n \cong Q_n \subset Q$)[59], so betrachte man eine Fläche F_i des Polyeders P_i nebst deren Bild $\varphi_i(F_i) = \Phi_i$ in $Q_i \subset Q$ und eine Fläche F_j des Polyeders P_j nebst deren Bild $\varphi_j(F_j) = \Phi_j$ in $Q_j \subset Q$ Gilt nun $\Phi_i = \Phi_j$, so heißen die Seiten F_i und F_j konjugiert zueinander.

Eine Fläche, welche mit keiner anderen Fläche identifiziert wird, heißt frei; gibt es keine freien Seitenflächen, so ist die entstehende Mannigfaltigkeit geschlossen (insbesondere sind geschlossene Mannigfaltigkeiten zusammenhängend). Gibt es dagegen freie Flächen, so bilden die ihnen entsprechenden Punkte von Q den vollständigen Rand von Q.

Schließlich weist Poincaré noch darauf hin, daß es nicht genüge, zu wissen, daß zwei Flächen zueinander konjugiert seien; man müsse vielmehr auch Kenntnis davon haben, welche Ecken mit welchen Ecken und welche Kanten mit welchen Kanten wie identifiziert würden. Dies ist im Hinblick auf die Frage der Orientierbarkeit notwendig.[60] Faßt man im modernen Sinne die Identifikationen als punktweise definierte Abbildungen zwischen topologischen Räumen auf, so ergibt sich die Kenntnis der Ecken- und Kantenzuordnung von

58 Poincaré selbst spricht von Punkten etc., die „konjugiert" (conjugés) sind. Diese Ausdrucksweise wird im folgenden auch gebraucht. Zum Hintergrund, auf dem man Poincaré's Vorgehensweise sehen muß, vgl. man oben 3.1.

59 Den Intentionen Poincaré's am nächsten kommt wohl folgende Beschreibung in moderner Sprache: Wir betrachten die Polyeder $P_1, \ldots, P_n$ im R^3 sowie homöomorphe Bilder derselben im R^4: $Q_1, \ldots, Q_n$. Die letztlich interessierende dreidimensionale Mannigfaltigkeit $Q \subset R^4$ geht aus $Q_1, \ldots, Q_n$ durch Randidentifikationen hervor (vgl. auch unten Anmerkung 74). Diese beiden Schritte werden von Poincaré auf einmal vollzogen. Da Poincaré prinzipiell davon ausgeht, daß $Q \subset R^4$ ist, müssen die Identifikationen so vorgenommen werden, daß ihr Ergebnis eine orientierbare Mannigfaltigkeit liefert. Im übrigen zeigt Poincaré mit seinem sogleich zu besprechenden zweiten Beispiel (Poincaré IV, 232 und 235 f), daß nicht alle Identifikationen zu einer Mannigfaltigkeit führen.
In der weiteren Entwicklung seiner Beispiele formuliert Poincaré ein Kriterium dafür, daß das durch die Identifikation gewonnene Gebilde orientierbar ist:
„Si deux faces F_1 et F_2 sont conjugées et si un point décrit le périmètre de F_1 de façon à laisser la face à sa gauche, le point correspondant sur F_2 devra décrire le périmètre de cette face en la laissant à la droite". (Poincaré VI, 232)
Wir werden später hierfür konkrete Beispiele sehen.

60 Vergleiche das von Poincaré formulierte Kriterium in der vorangehenden Anmerkung.

selbst. Man bemerkt, daß Poincaré seine Konjugationen eher kombinatorisch als mengentheoretisch interpretierte.

Die geschilderte Darstellungsweise für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten ist methodisch gesehen von grosser Bedeutung für die Topologie:

> „On conçoit que la connaissance des polyèdres P_i et celle du mode de conjugaison de leurs faces nous fournissent, dans l'espace ordinaire, une image de la variété V et que cette image suffise pour l'étude de ses propriétés au point de vue de l'Analysis situs."
>
> (Poincaré VI, 230)

Die hier von Poincaré gewählte Darstellungsweise,[61] die das von den automorphen Funktionen (vgl. 3.1.1) sowie aus dem Raumformenproblem (vgl. 2.5) her bekannte Vorgehen verallgemeinert, kann als Ausgangspunkt für die hieran anknüpfende Suche nach einer Normalform für 3-Mannigfaltigkeiten betrachtet werden sowie ganz allgemein für die Entwicklung der kombinatorischen Topologie (vgl. 4.2). Allerdings muß man hier eine Einschränkung anbringen. Poincaré versucht nämlich keineswegs zu zeigen, daß alle abstrakt definierten 3-Mannigfaltigkeiten auf Normalformen zurückführbar seien, was wiederum das Klassifikationsproblem beantworten könnte („zwei geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten, deren topologischen Invarianten übereinstimmen, lassen sich auf dieselbe Normalform zurückführen und sind deshalb homöomorph" wäre die Verallgemeinerung des von den geschlossenen Flächen her bekannten Sachverhaltes). Vielmehr dient bei ihm die geometrische Repräsentation zur Berechnung der topologischen Invarianten.

Im Lichte späterer Errungenschaften stellt sich heraus, daß Poincaré's Zugangsweise nicht die einfachsten denkbaren Beispiele liefert, wenn man "einfach" als "Heegard-Diagramm mit möglichst kleinem Geschlecht" (vgl. 4.1) interpretiert. Die auf dem Würfel beruhenden Mannigfaltigkeiten besitzen in der Regel ein Heegard-Diagramm vom Geschlecht drei, das Oktaederbeispiel sogar vom Geschlecht vier (dieses Geschlecht ist allerdings nicht minimal, da der projektive Raum zu den Linsenräumen - als Grenzfall - gerechnet werden kann und folglich ein Heegard-Diagramm auf dem Torus besitzt).

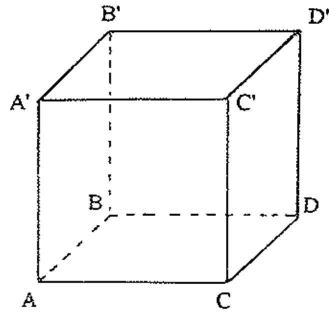
Alle Ecken der Polyeder, die zu einer einzigen Ecke der Mannigfaltigkeit Q identifiziert werden, bilden einen Eckenzykel; entsprechend spricht Poincaré von Kantenzyklen.[62] Diese Zyklen lassen sich aus den Identifikationsschemata (siehe unten) ablesen, indem man das Schicksal eines Eckpunktes oder einer Kante gemäß der mit den Flächen auszuführen-

[61] Erläutert wird diese durch die im nachfolgenden zu besprechenden Beispiele sowie - vorab gewissermaßen - durch das Beispiel des Torus: „Considérons un rectangle ABCD et un tore, sur lequel nous tracerons deux coupures, à savoir: Une circonférence méridienne et un parallèle; soit H le point d'intersection de ce parallèle et de ce méridien. La surface du tore ainsi découpé sera homéomorphe au rectangle; les deux lèvres de la coupure formées par le méridien correspondront aux deux côtés AB et CD du rectangle; les deux lévres de la coupure formés par le parallèle correspondront aux deux côtes AD et BC. On voit l'analogie avec ce qui précède: le rectangle correspond aus polyèdre P_1, le tore découpé à la variété Q_1, les côtés AB et CD aux deux faces F_1 et F_2, les deux lèvres de la coupure méridienne aux deux variétés Φ_1 et Φ_2 qui, comme on le voit, coïncident". (Poincaré VI, 229 f)
Hinzuzufügen wäre noch, daß der Torus unserem Q entspricht.

[62] „Cycle de sommets" beziehungsweise „cycle d'arrêts" (Poincaré IV, 230). Für eindimensionale Zykel war zeitweise im Deutschen auch die Bezeichnung „Zyklosis" gebräuchlich (vgl. etwa Kereljártó 1923, 128). Sowohl „Cyclus" als auch „Cyklose" finden sich schon bei J.B.Listing (vgl. Listing 1862, 109 f), wobei ersteres soviel wie „geschlossene Kurve„ bedeutete.

den Identifikationen verfolgt - und zwar so lange, bis man zu einer freien Fläche oder zum Ausgangspunkt der Betrachtung zurückkehrt.[63]

Die Beispiele[64], welche im nachfolgenden konstruiert werden, gehen fast alle von einem (ausgefüllten) Würfel als einzigem Polyeder aus.



Es gelten folgende Bezeichnungen (vgl. Poincaré VI; 231):[65]

A (0,0,0)	A' (0,0,1)
B (0,1,0)	B' (0,1,1)
C (1,0,0)	C' (1,0,1)
D (1,1,0)	D' (1,1,1)

Beispiel 1: Es sollen folgende Identifikationen von Seitenflächen vorgenommen werden:

A B D C ≡ A'B'D'C'
A B B'A' ≡ C D D'C'
A C C'A' ≡ B D D'B'

(Das von Gauß eingeführte Zeichen ≡, das hier Identifikationen bezeichnet, tritt als Äquivalenzzeichen bei Poincaré in mehreren Bedeutungen auf, z.B. auch im Sinne von „sind homotop" - vgl. Poincaré VI, 243.)
Dabei bedeutet die Formel ABDC ≡ A'B'D'C' folgendes:

[63] Im Anschluß an diese Betrachtungen zur Zykelbildung verweist Poincaré explizit auf die Theorie der automorphen Funktionen, wo diese Vorgehensweise vertraut sei (Poincaré VI, 231).

[64] In seiner „Analyse de ses travaux scientifique" (Poincaré 1921) schreibt Poincaré: „J'ai cru devoir multiplier les exemples [pour des variétés tridimensonelles; K.V.], pensant que c'était le meilleur moyen de familiariser les esprits avec des idées aussi nouvelles." (Poincaré 1921, 102)
Diese Bemerkung charakterisiert trefflich den Entwicklungsstand der Theorie um die Jahrhundertwende. Ähnlich äußerte sich noch 30 Jahre später H. Seifert (Seifert 1931, 26 - vgl. 5.2). Eine knappe und elegante Darstellung der Poincaréschen Beispiele 1 bis 6 findet man bei Sarkaria 1996, 255-257.

[65] Diese Angaben spielen in den Beispielen 1-5 keine Rolle, wohl aber bei Beispiel 6. Poincaré's Angaben bezüglich der Orientierung der Grundfläche stimmen im übrigen nicht mit den von ihm angegebenen Koordinaten überein.

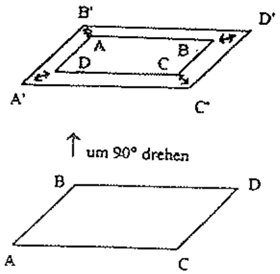
1. Die Flächen ABDC (Bodenfläche) und A'B'D'C' (Deckfläche) sind konjugiert;
2. die Ecken ABDC der Bodenfläche sind in dieser Reihenfolge zu durchlaufen (die Fläche liegt also rechts vom den Rand durchlaufenden Beobachter);[66]
3. die Ecken A und A', B und B', C und C' sowie D und D' sind miteinander zu identifizieren.

Analoges gilt für die beiden anderen Identifikationsvorschriften. Da Boden- und Deckfläche, Vorder- und Hinterseite sowie linke und rechte Seitenfläche miteinander identifizierbar werden, erhalten wir den dreidimensionalen Torus $T^3 \cong S^1 \times S^1 \times S^1$. Man findet einen Eckenzykel - das heißt alle Ecken fallen nach der Identifikation in einem Punkt zusammen - und drei Kantenzykel (alle vier Kanten, die parallel einer Koordinatenachse verlaufen, werden jeweils miteinander identifiziert). Meines Wissens nach tritt der dreidimensionale Torus hier erstmals nach Killing 1893 wieder in der Mathematikgeschichte auf (für andere Beispiele von 3-Mannigfaltigkeiten vgl. oben 2.3.1).

Beispiel 2: Auch dieses baut auf dem Würfel auf, verwendet aber folgende Identifikationen:

$$\begin{aligned} A\,B\,D\,C &\equiv B'D'C'A' \\ A\,B\,B'A' &\equiv D\,D'C'C \\ A\,C\,C'A' &\equiv D\,D'B'B \end{aligned}$$

Im Unterschied zum Torus T^3 werden also hier die Flächen bei der Identifikation um $\pm 90°$ gedreht.



Man findet jeweils zwei Ecken - und Kantenzykel:[67]

$$\begin{gathered} A \equiv B' \equiv C' \equiv D \text{ und } A' \equiv C \equiv D' \equiv B \\ AB \equiv B'D' \equiv C'C \equiv B'A' \equiv AC \equiv DD' \\ AA' \equiv DC \equiv C'A' \equiv B'B \equiv C'D' \equiv DB \end{gathered}$$

[66] Unter Beachtung der oben formulierten Bedingungen für Orientierbarkeit müßte also der Rand der Deckfläche im Sinne A'C'D'B' durchlaufen werden.

[67] Wie bereits erwähnt, kann man diese Zykel direkt aus dem Identifikationsschema ablesen: Nimmt man beispielsweise die Ecke A, so liefert die erste Zeile A≡B', die zweite B'≡C', die erste (von rechts nach links gelesen) C'≡D. Jetzt schließt sich sowohl nach der zweiten als auch nach der dritten Zeile der Zyklus, weil sich beidesmal D≡A ergibt. Analog verfährt man mit Kanten, wobei zu beachten ist, daß ein Ausdruck wie ABDC folgende vier Kanten umfaßt: AB, BD, DC und AC. Nach der ersten Zeile ist AB≡B'D', nach der dritten (von rechts nach links gelesen) B'D'≡C'C, nach der zweiten C'C≡B'A' (von rechts nach links gelesen, aber in dieser Reihenfolge), und so weiter.

Beispiel 3: Wieder wird der Würfel zugrunde gelegt; dieses Mal mit den folgenden Vorschriften:

$$\begin{aligned} A\,B\,D\,C &\equiv B'D'C'A' \\ A\,B\,B'A' &\equiv C'C\,D\,D' \\ A\,C\,C'A' &\equiv D\,D'B'B \end{aligned}$$

Gegenüber Beispiel 2 liegt hier nur in der zweiten Zeile ein Unterschied vor, wobei jetzt das Quadrat ABB'A' bei der Identifikation um -90° (also im Uhrzeigersinn) gedreht wird. Es ergeben sich zwei Ecken- und vier Kantenzykel:

$$A \equiv B' \equiv C' \equiv D \text{ und } B \equiv D' \equiv A' \equiv C$$

und

$$\begin{aligned} A\,B &\equiv B'D' \equiv C'C \\ A\,A' &\equiv C'D' \equiv D\,B \\ A\,C &\equiv DD' \equiv B'A' \\ C\,D &\equiv B\,B' \equiv A'C' \end{aligned}$$

Die entsprechende Mannigfaltigkeit ist als Quaternionenraum bekannt (vgl. unten).

Beispiel 4: Noch einmal dient der Würfel als Ausgangspunkt. Die Identifikationen sehen diesmal so aus:

$$\begin{aligned} A\,B\,D\,C &\equiv B'D'C'A' \\ A\,B\,B'A' &\equiv C\,D\,D'C' \\ A\,C\,C'A' &\equiv B\,D\,D'\,B' \end{aligned}$$

Im Vergleich mit Beispiel 3 haben wir Änderungen in der zweiten und dritten Zeile; bezüglich des Torus gibt es nur noch eine Abweichung in Zeile eins. Konkret heißt dies, daß wie in Beispiel 2 die Bodenfläche bei der Identifikation mit der Deckfläche um 90° gedreht wird.

Dieser „verdrehte Torus", welcher auch als Analogon der Kleinischen Flasche betrachtet werden kann, weist einen Eckenzykel und drei Kantenzykel auf:

$$A \equiv B' \equiv D' \equiv B \equiv D \equiv C' \equiv A' \equiv C$$

und

$$\begin{aligned} A\,A' &\equiv C\,C' \equiv B\,B' \equiv D\,D' \\ A\,B &\equiv C\,D \equiv B'D' \equiv A'C' \\ A\,C &\equiv B\,D \equiv D'C' \equiv B'A' \end{aligned}$$

Ganz anders geartet ist das letzte Beispiel dieses Paragraphen.

Beispiel 5: Es sei ein reguläres Oktaeder gegeben, wobei die quadratische Grundfläche mit BCED und die Spitzen mit A und F bezeichnet werde.

Es sollen folgende Identifikationen vorgenommen werden:

A B C ≡ F E D
A C E ≡ F D B
A E D ≡ F B C
A D B ≡ F C E

Folglich werden immer einander diametral gegenüber liegende Dreiecke miteinander identifiziert. Nimmt man anstelle des Oktaeders dessen Umkugel, so erkennt man, daß die obige Identifikatiosnvorschrift genau deren Diametralpunkte identifiziert. Somit ergibt der reelle projektive Raum P_3R .[68]

Man findet drei Eckenzykel und sechs Kantenzykel:

A ≡ F, B ≡ E, C ≡ D

und

A B ≡ F E
B C ≡ E D
A C ≡ F D
C E ≡ D B
A E ≡ F B
A D ≡ F C

Im weiteren untersucht nun Poincaré, ob die durch diese Identifikationen erhaltenen Gebilde tatsächlich Mannigfaltigkeiten sind, was eine bemerkenswerte Entwicklung im Vergleich zu den kombinatiorischen Ansätzen Dycks darstellt, wo dieses Problem ja nicht auftritt. An dieser Stelle wird also deutlich, daß bei Poincaré kontinuumstopologische Überlegungen im Vordergrund standen. Soll V eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen sein, so ist hierfür nach Poincaré notwendig und hinreichend, daß jeder Punkt $x \in V$ eine zur Einheitskugel E^3 homöomorphe Umgebung besitzt.[69] Dies wiederum wird durch Rekurs auf die E^3 begrenzende Sphäre S^2 erledigt, welche sich durch den Eulerschen Polyedersatz charakterisieren läßt.[70] Klar ist, daß Probleme nur in den Punkten von V auftreten können, die Ecken des ursprünglichen Polygons (oder der ursprünglichen Polygone) entsprechen.

Poincaré kommt hier der modernen Auffassung einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit sehr nahe. Er sagt allerdings nichts explizit zum Verhältnis der soeben gegebenen Charakterisierung zu seinen ursprünglichen Definitionen des Mannigfaltigkeitsbegriffs. Der

[68] Unter topologischen Aspekten, insbesondere im Hinblick auf die Zusammenhangsverhältnisse, war P_3R bereits von L. Schläfli und F. Klein betrachtet worden (vgl. Scholz 1980, 164-167) sowie von W. Dyck, der die Diametralpunktidentifikation beschrieb (Dyck 1890, 283f) und erkannte, daß $P_{2n}R$ nicht-orientierbar, $P_{2n+1}R$ orientierbar ist. Insofern war diese Mannigfaltigkeit besonders geeignet, die Stärke von Poincaré's neuartigen Methoden zu demonstrieren. Zusammenhänge zwischen Platonischen Körpern und 3-Mannigfaltigkeiten wurden später von W. Trelfall und H. Seifert untersucht (vgl. 5.2).

[69] Für Mannigfaltigkeiten mit Rand wäre die Bedingung für Randpunkte dahingehend zu modifizieren, daß diese Umgebungen besitzen müssen, die zu Halbkugeln homöomorph sind.

[70] An dieser Stelle wird von der Klassifikation der geschlossenen Flächen durch ihre Euler-Charakteristik Gebrauch gemacht (vgl. etwa Massey 1989, 33). Als Werkzeug zur Klassifikation wurde eine Variante der „Euler-Charakteristik" systematisch durch W. Dyck verwendet (Dyck 1888, Dyck 1890), eher sporadisch auch bei Poincaré VI, 148. Zur Korrektheit von Poincaré's Argumentation, die sich aus der Gültigkeit des verallgemeinerten Schönflies-Satzes für endliche Komplexe ergibt, vergleiche man Kinsey 1993, 211-220.

Bezug zu seiner zweiten Definition, die ja mehr oder minder deutlich mit Kartenumgebungen arbeitete, liegt aber auf der Hand, wenn man auch kaum sagen wird, daß hierfür ein strenger Beweis erbracht wurde.

Poincaré behandelt in seinen Ausführungen zur Frage, ob man durch die Identifikationen tatsächlich eine Mannigfaltigkeit bekommt (Poincaré VI, 234-236), den allgemeinen Fall, daß mehrere Polyeder zu mehreren Mannigfaltigkeiten identifiziert werden sollen. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer Mannigfaltigkeit V und eines Polyeders P, da dieser alles wesentliche enthält und alle Beispiele, die Poincaré anführt, abdeckt:

$$\begin{array}{ccccc} R^3 & & R^4 & & R^4 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ P & \xrightarrow{\psi_\Xi} & Q & \xrightarrow{j} & V \end{array}$$

Es sei E ein Punkt von V, der durch Identifikation von Ecken $E_1,\dots,E_n$ des Polyeders P entsteht (n ist also die Anzahl der Ecken, die in dem zu E gehörigen Eckenzykel auftreten). Nun betrachte man die Gebilde, welche entstehen, wenn man um die E_i ($i = 1,\dots,n$) Kugeln legt und diese mit P schneidet (Poincaré spricht von „Raumwinkeln") sowie deren Bilder unter $j \circ \psi$. Diese liegen um den Punkt E herum, und zwar so, daß der E umgebende Raum ganz ausgefüllt wird und jeder Punkt des Raumes in genau einem Raumwinkel liegt. Der fragliche Raum wird durch die Seitenflächen der Raumwinkel unterteilt. Nun nehme man eine geeignete Sphäre um E und schneide diese mit dem soeben geschilderten Gebilde - von Poincaré als „Stern" (aster) bezeichnet. Auf diese Weise erhält man ein sphärisches Polyeder, dessen Ecken, Kanten und Flächen es zu berechnen gilt.

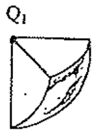
Man hat folgende Entsprechung:

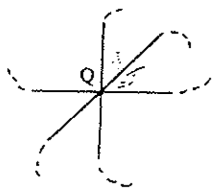
Stern	**sphärisches Polyeder**	**Anzahlen**
Anzahl der Raumwinkel	Flächen	f
Seitenflächen	Kanten	k
Kanten	Ecken	e

Die fraglichen Anzahlen erhält man, indem man die Urbilder unter $j \circ \psi$ der den Stern bildenden Raumwinkel untersucht. Man findet:

f ≙ Anzahl der zu E äquivalenten Ecken (Länge des Eckenzykels von E);
k ≙ Gesamtanzahl der Flächen, die in den zu E äquivalenten Ecken zusammentreffen, dividiert durch 2 (weil jede Fläche doppelt auftritt!);
e ≙ Anzahl der Kantenzykel, die in E zusammentreffen. Dabei sind Kanten, deren anderer Endpunkt ebenfalls zum Eckenzykel von E gehört, doppelt zu zählen; alle anderen zählen einfach.

Für das Beispiel 1, den Torus, findet man : $e = 8$, $f = 3{\cdot}8/2 = 12$ und $k = 2{\cdot}3 = 6$. (Alle Kanten müssen hier doppelt gezählt werden, da der andere Endpunkt stets zum Eckenzykel - es gibt ja nur einen - dazugehört). Konkret sieht das so aus: Der zu E gehörige Stern wird im Falle des Torus T^3 aus acht Raumwinkeln gebildet. Diese werden von jeweils drei Seitenflächen begrenzt, deren Durchschnitte drei nichtäquivalente Kanten darstellen. Letztere müssen doppelt gerechnet werden, da sie ja einem weiteren zum Stern gehörigen Raumwinkel angehören.





Ersichtlich gilt hier: $e - f + k = 8 - 12 + 6 = 2$

Also liegt - topologisch gesehen - tatsächlich ein sphärisches Polyeder vor, weshalb der einzige kritische Punkt E des Torus T^3 eine Kugelumgebung besitzt und man folglich eine 3-Mannigfaltigkeit vor sich hat.

Im Beispiel 2 finden wir dagegen:

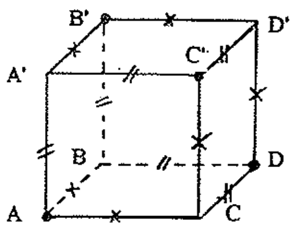
$f = 4$ (es gibt zwei Eckenzykel zu jeweils vier Ecken),

$k = 4 \cdot 3/2 = 6$ und $e = 2$ (es treffen zwei Kantenzykel zusammen [es gibt überhaupt nur zwei!], deren anderer Endpunkt aber nicht zum Eckenzykel gehört).

Folglich liegt keine Polyederzerlegung der Sphäre vor, da

$$e - f + k = 6 - 4 + 6 = 8 \neq 2$$

ist. Die zu A äquivalenten Ecken sind dick ausgeführt; die mit x beziehungsweise | markierten Kanten gehören jeweils einem Zykel an.



Also liefert das Beispiel 2 keine 3-Mannigfaltigkeit. Die weiteren Beispiele 3-5 sind wieder Mannigfaltigkeiten, wie man bei der folgenden Tabelle entnehmen kann:

Beispiel	e	k	f
drei	4	6	4
vier	8	12	6
fünf	2	4	4

Die im Paragraphen 10 bereitgestellten Mannigfaltigkeiten werden später im Paragraphen 13 wiederaufgegriffen, um ihre Betti-Zahlen und ihre Fundamentalgruppen zu bestimmen. Zuvor (im Paragraph 11) behandelt Poincaré ein weiteres, das schon 1892 (vergleiche 3.1) aufgetretene sechste Beispiel und führt im Paragraph 12 die Fundamentalgruppe ein. Dieses sechste Beispiel umfaßt eine ganze Klasse von konkreten Mannigfaltigkeiten und verallgemeinert zusammenfassend die oben diskutierten Beispiele 1 (Torus) und 4 (verdrehter Torus).

Im Paragraph 11 geht es modern gesprochen darum, 3-Mannigfaltigkeiten als Unterlagerungen[71] des R^3 zu konstruieren, auf dem eine vorgegebene abstrakte Gruppe von Decktransformationen operiert. Diese Zugangsweise war sicherlich durch die Kenntnisse, die man sich bei automorphen Funktionen und Riemannschen Flächen im zweidimensionalen Fall angeeignet hatte, motiviert und verallgemeinert die konkret-geometrische Vorgehensweise aus den Beispielen 1 bis 5.

Ein Vergleich mit entsprechenden Stellen in den Arbeiten über Fuchssche Funktionen (z.B. Poincaré II, 115-126, und 143-146) zeigt deutlich, daß Poincaré hier die ihm bekannte Vorgehensweise aus dem Zweidimensionalen auf das Dreidimensionale überträgt. Es gibt allerdings einen Unterschied: Die aus der Theorie der automorphen Funktionen bekannten Parkettierungen beziehen sich auf die hyperbolische Geometrie, während die von Poincaré betrachteten Würfel und Oktaeder euklidische Raumteilungen liefern. Die Einführung der hyperbolischen Geometrie im dreidimensionalen Bereich sollte erst sehr viel später (ansatzweise bei H. Seifert und C. Weber, systematisch dann erst bei W. Thurston) erfolgen (vgl. 5.2). Das soll aber nicht heißen, daß Poincaré ein Zusammenhang zwischen geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten und Raumteilungen des hyperbolischen Raumes nicht bekannt gewesen wäre (vgl. 3.1); er nützt diesen aber nicht aus.

Da die Decktransformationen eine Gruppe bilden sollen, werden sie begrifflich von Poincaré als Substitutionen gefaßt:

$$\varphi_1(x,y,z), \psi_1(x,y,z), \chi_1(x,y,z)$$
$$\varphi_2(x,y,z), \ldots$$
$$\ldots$$
$$\varphi_n(x,y,z), \psi_n(x,y,z), \chi_n(x,y,z)$$

Diese Automorphismen sollen auf dem R^3 „eigentlich diskontinuierlich"[72] und fixpunktfrei operieren. Aus der Diskontinuität folgt, daß der Raum R^3 in unendlich viele, im Innern disjunkte Bereiche D_0, D_1, D_2,.... zerlegt werden kann mit folgenden Eigenschaften:

---

71 Poincaré hatte bereits 1883 in einer Arbeit über algebraische Kurven (Poincaré IV, 57-69) universelle Überlagerungen studiert und den Zusammenhang zwischen Decktransformationen und Fundamentalgruppe erkannt (vgl. Dieudonné 1989, 295; Hirsch 1985, 673f und Scholz 1980, 202f). F. Klein arbeitete bei nichtorientierbaren Flächen angeregt durch L. Schläfli mit deren Orientierungüberlegung (Klein 1874, 550), was zu der Bezeichnung „Doppelfläche" Veranlaßung gab (die Orientierungsüberlagerung ist ja zweiblättrig); vgl. auch 2.2.2.2.

72 Als eine Art von Standardreferenz zu diesem Themenkreis gilt das Buch von R. Fricke und F. Klein über automorphe Funktionen (Klein/Fricke 1897, 61-63). Im Grunde genommen geht es dabei darum, daß sich die Bilder eines Punktes unter den Operationen nicht häufen dürfen, weil nur so eine Zerlegung des betrachteten Bereichs in Fundamentalbereiche gewährleistet werden kann. Formal läßt sich das so ausdrücken: Eine Gruppe G operiert auf einem topologischen Raum X in einem Punkt P eigentlich diskontinuierlich, wenn es eine Umgebung U von P in X gibt, derart, daß nur endlich viele Elemente aus G den Punkt P auf einen Punkt aus U abbilden (vgl. Chandler/Magnus 1982, 72; ausführliche Angaben auch zur Geschichte der Überlagerungen bei Dieudonné 1989, 293-300).
Im übrigen ist nicht ganz klar, was Poincaré mit $\varphi_2(x,y,z)$ usw. gemeint hat: Es könnten dies natürlich weitere, von den in der ersten Zeile genannten verschiedene Abbildungen sein, es könnte aber auch φ_i die i-fache Anwendung von φ (i=1,2...) meinen. Dann hätte die vorliegende Gruppe die drei Erzeugenden φ, ψ und χ, was exakt der Anwendung im sechsten Beispiel entspricht

1. Zu jedem D_i gibt es ein $S_i \in G$ mit $S_i(D_0) = D_i$.
2. Gewisse Abbildungen S_i liefern Randidentifaktionen auf D_0.[73]
3. Gemäß 2. entsteht aus D_0 eine geschlossene Mannigfaltigkeit.

Im Vergleich zu W. Killings Untersuchungen zum Raumformenproblem (vgl. 2.5), bei denen ja auch Raumteilungen des enklidischen Raumes und Gruppen auftraten, welche diese Raumteilungen aus einem dreidimensionalen Fundamentalbereich erzeugten, vollzieht Poincaré gerade mit der letzten Bemerkung einen entscheidenden Schritt in Richtung auf die dreidimensionale Topologie: Während Killing bei den Raumteilungen stehen blieb, geht Poincaré zu geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten über.[74]
Nach diesem Vorbereitungen kann das sechste Beispiel eingeführt werden.

Beispiel 6: Wir betrachten R^3 und die drei Abbildungen[75]

$$f_1: \quad R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+1,y,z)$$
$$f_2: \quad R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,y,1,z)$$
$$f_3: \quad R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, z+1)$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ mit ganzzahligen Einträgen α, β, γ und δ sein soll.[76] Die geometrische Bedeutung dieser drei Abbildungen ist leicht zu ermitteln: f_1 stellt eine Translation in x-

[73] Poincaré begründet das so: Man betrachte D_0 und ein ihm benachbartes D_i (d.h. $D_0 \cap D_i \neq \emptyset$, wobei dieser Durchschnitt - nennen wir ihn F - im Rand von D_0 und D_i liegen muß). Sei $S_i(D_o) = D_i$ und damit $S_i^{-1}(D_i) = D_o$. Dann muß $S_i^{-1}(F) \neq F$ (die S_i haben keine Fixpunkte!) sein, aber andererseits ein Teil des Randes von D_o, sagen wir F'. Nun ist aber $S_i(F') = S_iS_i^{-1}(F) = F$; folglich identifiziert S_i das Randstück F mit F'. Hieraus schließt Poincaré desweiteren, daß D_o (und damit natürlich alle D_i) homöomorph einem Polyeder sei. Dabei wird unterstellt, daß die eben geschilderte Betrachtung eine vollständige Zerlegung des Randes von D_o liefert.

[74] Dabei dachte Poincaré offensichtlich nicht an die abstrakte Konstruktion eines topologischen Quotienten, insbesondere eines Orbitraumes $R^3/\sim$ ($\sim$ sei die durch die operierende Gruppe G definierte Relation); vielmehr schreibt er: „On pourra alors,..., faire correspondre à ce polyèdre ou, par conséquent, au domaine D_O, une variété fermée à trois dimensions située dans l'espace à quatre dimensions, et que l'on obtiendra en tranportant D_O dans l'espace à quatre dimensions, puis en déformant ce domaine jusqu'à ce qu'on puisse coller l'une contre l'autre les portions conjugées de sa frontière." (Poincaré VI, 237)
Somit muß man D_O erst ins Vierdimensionale transportieren, bevor man verkleben kann.

[75] Poincaré sagt auch hier „Substitutionen" (Poincaré VI, 237).

[76] Anders gesagt ist $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,Z)$.

Dabei ist anzumerken, daß diese Gruppe im Zusammenhang mit den automorphen Funktionen vor allem von Felix Klein und Karl Fricke intensiv untersucht worden ist (vgl. Chandler/Magnus 1982, 34f). Der Grund hierfür ist, daß SL(2,Z) und die Gruppe der Möbius-Transformationen PSL(2,Z) aufs Engste zusammenhängen: Jedes $M \in SL(2,Z)$ bestimmt im wesentlichen eine Möbius-Transformation und umgekehrt. Genauer gilt: $PSL(2,Z) \cong SL(2,Z) / T$, wobei T das Zentrum von SL(2,Z) ist, das aus

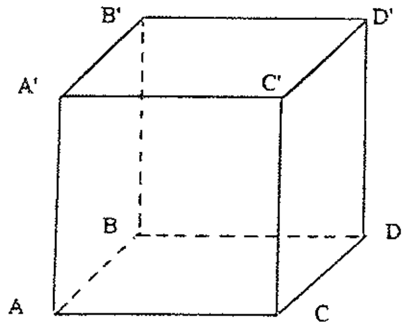
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

besteht (vgl. Magnus 1974, 107).

Richtung um den Wert 1 dar, f_2 analog in die y-Richtung und f_3 kombiniert eine Verschiebung in z-Richtung mit dem Wert 1 mit einer linearen, durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

beschriebenen Abbildung in der x-y-Ebene. Folglich werden am Einheitswürfel



die vordere und die hintere Fläche sowie die linke und die rechte Seitenfläche in der gewöhnlichen Weise miteinander identifiziert, während Boden- und Deckfläche erst nach einer durch die Matrix M festgelegten Transformation identifiziert werden. Ist diese Matrix die Einheitsmatrix - findet also nur eine Verschiebung in z-Richtung statt - so ergibt sich der Torus T^3 aus Beispiel 1, stellt M dagegen eine Drehung von 90° in der x-y-Ebene um den Ursprung dar, so erhält man den verdrehten Torus aus Beispiel 4.[77]

Folglich verallgemeinert Beispiel 6 die genannten Beispiele 1 und 4 - es stellt auf dem Hintergrund der Kenntnisse, die bis jetzt durch Poincaré bereitgestellt wurden, die wohl

Poincaré war über Kleins Resultate gut informiert. Die genannte Gruppe, insbesondere jene, die man erhält, wenn man alle Einträge modulo p nimmt, spielte in ihrem Briefwechsel öfter eine Rolle (Dugac 1989, 95 und 97). Eine andere Interpretation von SL(2,Z), wobei allerdings im Unterschied zu Poincaré allgemeiner Matrizen mit Determinante +1 und -1 zugelassen sind, ist, daß die entsprechende Gruppe (die dann manchmal auch als SL(2,Z) bezeichnet wird) als Abbildungsklassengruppe des Torus auftritt. Diese Erkenntnis geht der Sache nach, natürlich nicht dem Wortlaut nach, auf A.Clebsch und P.Gordan zurück (1866); vgl. Stillwell 1993, 206.

[77] Die zugehörige Matrix sieht so aus:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen Fall läßt sich jedoch die gemäß f_3 auszuführende Identifikation nicht durch ein einfaches geometrisches Schema (wie ABDC ≅ A'B'D'C') darstellen. Dies geht nur dann, wenn die Quadratecken aufeinander fallen, also wenn das Quadrat in sich um ein Vielfaches von 90° gedreht wird. Man vergleiche Sarkaria 1996, 255-257 für eine Übersicht zu allen hier möglichen Fällen. Wir werden sehen, daß sich Poincaré in allgemeineren Situationen dadurch behilft, daß er Unterteilungen durchführt.

einfachste Möglichkeit dar, zu einer unendlichen Klasse von komplizierteren Mannigfaltigkeiten zu gelangen.[78]

Um die soeben benutzte geometrische Redeweise zu rechtfertigen, ist es erforderlich, zu zeigen, daß die von f_1, f_2 und f_3 erzeugte Gruppe eigentlich diskontinuierlich auf R^3 operiert und daß der Einheitswürfel als deren Fundamentalbereich D_0 gewählt werden kann.[79] Zu diesem Zwecke bestimmt Poincaré explizit die Bahnen von Punkten (x, y, z) unter den f_i sowie unter deren Kombinationen. Im Falle von f_1 und f_2 ist das einfach $(k, l \in Z)$.[80] Man findet:

$$f_1^{\,k}(x,y,z) = (x+k,y,z), \quad f_2^{\,l}(x,y,z) = (x,y+l,z)$$

Kombiniert man diese beiden Resultate, so erhält man (x + k, y + l, z) als mögliches Bild von (x, y, z). Die Anwendung von f_3 auf dieses Ergebnis liefert

$$f_3(x+k, y+l, z) = ((M\begin{pmatrix}x+k\\y+l\end{pmatrix})^T, z+1) = ((M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T + (M\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix})^T, z+1)$$

mit M wie oben.

Setzt man $M\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\l_1\end{pmatrix}$ mit $k_1, l_1 \in Z$, so ergibt sich:

$$f_3(x+k, y+l, z) = (((M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T + \begin{pmatrix}k_1\\l_1\end{pmatrix})^T, z+1)$$

Wendet man auf dieses Ergebnis f_1 oder f_2 an, so ändert dies nach dem obigen nur die Konstante k_1 beziehungsweise l_1. Dagegen führt die Anwendung von f_3 zu folgendem Ausdruck:

$$f_3((M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T + \begin{pmatrix}k_1\\l_1\end{pmatrix}^T, z+1) = ((M(M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_1\\l_1\end{pmatrix}))^T, z+2) = ((M^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T + \begin{pmatrix}k_2\\l_2\end{pmatrix}^T; z+2) \quad \text{mit}$$

den ganzen Zahlen k_2 und l_2. Allgemein führt die m-fache Anwendung von f_3 zu:

[78] Man kann zwischen den Beispielen 1 und 6 auch eine Analogie herstellen zum Übergang vom gewöhnlichen Torus zur Kleinschen Flasche, wobei die Grundidee wäre: Verdrehen macht die Mannigfaltigkeiten komplizierter. Sarkaria hat in Abhängigkeit von Spur(M) die Anzahl der topologisch echt verschiedenen Mannigfaltigkeiten ermittelt, die Poincaré's sechstes Beispiel liefert. Es stellt sich heraus, daß nur die zu Spur(M) = 2 gehörige Klasse unendlich viele nicht-äquivalente Mannigfaltigkeiten enthält; alle anderen Klassen sind endlich (Sarkaria 1996, 257).

[79] Im Grunde genommen muß man natürlich zuerst einmal zeigen, daß f_1, f_2 und f_3 Homöomorphismen von R^3 nach R^3 sind. Das wird von Poincaré stillschweigend unterstellt. Da die Stetigkeit der f_i kein Problem ist, genügt es deren Umkehrungen zu bestimmen. Es ist

$$f_1^{-1}(x,y,z) = (x-1,y,z) \text{ und } f_2^{-1}(x,y,z) = (x,y-1,z).$$

Schreiben wir $f_3(x,y,z)$ in der Form

$$(\left(M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)^T, z+1) \text{ mit } M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

so ist offenkundig, daß gilt: $f_3^{-1}(x,y,z) = (M^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T, z-1)$, wobei zu beachten ist, daß M^{-1} existiert, weil det $M \neq 0$ nach Voraussetzung.

[80] Im nachfolgenden gebe ich die Überlegungen Poincaré's der besserern Übersichtlichkeit in moderner Notation wieder.

$$f_3^{\,m}(x,y,z) = ((M^m\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T + \begin{pmatrix}k_m\\l_m\end{pmatrix}^T, z+m)$$

mit ganzen Zahlen k_m und l_m. Kombiniert man dies mit Anwendungen von f_1 und/oder f_2, so ändern sich nur die Konstanten k_m und l_m, weshalb die obige Form als allgemeinstes Resultat betrachtet werden darf.

Das Bild eines Punktes (x, y, z) $\in R^3$ unter einer beliebigen Kombination von f_1, f_2 und f_3 hat folglich die Gestalt

$$((M^m\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})^T + \begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}^T, z+m),$$

wobei k und l ganze Zahlen sind und m die Summe der Exponenten von f_3 in der beliebigen Kombination von f_1, f_2 und f_3 $(m \in Z)$ ist. Tritt f_1 nicht auf, so ist k = 0; tritt f_2 nicht auf, so ist l = 0.

Hieraus erkennt man sofort, daß die von f_1, f_2 und f_3 erzeugte Gruppe eigentlich diskontinuierlich auf R^3 operiert. Weiter zeigt die Rechnung, daß f_1 unf f_2 miteinander kommutieren[81] Schließlich ergibt sich die Tatsache, daß als Fundamentalbereich der von f_1, f_2 und f_3 erzeugten Gruppe der Einheitswürfel [0,1] × [0,1] × [0,1] gewählt werden kann, direkt aus den Definitionen von f_1, f_2 und f_3.

Vollständig analoge Rechnungen liefern folgende Beziehungen zwischen f_1, f_2 und f_3, die später auf die die Fundamentalgruppe der entsprechenden Mannigfaltigkeit definierenden Relationen führen werden (Poincaré VI, 246):

$$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$$

$$f_3 \circ f_1 = f_2^\gamma \circ f_1^\alpha \circ f_3$$

$$f_3 \circ f_2 = f_2^\delta \circ f_1^\beta \circ f_3$$

Zur Erläuterung gibt Poincaré dem Paragraphen 11 drei Beispiele bei. Das erste, in dem $M = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ist, ergibt den uns bereits bekannten Torus T^3; im zweiten ist $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Hierfür führt Poincaré ein Identifikationsschema im Stile des Paragraphen 10 an, wobei die Boden- und die Deckfläche des Einheitswürfels durch Ziehen der Diagonalen BC beziehungsweise A'D' zu unterteilen sind:

ABC ≡ A'D'C'
BCD ≡ B'A'D'
ACC'A' ≡ BDD'B'
ABB'A' ≡ CDD'C'

Das dritte und letzte Beispiel schließlich ergibt sich für $M = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$; es handelt sich hierbei um Beispiel vier von oben.[82]

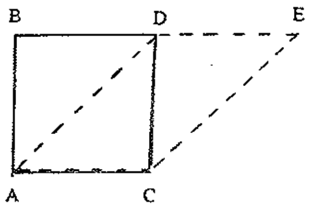
[81] Die Behauptung Poincaré's (Poincaré VI, 238) „On voit aisément d'ailleurs que le groupe dérivé des deux premières substitutions [das sind f_1 und f_2; K.V.] est permutable à la troisième." ist wohl so zu verstehen, daß die von f_1 und f_2 erzeugte Untergruppe sogar ein Normalteiler in der großen Gruppe ist.

[82] Die geometrische Bedeutung des vierten Beispieles haben wir uns schon weiter oben klar gemacht. Dagegen ist die geometrische Bedeutung der Decktransformation (x, y, z) $\mapsto$ (x+y, y, z+1) schwieriger zu er-

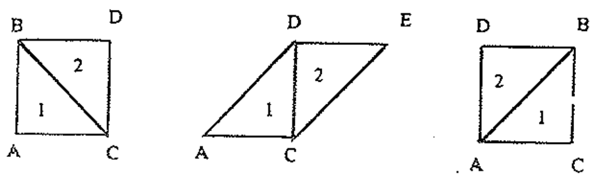
schließen, insbesondere da Poincaré nur das Ergebnis - das Identifikationsschema - nicht aber dessen Herleitung mitteilt. Da der „Übergang" in z-Richtung klar ist, genügt es, sich zu überlegen, was die Transformation $(x,y) \mapsto (x+y,y)$ in der x-y-Ebene leistet. Derartige Fragen waren aber aus der Theorie der automorphen Funktionen wohlbekannt, wenn sie auch dort im Komplexen erörtert wurden.
Allgemein wird die Gruppe SL(n,R) von den „Scherungen" erzeugt (Artin 1964, 162); entsprechendes gilt insbesondere für SL(2,Z). Dabei heißt $M \in SL(n,R)$ Scherung, wenn M die Vektoren einer Hyperebene H fest läßt, während alle anderen Vektoren um ein Vielfaches eines Vektors $x \in H$ bewegt werden. Für diese Verschiebungsvektoren läßt sich mit Hilfe des die Hyperebene H beschreibenden linearen Funktionals eine explizite Formel angeben.

Im vorliegenden Fall geht es konkret um $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [ein anderes konkretes Beispiel (nämlich $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) wird in Sarkaria 1996, 256 ausführlich behandelt]. Die der allgemeinen Theorie entsprechende Form findet man leicht durch die Beziehung $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Hyperebene H ist also die erste Koordinatenachse, der Verschiebungsvektor ist der entsprechende Einheitsvektor, welcher für jeden Vektor $(x,y)^T$ mit y zu multiplizieren ist. Das bedeutet, daß der Betrag des Vektors, mit dem tatsächlich verschoben wird und der stets ein skalares Vielfaches von $(1,0)^T$ ist, mit wachsendem Abstand von der ersten Koordinatenachse zunimmt. Wendet man all dies auf das Einheitsquadrat, das ja als Grundfläche des Fundamentalpolyeders auftritt, an, so erkennt man, daß die fragliche Matrix hier eine Scherung bewirkt:



Das ursprüngliche Dreieck ABC wird abgebildet auf ADC und liegt folglich unter A'D'C'. das ursprüngliche Dreieck BCD wird abgebildet auf DCE und liegt dann nach Zurückverschieben ins Ausgangquadrat unter B'A'D'.



Allgemein wird das Fundamentalquadrat durch ein $M \in SL(2,Z)$ in ein Viereck verwandelt, dessen Anteile (=Schnittgebilde mit dem Quadratgitter) entsprechend im Fundamentalquadrat zusammengefügt werden müssen, um die geometrische Bedeutung der Identifikation gemäß f_3 zu liefern. Dabei ist entscheidend, daß SL(2,Z) das ganzzahlige Gitter Z × Z in sich abbildet.

Es ist an dieser Stelle vielleicht nützlich, Poincaré's Konstruktion mit modernen Vorstellungen zu verknüpfen. Denkt man sich die Identifikationen gemäß f_1 und f_2 ausgeführt, so erhält man als Resultat einen von zwei Tori begrenzten Schalenraum. Diese Tori sind natürlich homöomorph, weshalb man f_3 als einen Homöomorphismus des Torus in sich auffassen darf. Die allgemeinere Idee, die hinter dieser Vorgehensweise steckt, läßt sich so beschreiben: Ist F eine geschlossene Fläche und $h\colon F \to F$ ein Automorphismus, so bilde man $F \times I$ und gehe gemäß der Vorschrift $(x,0) \sim (h(x),1)$ zum Quotientenraum, der gesuchten geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit, über. Man erhält so ein Bündel über S^1 mit Faser F (vgl. Hempel 1976, 121); bei Poincaré ist konkret F der Torus und h orientierungserhaltend. Einen interessanten Spezialfall stellt die in Beispiel 4 verwendete Abbildung f_3 dar, da diese ein periodischer Homöomorphismus des Torus ist ($(f_3)^4 = id$). Die Torusbündel über S^1, die aus periodischen Automorphismen hervorgehen, lassen sich vollständig aufzählen (vgl. Hempel 1976, 122; Hempels M_6 ist Poincaré's viertes Beispiel).

Es besteht im übrigen ein enger Zusammenhang zwischen der oben geschilderten Klasse von Bündeln und den gefaserten Räumen nach Seifert (vgl. Hempel 1976, 120-125 und 5.2 unten); speziell die Torusbündel stehen in Beziehung zu den geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mit auflösbarer Fundamentalgruppe (vgl. Evans-Moser 1972). Insgesamt darf man also festhalten, daß Poincaré eine auch heute noch interessante Klasse von Beispielen eingeführt hat, die allerdings bis vor kurzem völlig in Vergessenheit geraten war. In neuester Zeit hat K. Sarkaria diese genauer untersucht; vergleiche Sarkaria 1996.

Bemerkenswert ist im übrigen, daß Poincaré keinerlei Anstrengungen unternimmt, zu zeigen, daß sein sechstes Beispiel immer eine Mannigfaltigkeit liefert.

Der bei Poincaré nachfolgende Paragraph enthält die Definition der Fundamentalgruppe[83] , die auch hier wieder (wie schon 1892 - siehe oben) im Sinne einer Monodromiegruppe geschieht.[84] Wichtig ist, daß Poincaré an dieser Stelle das Konzept der (modern gesprochen) Homotopie von (geschlossenen) Wegen einführt[85] und damit die Auffassung der Fundamentalgruppe vorbereitet, die sich später durchsetzen sollte.

Im übrigen erzeugen gerade $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Gruppe SL(2,Z); vgl. Magnus 1974, 108.

83 Diese Bezeichnung wird hier (Poincaré VI, 239) erstmals gebraucht. Es liegt nahe, einen Zusammenhang zum Begriff „Fundamentalbereich" (domaine fondamental) herzustellen, welcher aus der Theorie der automorphen Funktionen bekannt war und den Poincaré in der Diskussion seines Beispiels 6 für D_0 (siehe oben) gebraucht (Poincaré VI, 238). Bezogen auf die Einführung von D_0 schreibt Poincaré:
„L'analogie avec la théorie des groupes fuchsiens est trop évidente pour qu'il soit nécessaire d'insister ;..." (Poincaré VI, 237)
Schließt man sich dieser Interpretation an, so gelangt man zu der Auffassung, daß die Ursprünge der Fundamentalgruppe letzlich in der Theorie der automorphen Funktionen zu finden sind. Eine ausführliche Diskussion dieser Zusammenhänge gibt Poincaré im 5. Komplement (Poincaré VI, 448-459).

84 Allerdings gibt Poincaré jetzt eine explizitere Beschreibung der Funktionen F_i durch Differentialgleichungen $dF_i = X_{i,1}\,dx_1 + X_{i,2}\,dx_2 + \ldots + X_{i,n}\,dx_n$, wobei $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ (V eine Mannigfaltigkeit, nach erster Art definiert) und $X_{i,j}$ gewöhnliche differenzierbare Funktionen von F_i und x_k darstellen, die bestimmten Integrabilitätsbedingungen genügen in einer genügend kleinen Umgebung von V (Poincaré VI; 240).

85 Wie wir gesehen haben (vgl. 2.2.3) wurde die Homotopie von (geschlossenen) Kurven im Rahmen topologischer Untersuchungen von C. Jordan 1866 eingeführt, der auch der Idee der Fundamentalgruppe nahekam, ohne sie allerdings explizit zu definieren. Während Poincaré die gruppentheoretischen Arbeiten

Sei M_0 ein Punkt der n-Mannigfaltigkeit V, welche nach erster Art definiert sein soll (M_0 übernimmt in etwa die Rolle eines Grundpunktes). Ist M_1 ein weiterer Punkt auf V, so betrachte man den Weg M_0BM_1 (B ein Zwischenpunkt), sowie den umgekehrt orientierten Weg M_1BM_0.[86] Setzt man diese zusammen, so erhält man einen „Stachel"[87] $M_0BM_1BM_0$. Durchläuft ein Punkt M einen solchen Stachel, so ändert das Funktionensystem F_i seinen Wert in M_0 (vor und nach Durchlaufen) nicht. Dagegen kann eine Änderung eintreten, wenn eine „Schleife" M_0BM_0 durchlaufen wird. Diese läßt sich wie gehabt als Substitution $F_i^0 \to F_i^1$ (F_i^0 Ausgangswert des Funktionssystems F_i in M_0, F_i^1 dessen Endwert daselbst) auffassen, was es Poincaré erlaubt, von einer Gruppe zu sprechen:

> „L'ensemble de toutes les substitutions que les fonctions F subiront ainsi, quand le point M décrira tous les contours fermés que l'on peut tracer sur la variété V en partant du point initial M_0, formera évidemment un groupe que j'appelle g."
>
> (Poincaré VI, 241)

Es folgt nun eine explizite Beschreibung der Fundamentalgruppe (es wird jetzt also eine zweite Definition gegeben, deren Äquivalenz zur ersten dann zu zeigen wäre - siehe unten) mit Hilfe von geschlossenen Wegen, wobei Poincaré mit der Nullhomotopie beginnt. Sei hierzu M_0BM_0 ein geschlossener Weg auf V: „Si ce contour fermé se réduit à un lacet, je conviendrai d'écrire $M_0BM_0 \equiv 0$." (Poincaré VI, 241)[87]
Die Formulierung „sich reduzieren",[88] die wir natürlich als „homotop sein" lesen, wird wenige Zeilen später von Poincaré dahingehend erläuternd, daß $M_0BM_0 \equiv 0$ dann und nur dann gelte, wenn der geschlossene Weg M_0BM_0 den vollständigen Rand eines zweidimensionalen Teiles von V bilde. In dieser Allgemeinheit (nullhomotop genau dann wenn nullhomolog) ist dies natürlich falsch (wie auch in Poincaré VI, 241 Anm. 1 vom Herausgeber bemerkt). Das einfachste Gegenbeispiel ist der Taillenschnitt q der Brezelfläche (vgl. auch Poincaré VI, 450f. oder Anmerkung 114 unten sowie Anm. 24 in Kapitel 2).

Dieser Fehler wird später vom Autor selbst richtiggestellt, indem er darauf hinweist, daß man modern gesprochen in der Mannigfaltigkeit ein Elementarflächenstück („une aire simplement connexe", Poincaré VI, 466) in einen Zykel einspannen können muß, um dessen Nullhomotopie garantieren zu können.[89]

Jordans - wie wir gesehen haben - in der Einleitung seiner „Analysis situs" erwähnt und deren Terminologie übernimmt, zitiert er die topologischen Betrachtungen Jordans an keiner Stelle.

86 Poincaré läßt in M_1 eine unendlich kleine „Schleife" zu, was auf die Werte des Funktionensystems F_i keinen Einfluß haben soll. Ein Punktweg tritt an dieser Stelle nicht auf. Im übrigen sagt Poincaré nicht, was ein Weg ist; dies wird als bekannt vorausgesetzt. (etwa im Sinne von „Kurve" in einer Mannigfaltigkeit in Analogie zur Differentialgeometrie).

87 Poincaré spricht von „lacet" (Poincaré VI, 240), was wörtlich etwa Haarnadelkurve bedeutet. Er unterscheidet dies sorgfältig von „contour fermé" (Poincaré VI, 240), was man mit „Schleife" übersetzen könnte und was heute als geschlossener Weg bezeichnet wird. Die „Stachel" übernehmen, wie wir gleich sehen werden, die Rolle der Punkt- oder konstanten Wege.

88 Zu Jordan vgl. man 2.2.3. Eine ähnliche Formulierung wie bei Jordan gibt Poincaré im 5. Komplement: „Considérons deux cycles K et K'; partant d'un même point M et y aboutissant, j'écrirai "l'équivalence„ K ≡ K' si l'on peut passer de l'un à l'autre par déformation continue et sans quitter la variété envisagée." (Poincaré VI, 449)

89 An der angegebenen Stelle aus dem 5. Komplement von 1904 geht es allgemeiner darum, die Äquivalenz zweier 1-Zykel im Sinne der Homotopie zu präzisieren. Wörtlich heißt es dort:

Bemerkenswert ist aus moderner Sicht weiter, daß Poincaré nicht etwa die Homotopieklasse des konstanten Weges in M_0 als neutrales Element der Fundamentalgruppe wählt, sondern die eines Stachels (welcher natürlich homotop zum konstanten Weg ist, weshalb man auf dem Niveau der Homotopieklassen schließlich doch dasselbe Resultat erhält). Schließlich sei noch angemerkt, daß Poincaré nie (weder in diesem noch in anderen Zusammenhängen) auf dem Niveau der Äquivalenzklassen arbeitet; er rechnet vielmehr immer mit den Äquivalenzen selbst.[90]

Der nächste Schritt besteht nun darin, die Verknüpfung von Wegen mit gleichem Anfangs- und Endpunkt einzuführen: Sind M_0AM_1, M_0BM_1 und M_0CM_1 drei Wege in V, die M_0 mit M_1 verbinden, so lassen sich diese paarweise zu geschlossenen Wegen zusammenfügen, die Poincaré folgendermaßen schreibt (M_1AM_0 ist der zu M_0AM_1 entgegengesetzt orientierte Weg):

$$M_0AM_1BM_0, M_0AM_1CM_0, M_0BM_1CM_0$$

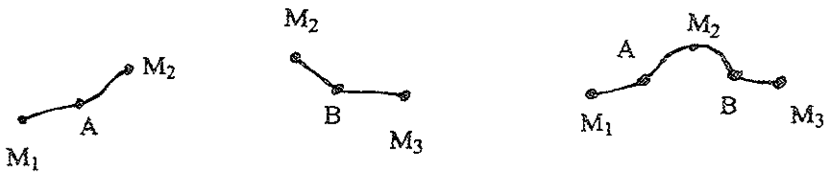
Anschaulicher ausgedrückt: Zwei Wege kann man aneinander hängen, wenn der Endpunkt des ersten gleich dem Anfangspunkt des zweiten ist.[91] Hat man Wege der obigen Art, so bilde man nach Poincaré folgende Äquivalenz:

„Quand nous écrivons C ≡ C' nous entendons que le point initial et final du cycle fermé C est le même que le point initial et final de C', et qu'il existe entre C et C' une aire simplement connexe dont la frontière complète est formée par C et C' en faisant varier C d'une manière continue de la façon que le cycle reste constamment formé d'une seule courbe fermée et que le point initial et final demeure invariable". (Poincaré VI, 465 f)

Man vergleiche auch die Diskussion dieses Problems in Poincaré VI, 450 f. Einen Überblick zur Entwicklung des Homotopiebegriffs bis etwa 1910 gibt Vanden Eynde 1992/93.

90 Eine Folge hiervon ist, daß er nie die Unabhängigkeit der vorgenommenen Definitionen von der speziellen Repräsentantenauswahl zeigt (z.B. bei der Definition der Verknüpfung von Wegen).

91 Diese etwas allgemeinere Konstruktion - das Ergebnis muß nicht unbedingt ein geschlossener Weg sein - wird auch von Poincaré selbst verwendet (etwa Poincaré VI, 243). Formal läßt sich das so schreiben: Aus M_1AM_2 und M_2BM_3 wird $M_1AM_2BM_3$ gebildet oder $M_1AM_2 + M_2BM_3 = M_1AM_2BM_3$.



Faßt man Wege modern als stetige Abbildungen $w: [a,b] \to V$ ($[a,b] \subset R$ ein abgeschlossenes, nichtleeres Intervall, V eine Mannigfaltigkeit, oder allgemeiner, ein topologischer Raum), so ergibt die Poincarésche Konstruktion das heute so genannte Produkt zweier Wege $w_1: [a_1,b_1] \to V$ und $w_2: [a_2,b_2] \to V$ mit disjunkten Definitionsbereichen oder $b_1 = a_2$, das nur für $w_1(b_1) = w_2(a_2)$ definiert ist:

$$(w_1 \cdot w_2)(t) = w_1(t),\ t \in [a_1,b_1] \text{ und } (w_1 \cdot w_2)(t) = w_2(t),\ t \in [a_2,b_2]$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit liegt es nahe, die Definitionsbereiche der Wege alle auf das Einheitsintervall zu normieren. Das kompliziert die Definition des Produktes insofern, als man umparametrisieren muß:

$$(w_1 \cdot w_2)(t) = w_1(2t),\ t \in [0,1/2] \text{ und } (w_1 \cdot w_2)(t) = w_2(2t-1),\ t \in [1/2,1]$$

$$M_0AM_1CM_0 \equiv M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0$$

Diese beruht natürlich darauf, daß sich die Wege M_1BM_0 und M_0BM_1 auf dem Homotopieniveau „wegkürzen":

$$M_1BM_0 + M_0BM_1 \equiv M_1BM_0BM_1 \equiv 0$$

($M_1BM_0BM_1$ ist ein „Stachel"; links steht die Zusammensetzung von Wegen, die allerdings in ihrer allgemeinen Form bei Poincaré nicht explizit definiert wird.)

Nun macht Poincaré zwei wichtige Bemerkungen (Poincaré VI, 241):

1. $M_0AM_1CM_0$ ist zu unterscheiden von $M_0CM_1AM_0$ (Wege sind orientiert);
2. man darf in einer Summe von Wegen die Reihenfolge der Summanden nicht vertauschen.[92]

In Analogie zu den früher eingeführten Homologien kann man jetzt Äquivalenzen im Sinne der Homotopie wie

$$k_1C_1 + k_2C_2 \equiv k_3C_3 + k_4C_4$$

betrachten, wobei die C_i geschlossene Wege im Grundpunkt M_0 sein sollen und k_iC_i die $|k_i|$-fache Durchlaufung von C_i (bei negativem Vorzeichen von C_i^{-1}) bedeutet. Dabei ist $k_i \in Z$ .Man darf solche Äquivalenzen unter Berücksichtigung der Reihenfolge der Summanden addieren; aus $2A \equiv 0$ folgt aber nicht notwendig $A \equiv 0$.[93] Schließlich gelangt Poincaré zu einer zweiten Definition der Fundamentalgruppe:

> „..., il est clair que l'on peut imaginer un groupe G satisfaisant aux conditions suivantes: 1° A chaque contour fermé M_0BM_0 correspondra une substitution S du groupe; 2° La condition necessaire et suffisante pour que S se reduise à la substitution identique, c'est que $M_0BM_0 \equiv 0$. 3° Si S et S' correspondent aux contours C et C' et si $C'' \equiv C + C'$ la substitution correspondant à C" sera SS'. Le groupe G s'appellera le groupe fondamentale de la variété V."
>
> (Poincaré VI, 242)

Es ist vom modernen Standpunkt vielleicht befremdend, daß Poincaré hier nicht direkt von der Gruppenstruktur spricht, die man der Menge der Homotopieklassen geschlossener

Führt man weiter die Homotopie als Beziehung zwischen Abbildungen, insbesondere zwischen Wegen, ein, so liefert die geschilderte Vorgehensweise (auf dem Homotopieniveau ist ja jeder Weg invertrierbar) das sogenannte Fundamentalgruppoid. Erzwingt man dadurch, daß man geschlossene Wege zu einem festen Grundpunkt betrachtet, die generelle Zusammensetzbarkeit, so liefert dies die Fundamentalgruppe im modernen Sinne. Im übrigen fassen schon Seifert/Threlfall Wege als Abbildungen auf (Seifert/Threlfall 1934, 149), wobei allerdings das Ziel der Abbildung bei ihnen immer ein Komplex - also ein recht spezieller topologischer Raum - ist. Das Fundamentalgruppoid ist eine relativ moderne Errungenschaft; es wurde 1963 von Crowell und Fox beschrieben (Crowell/Fox 1963, 15-21) und 1968 von Ronald Brown populär gemacht (Brown 1968). Der Gruppoidbegriff selbst findet sich - allerdings im algebraischen, natürlich nicht im kategorietheoretischen Kontext - bereits bei H. Brandt 1927 (Brandt 1927) und dann bei Reidemeister 1932, 27f.
Die Aufarbeitung der technischen Präzisierung des Homotopiebegriffes nach Poincaré bleibt trotz einiger Ansätze bei Vanden Eynde 1992/93 weitgehend ein Desiderat (vgl. Henn/Puppe 1990, 683).

92 Deshalb zieht man es heute vor, von Produkten zu sprechen. Diesem Brauch werden wir uns im folgenden weitgehend anschließen.

93 Das wohl einfachste Beispiel hierfür liefert eine die Fundamentalgruppe der reellen projektiven Ebene erzeugende Homotopieklasse (eines geschlossenen Weges) [w]. Für diese gilt (modern) $[w] \cdot [w] = 1$ aber $[w] \neq 1$. Poincaré schreibt das additiv ohne Benutzung von Klassen. Vgl. etwa Massey 1989, 130 f.
Es ist bemerkenswert, daß Poincaré das Phänomen der Torsion im Zusammenhang mit der Homotopie bereits 1895 sieht, während er dies bei der Homologie erst später erkannte. Belege für Torsionselemente in der Fundamentalgruppe findet Poincaré selbst in seinen Beispielen 3, 4 und 5 (siehe unten).

Wege zu einem festen Grundpunkt geben kann - zumal, da er diese ja schon explizit entwickelt hat. Andererseits sind die hier erwähnten Substitutionen nicht notwendig jene, die bei der ersten Definition der Fundamentalgruppe aufgetreten sind. Folglich muß man sie als eine Art von Hilfskonstruktion, die inhaltlich vollkommen unbestimmt bleibt, auffassen, welche der Verfasser an dieser Stelle benötigt, weil er noch nicht über den abstrakten Gruppenbegriff verfügt, das heißt, weil es für ihn nur Gruppen gibt, deren Elemente Substitutionen sind (vgl. auch Scholz 1980, 313). Diese Interpretation wird durch die Ausdrucksweise "sich vorstellen" (s'imaginer) gestützt, die bekanntlich schon R. Descartes im Zusammenhang mit den komplexen Wurzel einer Gleichung verwandte, um eine gewisse ontologische Abstufung zum Ausdruck zu bringen (Descartes 1981, 81).

Damit liegt natürlich die Frage auf der Hand, wie sich die beiden Definitionen der Fundamentalgruppe zueinander verhalten. Poincaré's Antwort hierauf lautet: Die beiden Gruppen g (erste Definition mit Hilfe der Funktionen) und G (zweite Definition durch Homotopie von Wegen) lassen sich immer homomorph aufeinander abbilden. Dieser Homomorphismus kann ein Isomorphismus sein; er ist nur ein Epimorphismus von G auf g, wenn es einen nicht-nullhomotopen Weg M_0BM_0 gibt, der das Funktionensystem zu seinen ursprünglichen Werten zurückführt.

Um den Zusammenhang zwischen g und G einer Mannigfaltigkeit V zu studieren, empfiehlt es sich mit der universellen Überlagerung $\tilde{V}$ von V zu arbeiten.[94] Das im Sinne der ersten Definition der Fundamentalgruppe gegebene Funktionensystem $(F_1,...,F_p)$ läßt sich dann hochheben zu einem Funktionensystem

$$\left(\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_p\right)$$

auf $\tilde{V}$, wobei die einzelnen Funktionen einwertig - also Funktionen im eigentlichen Sinn - sein werden. Da die Überlagerung universell sein soll, sind die Fundamentalgruppe $\pi_1(V)$ - im modernen Sinn, welcher hier mit dem zweiten Poincaré'schen gleich gesetzt wird - und die Decktransformationsgruppe D von $\tilde{V}$ isomorph. Weiter entsprechen die Substitutionen, die das Funktionssystem $(F_1,...,F_p)$ durch geschlossene Wege in V erleidet, vermöge Hochhebung Substitutionen im Funktionensystem

$$\left(\tilde{F}_1,\ldots,\tilde{F}_p\right),$$

die durch die Decktransformationen in der Faser

$$\{q^{-1}(x_0)\}$$

des Anfangs - gleich Endpunktes der geschlossenen Wege in V induziert werden.

Die Abbildungen F und $\tilde{F}$ induzieren Homomorphismen $F_*:\pi_1(V,x_0) \to g$ beziehungsweise $\tilde{F}_*: D \to g$ wie folgt:

$$F_*([w]) := \begin{pmatrix} F(w(0)) \\ F(w(1)) \end{pmatrix},\ F_*(d) = \begin{pmatrix} \tilde{F}(x_0^1) \\ \tilde{F}(d(x_0^1)) \end{pmatrix}$$

94 Ist X ein topologischer Raum, der wegweise, lokal wegweise und semi-lokal einfach-zusammenhängend ist, so existiert dessen universelle Überlagerung (Schubert 1971, 229). Wir unterstellen also, daß Poincaré's Mannigfaltigkeiten diese Eigenschaften besitzen.

wobei $x_0^1 \in \{q^{-1}(x_0)\}$ ein beliebiger, aber dann festzuhaltender Punkt und $d \in D$ sein soll. Weiter bezeichne $\begin{pmatrix} F(\ldots) \\ F(\ldots) \end{pmatrix}$ die „Substitutionen", die das erste Werte-p-tupel in das zweite überführt.

Eine Schwierigkeit hierbei besteht darin, daß F_* für Homotopieklassen von Wegen definiert ist. Zu zeigen ist somit, daß zwei homotope geschlossene Wege unter F_* dieselbe Substitution liefern. Dies kann man durch Hochheben lösen, da auf der Stufe der universellen Überlagerung der Homotopieklasse eines geschlossenen Weges in der Basis eine und nur eine Decktransformation entspricht.

Wann sind F_* und $\tilde{F}_*$ Isomorphismen? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zuerst das Problem der Monomorphie.

Angenommen wir haben $F_*([w]) = F_*([v])$ mit $[w] \neq [v]$. Das bedeutet die Gleichheit der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} F(w(0)) \\ F(w(1)) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} F(v(0)) \\ F(v(1)) \end{pmatrix},$$

welche ihrerseits äquivalent ist zu den Gleichungen $F(w(0)) = F(v(0))$ und $F(w(1)) = F(v(1))$..

Während erstere stets als erfüllt betrachtet werden kann, bedeutet letztere, daß die Werte von F nach Durchlaufen der Wege w und v übereinstimmen, ohne daß diese Wege homotop wären. Das aber heißt, daß das Funktionensystem F im Punkte x_0 (= w(0) = v(0) = w(1) = v(1)) nicht genügend verschiedene Werte annimmt, um die unterschiedlichen Homotopieklassen geschlossener Wege zum Grundpunkt x_0 zu trennen. Wir erhalten somit folgende Bedingung für die Monomorphie von F_*:

F muß in x_0 mindestens so viele verschiedene Werte annehmen, wie es Homotopieklassen von geschlossenen Wegen zum Grundpunkt x_0 gibt.

[Dabei kann der Fall abzählbar unendlich vieler Homotopieklassen durchaus auftreten.]

Analog ergibt sich für die Epimorphie eine gleichlautende Bedingung mit „höchstens" anstelle von „mindestens". Hebt man das Problem in die universelle Überlagerung hoch, so liefern analoge Überlegungen die Bedingung für Injektivität

$$\tilde{F}_*\left(d_w(x_0^1)\right) \neq \tilde{F}_*\left(d_v(x_0^1)\right),$$

wobei d_w beziehungsweise d_v die zu [w] und [v] gehörigen Transformationen in $\{q^{-1}(x_0)\}$ sein sollen. Gilt $[w] \neq [v]$, so auch $d_w \neq d_v$. Soll $\tilde{F}_*$ ein Monomorphismus sein, muß folglich $F(d_w(x_0^1)) \neq F(d_v(x_0^1))$ gelten. Dies kann man beispielsweise durch die Forderung garantieren, daß

$$\tilde{F} \,|\, \{q^{-1}(x_0)\}$$

injektiv sein soll.

Insgesamt bestätigen also unsere Überlegungen in gewisser Hinsicht die Ergebnisse Poincaré's: Man erhält einen Isomorphismus zwischen der Fundamentalgruppe von V - aufgefaßt im Sinne der zweiten Definition als Menge von Homotopieklassen geschlossener Wege - und der „Substitutionengruppe" - also der Fundamentalgruppe im Sinne der Definition eins -, vorausgesetzt, man findet ein Funktionensystem, das an der Stelle x_0 genügend verschiedene Werte annehmen kann (nämlich genau so viele, wie es Homotopieklas-

sen geschlossener Wege gibt). Die Existenz eines solchen Systems und die Frage, wie man es gegebenenfalls findet, bleibt bei Poincaré offen.[95]

Der nachfolgende Paragraph 13 ist der Berechnung von Fundamentalgruppen gewidmet. Dabei geht Poincaré davon aus, daß Fundamentalgruppen stets (modern gesprochen) endlich erzeugt sind,[96] wobei die Erzeugenden durch Relationen miteinander verknüpft sein können. Auch hier unterscheidet er streng zwischen geschlossenen Wegen C_1, C_2, C_3 und C_4 (alle zum selben Grundpunkt) und Substitutionen. Gilt zwischen C_1, C_2, C_3 und C_4 die Äquivalenz $k_1C_1 + k_2C_2 + k_3C_3 + k_4C_4 \equiv 0$, so bedeutet dies, daß die zugehörigen Substitutionen

$$S_1^{k_1}, S_2^{k_2}, S_3^{k_3} \text{ und } S_4^{k_4}$$

als Hintereinanderausführung

$$S_4^{k_4} \circ \ldots \circ S_1^{k_1}$$

die identische Substitution darstellen.[97] Diejenigen geschlossenen Wege, deren Homotopieklassen die Erzeugenden der Fundamentalgruppe - die ja Substitutionen sind - liefern, heißen bei Poincaré „geschlossene Fundamentalwege",[98] deren Äquivalenzen sind die „Fundamentaläquivalenzen".[99] Nun gilt: „Les équivalences fondamentales nous font donc connaître la forme du groupe G." (Poincaré VI, 243)

Wie wir im weiteren sehen werden, ist die Darstellung einer Gruppe vermöge Erzeugende und Relationen - die im wesentlichen auf W. Dyck (1882) zurückgeht (vgl. Chandler - Magnus 1982, 5-10), in Ansätzen im Falle der Fundamentalgruppe aber auch schon bei Jordan 1866a und im Falle von Fuchsschen Gruppen 1881 bei Poincaré (Poincaré II, 108-168) zu finden ist - nicht so unproblematisch, wie Poincaré's Äußerung vielleicht suggeriert: Zwar wird eine Gruppe auf diese Art und Weise eindeutig festgelegt, es ist aber i.a.

95 Nach unseren Überlegungen ist es naheliegend, das Problem für die Abbildung $\tilde{F}$ zu lösen und dann mit dessen Hilfe die mehrwertige Abbildung F zu konstruieren (als Werte für F in x_0 nehme man alle Werte von $\tilde{F}$ in $\{q^{-1}(x_0)\}$. Eine die Punkte in $\{q^{-1}(x_0)\}$ trennende Funktion anzugeben, ist nicht schwierig, wenn man davon ausgeht, daß sich $\tilde{V}$ in einen geeigneten R^n einbetten läßt: Dann nehme man für F einfach die Koordinaten der Punkte in $\{q^{-1}(x_0)\}$. Allerdings muß dies ja nach Poincaré zu einem System F von reell-analytischen Funktionen führen, was erhebliche Zusatzüberlegungen fordert. Letztlich braucht man somit Einbettungssätze für Mannigfaltigkeiten, welche für differenzierbare Mannigfaltigkeiten von H. Whitney (Whitney 1936) und - unter Berücksichtigung der Bedingung reell-analytisch - von H. Grauert (Grauert 1958) bewiesen worden sind (vgl. auch Koch/Puppe 1968,95).

96 Für Mannigfaltigkeiten ist das in der Tat der Fall.

97 Für die geschlossenen Wege sieht die moderne Schreibweise so aus:

$$C_1^{k_1} \cdot C_2^{k_2} \cdot C_3^{k_3} \cdot C_4^{k_4} = 1$$

Poincaré kehrt im übrigen die Reihenfolge der Substitutionen im Produkt um. Im folgenden schreiben für die Relationen (Relatoren) zwischen den Erzeugenden der Fundamentalgruppe gelegentlich auch so:

$$C_1^{k_1} \cdot C_2^{k_2} \cdot C_3^{k_3} \cdot C_4^{k_4}$$

98 „contours fermés fondamentaux" (Poincaré VI, 242). Jordan sprach von „contours élémentaires" (vgl. 2.2.3).

99 „équivalences fondamentaux" (Poincaré VI, 243)

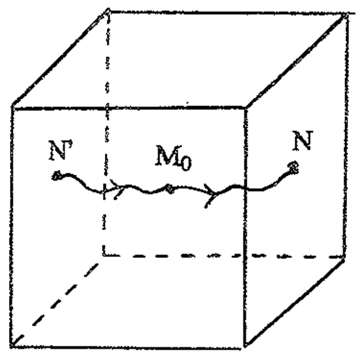
nicht möglich, algorithmisch herauszufinden, ob zwei vorgelegte Darstellungen dieselbe Gruppe definieren.[100]

Anschließend erläutert Poincaré, wie man aus den Identifikationsschemata des Paragraphen 10 Fundamentalwege und Äquivalenzen gewinnen kann. Um die Darstellung nicht unnötig zu komplizieren, wollen wir im folgenden in moderner Weise die Wegeklassen selbst - und nicht mehr die Substitutionen - als Elemente der Fundamentalgruppe auffassen.

Es sei also ein Polyeder P nebst Identifikationsvorschriften gegeben, das die Mannigfaltigkeit V liefern soll. Man wähle im Innern von P den Grundpunkt M_0. Welche geschlossene Wege zu diesem Grundpunkt kann es in der aus P hervorgehenden Mannigfaltigkeit V geben?

- Einmal gibt es geschlossene Wege zu M_0, die ganz im Innern von P verlaufen. Diese sind offensichtlich auch in V alle nullhomotop.
- Man kann aber auch von M_0 zu einem Punkt N laufen, der zu einer Seitenfläche von P gehört. Dann suche man eine Fläche, die mit der fraglichen zu identifizieren ist,[101] und darin den Punkt N', der zu N gehört. Kehrt man nun durchs Innere von P von N' nach M_0 zurück, so hat man in V einen geschlossenen Weg durchlaufen.

(geschlossener Weg im Falle des Torus T^3: die Seitenflächen sind paarweise zu identifizieren - vgl. Beispiel 1 von Poincaré)

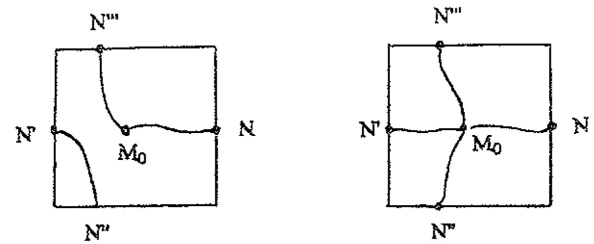


Nun behauptet Poincaré: „Il y aura donc autant de contours fondamentaux que de paires de faces." (Poincaré VI, 243) Hierbei macht er stillschweigend davon Gebrauch, daß es nur

[100] Das ist das sogenannte Wortproblem. Auf seiner Unlösbarkeit im allgemeinen beruht die von A.A. Markov 1958 gezeigte Unlösbarkeit (im Sinne eines Algorithmus) des Hoöomorphieproblems bei vier- und mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Eine ausführliche Diskussion hiervon findet man in Stillwell 1993, Kapitel 9.

[101] Man bemerkt, daß Poincaré hier unterstellt, daß die Mannigfaltigkeit V geschlossen ist (denn sonst gibt es „ freie " Seitenflächen, weshalb die Vorgehensweise zu modifizieren ist).

auf die Homotopieklassen, nicht aber auf die Wege selbst ankommt. Ein geschlossener, nicht-nullhomotoper Weg in V liegt ja auch dann vor, wenn man von N' zu einem Punkt N'' in einer Seitenfläche übergeht, von diesem zu seinem Pendant N''' und so weiter. Schließlich kehrt man nach M_0 zurück.



Derartige geschlossene Wege kann man aber so homotop abändern, daß man ein Produkt von Wegen der einfacheren Art erhält (siehe Skizze).[102]

Wie nun findet man die Relationen zwischen den Fundamentalwegen? Zu diesem Zweck muß man die Kantenzykel heranziehen. Ist eine Kante Durchschnitt der Flächen F_i und F_j, so schreibt Poincaré diese als F_iF_j. Man beginne mit einer Kante F_1F_μ'. Es sei F_1' eine Seite, die mit F_1 identifiziert werde, und F_2F_1' die F_1F_μ entsprechende Kante. Weiter sei F_2' die Seite, die mit F_2 äquivalent ist, und $F_2'F_3$ die F_2F_1 entsprechende Kante. So fahre man fort, bis man zu F_1F_μ' zurückkommt. Bezeichnet man nun geschlossene Wege der Form $M_0N_i + N_i'M_0$ mit C_i (N_i ist ein Punkt auf einer Kante in der Seitenfläche F_i, N_i' der zu diesem konjugierte in F_i'), so liefert die obige Überlegung die Fundamentaläquivalenz (Relation):

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_m \equiv 0$$ [103]

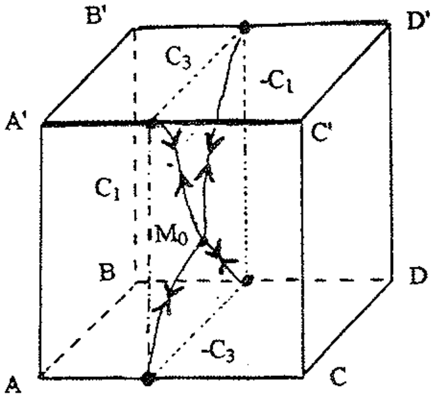
($C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m = 1$ in moderner Schreibweise, wobei die C_i aber Wegeklassen sind)

Der Zusammenhang zur eindimensionalen Homologie ergibt sich - dies teilt Poincaré ohne jede weitere Begründung mit (Poincaré VI, 243) - indem man in den Fundamentaläquivalenzen abelsch rechnet.[104]

[102] Das Gesagte gilt natürlich nur im Falle, daß V aus einem Polyeder durch Identifikation hervorgeht. Die allgemeine Situation bei 3-Mannigfaltigkeiten ist - wie wir sehen werden - ganz erheblich komplizierter.

[103] Der Grund hierfür ist, daß diese Wege ein zweidimensionales Elementarflächenstück beranden.
Dies wird deutlicher, wenn man den Grundpunkt M_o abweichend von Poincaré in eine Ecke des Polyeders legt, da dann die Hilfswege M_oN und NM_o entfallen. Die Relationen entsprechen dann Kanten, die unter Berücksichtigung der Identifizierungen Seitenflächen beranden (vgl. Stillwell 1993, 136 f - dessen Behauptungen über die Aussagen Poincaré's allerdings moderne Interpretationen sind).

[104] Modern heißt das, daß gilt $H_1(V) \cong \pi_1(V)/[\pi_1(V),\pi_1(V)]$, wobei $[\pi_1(V),\pi_1(V)]$ die Kommentatoruntergruppe ist.



(Fundamentaläquivalenz beim 3-Torus: $C_1 + C_3 - C_1 - C_3 \equiv 0$. Die Mitglieder des entsprechenden Kantenzykels sind dich ausgezogen.)

Dahinter dürfte die von uns schon weiter oben bemerkte Einsicht gestanden haben, daß ein nullhomotoper geschlossener Weg „erst recht" nullhomolog ist, wobei es bei den Homologien - von Poincaré als formale Summen aufgefaßt - nicht auf die Reihenfolge der Summanden - von einer solchen zu sprechen, hat in dem fraglichen Kontext eigentlich gar keinen Sinn - ankommt.[105]

Auf diesem Hintergrund ist Poincaré nun in der Lage, die Fundamentalgruppen sowie die Betti-Zahlen seiner Beispiele zu berechnen.

Beispiel 1: Die auszuführenden Identifikationen - die den Torus T^3 liefern - lauten hier:

$$(C_1)\ ABDC \equiv A'B'D'C'$$
$$(C_2)\ ABB'A' \equiv CDD'C'$$
$$(C_3)\ ACC'A' \equiv BDD'B'$$

Dies wird von Poincaré folgendermaßen erläutert:Diese besagen, daß alle drei Erzeugenden der Fundamentalgruppe miteinander kommutieren und daß diese folglich abelsch ist. In moderner Schreibweise lautet das Ergebnis:

[105] Nimmt man Poincaré's Homologiebegriff aber sensu stricto, so wäre zu zeigen, daß ein nullhomotoper geschlossener Weg stets eine 2-Untermannigfaltigkeit - und nicht bloß ein gewöhnliches Flächenstück - vollständig berandet. Dies ist aber unproblematisch, da man ja sogar ein Elementarflächenstück in dem fraglichen Weg einspannen kann. Wesentlich problematischer ist hingegen die weitere (stillschweigende) Annahme, daß die beteiligten geschlossenen Wege eindimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeiten seien, wie das ja Poincaré's Homologie (= Bordanz-)begriff eigentlich erfordert ist. Hier scheint er doch sehr großzügig gewesen zu sein (oder sich die Wege sehr „ zahm " vorgestellt haben).

$$\pi_1(T^3) \cong H_1(T^3) \cong Z \oplus Z \oplus Z$$

Die Betti-Zahlen im Sinne Poincaré's sind demnach[106] : $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$.

Beispiel 3: (Das zweite Beispiel wird übergangen, weil es keine Mannigfaltigkeit liefert.) Die Kantenzykel mit den zugehörigen Identifikationen lauten hier[107]

$$AB \overset{C_1}{\equiv} B'D' \overset{C_3^{-1}}{\equiv} C'C \overset{C_2^{-1}}{\equiv} AB$$
$$AA' \overset{C_2}{\equiv} C'D' \overset{C_1^{-1}}{\equiv} DB \overset{C_3^{-1}}{\equiv} AA'$$
$$AC \overset{C_3}{\equiv} DD' \overset{C_2^{-1}}{\equiv} B'A' \overset{C_1^{-1}}{\equiv} AC$$
$$CD \overset{C_1}{\equiv} A'C' \overset{C_3}{\equiv} B'B \overset{C_2}{\equiv} CD$$ [108]

Die entsprechenden Relationen sehen so aus:

$$C_1 C_3^{-1} C_2^{-1} = 1$$
$$C_2 C_1^{-1} C_3^{-1} = 1$$
$$C_3 C_2^{-1} C_1^{-1} = 1$$
$$C_1 C_3 C_2 \ = 1$$

Diese lassen sich umformen zu den Relationen

$$C_1^4 = 1, C_1^2 C_2^{-2} = 1 \text{ und } C_1^2 C_3^{-2} = 1$$

(bei Poincaré: $4C_1 \equiv 0$ bzw. $2C_1 \equiv 2C_2 \equiv 2C_3$).

Anschaulich bedeutet das, daß der Weg C_1 selbst zwar nicht nullhomotop ist, wohl aber sein vierfaches Produkt mit sich selbst. Folglich tritt hier das Phänomen der Torsion auf. Rechnet man dagegen in den Relationen kommutativ, so ergibt sich, daß alle drei C_i homolog abhängig sind.[109] Folglich gilt $\beta_1 = 1$ und damit nach dem Dualitätssatz $\beta_2 = 1$.

Da im vorliegenden Fall die drei Erzeugenden der Fundamentalgruppe von endlicher Ordnung sind, kann man diese explizit angeben. Man findet:

[106] Hier verwendet Poincaré stillschweigend den Dualitätssatz.

[107] C_1 beziehe sich im folgenden auf die Fläche ABDC, C_2 auf ABB'A' und C_3 auf ACC'A' (solange vom Würfel ausgegangen wird).

[108] Bei der Einführung dieses Beispieles verwendet Poincaré hier einen anderen Kantenzykel nämlich CD ≡ BB' ≡ A'C' (vgl. auch Poincaré VI, 352).

[109] An dieser Stelle beginnt Poincaré bemerkenswerterweise zwischen Äquivalenzen bezüglich Homotopie und bezüglich Homologie auch notationell zu unterscheiden. Bezüglich der ersteren schreibt er jetzt z.B. $4C_1 \equiv 0$, bezüglich der letzteren $C_1 \sim 0$.
Poincaré benutzt an dieser Stelle das, was er später in der Auseinandersetzung mit P. Heegard „Homologie mit Division„ nennen wird (Poincaré VI, 363), das heißt, er schließt aus $4C_1 \sim 0$ auf $C_1 \sim 0$ (aber nicht von $4C_1 \equiv 0$ auf $C_1 \equiv 0$). Im zweiten Komplement stellt er dann mit Hilfe der Inzidenzmatrizen fest, daß die Mannigfaltigkeit aus Beispiel 3 in der Dimension 1 zwei Torsionskoeffizienten vom Wert 2 besitzt. (Poincaré VI, 353).
Modern ausgedrückt gilt somit $H_1(V) \cong Z_2 \oplus Z_2$ (da V orientierbar ist, gibt es in der Dimension 2 keine Torsion!).

$$\pi_1(V) = \left\{1, C_1, C_2, C_3, C_1^2, C_1^3, C_2^3, C_3^3\right\}$$

Die solcherart beschriebene Gruppe läßt sich geometrisch deuten durch Transformationen des R^4, welche den Hyperwürfel $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ in sich abbilden. Diese Transformationen sind:

$$\begin{array}{rll}
(x,y,z,t) & \mapsto (-y,x,-t,z) & \text{entspricht } C_1 \\
& \mapsto (-t,-z,y,x) & \text{entspricht } C_2 \\
& \mapsto (z,-t,-x,y) & \text{entspricht } C_3 \\
& \mapsto (-x,-y,-z,-t) & \text{entspricht } C_1^2 \\
& \mapsto (y,-x,t,-z) & \text{entspricht } C_1^3 \\
& \mapsto (t,z,-y,-x) & \text{entspricht } C_2^3 \\
& \mapsto (-z,t,x,-y) & \text{entspricht } C_3^3
\end{array}$$

sowie die Identität $(x,y,z,t) \mapsto (x,y,z,t)$. Diese Gruppe nennt Poincaré die „hyperkubische Gruppe".

Das geschilderte Beispiel[110] macht bereits deutlich, worauf Poincaré selbst auch explizit hinweist (Poincaré VI, 257), daß die Verhältnisse bei geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten anders liegen als bei ihren zweidimensionalen Entsprechungen. Bei den ersteren treten nämlich endliche, aber nicht-zyklische Fundamentalgruppen auf, bei letzteren nicht. Anders gesagt ergeben sich bei geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mehr Gruppen als Fundamentalgruppen als im zweidimensionalen Fall.

Insbesondere ist die 2-Sphäre die einzige zusammenhängende orientierbare geschlossene Fläche mit endlicher - sprich: trivialer - Fundamentalgruppe, eine Auszeichnung, welche ihrem dreidimensionalen Analogon nicht mehr zukommt (was schon der Quaternionenraum, wie man später Poincaré's drittes Beispiel aus naheliegenden Gründen genannt hat, beweist). Man bemerkt, daß hier bereits Poincaré's berühmte Vermutung anklingt.

Die bekannte Tatsache, daß sich die Quaternionengruppe als Deckabbildungsgruppe des 4-Würfels interpretieren läßt, deutet darauf hin, daß der Quaternionenraum in einer Beziehung zur S^3 stehen sollte. Dies wurde in der Tat von W. Threlfall und H. Seifert 1931 nachgewiesen: Der Quaternionenraum läßt sich als Fundamentalbereich einer Untergruppe der Bewegung der S^3 gewinnen (vgl. 5.2).

Beispiel 4: In diesem Beispiel gibt es drei Kantenzykel und folglich drei Relationen für die drei Erzeugenden C_1, C_2, C_3 der Fundamentalgruppe (vgl. Poincaré VI, 245):[111]

[110] Stellt man die Gruppentafeln auf, so erkennt man, daß $\pi_1(V)$ und die „hyperkubische Gruppe" („groupe hypercubique"; Poincaré VI, 245) beide isomorph zur Quaternionengruppe Q, also zu einer nicht-abelschen Untergruppe von GL(2, C), sind. Das erklärt insbesondere die geometrische Bedeutung der hyperkubischen Gruppe als Drehungen, die den vierdimensionalen reellen Würfel (oder den zweidimensionalen komplexen) in sich überführen.

$$C_2\, C_3 C_2^{-1} C_3^{-1} = 1$$
$$C_3\, C_1 C_2^{-1} C_1^{-1} = 1$$
$$C_2^{-1} C_1^{-1} C_3^{-1} C_1 = 1$$

„Voici ce que j'entends par la notation (C_1) ABDC ≡ A'B'D'C'.

Je veux dire que la face ABDC est conjugée de A'B'D'C' et que α désignant un point de ABDC et α' un point de A'B'D'C', le contour fondamental $M_0\alpha + \alpha' M_0$ est désigné par C_1."

(Poincaré VI, 244)

Die von Poincaré angegebenen Fundmentaläquivalenzen (= Relationen zwischen den Erzeugenden der Fundamentalgruppe) findet man am einfachsten, indem man die Kantenzykel sowie die entsprechenden Identifikationen (die ebenfalls als C_i geschrieben werden) notiert:

$$AC \overset{C_3}{\equiv} BD \overset{C_1}{\equiv} B'D' \overset{C_3^{-1}}{\equiv} A'C' \overset{C_1^{-1}}{\equiv} AC$$
$$AA' \overset{C_2}{\equiv} CC' \overset{C_3}{\equiv} DD' \overset{C_2^{-1}}{\equiv} BB' \overset{C_3^{-1}}{\equiv} AA'$$
$$AB \overset{C_2}{\equiv} CD \overset{C_1}{\equiv} C'D' \overset{C_2^{-1}}{\equiv} A'B' \overset{C_1^{-1}}{\equiv} AB$$

(Man beachte, daß die Identifikationen einen „Richtungssinn" aufweisen: C_2 identifiziert Vorder- und Hinterfläche, C_2^{-1} Hinter- und Vorderfläche. Abweichend von Poincaré schreiben wir die Fundamentalrelationen multiplikativ.)

Man erhält so die drei Relationen (in moderner Schreibweise):

$$C_2 \cdot C_1 \cdot C_2^{-1} \cdot C_1^{-1} = 1$$
$$C_3 \cdot C_2 \cdot C_3^{-1} \cdot C_2^{-1} = 1$$
$$C_3 \cdot C_1 \cdot C_3^{-1} \cdot C_1^{-1} = 1$$

Bezeichnet man wie üblich die Matrizen $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & i\\-i & 0\end{pmatrix}$ mit e, i, j und k, so gelten zwischen $\pi_1(V)$ und Q folgende Zuordnungen:

$$1 \to e,\ C_1 \to i,\ C_2 \to j,\ C_3 \to k,\ C_1^2 \to -e,\ C_1^3 \to -i,\ C_2^3 \to -j,\ C_3^3 \to -k\ .$$

Macht man Q abelsch, so erhält man eine Kleinsche Vierergruppe, in Übereinstimmung mit den beiden Torsionskoeffizienten 2, die Poincaré später ermittelt.

[111] Die entsprechenden Kantenzykel weichen teilweise von der ursprünglich angegebenen Form ab; sie lauten:

$$AA' \overset{C_2}{\equiv} CC' \overset{C_3}{\equiv} DD' \overset{C_2^{-1}}{\equiv} BB' \overset{C_3^{-1}}{\equiv} AA'$$
$$AC \overset{C_3}{\equiv} BD \overset{C_1}{\equiv} D'C' \overset{C_2^{-1}}{\equiv} B'A' \overset{C_1^{-1}}{\equiv} AC$$
$$CD \overset{C_2^{-1}}{\equiv} AB \overset{C_1}{\equiv} B'D' \overset{C_3^{-1}}{\equiv} A'C' \overset{C_1^{-1}}{\equiv} CD$$

Aus diesen ergibt sich, daß es (im Falle der „Homologie mit Division") einen homolog unabhängigen Zykel gibt; folglich gilt (Dualitätssatz vorausgesetzt):

$$\beta_1 = \beta_2 = 2^{112}$$

Eine explizitere Charakterisierung der Fundamentalgruppe wird bei Poincaré nicht gegeben; es scheint auch schwierig zu sein, eine einfache zu finden. Eine allgemeine Darstellung liefert aber Beispiel 6, weil 4 hiervon ein Spezialfall ist.

Beispiel 5: Im Unterschied zu den vorangegangenen Beispielen ergibt sich diese Mannigfaltigkeit - die, wie wir bereits erkannt haben, homoömorph dem reellen projektiven Raum P_3R ist - durch Identifikationen aus dem Oktaeder. Entsprechend den sechs Kantenzyklen erhält man die sechs Relationen

$$C_1C_4^{-1}, C_1C_3^{-1}, C_2C_1^{-1}, C_2C_1^{-1}, C_2C_3^{-1}, C_3C_4^{-1} = 1.$$

Hieraus erkennt man, daß alle Erzeugenden äquivalent sind und daß es nur eine nichttriviale Relation, sagen wir $C_1{}^2 = 1$, gibt. Folglich handelt es sich bei $\pi_1(V)$ um eine Gruppe mit einer Erzeugenden C_1 und der Relation $C_1{}^2 = 1$, also ist $\pi_1(V) \cong Z_2$. Die erste Betti-Zahl ist somit 1[113], aufgrund des Dualitätssatzes (P_3R ist orientierbar) ist dann auch $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Beispiel 6: Dieses ging wieder vom Würfel aus, wurde allerdings mit Hilfe von Abbildungen definiert (nämlich - modern ausgedrückt - als Unterlagerung des R^3).. Die von den drei definierenden Transformationen

$$\begin{aligned}&(x,y,z) \to (x+1,y,z)\\&(x,y,z) \to (x,y+1,z) \qquad\qquad \left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL(2,Z)\right)\\&(x,y,z) \to (\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, z+1)\end{aligned}$$

erzeugte Untergruppe der affinen Gruppe des R^3 wird von Poincaré mit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ bezeichnet. (Um Mißverständnisse zu vermeiden, werden wir diese als $D(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ oder kurz als D notieren; die zugehörige Matrix werde mit M bezeichnet).

Poincaré beginnt die Diskussion des sechsten Beispiels mit der folgenden konsequenzenreichen Bemerkung, für die er allerdings keinen Beweis gibt:

„Le groupe G [das ist die Fundamentalgruppe im Sinne der zweiten Definition] est évidemment holomorphe au groupe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$."

(Poincaré VI, 246)

Modern formuliert heißt das, daß die Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung einer Mannigfaltigkeit isomorph zur Fundamentalgruppe eben dieser Mannigfaltigkeit ist.[114]

[112] Im zweiten Komplement (Poincaré VI, 253) stellt sich heraus, daß auch hier in der Dimension 1 ein Torsionskoeffizient vorhanden ist. Deshalb gilt $H_1(V) \cong Z \oplus Z_2$ aber $H_2(V) \cong Z$ (V ist orientierbar!).

[113] Das folgt natürlich auch direkt aus $2C_1 \sim 0$ (das ist die abelsch gemachte Fundamentaläquivalenz $C_1{}^2 \equiv 0$, welche der Relation $C_1{}^2 = 0$ entspricht), wenn man „Homolgie mit Division" verwendet. Es ist $H_1(V) \cong Z_2$ und $H_2(V) \cong \{0\}$

[114] Wie bereits angemerkt (vgl. Anmerkung 71), ist dieser Zusammenhang Poincaré im Falle algebraischer Kurven geläufig gewesen. In der Arbeit von 1895 beruft er sich auf die Theorie der automorphen

Funktionen, wo an die Stelle der Gruppe der Decktransformationen die Fuchssche Gruppe tritt (vgl. Poincaré VI, 231 und Poincaré VI, 450).

Im fünften Komplement findet sich eine Stelle, an der Poincaré explizit auf die Klassifikation der Flächen zu sprechen kommt. Dies geschieht im Rahmen der automorphen Funktionen: Er betrachtet nämlich das Fundamentalpolygon einer automorphen Funktion (in seiner Diktion ist dies eine komplexe Funktion, die unter den „ Substitutionen " einer „ Fuchsschen Gruppe " invariant bleibt) mit 2p Kanten. Weiter heißt es hierzu allgemein:

„Le groupe fondamental est alors le groupe fuchsien lui-même; groupe dérivé des 2p substitutions correspondant aux 2p cycles fondamentaux C_i; dans le cas où la forme F étant réduite, la loi de conjugaison des côtés du polygone fuchsien est celle que j'ai dite plus haut, on a entre les 2p cycles une seule équivalence qui s'écrit

$$0 \equiv C_1 + C_2 - C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_3 - C_4 + C_5 + C_6 - C_5 - C_6 + \ldots$$

Cette équivalence suffit pour définir le groupe fondamentale". (Poincaré VI, 450)

[Eine fast gleich gleichlautende Stelle gibt es auch schon 1895 (Poincaré VI, 247): „Ce groupe fuchsien ne sera, d'ailleurs, évidemment autre chose que le groupe fondamental g, relatif à la surface R considérée comme une variété à deux dimensions." Es ist aber zu beachten, daß g hier die Fundamentalgruppe im Sinne der ersten Definition bezeichnet, also gerade nicht die in unserem modernen Sinn. Dieses g tritt im 5. Komplement nicht mehr auf!]

Diese Stelle ist aus mehreren Gründen interessant:

1. Poincaré identifiziert hier die Fundamentalgruppe der fraglichen Fläche mit der Decktransformationsgruppe ihrer universellen Überlagerung. Hierzu ist es natürlich zuerst einmal erforderlich, diese beiden Gruppen klar zu unterscheiden. Auf diesem Hintergrund liegt es nahe, Poincaré's „est" als „ist isomorph" zu lesen (vgl. Dieudonné 1989, 296 - eine andere Auffassung vertritt Scholz 1980, 314).
2. Vom Ergebnis her klingt die obige Stelle so, als habe Poincaré das Klassifikationsproblem im Falle geschlossener orientierbarer Flächen gelöst, dabei das Ergebnis Jordans (vgl. 2.2.3) wiederentdeckt und in die Sprache der kombinatorischen Gruppentheorie übertragen. Dies ist aber keineswegs der Fall, da Poincaré nicht von einem allgemeinen Flächenbegriff ausgeht, sondern von einer speziellen Erzeugungsart. Man höchstens behaupten, daß er die geschlossenen Riemannschen Flächen klassifiziert habe.
3. Im Anschluß an die oben wiedergegebenen Überlegungen erkennt Poincaré, daß für p = 1 alle nullhomologen Zykel nullhomotop sind (p = 1 ergibt den Torus, für den bekanntlich die erste Homologiegruppe mit der Fundamentalgruppe übereinstimmt), daß dies aber für $p \geq 2$ nicht mehr so sein muß:

„On peut chercher à former un cycle [sur une surface; K.V.] qui soit homologue à zéro sans être équivalent à zéro. On voit d'abord qu'il ne peut y en avoir si p = 1, car alors l'équivalence que je viens d'écrire devient

$$C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1$$

et signifie que deux cycles quelconques sont permutables (au point de vue de l'équivalence). On sait d'ailleurs que, dans ce cas, les fonctions fuchsiennes se réduisent aux fonctions elliptiques, le groupe fuchsien à toutes ses substitutions permutables.

Si p > 1 , supposons que la loi de conjugaison des côtés soit celle que nous avons dite plus haut, c'est-à-dire 1 avec 3, 2 avec 4 etc. Soient 0 et 1 les deux sommets du côté 1; soient 1 et 2 ceux du côté 2, etc.: soient enfin 4p-1 et 4p = 0, ceux du côté 4p. Joignons les sommets 0 et 4 par une ligne restant à l'intérieur du polygone. Cette ligne répresentera un cycle qui sera équivalent à

$$C_1 + C_2 - C_1 + C_2$$

Il sera donc homologue à zéro; mais il ne sera pas équivalent à zéro." (Poincaré VI, 450 f)

Für p = 2 erhält man die Brezelfläche; der fragliche nicht-nullhomotope aber nullhomologe Zykel ist dann gerade der Taillenschnitt (vgl. die Abbildungen bei Seifert-Threlfall 1934, 5f).

Eine systematische Theorie der Überlagerungen vom topologischen Standpunkt aus findet sich erst nach Vorbereitungen bei Hopf 1926, Reidemeister 1928 und Seifert 1932 sowie bei Seifert-Threlfall 1934, 8.

Bezeichnet man wie gehabt mit C_1, C_2 und C_3 die drei Erzeugenden der Fundamentalgruppe, die den drei vorgegebenen Decktransformationen entsprechen, so erhält man folgende Relationen

$$C_1C_2C_1^{-1}C_2^{-1} = 1$$
$$C_1C_3C_2^{-\gamma}C_1^{-\alpha}C_3^{-1} = 1$$
$$C_2C_3C_2^{-\delta}C_1^{-\beta}C_3^{-1} = 1$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Koeffizienten der Matrix M sind.[115]

Wie gehabt ergeben sich hieraus durch kommutatives Rechnen die fundamentalen Homologien, wobei die erste Relation natürlich verschwindet. Die beiden anderen werden zu:

$$(\alpha - 1)C_1 + \gamma C_2 \sim 0$$
$$\beta C_1 + (\delta - 1)C_2 \sim 0$$

Sind die beiden Homologien linear unabhängig, so reduziert sich die Anzahl der homolog unabhängigen 1-Zykel um 2, folglich ist dann $\beta_1 = 2$ und damit - wie üblich unterstellt Poincaré den Dualitätssatz - auch $\beta_2 = 2$.

Sind dagegen die beiden Homologien linear abhängig, so muß ihre Determinante verschwinden. Hieraus folgt $(\alpha\delta-\beta\gamma) + (1-\alpha-\delta) = 0 = 0$ und damit wegen $(\alpha\delta-\beta\gamma) = 1$: $\alpha+\delta = 1$. Nun lassen sich zwei Fälle unterscheiden: Entweder die beiden Homologien verschwinden beide identisch. Dann muß $\alpha = \delta = 1$ und $\gamma = \beta = 0$ sein, was zu den Betti-Zahlen $\beta_1 = \beta_2 = 4$ führt.[116] Oder aber wenigstens eine Homologie enthält einen Koeffizienten ungleich Null. Dann reduziert sich die Anzahl der homolog unabhängigen Zykel um 1, weshalb $\beta_1 = \beta_2 = 3$ gilt. Zusammengefaßt erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\beta_1(V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = \begin{cases} 4 & \text{M Einheitsmatrix} \\ 3 & \alpha+\delta = 2 \text{ aber M ungleich Einheitsmatrix} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die weiteren Bemühungen Poincaré's gelten nun der Frage, ob zwei dieser Mannigfaltigkeiten $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ und $V(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ identische Betti-Zahl bei verschiedener Fundamentalgruppe besitzen können. Das geschieht natürlich mit Blick auf das Klassifikationsproblem: Kann diese Frage nämlich mit ja beantwortet werden, so ist damit gezeigt, daß im Falle geschlossener (orientierbarer) 3-Mannigfaltigkeiten die Betti-Zahlen nicht ausreichen, um nicht-homöomorphe Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden.[117]

Kapitel; eine ausführliche Behandlung der Überlagerungstheorie dreidimensionaler kombinatorischer Mannigfaltigkeiten gab K. Reidemeister in Reidemeister 1928 - vgl. auch Dieudonné 1989, 296 - 300; eine Darstellung der zweidimensionalen Theorie unter Einschluß der verzweigten Überlagerungen bietet Reidemeister 1932, 4. und 7. Kapitel.

115 Die Rechnungen von oben übertragen sich direkt von den dort betrachteten Decktransformationen auf die entsprechenden geschlossenen Wege. Nur die Reihenfolge der „Faktoren" ändert sich, weil wir Wege wie üblich in der Abfolge v·w schreiben, wenn w an v angehängt wird.

116 In diesem Falle ist M die Einheitsmatrix und die dritte Decktransformation reduziert sich auf $(x, y, z) \mapsto (x, y, z+1)$, weshalb man den Torus T^3 aus Beispiel 1 erhält.

117 Hier wird also der Unterschied zum zweidimensionalen Fall manifest, wo ja die erste Betti-Zahl zur Klassifikation der geschlossenen Flächen genügt.

Die Fundamentalgruppe erlaubt es vielmehr, gewisse 3-Mannigfaltigkeiten mit übereinstimmenden Betti-Zahlen als nicht äquvalent vom topologischen Standpunkt nachzuweisen. Um diese Fragestellung zu bewältigen sind vor allem gruppentheoretische Probleme zu lösen, geht es doch im wesentlichen darum, nicht-isomorphe Fundamentalgruppen zu finden. Dies ist der Inhalt des Paragraphen 14. Dessen Überschrift „Bedingungen für Homöomorphie" ist insofern irreführend, als es hier - wenn überhaupt um Homöomorphie - dann um Nicht-Homöomorphie geht. Genauer gesagt klärt Poincaré auf der Basis des sechsten Beispiels (wir übernehmen die dort eingeführte Bezeichnungsweisen) die Frage, welche Bedingung notwendig und hinreichend dafür sind, daß zwei von verschiedenen zu den Matrizen M und M' gehörigen Decktransformationen[118]

$$C_3: (x,y,z) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1)$$
$$\text{und} \quad C_3': (x,y,z) \mapsto (\alpha' x + \beta' y, \gamma' x + \delta' y, z+1)$$

zusammen mit C_1 und C_2 erzeugten Decktransformationsgruppen $D(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = D$ beziehungsweise $D'(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = D'$ isomorph sind.[119]

Nach einer mehrere Seiten langen, recht unübersichtlichen Rechnung[120] gelangt er zu folgendem Ergebnis (Poincaré VI, 255):

$$D \cong D' \Leftrightarrow \text{M und M' sind konjugierte Elemente in } SL(2, Z).$$[121]

Folglich gibt es ebenso viele verschiedene Decktransformationsgruppen wie es Konjugationsklassen in SL(2, Z) gibt. Da andererseits die Decktransformationsgruppen isomorph den Fundamentalgruppen der entsprechenden 3-Mannigfaltigkeiten sind, erhalten wir hieraus sofort eine Aussage über die Anzahl unterschiedlicher Fundamentalgruppen und

118 Wie Poincaré ausdrücklich bemerkt (Poincaré VI, 249), unterscheidet er nicht notationell zwischen den abstrakten Substitutionen, die definitionsgemäß die Elemente der Fundamentalgruppe bilden, und den entsprechenden Wegeklassen bzw. Decktransformationen - ein Zeichen dafür, wie unwichtig letztlich diese Hilfskonstruktion für Poincaré war.

119 Wir haben es hier also in einem Spezialfall mit dem Isomorphieproblem für endlich repräsentierte Gruppen zu tun, welches 1911 unter gewissen einschränkenden Bedingungen von Max Dehn gelöst wurde (Dehn 1911 - vgl. Chandler-Magnus 1982, 16 und 20). Im allgemeinen Falle ist dieses Problem ebenso algorithmisch unlösbar wie das Wortproblem (vgl. Stillwell 1993, 297f).

120 Da diese in den Rahmen der kombinatorischen Gruppentheorie gehört und deshalb hier nur am Rande interessiert, verzichte ich auf eine ausführliche Darstellung derselben.

121 Dieses Ergebnis überrascht nicht in Anbetracht dessen, was in Anmerkung 18 ausgeführt wurde. Im übrigen braucht Poincaré eigentlich nur die Notwendigkeit dieser Bedingung, da er im folgenden aus der Nicht-Konjugiertheit auf die Nicht-Isomorphie schließt.
In moderner Sprache läßt sich Poincaré's Ergebnis so formulieren: Die Identifikation der beiden den Schalenraum berandenden Tori vermöge zweier Homöomorphismen f_3 und f_3', definiert jeweils durch eine Matrix aus SL(2,Z), führt zu nicht-homöomorphen Mannigfaltigkeiten, wenn die entsprechenden Matrizen in verschiedenen Konjugationsklassen von SL(2,Z) liegen. Da Poincaré nur Matrizen mit Determinante 1 zuläßt, sind die entstehenden Mannigfaltigkeiten stets orientierbar. Die volle Abbildungsklassengruppe des Torus umfaßt auch ganzzahlige Matrizen mit Determinante -1, folglich kann man dann auch nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten bekommen. Beispiele findet man bei Hempel 1976, 122 (dort 3 und 4).

damit nicht-homöomorpher Mannigfaltigkeiten vom Typ des sechsten Beispiels. Um die oben formulierte Frage konkret zu klären, beweist Poincaré u.a. das folgende Resultat:

Zwei Elemente $\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & h'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sind dann und nur dann konjugiert, wenn $h = \pm h'$ gilt.

Somit liefern bereits die Scherungen

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ldots$$

unendlich viele nicht-isomorphe Fundamentalgruppen und damit nicht-homöomorphe Mannigfaltigkeiten. Da diese Mannigfaltigkeiten aber alle erste (und damit nach dem Dualitätssatz zweite) Betti-Zahlen besitzen, die gleich 3 sind, gibt es Mannigfaltigkeiten mit übereinstimmenden Betti-Zahlen aber nicht-isomorphen Fundamentalgruppen.[122] Somit ist gezeigt, daß die Fundamentalgruppe eine stärkere Invariante ist als die Betti-Zahlen:

> „Pour que deux variétés fermées soient homéomorphes, il ne suffit donc pas qu'elles aient mêmes nombres de Betti."
>
> (Poincaré VI, 257)

Im Anschluß an dieses mit großem Aufwand erhaltene Ergebnis weist Poincaré noch darauf hin, daß man dieses auch einfacher hätte haben können: Betrachtet man nämlich die Beispiele 3 und 5 sowie die Hypersphäre $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, so hat man drei Mannigfaltigkeiten, deren erste Betti-Zahlen (und - da orientierbar - auch deren zweite) gleich 1 ist, während die entsprechenden Fundamentalgruppen zwar sämtlich endlich, aber dennoch nicht isomorph sind. Es muß aber beachtet werden, daß sich diese drei Beispiele schon bei Betrachtung der Torsionskoeffizienten voneinander unterscheiden - von denen aber 1895

[122] Poincaré formuliert das Ergebnis allgemeiner für beliebige Matrizen aus SL(2,Z). Die Tatsache, daß es tatsächlich verschiedene Konjugationsklassen gibt - auch in dem Fall, daß es sich nicht um die Scherungen handelt, die im Text diskutiert wurden - wird von ihm als selbstverständlich erachtet. Er gibt allerdings an einer Stelle (Poincaré VI, 255) den Hinweis, daß die Matrizen einer Konjugationsklasse alle die gleiche Spur (modern gesprochen) besitzen müssen, woraus durch Kontraposition das Gewünschte folgt, wenn man sich zusätzlich überlegt, daß die Spuren von Matrizen aus SL(2, Z) unendlich viele Werte annehmen können.
Merkwürdigerweise zeigt Poincaré keineswegs direkt (durch einfaches Nachrechnen), daß die Matrizen

$$\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1 & h'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

in SL(2, Z) dann und nur dann konjugiert sind, wenn $h = \pm h'$ gilt. Vielmehr beweist er, daß die zugehörigen Gruppen nur dann isomorph sind, wenn diese Bedingung gilt (Poincaré VI, 255f). K. S. Sarkaria hat in Sarkaria 1996 darauf hingewiesen, daß man die Konjugation in GL(2,Z) betrachten muß und daß man neben den fraglichen Matrizen auch deren Inverse einbeziehen muß. Sein Ergebnis lautet: Zwei Mannigfaltigkeiten $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ und $V(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ sind genau dann homöomorph, wenn die Matrix $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ in GL(2,Z) konjugiert ist zu $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ oder zu dessen Inversem.

Es sei zum Abschluß noch erwähnt, daß $D(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ torsionsfreie, polyzyklische Gruppen mit der Hirsch-Zahl 3 sind (vgl. Strebel 1976, III-19). Näher untersucht werden die zu solchen Gruppen (als Fundamentalgruppen) gehörigen 3-Mannigfaltigkeiten in Evans-Moser 1972.

noch nicht die Rede ist -, während dies bei den Mannigfaltigkeiten des sechsten Beispiels nicht der Fall ist.

Anknüpfend an diese Betrachtungen über die Hypersphäre, das dritte und das fünfte Beispiel bemerkt Poincaré, daß hierbei ein wichtiger Unterschied zwischen geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten und ihren dreidimensionalen Entsprechungen deutlich werde: Während bei ersteren die Fundamentalgruppe nur im Falle der Sphäre endlich ist (und dann sogar trivial), gibt es - wie gezeigt - verschiedene 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher nicht trivialer Fundamentalgruppe. Die Behauptung Poincaré's bezüglich der 2-Mannigfaltigkeiten ist natürlich nur dann richtig, wenn man sich auf den orientierbaren Fall beschränkt. Diese Restriktion ergibt sich bei Poincaré gewissermaßen automatisch, weil er im vorliegenden Kontext nur solche Mannigfaltigkeiten betrachtet, die sich aus den Fundamentalbereichen automorpher Funktionen durch Randidentifikationen ergeben.[123]
Der Paragraph 14 schließt mit drei hochinteressanten Fragen:

> „1°. Étant donné un groupe G défini par un certain nombre d'équivalences fondamentales, peut-il donner naissance à une variété fermée à n dimensions?
> 2°. Comment doit-on s'y prendre pour former cette variété?
> 3°. Deux variétés d'un même nombre de dimensions, qui ont même groupe G, sont-elles toujours homéomorphes?"
>
> (Poincaré VI, 258)

Die Probleme 1 und 2 sprechen somit die Umkehrung dessen an, was Poincaré bislang in seiner Arbeit gemacht hat: Nun geht es nicht mehr darum, welche Fundamentalgruppe eine vorgegebene Mannigfaltigkeit besitzt, sondern darum, zu einer vorgegebenen Gruppe mit endlicher Präsentierung[124] eine Mannigfaltigkeit zu konstruieren, deren Fundamentalgruppe gerade die vorgegebene Gruppe ist. Das deutet in die Richtung der Polyeder, die Poincaré im ersten und zweiten Komplement nochmals ausführlich behandeln wird.

Das Problem, eine vorgegebene endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe eines zweidimensionalen simplizialen Komplexes zu realisieren, wurde später bei O. Veblen gelöst: „An important though obvious consequence of the last sections is that any discrete group with a finite number of generators is the fundamental group of a two-dimensional complex." (Veblen 1931, 145).[125] Damit ist natürlich noch nicht das Problem für Mannig-

[123] Es erstaunt dennoch, daß Poincaré 1895 nie daran denkt, den Begriff der 2-Mannigfaltigkeit ähnlich allgemein zu fassen wie den der 3- und der beliebig-dimensionalen Mannigfaltigkeit (im Sinne der zweiten Definition, siehe oben). Obwohl er das Phänomen der Nichtorientierbarkeit bei Flächen durchaus kannte - wie das Zitat des Möbius-Bandes zeigt -, scheint er nicht das Bedürfnis empfunden zu haben, dieses in eine allgemeine Theorie einzubauen. Im 5. Komplement dagegen behandelt Poincaré Orientierbarkeit bei Flächen explizit als Voraussetzung (Poincaré VI, 452).

[124] Poincaré spricht nur von endlich vielen Relationen; es scheint mir aber naheliegend, daß er damit stillschweigend auch endlich viele Erzeugende gemeint hat. Gruppen mit unendlich vielen Erzeugenden kommen bei ihm explizit nicht vor, implizit schon, insofern etwa nichtkompakte Flächen auftreten, deren Fundamentalgruppe ja unendlich viele Erzeugende haben könnten (vgl. Massey 1989, 143).

[125] Wie die weiteren Ausführungen Veblens zeigen, soll die fragliche Gruppe auch nur endlich viele Relationen aufweisen. Das zitierte Ergebnis von Veblen liegt in der Entwicklungslinie der Verwendung von Graphen in der kombinatorischen Gruppentheorie (vgl. Chandler-Magnus 1982, Chap. 1.5), wie sie vor allem bei M. Dehn zu finden ist (Dehn 1910, Dehn 1911). Insofern ist es durchaus möglich, daß Veblens Resultat schon früher bekannt war.

faltigkeiten erledigt. Das Verdienst, den Weg, wie man eine endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit realisieren kann, angegeben zu haben, kommt H. Seifert und W. Threlfall zu (Seifert - Threlfall 1934, 180 Aufgabe 3).[126] Die hierbei verwendete Methode ist heute als Chirurgie bekannt; sie beruht darauf, daß man aus einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit eine Tubenumgebung einer einfach geschlossenen Kurve ausbohrt und stattdessen ein Exemplar $E^2 \times S^2$ geeignet einfügt. Man kann nun zeigen, daß dieses Verfahren gerade darauf hinausläuft, in die Fundamentalgruppe der Ausgangsmannigfaltigkeit eine zusätzliche Relation - bei Beibehaltung der Erzeugenden - einzuführen. Also beginne man mit der zusammenhängenden Summe von n Exemplaren $S^1 \times S^3$ - die zugehörige Fundamentalgruppe ist dann frei mit n Erzeugenden - und realisiere die gewünschten endlich vielen Relationen in der dargelegten Art und Weise (vgl. Massey 1989, 143f). Die geschilderte Idee geht im wesentlichen auf M. Dehn zurück (vgl. unten 4.3). Aus der Tatsache, daß sich jede endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe einer 4-Mannigfaltigkeit realisieren läßt, folgt im übrigen - wie A. A. Markov 1958 gezeigt hat -, daß das Klassifikationsproblem für kompakte orientierbare triangulierbare 4-Mannigfaltigkeiten nicht algorithmisch lösbar ist, was letztlich an der algorithmischen Unlösbarkeit des Isomorphieproblems für die entsprechenden Gruppen liegt (vgl. Stillwell 1993, 298-306). Diese Idee läßt sich allerdings nicht auf 3-Mannigfaltigkeiten übertragen, da sich hier die Dinge schwieriger gestalten, insofern bei 3-Mannigfaltigkeiten nicht alle endlich präsentierten Gruppen als Fundamentalgruppen realisiert werden können (vgl. Stallings 1962).

Die Frage nach der geometrischen Realisierung von Gruppen als Fundamentalgruppen ist eng verwandt mit jener nach dem Aufbau von Mannigfaltigkeiten aus „einfacheren" Bestandteilen. Die heute als zweckmäßig akzeptierte Antwort stellen wohl die auf J.H.C. Whitehead zurückgehenden CW-Komplexe dar (vgl. Dieck 1990, Kap. III), die ihrerseits zu einer Realisierungstheorie von Homotopiegruppen in Gestalt der Eilenberg-McLane-Räume führen (vgl. Dieudonné 1989, 366-369). Wir müssen uns an dieser Stelle mit diesen summarischen Andeutungen begnügen, die aber hoffentlich deutlich gemacht haben, daß Poincaré mit seinen ersten beiden Fragen eine äußerst wichtigen Zusammenhang angesprochen hat.

Die Mannigfaltigkeiten des 6. Beispieles gehören zu den Schalenräumen. Diese Bezeichnung wurde 1931 von H. Seifert eingeführt, der auch ausdrücklich auf Poincaré verwies (Seifert 1931, 29). Dieser Terminus rechtfertigt sich aus der Tatsache, daß nach Ausführung der Identifikationen in x- und y- Richtung ein von zwei Tori berandeter Raum entsteht. Aus diesem macht die fehlende dritte Identifikation dann eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit (vgl. auch 5.2).

Die dritte Frage schließlich betrifft das Homöomorphieproblem und kann als Vorläufer der Poincaré-Vermutung angesehen werden. Als Motiv steht sicher die gerade gewonnene Einsicht hinter ihr, daß die Fundamentalgruppe eine stärkere Invariante als die Betti-Zahlen ist. Andererseits ist sie aber in der hier formulierten Allgemeinheit gewiß unhaltbar, wie schon die beiden Mannigfaltigkeiten S^4 und $S^2 \times S^2$ zeigen, die beide im modernen Sinn einfach-zusammenhängend sind - das heißt, sie haben triviale Fundamentalgruppen -,

[126] Allerdings wird auch hier nicht mit Mannigfaltigkeiten sondern mit Komplexen gearbeitet; eine Übertragung ist aber möglich.

die aber sicher nicht homöomorph sind.[127] Allerdings ist zu bedenken, daß dieses uns einfach erscheinende Gegenbeispiel 1895 keineswegs einfach gewesen sein könnte, da eine systematische Betrachtung von Produkten erst 1908 durch Steinitz (vgl. 4.2) vorgelegt wurde, der auch das fragliche Gegenbeispiel (in allgemeinerer Form allerdings) angab. Die Zusammenhänge zwischen den Invarianten eines Produktes und denen seiner Faktoren klärte erstmals systematisch H. Künneth in den 1920er Jahren. Andererseits war Poincaré einer der ersten, der in Gestalt seines achten Beispiels (siehe unten) eine Produktstruktur betrachtete. Nach den vorangehenden Betrachtungen wäre die obige Frage eingeschränkt auf den dreidimensionalen Fall durchaus plausibel, weshalb man hier eine voreilige Verallgemeinerung seitens Poincaré's am Werke wähnen kann. Wie wir gesehen haben, arbeitete Poincaré bisher fast ausschließlich mit 3-Mannigfaltigkeiten; das soll sich erst im nachfolgenden Paragraphen 15 ändern.

Dieser Paragraph beginnt mit einer weiteren Definitionsmöglichkeit für Mannigfaltigkeiten, die - so Poincaré - zwischen den Definitionen 1 und 2 eine Mittelstellung einnimmt. Im wesentlichen geht es dabei darum, daß in den definierenden Gleichungen und Ungleichungen sowie in den Kartenabbildungen zusätzliche Parameter auftreten dürfen. Letzteres führt ihn dann zu der Idee eines (in moderner Ausdrucksweise) homogenen oder Orbitraumes (vgl. auch 2.5) und damit zu einer weiteren Möglichkeit, neue Beispiele für Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Hierzu geht er im Sinne von Definition 2 des Mannigfaltigkeitsbegriffes von einer lokalen Parametrisierung

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(y_1,\dots,y_p) \\ &\vdots \\ x_n &= \theta_n(y_1,\dots,y_p) \end{aligned}$$

aus, wobei die Parameter y_i durch Gleichungen $\varphi_\alpha(y_1,\dots,y_p) = 0$ miteinander verknüpft sein sollen. Anders gesagt sollen also die Parameter einer Nullstellmenge im R^p entstammen[128], welche ihrerseits als eine Untermannigfaltigkeit W des R^p aufgefaßt wird. Folglich erhält man einen Zusammenhang zwischen der durch $x_i = \theta_i(y_1,\dots,y_p)$ $[i = 1,\dots,n]$ definierten Mannigfaltigkeit V (deren Dimension gleich $p - r$ ist, wenn r die Anzahl der Gleichungen $\varphi_\alpha\left(y_1,\dots,y_p\right) = 0$ angibt) und der Mannigfaltigkeit W:

$$\begin{array}{ccc} R^p & & R^n \\ \cup & & \cup \\ W & \longrightarrow & V \\ \left(y_1,\dots,y_p\right) & \mapsto & \left(\theta_1(y_1,\dots,y_p),\dots,\theta_n(y_1,\dots,y_p)\right) \end{array}$$

[127] Eine adäquate n-dimensionale Fassung von Frage drei ist die verallgemeinterte Poincaré-Vermutung, die man etwa so formulieren kann: Ist jede einfach-zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Homologiegruppen die der n-Sphäre sind, tatsächlich der n-Sphäre homöomorph (siehe 7. Ausblick). Aber selbst diese Formulierung, die man noch etwas abschwächen könnte, ist lange nicht so allgemein wie diejenige Poincaré's.

[128] In Definition 2 wurden die θ_i als reell-analytische Funktionen vorausgesetzt, wovon hier keine Rede mehr ist. Dort wurde auch der Wertebereich der Parameter durch Ungleichungen beschränkt.

Nun betrachtet Poincaré die Operation einer Gruppe G auf W, die so gestaltet sein soll, daß sich die Werte der Funktionen θ_i nicht ändern, wenn $(y_1,\ldots,y_p)$ in $g(y_1,\ldots,y_p)$ übergeht für $g \in G$. Ist dies der Fall, so werden alle Punkte von W, die zur Bahn eines Punktes[129] $(y_1,\ldots,y_p)$ unter einem $g \in G$ gehören, auf denselben Punkt von V abgebildet. Poincaré schränkt sich nun auf den Fall ein, daß einem Punkt von V immer nur eine Bahn in W entspricht, daß also $W/G \to V$ injektiv ist.

Ist W gegeben sowie eine auf W operierende Gruppe G,[130] so kann eine derartige Mannigfaltigkeit V als (modern gesprochen) Orbitraum W/G bekommen. Dies behauptet Poincaré (Poincaré VI, 260), ohne es allerdings im einzelnen zu begründen oder auch nur vorzumachen. Ist W orientierbar und die Funktionaldeterminante der Gruppenelemente stets positiv - operiert also G orientierungserhaltend auf W -, so ist auch V orientierbar.
Diese Ausführungen werden anhand eines weiteren Beispiels, bei dem es im wesentlichen um die reelle projektive Ebene geht, erläutert: Ist $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ die Gleichung von S^2 als Teilraum von R^3, so bemerkt man, daß S^2 unter der Antipodalabbildung α: $R^3 \to R^3$, welche (y_1,y_2,y_3) in $(-y_1,-y_2,-y_3)$ überführt, in sich abgebildet wird. Folglich operiert[131] $G = \{id, \alpha\}$ auf S^2; der Orbitraum S^2/G ist bekanntlich die reelle projektive Ebene P_2R (vgl. etwa Dieck 1990, S. 2f), eine Tatsache, welche Poincaré nicht erwähnt. Stattdessen betrachtet er die Veronese-Abbildung

$$R^3 \to R^6$$
$$(x,y,z) \mapsto (x^2,y^2,z^2,yz,xz,xy)$$

um festzustellen, daß sich deren Werte nicht ändern, wenn man von (x,y,z) zu $\alpha(x,y,z)$ übergeht. Beschränkt man sich darüber hinaus auf $S^2 \subset R^3$, so erhält man nach Übergang zu $P_2R \cong S^2/G$ eine Einbettung von P_2R in R^6 (tatsächlich erhält man sogar eine Einbettung von P_2R in P_5R, wobei P_2R ganz in einer S^4 zu liegen kommt; vgl. Dieck 1990, 60. Das Bild von P_2R unter der Einbettung wird als Veronese-Fläche[132] bezeichnet).

[129] Poincaré spricht von einem Punktsystem („systéme de points": Poincaré VI, 259).

[130] Über G werden bei Poincaré keine Voraussetzungen gemacht; es sollte aber natürlich so sein, daß die Operation von G zumindest stetig und eigentlich diskontinuierlich ist. Wie sich gleich zeigt, geht Poincaré davon aus, daß es sich um differenzierbare Abbildungen handelt. Die Frage, wann ein aus einer C^∞-Mannigfaltigkeit entstehender homogener Raum wieder C^∞ ist, wird bei Dieck 1991, 40 behandelt.

[131] Die Tatsache, daß Id in G aufgenommen werden muß, wird bei Poincaré nicht erwähnt (Poincaré VI, 250). Das wesentliche Merkmal einer Gruppe ist auch noch bei Poincaré deren Abgeschlossenheit unter der Verknüpfung; alle anderen Eigenschaften sind für ihn von untergeordneter Bedeutung und werden oft stillschweigend übergangen.

[132] Die Veronese-Fläche wurde 1868 von A. Cayley eingeführt und dann 1884 von Veronese bearbeitet (vgl. Blaschke 1954, 99); kurze Zeit später (1885) wurde sie von C. Segre erneut untersucht (vgl. Segre 1921). Die Punkte der Veronese-Fläche V stehen in eindeutiger Beziehung zur Menge aller Kegelschnitte der Ebene, P_2R und V sind birational äquivalent.
Es erstaunt vielleicht, daß Poincaré die Ergebnisse Veroneses und Segres kannte. Man darf aber nicht vergessen, daß er sich zumindest zeitweise intensiv mit algebraischer Geometrie beschäftigt hat - vgl. hierzu den ersten Teil von Poincaré VI - und daß die Grenzziehungen zwischen den einzelnen Gebieten seinerzeit noch vage waren.

Poincaré behauptet nun, daß die Veronese-Fläche eine geschlossene Mannigfaltigkeit sei (das wird nicht weiter begründet), die nicht orientierbar ist. Letzteres wird mit Hilfe der Funktionaldeterminante der Antipodalabbildung (in Polarkoordinaten) bewiesen.[133]

Es gibt ansonsten keine weiteren Ausführungen zu diesem siebten Beispiel, insbesondere versucht Poincaré nicht, seine Betti-Zahlen oder seine Fundamentalgruppe zu berechnen (wie er das bei den anderen Beispielen getan hat). Somit dürfte seine Funktion darin gelegen haben, die Konstruktion von Orbiträumen zu erläutern sowie ein Beispiel einer geschlossenen nicht-orientierbaren 2-Mannigfaltigkeit (das erste in Poincaré's Abhandlung!) zu liefern. Insofern kann es auch als Beweis von Poincaré's früherer Behauptung, daß seine zweite Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffes allgemeiner als seine erste sei (Poincaré VI, 201), dienen, da Mannigfaltigkeiten erster Art stets orientierbar sind (Poincaré VI, 215).

Aus moderner Sicht erstaunt, daß Poincaré keine Beziehung zwischen seinem sechsten und seinem siebten Beispiel formuliert hat - spielen doch in beiden Fällen Überlagerungen und operierende Gruppen eine wichtige Rolle. Hätte er diese Parallele genutzt, wäre die Bestimmung der Invarianten von P_2R einfach gewesen.[134] Warum Poincaré diesen Zusammenhang nicht gesehen hat, entzieht sich unserer Kenntnis: Vielleicht hat ihn die doch recht unterschiedliche Einkleidung (dort geometrisch, hier analytisch) seiner Beispiele daran gehindert, vielleicht war er auch zu stark an der Veronese-Fläche interessiert, was P_2R in den Hintergrund treten ließ, vielleicht war ihm der Zusammenhang auch klar, und er hat ihn nur nicht formuliert.

Das jetzt noch zu besprechende achte Beispiel ist insofern besonders instruktiv, als Poincaré in seinem Falle mit rein intuitiven Mitteln und Argumenten versucht, die Invarianten zu bestimmen. Ähnlich wie schon sein Vorgänger fällt auch dieses Beispiel ziemlich aus der Reihe: Es fügt sich weder in die bisher geschilderten Weisen der Erzeugung ein, noch hat es eine klare geometrische Bedeutung (im Unterschied zum siebten Beispiel, das aus der algebraischen Geometrie wohlbekannt war.).
Ausgangspunkte sind zwei Hypersphären

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_q^2=1$$
$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_q^2=1$$

und deren kartesisches Produkt[135] $W = S^{q-1} \times S^{q-1}$ im R^{2q}. Dieses ist eine (2q-2)-dimensionale Untermannigfaltigkeit des R^{2q}. Nun betrachte man die folgendermaßen definierte Abbildung:

[133] Poincaré's Argumentation bezieht sich genau genommen auf $W = P_2R$ und nicht auf die Veronese-Fläche V. Anders gesagt wird unterstellt, daß aus der Nichtorientierbarkeit der ersteren diejenige der letzteren folgt. Später (Poincaré VI, 369f) gibt er ein weiteres Argument für die Nichtorientierbarkeit, das sich auf die entsprechende Inzidenzmatrix stützt.

[134] Da S^2 einfach-zusammenhängend ist, muß die Decktransformationsgruppe, die hier nicht anderes als G ist, mit $\pi_1(P_2R)$ bis auf Isomorphie übereinstimmen: $\pi_1(P_2R) \cong Z_2$.

[135] Poincaré spricht hier charakteristischerweise nicht von Produkt - Produkte von Komplexen wurden erstmals von E. Steinitz 1908 betrachtet (vgl. 4.2) - sondern faßt die beiden Koordinaten-q-tupel zu einem Koordinaten-2q-tupel zusammen (vgl. Poincaré VI, 261). Zur Geschichte des kartesischen Produktes vergleiche man auch Dieudonné 1989, 55.

Ist $((y_1,\dots,y_q),(z_1,\dots,z_q)) \in W$, so bilde man die Ausdrücke $y_i + z_i$, $y_i \cdot z_i$ (für jeweils i = 1,...,q) und $y_i z_k + y_k z_i$ (für $i, k = 1,\dots,q$ mit $i \neq k$). Davon gibt es $n = \frac{q(q+3)}{2}$ Stück.[136]

Folglich kann man

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + z_1, \dots, x_q = y_q + z_q, \\ x_{q+1} &= y_1 z_1, \dots, x_{2q} = y_q z_q, \\ x_{2q+1} &= y_1 z_2 + y_2 z_1, \dots, \\ x_n &= y_{q-1} z_q + y_q z_{q-1} \end{aligned}$$

setzen und erhält so eine Abbildung

$$R^{2q} \supset W \xrightarrow{\varphi} R^n$$

und damit[137] eine Mannigfaltigkeit $V = \varphi(W)$.

Da in den Komponenten ausschließlich Monome in den Koordinaten y_i und z_i auftreten, bleiben die Bilder unverändert, wenn man alle y_i und z_i miteinander vertauscht. Anders gesagt: Die Abbildung φ ist auf

$$(S^{q-1} \times S^{q-1}) \setminus \Delta,$$

wobei Δ die Diagonale sein soll, eine zweiblättrige Überlagerung, da (y,z) und (z,y) auf denselben Punkt von V abgebildet werden. Im Sinne der erweiterten Mannigfaltigkeitsdefinition, die den Paragraphen 15 eingeleitet hat, wird $\varphi(W) = V$ als $(2q-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit (im R^n) aufgefaßt.[138] Diese wird nun im weiteren untersucht, wobei es konkret um folgende Fragen geht:

1.) Ist V geschlossen?[139]
2.) Ist V orientierbar?[140]
3.) Welche Betti-Zahlen hat V?

Nach einigen Ausführungen, die uns hier weniger interessieren, kommt Poincaré zu folgenden Ergebnissen:

[136] Nämlich $q + q + \frac{q(q-1)}{2} = 2q + \frac{q^2 - q}{2}$ Stück. Vermutlich war die sogleich zu definierende Abbildung Poincaré aus der algebraischen Geometrie bekannt. Es ist mir allerdings nicht gelungen, exakt diese Abbildung zu identifizieren - was natürlich in Anbetracht der ungeheuren Fülle konkreter Ergebnisse, die damals erzielt wurden, nicht erstaunlich ist. Partiell stimmt f mit der sogenannten Segre-Einbettung [vgl. Dieck 1991, 60] überein.

$$\begin{aligned} P_m R \times P_n R &\to P_s R \qquad (s = (m+1)(n+1) - 1) \\ ([x_i],[y_i]) &\mapsto [x_i y_i] \end{aligned}$$

[137] Diese Tatsache wird bei Poincaré ohne Beweis verwendet.

[138] Die $(y_1,\dots,y_q)(z_1,\dots,z_q)$ bilden die Parameter, deren Definitionsbereiche durch die Nullstellenbedingungen $y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 = 0$ beziehungsweise $z_1^2 + \dots + z_q^2 - 1 = 0$ eingeschränkt sind; die Monome $(y_1 + z_1, \dots, y_1 z_1, \dots, y_1 z_2 + y_2 z_1, \dots)$ übernehmen die Rolle der Abbildungen θ_i.

[139] Das heißt wegzusammenhängend, kompakt und ohne Rand. Man beachte Poincaré's gleich zu schildernde Auffassung von Rand!

[140] Bei Poincaré „bilatère" (aber intrinsisch definiert).

1.) Die Mannigfaltigkeit V ist geschlossen, wenn $q \geq 3$ ist. Für q = 2 ist sie dagegen berandet.[141]
2.) Die Mannigfaltigkeit V ist orientierbar, falls q ungerade ist; sonst ist sie nicht-orientierbar.

Die Berechnungen und Betrachtungen, welche Poincaré zur Beantwortung von Frage 3. anstellt, sollen hier etwas ausführlicher dargestellt werden, da sie Poincaré's Vorstellungen deutlich machen.

Ein erster Schritt besteht darin, die Betti-Zahlen von W zu bestimmen. Da W ein kartesisches Produkt ist, läßt sich das aus heutiger Sicht einfach mit Hilfe der Künneth-Formel tun. Diese stand Poincaré natürlich noch nicht zur Verfügung (Künneths Arbeiten stammen aus den Jahren 1923 und 1924; vgl. 4.2), weshalb er einen direkteren Zugang wählen mußte.

Hierzu zeichnet er in den beiden Faktoren S^{q-1} jeweils eine festen Punkt aus, der hier mit Q_0 bezeichnet werde. Weiterhin werden noch die beiden Teilmengen $U_1 = S^{q-1} \times \{Q_0\}$ und $U_2 = \{Q_0\} \times S^{q-1}$ von W betrachtet.[142]

Es ist offenkundig $U_1 \cong S^{q-1}$ und $U_2 \cong S^{q-1}$, weshalb U_1 und U_2 (q-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von W sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} W \setminus (U_1 \cup U_2) &\cong \left(S^{q-1} \times S^{q-1}\right) \setminus \left(\left(S^{q-1} \times \{Q_0\}\right) \cup \left(\{Q_0\} \times S^{q-1}\right)\right) \\ &\cong (S^{q-1} \setminus \{Q_0\}) \times (S^{q-1} \setminus \{Q_0\}) \\ &\cong B^{q-1} \times B^{q-1} \end{aligned}$$

Nun ist aber B^{q-1} zusammenziehbar,[143] weil B^{q-1} konvex ist (vgl. Poincaré VI, 267). Folglich weiß man über diesen Teil der Mannigfaltigkeit W bestens Bescheid. Berücksichtigt man noch, daß W orientierbar ist und daß man deshalb den Dualitätssatz anwenden kann, so reduziert sich das Problem der Bestimmung der Betti-Zahlen doch erheblich.

Es bleibt zu klären:

1.) Welche Betti-Zahl kommt W in der Dimension q - 1 zu?

[141] Hierbei betont Poincaré, daß er als Rand einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit nur (q-1)-dimensionale Mannigfaltigkeiten betrachtet, nicht aber tieferdimensionale Gebilde. Das erläutert er an der als Nullstellengebilde beschriebenen Drehfläche der Lemniskate - wir würden heute von einem Wedge zweier 2-Sphären sprechen [der natürlich keine Mannigfaltigkeit im modernen Sinne darstellt]. Diese Drehfläche ist topologisch gesehen - so auch Poincaré (Poincaré VI, 262) - aus zwei Sphären zusammengesetzt, welche einen Punkt gemeinsam haben. Betrachtet man das Komplement einer dieser Sphären, so ist dieses eine (modern gesprochen) punktierte Sphäre. Diesen fehlenden Punkt darf man nach Poincaré nicht als Rand auffassen. Wir würden dagegen den fehlenden Punkt sehr wohl als Rand zählen. Man bemerkt hier eine gewisse Diskrepanz zwischen modernen mengentheoretisch-topologischen Vorstellungen und denen Poincaré's, welche eher analytisch geprägt waren.

[142] Im einfachsten Fall - nämlich $W = S^1 \times S^2$ - entsprechen U_1 und U_2 einem Meridian und einer Parallele. Der Durchschnitt von U_1 und U_2 ist natürlich gerade gleich Q_0.

[143] Poincaré spricht hier von „einfach-zusammenhängend" („simplement connexe", Poincaré VI, 267), was allerdings zuvor (Poincaré VI, 257) bereits in seinem modernen Sinne gebraucht wurde. Hier ist also Poincaré's Terminologie äquivok.
Im Beispiel des Torus sieht man direkt, daß $(S^1 \times S^1) \setminus ((S^1 \times \{Q_0\} \cup \{Q_0\} \times S^1)$ ein offenes Quadrat $]0,1[\times]0,1[$ (also bis auf Homöomorphie B^2) ergibt, denn der „Schlauch" wird ja gerade durch einen Meridian und eine Parallele „aufgeschnitten".

2.) Welche Betti-Zahlen hat W in den Dimensionen $h < q - 1$?

Die Beantwortung der zweiten Frage wird von Poincaré mit Hilfe eines Deformationsargumentes erledigt. Er geht nämlich davon aus, daß eine geschlossene h-dimensionale Untermannigfaltigkeit von W ($h<q-1$) stets homolog sei einer h-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von W, welche weder U_1 noch U_2 trifft.[144]

Letztere liegt aber ganz in $W \setminus (U_1 \cup U_2)$, was ein zusammenziehbarer Raum ist, weshalb die Mannigfaltigkeit nullhomolog ist (zuerst in $W \setminus (U_1 \cup U_2)$ und damit erst recht in W).

Die Antwort auf die Frage 1. ergibt sich in zwei naheliegenden Schritten: Zuerst einmal stellt Poincaré fest, daß die (q-1)-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten U_1 und U_2 homolog unabhängig sind, um dann zu zeigen, daß es neben U_1 und U_2 keine weiteren homolog unabhängigen (q-1)-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten gibt in W. Zum Beweis der ersten Behauptung benutzt Poincaré die Differentialformen

$$\left(\sin^{q-3}\theta_1\right)\left(\sin^{q-3}\theta_2\right)..\left(\sin^{q-3}\theta_{q-1}\right)d\theta_1...d\theta_{q-1}$$

wobei θ_i die Polarkoordinaten auf S^{q-1} ($\cong U_1$) sein sollen,[145] und

$$\left(\sin^{q-3}\theta_1'\right)\left(\sin^{q-3}\theta_2'\right)..\left(\sin^{q-3}\theta_{q-1}'\right)d\theta_1'...d\theta_{q-1}'$$

wobei θ_i' die Polarkoordinaten auf S^{q-1} ($\cong U_2$) sind.

Integriert man die erste Differentialform über U_1, so erhält man σ (Oberfläche von S^{q-1}), intergriert man die zweite über U_2, so ergibt sich wieder σ.

Folglich verschwindet die Form $y + \lambda y'$ (y, y' die genannten Integrale, λ eine irrationale Zahl) auf U_1 und U_2 nicht, weshalb diese homolog unabhängig sind.

Ist nun V eine weitere (q-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit von W, so kann man zwei Fälle unterschieden:

1.) V liegt ganz in dem zusammenziehbaren Raum $W \setminus (U_1 \cup U_2)$ und ist deshalb nullhomolog; oder

2.) V hat mit $U_1 \cup U_2$ nichtleeren Durchschnitt.

Dann betrachte man die Zerlegungen von W, welche durch alle „Parallelen"

$$\{Q\} \times S^{q-1} \left(Q \in S^{q-1}\right)$$

und durch alle „Meridiane"

$$S^{q-1} \times \{Q\}$$

definiert werden. Dabei sind je zwei Parallelen und je zwei Meridiane homolog abhängig[146] und die Schnitte Parallelen/Meridiane erfolgen stets transversal (bezogen auf W). Mit Hilfe dieser Parallelen und Meridiane wird nun V in seinen Schnittpunkten (Poincaré nimmt an, daß deren nur endlich viele gibt!) mit U_1 und U_2 so abgeändert, daß man schließlich eine Homologie zwischen lauter Untermannigfaltigkeiten erhält, die im Kom-

[144] Anschaulich ist diese Annahme durchaus plausibel, in wieweit sie sich streng rechtfertigen läßt, wäre zu prüfen. In moderner Entsprechung hierzu stünden etwa Aussagen über die Lage von Bildern von Räumen bestimmter Dimension in Zellenkomplexen.

[145] Mit deren Hilfe hat Poincaré übrigens die Aussage über den Orientierbarkeitscharakter von W bewiesen (Poincaré VI, 265).

[146] Vgl. den einfachsten Fall des Torus, wo je zwei Parallelen und je zwei Meridiane immer einen „Streifen" beranden.

plement von $U_1 \cup U_2$ liegen, und die folglich gleich Null sein muß (Poincaré VI, 268). Hieraus ergibt sich dann, daß V homolog abhängig von U_1 und U_2 ist. Also hat die Betti-Zahl β_{n-1} den Wert 3 (in Poincaréscher Manier!). Somit gilt:[147]

$$\beta_i(W) = 1 \quad \text{für} \quad i = 1,\ldots,q-2,q,\ldots,2q-3 \text{ und } \beta_{q-1}(W) = 3$$

Nun gilt es noch diese Ergebnisse geeignet auf V zu übertragen. Die ganze Argumentation[148] Poincaré's beruht darauf, daß φ: $W \rightarrow V$ eine zweiblättrige Überlagerung sein soll. Dies ist natürlich - wie wir gesehen haben - nicht ganz korrekt, da φ auf der Diagonalen Δ gar nicht zweiblättrig ist (folglich muß sich die Überlagerung in Δ verzweigen) - ganz zu schweigen davon, daß die definierenden Eigenschaften einer Überlagerung (vgl. Dieck 1991, 121f) nicht nachgewiesen wurden. Dies ist keineswegs erstaunlich, da Poincaré dieser Begriff in strenger Form gar nicht zur Verfügung stand; wohl aber verfügte er, wie u. a. der jetzt zu schildernde „Beweis" zeigt, über die entsprechende intuitive Idee.[149]

Zwei Punkte aus W (und damit dann auch zwei Punktmengen aus W), die von φ auf denselben Punkt (bzw. dieselbe Punktmenge) von V abgebildet werden,[150] nennt Poincaré symmetrisch. Es ist offensichtlich, daß U_1 und U_2 symmetrisch sind. Also gilt:

$$\varphi(U_1) = \varphi(U_2) \text{ und damit a fortiori } \varphi(U_1) \sim \varphi(U_2).$$

Weiter sind aber $\varphi(U_1)$ und $\varphi(U_2)$ homolog unabhängig, was die oben betrachteten Differentialformen nach Übertragung auf V durch φ zeigen. Folglich ist $\beta_{q-1}(V) \geq 2$.

Ist nun v eine geschlossene Mannigfaltigkeit in V, so hebe man diese hoch zu einer Mannigfaltigkeit w in W, indem man zu jedem Bildpunkt einen der beiden Urbildpunkte (aber immer den richtigen!) nimmt. Um so argumentieren zu können, muß man zuerst dafür sorgen, daß v mit dem Teil von V, der Bild der Diagonalen Δ von W ist, leeren Durchschnitt hat. Das kann man laut Poincaré durch eine Deformation erreichen, wenn die Codimension von v in V genügend groß ist.

Poincaré unterscheidet nun zwei Fälle:

1.) w ist geschlossen. Gilt nun $\dim w \neq q-1$, so kann man - wie oben gezeigt - w in W zusammenziehen. Durch Zusammensetzen mit φ erhält man eine Zusammenziehung für v und folglich ist $v \sim 0$. Ist dagegen $\dim w = q-1$ so gilt: $w \sim mU_1 + nU_2$. Wendet man auf diese Homologie φ an, so ergibt sich: $v \sim m\varphi(U_1) + n\varphi(U_2)$ und damit $v \sim (m+n)\varphi(U_1)$.

2.) w ist nicht geschlossen. In diesem Falle kann man nicht mit den Betti-Zahlen und der Homologiebasis argumentieren. Dann, behauptet Poincaré, kann man w stetig zu einer geschlossenen Untermannigfaltigkeit von W deformieren, wobei es wegen der Dualität erlaubt ist, nur den Fall $\dim w \leq q-1$ zu betrachten. Diese Deformation ist sogar eine über v, womit gezeigt ist, daß man sich auf Fall 1 beschränken darf.

[147] Die Fundamentalgruppe von W wird von Poincaré nicht betrachtet. Im Falle q=2, also $W \cong S^1 \times S^1 \cong T^2$, ist sie als bekannt zu betrachten: $\pi_1(T^2) \cong Z \oplus Z$ (in Übereinstimmung mit Poincaré's Ergebnis $\beta_{q-1}(W) = 3$; im Falle q>2 ergibt sie sich direkt aus der bekannten „Produktformel" $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$) [vgl. etwa Dieck 1991, 120] als triviale Gruppe (in Übereinstimmung mit Poincaré's Ergebnis $\beta_1(W) = 1$ für q-1>1). Im übrigen betrachtet Poincaré nie die nullte und die höchste Betti-Zahl (also diejenige, deren Index gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit ist).

[148] Laut Dieudonné „obscure and totally unconvincing" (Dieudonné 1989, 25), was mir doch etwas zu hart erscheint.

[149] Zur topologischen Überlagerungstheorie vergleiche man 2.5 und 5.2.

[150] Die fraglichen Punkte liegen also in derselben Faser.

Das Ergebnis lautet also:

$$\beta_i(V) = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = q-1 \\ 1 & \text{falls } i = 1,\dots,q-2,q,\dots,2q-3 \end{cases}$$

Es soll hier nicht der Versuch gemacht werden, Poincaré's Argumentation zu rekonstruieren und auf ihre Haltbarkeit aus moderner Sicht hin zu prüfen. Bemerkenswert bleibt, mit welch einfachen und direkten Methode Poincaré versucht, dem von ihm gestellten Problem Herr zu werden.

Den Paragraphen 15 abschließend weist Poincaré auf zwei Dinge hin:

1. Ist q ungerade, so ist V eine orientierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension 4k, deren 2k-te Betti-Zahl nicht ungerade ist.[151]
2. Ist q dagegen gerade, so ist V eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension 2k+2, deren (k+1)-te Betti-Zahl gerade ist.

Anders gesagt kann man aus der Kenntnis der k-ten Betti-Zahl einer 2k-dimensionalen Mannigfaltigkeit nicht auf deren Orientierbarkeitscharakter schließen, was ein Problem klärt, das Poincaré zuvor im Paragraphen 9 im Zusammenhang mit dem Dualitätssatz aufgeworfen hatte (Poincaré VI, 228f).

Die große Abhandlung von 1895 geht, wie bereits erwähnt, mit ausführlichen Überlegungen zum Eulerschen Polyedersatz zu Ende, auf die wir hier nicht eingehen wollen (vgl. etwa Dieudonné 1989, 25-28).

Fassen wir zum Abschluß noch einmal den Entwicklungsstnad zusammen, den das Homöomorphieproblem in der Arbeit von 1895 erreicht hat:

1. Durch seine verschiedenen Definitionen des Mannigfaltigkeitsbegriffes erlangte Poincaré hinreichend Spielraum, um eine ausreichende Anzahl von interessanten Beispielen erzeugen zu können. Er verwendet hierzu die unterschiedlichsten Methoden, u. a. die aus der Theorie der automorphen Funktionen ansatzweise bekannte Überlagerungstheorie, die herkömmliche Darstellungsweise von Mannigfaltigkeiten durch Gleichungen und Ungleichungen, aber auch birationale Transformationen, die im Rahmen der algebraischen Geometrie untersucht wurden, sowie verschieden geartete Quotientenräume. Poincaré's Mannigfaltigkeitsbegriff bleibt eklektisch, was nicht zuletzt auch den Entwicklungsstand der Disziplin (vgl. 8) charaktierisiert. Bemerkenswert ist, daß Poincaré's Beispiele von einem (modernen) systematischen Standpunkt aus betrachtet keineswegs die einfachsten denkbaren sind: So entsprechen z.B. seinen „Würfelmannigfaltigkeiten" Heegard-Diagramme vom Geschlecht 3. Hieran zeigt sich der Ursprung dieser Beispiele.

2. In Gestalt der Fundamentalgruppe findet Poincaré ein effizientes Klassifikationsmerkmal, das er im Falle dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten[152] geschickt einzusetzen weiß. Allerdings bleiben seine Möglichkeiten, Fundamentalgruppen zu berechnen, recht beschränkt.

3. Im Vergleich zur Fundamentalgruppe spielen die Betti-Zahlen im Falle dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten eine eher untergeordnete Rolle. Poincaré erkennt den Zusammenhang von Fundamentalgruppe und erster Betti-Zahl und weiß sich diesen zur Berechnung der letzteren zunutze zu machen. Die zweite Betti-Zahl ergibt sich für orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten vermöge Dualität. In den höherdimensionalen Beispielen 7 und 8 versucht Poincaré mit direkten Mitteln, Betti-Zahlen zu berechnen. Insgesamt steht bei 3-Mannigfaltigkeiten der orientierbare Fall deutlich im Vordergrund; das Phänomen der Torsion wird noch nicht gewürdigt.

4. Es gelingt Poincaré durch sein sechstes Beispiel zu beweisen, daß die Fundamentalgruppe eine stärkere Invariante als die Betti-Zahlen ist. Ansätze zu einer Lösung des Klassifikationsproblems in dem Sinne, daß gezeigt werden soll, daß aus der Übereinstimmung der Fundamentalgruppen die Homöomorphie der Mannigfaltigkeiten folge, fehlen, obwohl Poincaré diese Frage ausdrücklich stellt.

5. Es gibt noch keine einheitliche Methode, die die Berechnung und Definition der Invarianten erlauben würde. Poincaré bewegt sich 1895 weitgehend auf einem „Ad-hoc-Niveau".

[151] Dieser Fall kann nicht auftreten, wenn die orientierbare Mannigfaltigkeit gerade Dimension besitzt, deren Hälfte aber ungerade ist (vgl. Poincaré VI, 228f).

[152] Im Zusammenhang der höherdimensionalen Beispiele 7 und 8 erwähnt Poincaré die Fundamentalgruppe überhaupt nicht.

Ein Vergleich der Beiträge Poincaré's mit jenen von W.Dyck (vgl. 2.3), welche zweifellos die wichtigsten vor Poincaré im Bereich der drei- und höherdimensionalen Theorie der Mannigfaltigkeiten gewesen sind, ist an dieser Stelle recht instruktiv. Dabei ergibt sich als herausragendes Merkmal bei Poincaré dessen kontinuumstopologisch-geometrische Grundauffassung, die es ihm ermöglichte, einerseits eine Fülle interessanter Beispiele zu erzeugen und andererseits wichtige Ansätze zu deren Untersuchung (man denke etwa an die Fundamentalgruppe) zu entwickeln. Dabei ergaben sich Lücken und Ungereimtheiten, ja selten sogar einmal Fehler. Dagegen wirkte die kombinatorische Position, welche W. Dyck im Streben nach Strenge bezog, hemmend für seine Forschung aus: Er vermochte weder einen Vorrat interessanter und aussagekräftiger Beispiele bereitzustellen noch über die traditionelle Charakteristik hinausgehende Ansätze zu ihrer Behandlung vorzuschlagen - und das trotz der im Vortrag von Montreal (vgl. 2.3.1) enthaltenen Einsichten in das Wesen von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten. Diese ließen sich nicht ohne weiteres in den kombinatorischen Rahmen einpassen.

Hier wird ein allgemeines Prinzip sichtbar: Eine im Entstehen begriffene Disziplin muß zuerst einmal eine proliferierende Phase durchlaufen, in der Strengegesichtspunkte zurücktreten zugunsten der Reichhaltigkeit des Beispielmaterials und der Vielfalt der Methoden. Strenge kommt erst im nachhinein. Vergleiche hierzu Kapitel 8 unten.

3.3 Die weitere Entwicklung des Klassifikationsproblemes in den ersten beiden Komplementen zur „Analysis situs"

Poincaré hat seine Abhandlung „Analysis situs" durch fünf Komplemente ergänzt, die in den Jahren 1899 bis 1904 erschienen sind. Zu den Komplementen 1, 3 und 4 gibt es kurze Zusammenfassungen, welche Poincaré jeweils vor der „Académie des sciences" präsentierte (Poincaré VI, 289; 371f; 393-396). Die beiden ersten Komplemente gelten als Geburtsstunde der kombinatorischen Topologie im eigentlichen Sinne, da Poincaré in ihnen kombinatorische Techniken entwickelte, die (vielfach variiert und modifiziert) dieser Disziplin bis in die 30er Jahre hinein ihr Gepräge und ihre Identität geben sollten. Äußerer Anlaß für sie war die Kritik, welche Poul Heegard in seiner Kopenhagener Dissertation (1898) an Poincaré's Arbeit von 1895, insbesondere an dessen Beweis des Dualitätssatzes, geübt hatte.

Die Komplemente 3 und 4 beschäftigen sich überwiegend mit algebraischen Flächen und Kurven. Wir werden sie in 3.4 nur insoweit in Betracht ziehen, als sie einen direkten Bezug zu den hier besprochenen Beispielen aufweisen. So taucht in ihnen unerwarteterweise wieder das sechste Beispiel, diesmal unter ganz neuen Gesichtspunkten auf. Von großer Bedeutung für unser Thema ist hingegen das fünfte Komplement, in dem es Poincaré anhand einer Homologiesphäre, des heute so genannten Dodekaederraumes, gelingt, zu zeigen, daß eine geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit, deren Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten sämtlich mit denen der 3-Sphäre übereinstimmen, nicht notwendig homöomorph zu jener sein muß, da sich die beiden fraglichen Mannigfaltigkeiten in ihrer Fundamentalgruppe unterscheiden können. Folglich mußte das Klassifikationsproblem, das bereits im 2. Komplement durch die Einbeziehung der Torsionskoeffizienten eine Präzisierung erfahren hatte, weiter verschärft werden. Resultat dieses Prozesses ist die Poincaré-Vermutung (V ist eine geschlossene [zusammenhängende, orientierbare] 3-Mannigfaltigkeit, „simplement connexe" heißt homöomorph zur 3-Sphäre):

> „Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?"
>
> (Poincaré VI, 498)

Diese „unschuldig klingende Frage" (Rourke/Stewart) sollte die Topologen bis auf den heutigen Tag beschäftigen.

Unmittelbarer Ausgangspunkt bei der Abfassung des ersten Komplements zur „Analysis situs", das 1899 in den „Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo" erschien, war für Poincaré wie bereits erwähnt die Kritik, die Poul Heegard in seiner Dissertation an seinem Dualitätssatz geübt hatte.[153]

Diese bezog sich zum einen auf Poincaré's Beweis dieses Satzes (Heegard 1916, 218-221), welche dann noch durch ein Gegenbeispiel untermauert werden sollte (Heegard 1916, 232-234).[154] Letzteres ergibt sich als Schnitt zweier algebraischer Flächen im C^3, nämlich eines Kegels $z^2 = xy$ und eines Zylinders $|x^2| + |y^2| = 1$.[155] Eine andere Beschreibung, die Heegard angegeben hat (Heegard 1916, 324), benutzt die Identifikation zweier Volltori, welche entlang geeigneter Kurven verklebt werden.[156]

---

153 Ausführlich werden wir auf diese in 4.1 eingehen.

154 „Mais non seulement le théorème n'est pas prouvé; il ne peut pas être exact. Nous avons déjà, à plusieurs reprises, considéré une variété à 3 dimensions, fermée et bilatère, pour laquelle $p_1=2$ et $p_2=1$;..." (Heegard 1916, 220f)

155 Dabei richtet Heegard sein Augenmerk auch auf die Frage, ob diese Mannigfaltigkeit Singularitäten aufweist. Im Unterschied zum frühen Poincaré wird das Problem der Singularitäten bei Heegard ausführlich diskutiert. Größere Beachtung schenkt Poincaré Singularitäten erst im 5. Komplement.

156 Diese Darstellung liegt also in der Entwicklungslinie der in 4.1 zu betrachtenden Heegard-Diagramme und (als - modern gesprochen - Heegard-Diagramm auf dem Torus) der in 4.2 auftretenden Linsenräume (es handelt sich um den Linsenraum L(2,1) in moderner Schreibweise). Poincaré bezieht sich allerdings an

Heegard hatte für die entstehende 3-Mannigfaltigkeit, die orientierbar ist, die „Betti-Zahlen" $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = 1$ ermittelt und hieraus auf die Ungültigkeit des Dualitätssatzes geschlossen. Dies veranlaßte Poincaré dazu, die verschiedenen Definitionen der Betti-Zahlen genauer zu untersuchen, was ihn zu folgender Einsicht führte (Poincaré VI, 289):

> „Pour Betti [157], plusieurs variétés v_p sont distinctes quand il n'existe pas dans la variété donnée de variété à p+1 dimensions dont la frontière complète soit formée par l'ensemble des variétés v_p. Dans la définition que j'ai adoptée, les variétés v_p ne sont dites distinctes que s'il n'existe pas de variété à p+1 dimensions dont la frontière complète soit formée par l'ensemble des variétés v_p, répetu une ou plusieurs fois."

In moderner Terminologie läuft dies darauf hinaus, daß Heegard eine volle Homologiebasis (also eine der ganzen Homologiegruppe unter Einschluß ihres Torsionsanteiles) betrachtet während bei Poincaré nur die Basis des freien Anteiles dieser Homologiegruppe im Zusammenhang mit Betti-Zahlen beachtet wird, wie das ja heute noch üblich ist. Dies macht er selbst anhand des 3. Beispiels sehr deutlich (Poincaré VI, 292). Für die drei Erzeugenden C_1, C_2, C_3 der Fundamentalgruppe ergaben sich dort die Relationen

$$C_1^2C_2^{-1} = C_1^2C_3^{-2} = C_2^2C_3^{-2} = C_1^4 = 1,$$

woraus sich die Homologie

$$C_1^4 \sim C_2^4 \sim C_3^4 \sim 0$$

und „damit" $C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0$ ergab, woraus $\beta_1 = 1$ folgte. Im Sinne Heegards dagegen wären zwei dieser Torsionselemente bei der Zählung der Betti-Zahl β_1 zu berücksichtigen, was zu $\beta_1 = 3$ führen würde.[158]

Um einem weiteren Einwand Heegards zu begegnen, der sich auf Poincaré's Beweis des Dualitätssatzes in seiner Abhandlung von 1895 bezog, entwickelte letzterer den Begriff des

---

keiner Stelle auf diese zweite Darstellungsart. Das ist insofern interessant, als er hier konkret Heegards Idee zur Konstruktion von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten hätte studieren können, welche er dann bei der Gewinnnung seiner Homologiesphäre - wenn auch in wesentlich weiter entwickelter Form - einsetzte (vgl. 3.4). Anders gesagt läßt sich aus Poincaré's Reaktion auf Heegard nicht definitiv entnehmen, daß er bei diesem die Heegard-Diagramme oder -Zerlegungen zur Kenntnis genommen hat.

157 Ob Poincaré hier tatsächlich die Intentionen Bettis korrekt wiedergibt, sei dahingestellt. Zutreffend wäre seine Aussage auf jeden Fall dann, wenn man Heegard anstelle von Betti liest. Zur Problematik der verschiedenen Definitionen der Betti-Zahlen vgl. man Bollinger 1972, 125f.

158 Vgl. Poincaré VI, 352, wo Poincaré die Torsionskoeffizienten ermittelt. Auf den Seiten 353f gibt er darüber hinaus auch eine Analyse des Heegardschen Beispiels (siehe unten im Text).
Nicht ganz treffend hat Schoenflies den Unterschied der beiden Definitionen in seiner Besprechung für das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" formuliert (ein Hinweis, wie schwierig diese Dinge damals doch waren!):
„Sind in einem geschlossenen Raumteil V die m-dimensionalen Gebilde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ so enthalten, dass sie nicht selbst, sondern erst im Verein mit einem ebenfalls in V enthaltenen m-dimensionalen Gebiet v_{n+1} die volle Grenze eines (m+1)-dimensionalen Gebietes von V ausmachen, so hat die Betti'sche Zahl p_m den Wert n+1. Dies ist die von Betti gegebene Definition. Für sie gilt der Satz nicht, wie aus einem Beispiel von Heegard, sowie auch aus einem von Poincaré früher selber gegebenen Beispiel hervorgeht. Wenn man aber die Betti'schen Zahlen so definiert, dass man bei der Abzählung der Zahl von Gebieten (V_i), die noch nicht die volle Grenze des (m+1)-dimensionalen Gebietes ausmachen, zulässt, dass jedes (V_i) öfters auftreten darf, aber doch nur einmal gezählt wird, so gilt der Satz." (Schoenfließ 1899, 435)

„Polyeders" weiter, den er 1895 in diesem Zusammenhang eingeführt hatte.[159] Wie wir gleich sehen werden, ist diese Bezeichnung vom modernen Standpunkt - der ein Polyeder wohl am ehesten als simplizialen Komplex auffaßt - eher mißverständlich, da Poincaré an eine Art von Zellenaufbau einer Mannigfaltigkeit aus nierderdimensionalen Untermannigfaltigkeiten denkt. Ist V eine Mannigfaltigkeit[160] der Dimension p, so soll V in die Mannigfaltigkeiten v_p unterteilt sein, deren Ränder die Mannigfaltigkeit v_{p-1} bilden usw. bis hin zu den Kanten v_1 und den Ecken v_0. Wird die (q-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\alpha_1{}^{q-1}$ von V durch die Gleichungen und Ungleichungen

$$F_1 = \ldots = F_{n-q+1} = 0, \quad \varphi_\gamma > 0$$

beschrieben, so ergibt sich aus diesem System dasjenige für die Teilmannigfaltigkeit $\alpha_1{}^q$, die die erste Teilmannigfaltigkeit qter Dimension sein soll,[161] als

$$F_1 = \ldots = F_{n-q} = 0, F_{n-q+1} > 0, \varphi_\gamma > 0$$

Im Grunde genommen hat man es mit mehreren Systemen von n Gleichungen zu tun, die Punkte des R^n festlegen, und die durch Übergang zu Ungleichungen sukzessive zusammengefaßt werden zu dem System von Gleichungen und Ungleichungen, das die Mannigfaltigkeit V beschreibt.[162]

---

159 Vgl. Poincaré VI, 271. Die Bezeichnung wurde dort wohl gewählt, weil es ja um die Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes ging.

160 Im nachfolgenden wird immer benutzt, daß V durch Gleichungen und Ungleichungen definiert wird, also eine Mannigfaltigkeit erster Art ist. Das ist für Poincaré insofern unumgänglich, als er Orientierungen betrachtet, die ihm konkret nur vermöge dieser Darstellungsweise zugänglich sind. Solche Mannigfaltigkeiten sind immer orientierbar, weshalb diese Voraussetzung im weiteren bei Poincaré nicht explizit erwähnt wird.

161 Man darf unterstellen, daß es in jeder Dimension nur endlich viele Teilmannigfaltigkeiten gibt; etwas anderes kommt bei Poincaré nicht vor.

162 Eine ungefähre Vorstellung von dem, was Poincaré gemeint haben könnte, gibt das nachfolgende einfache Beispiel:
Ist V die durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ gegebene Einheitssphäre des R^3, so kann man diese in die beiden Hemisphären

$$H_1: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 > 0$$
$$H_2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 < 0$$

zerlegen. Aus diesen ergibt sich die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0$$

welche den Meridian beschreibt, der gemeinsamer Rand von H_1 und H_2 ist. (H_1 und H_2 selbst sind unberandet). Durch Hinzunahme einer weiteren Gleichung, etwa $x_3=0$, gelangt man schließlich zu Punkten:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ (mit } x_1 > 0)$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ (mit } x_1 < 0)$$

Der Zellenaufbau von S^2 umfaßt somit in diesem Sinne zwei Punkte

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ (mit } x_1 > 0)$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ (mit } x_1 < 0)$$

zwei Kanten (Halbkreise)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0, x_3 > 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 = 0, x_3 < 0$$

und zwei Flächen (Halbkugeln)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 > 0, x_3 < 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 < 0, x_3 > 0$$

Dieser eher umständlich anmutende Aufbau, der allerdings - wie wie gleich sehen werden - sich in gewissen Fällen relativ einfach aus der Art und Weise, wie eine bestimmte Mannigfaltigkeit konkret gegeben ist, ablesen läßt, erlaubt es nun, die Inzidenz zwischen (q-1)dimensionalen und q-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten zu studieren: Geht die q-dimensionale Mannigfaltigkeit α^q aus der (q-1)dimensionalen α^{q-1} in der oben geschilderten Weise hervor, so stehen diese in direkter Beziehung zueinander, geht die q-dimensionale aus der umgekehrt orientierten (q-1)dimensionalen in der geschilderten Weise hervor, so stehen diese beiden in umgekehrter Beziehung zueinander.[163] So gelangt man zu der Festlegung von Inzidenzzahlen ($\alpha_j{}^{q-1}$ eine (q-1)dimensionale Teilmannigfaltigkeit, $\alpha_i{}^q$ eine q-dimensionale):

$$E^q_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \alpha_j{}^{q-1} \text{ nicht im Rand von } \alpha_i^q \text{ auftritt;} \\ 1 & \text{wenn } \alpha_j{}^{q-1} \text{ und } \alpha_i^q \text{ in direkter Beziehung stehen;} \\ -1 & \text{wenn } \alpha_j{}^{q-1} \text{ und } \alpha_i^q \text{ in indirekter Beziehung stehen.} \end{cases}$$

Alle derartigen Inzidenzzahlen, die zu einem festen q gehören, lassen sich zur q-ten Inzidenzmatrix zusammenfassen.

$$T_q = \begin{pmatrix} E^q_{1,1} & E^q_{1,2} \cdots E^q_{1,n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ E^q_{m,1} & E^q_{m,2} \cdots E^q_{m,n} \end{pmatrix}$$

wobei die Einträge nur die Werte -1, 0 und 1 annehmen können. Die Berandungsrelation zwischen einem $\alpha_i{}^q$ und den $\alpha_j{}^{q-1}$ läßt sich damit schreiben in der Form

$$\alpha_i^q \equiv \sum_j E_{i,j} \alpha_j{}^{q-1}$$

(das heißt, rechts steht der vollständige Rand der links aufgeführten Mannigfaltigkeit). Die Gesamtheit aller dieser Kongruenzen nennt Poincaré Schema des Polyeders. Aus diesen Kongruenzen folgt im übrigen sofort, daß der Rand eines vollständigen Randes leer ist, was ja aus algebraischer Sicht (vgl. 6) für die Definition der Homologie geradezu grundlegend ist. Poincaré formulierte diese Einsicht, die für ihn eher nebensächlich war, als Bedingung über die Koeffizienten der Inzidenzmatrizen (vgl. Poincaré VI, 296).

Mit diesem Ansatz gelingt es nun Poincaré einen beachtlichen Fortschritt zu erzielen, insofern er jetzt in der Lage ist, mit Hilfe von Matrizenumformungen sowohl die Betti-

---

Der Übergang von einer (q-1)-dimensionalen Untermannigfaltigkeit zu einer q-dimensionalen ergibt sich also dadurch, daß man eine Gleichung in eine Ungleichung verwandelt. Man beachte, daß die Zellenzerlegung der ganzen Mannigfaltigkeit nicht etwa schon durch das sie definierende System von Gleichungen und Ungleichungen vorgegeben ist; diese muß vielmehr gefunden werden. Es stellt sich deshalb die Frage, ob es immer eine Zellenzerlegung gibt, ein Problem, dem sich Poincaré im § 5 seines ersten Komplements stellt.

163 Im ersten Fall stimmt die von α^q auf α^{q-1} induzierte Orientierung mit der ursprünglichen Orientierung von α^{q-1} überein; im zweiten Fall sind die beiden Orientierungen entgegengesetzt.

Zahlen als auch die von ihm im 2. Komplement eingeführten Torsionskoeffizienten rechnerisch zu bestimmen.[164]

Anknüpfend an diese Betrachtungen über Inzidenzmatrizen gelangt Poincaré im 2. Komplement - das erste ist im wesentlichen dem Beweis des Dualitätssatzes gewidmet - zur Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten mit und solchen ohne Torsion:

> „Celles de la première sorte que j'appelerai variété sans torsions seront celles pour lesquelles les invariants de tous les tableaux T_q sont tous égaux à 0 ou à 1;...
>
> Celles de la seconde sorte, que j'appelerai variétés à torsions, seront celles pour lesquelles certains de ces invariants ne sont égaux ni à 0 ni à 1,..."
>
> (Poincaré VI, 350)

---

[164] Es geht modern gesprochen darum, die Elementarteiler der Inzidenzmatrizen zu ermitteln, wobei folgende Operationen zugelassen sind:

1.) Addition und Substraktion zweier Spalten;
2.) Vertauschung zweier Spalten
3.) Vorzeichenwechsel in einer Spalte;
4.) analoge Operationen für Zeilen (vgl. Poincaré VI, 342).

Mit deren Hilfe läßt sich jede Inzidenzmatrix auf Diagonalform bringen (o.B.d.A. sei $m \geq n$)

$$\tilde{T}_q = \begin{pmatrix} t_1 & & & & \\ & t_2 & & 0 & \\ & & t_3 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & t_m \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

wobei gilt:

1.) alle t_i sind natürliche Zahlen;
2.) t_i/t_{i+1} für $i = 1, \ldots, m-1$;
3.) ist $t_i=0$, so auch $t_j=0$ für $i < j \leq m$;
4.) die t_i sind größte gemeinsame Teiler der Unterdeterminanten (Minoren), die sich ergeben, wenn man in der Inzidenzmatrix i Spalten und m-n+i Zeilen streicht.

In völliger Analogie zur linearen Algebra kann man nun aus der Diagonalmatrix die Anzahl der homolog unabhängigen (q-1)-Mannigfaltigkeiten ablesen. Bezeichnet γ_q den Rang der zur qten Inzidenzmatrix T_q gehörigen reduzierten Matrix, α^q die Anzahl der (q+1)-Mannigfaltigkeiten (also die Zeilenzahl von T_q und die Spaltenzahl von T_{q+1}), so gilt für die q-te Betti-Zahl β_q im Sinne Poincaré's:

$$\beta_q = \alpha^q - \gamma_q - \gamma_{q+1} + 1$$

Die Torsionskoeffizienten der Dimension (q-1) sind gerade die Diagonalelemente der reduzierten Matrix, die ungleich Null und ungleich Eins sind.

Eine ausführliche Darstellung des Rechnens mit Inzidenzmatrizen findet sich bei Seifert-Threlfall 1934, 71-78, wobei man allerdings beachten muß, daß Poincaré's T_q bei Seifert/Threlfall E^{q+1} entspricht (H^{q+1} bezeichnet bei diesen Autoren die zugehörige reduzierte Matrix).

Die Theorie der Elementarteiler wurde 1861 von Henry John Stanley Smith im Zusammenhang mit der Invariantentheorie von Bilinearformen entwickelt (Smith I, 367-409, vgl. hierzu Guerindon-Dieudonné 1985, 102f); eine analoge Aussage im Gewand des Struktursatzes für endliche abelsche Gruppen wurde von L Kronecker 1870 (verbessert von Frobenius 1879) bewiesen (vgl. Waerden 1985, 155). Die Ausdehnung der letzteren Aussage auf endlich erzeugte abelsche Gruppen erfolgte später. Ob Poincaré tatsächlich der erste Mathematiker gewesen ist, der mit Inzidenzmatrizen gearbeitet hat, oder ob diese schon vor ihm in anderen Gebieten der Mathematik (Graphentheorie, Konfigurationen, Geometrie) Verwendung gefunden hatten, konnte ich bislang nicht herausfinden.

Im Falle der Mannigfaltigkeiten ohne Torsion stimmen die Heegardschen und die Poincaréschen Betti-Zahlen überein; bei Mannigfaltigkeiten mit Torsion ist dies nicht mehr der Fall, da hier Untermannigfaltigkeiten auftreten, die zwar nicht selbst beranden, von denen aber ein Vielfaches berandet. Im ersten Fall darf man von $nv \sim 0$ auf $v \sim 0$ schließen („Homologie mit Division"), im zweiten Fall nicht („Homologie ohne Division").[165] Poincaré erklärt selbst die anschauliche Bedeutung seiner Bezeichnungsweise „Mannigfaltigkeit mit Torsion":

> „Cette dénomination se justifie parce que la présence d'invariantes plus grand que 1 est due, comme nous le verrons plus loin, à une circonstance assimilable à une véritable torsion de la variété sur elle-même."
>
> (Poincaré VI, 350)

(Ein Modell für diese Vorstellung liefert das Möbius-Band.)

Diese Betrachtungen über das Wesen der Torsion werden im Paragraphen 6 des 2. Komplements vertieft. Dort stellt Poincaré u. a. fest, daß die Inzidenzmatrizen T_1 und T_p einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die orientierbar ist, keine Torsionselemente aufweisen, was wiederum erklärt, warum das Phänomen der Torsion bei geschlossenen Flächen im gewöhnlichen Raum nicht bemerkt werden konnte (Poincaré VI, 369).

Tritt dagegen ein Torsionskoeffizient in einer bestimmten Inzidenzmatrix auf, so zeigt Poincaré, daß man dann in der entsprechenden Dimension eine nicht-orientierbare Untermannigfaltigkeit bilden kann. (Poincaré VI, 369).[166]

Seine neuen Einsichten wendet Poincaré sofort auf seine Beispiele, denen wir bereits mehrfach begegnet sind, an.[167]

Beispiel 1: Der dreidimensionale Torus T^3

Im Zellenaufbau des Torus T^3, der sich aus dessen Identifikationsschema ergibt (vgl. 3.2), treten nur geschlossene, also randlose, Teilmannigfaltigkeiten (ein Punkt, drei Kreislinien, drei 2-Sphären, der T^3) auf, weshalb sämtliche Inzidenzzahlen Null sind. Für die Betti-Zahlen β_1 und β_2 findet man folglich (vgl. Anm. 163) jeweils die Werte 4 (=3-0-0+1).

Beispiel 3: Der Quaternionenraum

Da auch diese Mannigfaltigkeit geschlossen ist, muß $T_3 = (0,0,0)$ sein; es gibt drei zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten, vgl. das Identifikationsschema oben. Um deutlich zu machen, wie Poincaré rechnet, wollen wir explizit die zu T_1 gehörigen Inzidenzzahlen

---

[165] In der entsprechenden umgeformeten Inzidenzmatrix taucht das n als Diagonalelement (ungleich Null und ungleich Eins) auf. Diese Einträge werden später (Poincaré VI, 363) als „Torsionskoeffizienten" bezeichnet.

[166] Man kann diese Überlegungen Poincaré's in eine Linie stellen mit Möbius' Ideen zum Kantengesetz bei Polyeder, die von ihm anhand des Möbius-Bandes erläutert wurden (Möbius II, 482-485): Vgl. 2.2.2.2 .

[167] Es sei noch erwähnt, daß Poincaré das Aufstellen von Inzidenzmatrizen im 1. Komplement an Hand des „verallgemeinerten" (d.h. n-dimensionalen) Tetraeders, erläutert (Poincaré VI, 297). In diesem Zusammenhang unterscheidet er auch zwischen „geradlinigen verallgemeinerten Tetraedern" - das sind die eben genannten - und „verallgemeinerten Tetraedern" schlechthin, welche homöomorphe Bilder der ersteren sind. (Poincaré VI, 298 n.1). Die Idee, solche verallgemeinerten Tetraeder als Bausteine im Zellenaufbau einer Mannigfaltigkeit zu wählen - also die Grundidee der simplizialen Topologie - findet sich aber nicht klar ausgesprochen bei Poincaré.

ermitteln. Hierzu müssen wir gemäß Identifikationsschema die Beziehungen zwischen eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten (den „Kanten") und nulldimensionalen (den „Ecken") ermitteln. Es gilt folgende Konvention: Ist eine Ecke Anfangspunkt einer Kante, so ist die Inzidenzzahl gleich +1 zu setzen, ist sie Endpunkt, so nehme man -1. Ist sie schließlich Anfangs- und Endpunkt, die Kante also geschlossen, so ist die Inzidenzzahl im Einklang mit dem oben formulierten Prinzip 0.

Wir haben zwei Ecken e_1: $A = B' = C' = D$[168] und e_2: $B = D' = A' = C$ sowie die vier Kanten k_1: $AB = B'D' = C'C$, k_2: $AC = DD' = DB$, k_3: $AA' = C'D' = DB$ und k_4: $CD = BB' = A'C'$.

Da e_1 Anfangspunkt[169] von k_1 ist, erhalten wir für $E^1_{1,1}$ den Wert +1; e_1 ist auch Anfangspunkt von k_2 und k_3, dagegen Endpunkt von k_4. Der Punkt e_2 ist Endpunkt von k_1, k_2 und k_3, aber Anfangspunkt von k_4. Die Inzidenzmatrix T_1 sieht also so aus

$$\begin{array}{ccc} & e_1 & e_2 \\ k_1 & +1 & -1 \\ k_2 & +1 & -1 \\ k_3 & +1 & -1 \\ k_4 & -1 & +1 \end{array}$$

Diese läßt sich auf folgende Diagonalform[170] bringen:

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog erhält man die Inzidenzmatrix T_2, die die Berandungsverhältnisse zwischen „Flächen" (deren gibt es drei) und „Kanten" widerspiegelt. Hier gilt z. B. $E^2_{1,1} = +1$, weil die „Kante" $k_1: AB = B'D' = C'C$ in dieser Orientierung in der „Fläche" $f_1: ABDC = B'D'C'A'$ vorkommt, dagegen ist $E^2_{1,3} = -1$, da k_1 in $f_3: ACC'A' = DD'B'B$ in umgekehrter Orientierung auftritt. Insgesamt erhält man die Inzidenzmatrix

$$\begin{array}{ccccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ f_1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ f_2 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ f_3 & -1 & +1 & -1 & -1 \end{array}$$

welche sich auf die Diagonalgestalt

[168] Poincaré schreibt an dieser Stelle (Poincaré VI, 231-233 und passim) Gleichheitszeichen anstelle der vorher verwendeten Kongruenzzeichens. Die Mannigfaltigkeit wird also nicht mehr im Sinne eines Identifikationsschema betrachtet, wobei die Identifikationen gewissermaßen noch auszuführen sind, sondern als fertiger Gegenstand.

[169] Denn A tritt als Anfangspunkt von AB, B' als Anfangspunkt von B'D' und C' als Anfangspunkt von C'C auf. Man bemerkt, daß man hier beim Aufstellen der Inzidenzmatrizen eigentlich nichts anderes tut als früher beim Ermitteln der Ecken-, Kanten- und Flächenzykel.

[170] Wie man das konkret macht, kann man z.B. Seifert-Threlfall 1934, § 87 entnehmen.

$$\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

bringen läßt. Die Ränge der Matrizen T_1, T_2 und T_3 sind somit 1, 3 beziehungsweise 0, was für die Betti-Zahlen die Werte $\beta_1 = 4-1-3+1 = 1$ und $\beta_2 = 3-3-0+1 = 1$ ergibt - in Übereinstimmung mit den früheren Ergebnissen und mit dem Dualitätssatz. Darüber hinaus treten aber in der Dimension 1 zwei Torsionskoeffizienten mit dem Wert 2 auf, das heißt, daß $H_1(V) \cong Z_2 \oplus Z_2$ gilt.

Auch die Beispiele 4 („verdrehter Torus") und 5 (der projektive Raum P_3R) werden von Poincaré in dieser Weise behandelt. In beiden Fällen tritt ein Torsionskoeffizient in der Dimension 1 mit dem Wert 2 auf. Schließlich kommt er zur Beispielgruppe 6. Mannigfaltigkeiten aus dieser Gruppe, für die eine direkte Interpretation durch ein Identifikationsschema verfügbar ist, lassen sich natürlich genauso behandeln wie die anderen Beispiele, denen wir begegnet sind. Das führt Poincaré an der konkreten Mannigfaltigkeit $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vor, für die er folgende Ergebnisse ermittelt: Die Inzidenzmatrizen T_1 und T_3 bestehen aus lauter Nullen,[171] während T_2 so aussieht[172]

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bringt man diese auf Normalform, so ergeben sich die Diagonalelemente 0, 1, 1, 3.

Im allgemeinen Fall steht ein Identifikationsschema nicht zur Verfügung. Hier geht Poincaré von den Homologien (vgl. oben)

$$(\alpha-1)C_1 + \gamma C_2 \sim 0$$
$$\beta C_1 + (\delta-1)C_2 \sim 0$$

aus und betrachtet den mit μ bezeichneten ggT der vier ganzen Zahlen $\alpha-1, \gamma, \beta, \delta-1$. Er betont ausdrücklich, daß man jetzt - da es um Torsionskoeffizienten geht - nicht dividieren darf. Da jeder Koeffizient ein Vielfaches von μ ist, muß μ auch die entsprechende Determinante teilen. Deren Wert ergibt sich aber zu $2-\alpha-\delta$ (weil $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ nach Voraussetzung).

Poincaré behauptet nun ohne jegliche Begründung, daß die Elementarteiler der Inzidenzmatrix T_2 von $V(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, die ungleich Null und ungleich Eins sind, also die Torsionskoefizienten der Dimension 1, die Werte μ und $(2-\alpha-\delta)/\mu$ besitzen.

Zur Untermauerung dieser These zieht er dann das oben diskutierte Beispiel mit

[171] Die Mannigfaltigkeit ist orientierbar, weshalb T_3 aus lauter Null besteht; alle Kanten haben die einzige Ecke, die es gibt, zum Anfangs- und Endpunkt, weshalb alle Elemente von T_1 verschwinden.

[172] Vgl. auch hierzu Anmerkung 177 unten.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

heran, in dem $\mu = 1$ und $(2-\alpha-\delta)/\mu = 3$ gilt.[173]

Abschließend behandelt Poincaré noch das Heegardsche Beispiel (vgl. 4.1), in dessen Fall er zeigt, daß es in der Dimension 1 einen Torsionskoeffizienten der Ordnung 2 gibt, was seine Fassung des Dualitätssatzes rettet.

Neben der geometrischen Interpretation der Torsionskoeffizienten als Torsion der Mannigfaltigkeit in der entsprechenden Dimension, auf die wir schon weiter oben eingegangen sind, sollten noch zwei weitere Einsichten, die Poincaré im 2. Komplement gewinnt, erwähnt werden: Zum einen ist das die Erweiterung des Dualitätssatzes auf Torsionskoeffizienten (Poincaré VI, 364: Ist V eine orientierbare geschlossene n-Mannigfaltigkeit, so stimmen die Torsionskoeffizienten in den Dimensionen k und n-k-1 überein[174]), zum anderen eine Bemerkung über die verschiedenen Arten von Untermannigfaltigkeiten, die beim Aufbau einer Mannigfaltigkeit auftreten können (Poincaré VI, 351). Er unterscheidet:

1. Gewöhnliche Polyeder, bei denen die Inneren aller Bausteine a_i^q der Dimension q homöomorph zu „Hypersphären" der Dimension q sind (gemeint sind offene q-dimensionale Kugeln),[175] wobei sich diese Homöomorphismen auf die ganze Kugel und den Abschluß der a_i^q erweitern lassen. Beispiel: Tetraeder im R^3.
2. Dies sind Polyeder im Sinne von 1., bei denen aber die Bedingung über die Erweiterbarkeit der Homöomorphismen nicht erfüllt ist. Beispiel: Torus.[176]
3. Polyeder, bei denen die Homöomorphiebildung für die Inneren nicht erfüllt ist.

Poincaré bemerkt weiter, daß die Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten im ersten und zweiten Sinne weitgehend übereinstimmen, daß es aber einen wichtigen Unterschied gibt: In solchen erster Art ist der Durchschnitt zweier a_i^q immer ein a_i^{q-1}, welches mit allen anderen a_i^q einen leeren Durchschnitt besitzt. Folglich treten in der entsprechenden Spalte der Inzidenzmatrix T_q genau eine 1, eine -1 und sonst Nullen auf. Im zweiten Fall dagegen kann es geschehen, daß ein a_i^{q-1} mit einem a_i^q in doppelter Beziehung steht - nämlich direkt und einmal indirekt, was zusammengenommen zur Torsionszahl 0 führt.[177]

Das zweite Komplement schließt mit einer ersten, noch unvollkommenen Formulierung dessen, was später als Poincaré-Vermutung berühmt werden sollte:

> „Pour ne pas trop allonger ce travail, je me bornerai à énoncer le théorème suivant dont la démonstration demanderait quelques développements:
>
> Tout polyèdre qui a tous ses nombres de Betti égaux à 1 et tous ses tableaux T_q bilatères est simplement connexe, c'est-à-dire homéomorphe à l'hyersphère."
>
> (Poincaré VI, 370)[178]

---

[173] Insgesamt hat Poincaré vier verschiedene konkrete Werte für $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in seinen Beispielen untersucht:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist Beispiel 1, der Torus T^3. Wir finden $\mu = 1$ und $2 - \alpha - \delta = 0$. Hier ist also keine Torsion vorhanden.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist Beispiel 4. Wir finden $\mu = 1$ und $2 - \alpha - \delta = 2$. Hier gibt es also einen Torsionskoeffizienten der Ordnung 2.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wird von Poincaré als konkretes Beispiel zu Beispiel 6 angegeben, Es ist $\mu = 1$ und $2 - \alpha - \delta = 1$, weshalb hier keine Torsion auftritt.

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ haben wir soeben untersucht. Es ist auch hier $\mu = 1$, aber $2 - \alpha - \delta = 3$. Damit gibt es einen Torsionskoeffizienten vom Wert 3.

(Weitere Beispiele dieser Art findet man bei Hempel 1976, 122. Beispiel 4 von Poincaré ist hier Beispiel 6.)

Nach dem in der „Analysis-situs" - Arbeit von 1895 erzielten Ergebnis (vgl. 3.2), ist die erste (und damit per Dualität auch die zweite) Betti-Zahl in den Beispielen b) - d) immer 2 (die Spur dieser Matrizen ist stets ungleich zwei). Folglich unterscheiden sie sich vom Standpunkt der Betti-Zahlen aus nicht, wohl aber bei Hinzunahme der Torsionskoeffizienten! Das mag Poincaré in seinem Glauben an die Stärke dieser neuen Invarianten bestärkt haben.

Allerdings genügt auch die Fundamentalgruppe, um die Beispiele b) - d) zu unterscheiden, da diese drei Matrizen paarweise nicht konjugiert in SL(2,Z) sind, wie man sich z.B. anhand ihrer geometrischen Bedeutung klarmachen kann.

[174] So die korrekte Formulierung, wie man sie etwa bei Seifert-Threlfall 1934, 245 findet. Poincaré selbst behauptet fälschlich, „que les tableaux également distants des extrêmes ont mêmes coefficients de torsion" (Poincaré VI, 364).

[175] Poincaré spricht von „simplement connexe (homéomorphes à des hypersphères)" [Poincaré VI, 351].
Man vgl. auch die sogleich zu besprechende erste Formulierung der Poincaré-Vermutung, in der „einfach-zusammenhängend" homöomorph zu einer Sphäre bedeutet, während hier ja homöomorph zu einer offenen Kugel und damit zusammenziehbar gemeint ist. Wahrlich ein „abus de langage", den Poincaré an dieser Stelle begeht.

[176] Dies sieht man anhand des Identifikationsschemas leicht ein: Das Innere des Rechtecks wird homöomorph auf sein Bild im Torus abgebildet. Dieser Homöomorphismus läßt sich aber nicht auf die Kanten erweitern, da diese ja paarweise identifiziert werden.
Will man moderne Vorstellungen bemühen, so wären die Polyeder erster Art solche, bei denen die anheftenden Abbildungen (im Sinne der Zellenkomplexe) $(E^n,S^n) \rightarrow (X,A)$ so geartet sind, daß der Homöomorphismus $E^n \setminus S^n \cong B^n \rightarrow Int(e^n) \subset X$ sich zu einem ebensolchen $E^n \rightarrow e^n \subset X$ erweitern läßt ($Int(e^n)$ ist die offene, e^n die abgeschlossene n-Zelle; vgl. etwa Dieck 1991, 203).

[177] Anschaulich bedeutet dies, daß a_i^{q-1} nicht im Rand von a_i^q liegt, wie das etwa beim Meridian des Torus der Fall ist. Dieser ist ja geschlossen. Auf dem Niveau des Identifikationsschemas macht sich dies dadurch bemerkbar, daß eine Kante (zum Beispiel) in einer Fläche einmal positiv und einmal negativ auftritt: Dies ist etwa bei dem oben diskutierten Beispiel

$$V_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \text{ mit} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

der Fall, wenn man f_1: ABB'A' ≡ CDD'C' und k_1: AA' ≡ BB' ≡ CC' ≡ DD' nimmt: AA' kommt in ABB'A' mit umgekehrter Orientierung als A'A vor, während BB' in der positiven Orientierung als BB' auftritt. Analoges gilt für CC' ≡ DD' in CDD'C' sowie für f_2: ACC'A' ≡ BDD'B' und k_1 wie oben.

[178] Eine Inzidenzmatrix T_q ist „bilatère", wenn $\tilde{T}_q$ nur Nullen und Einsen in der Diagonalen enthält, wenn also anders gesagt keine Torsionskoeffizienten auftreten (vgl. Poincaré VI, 366 und Poincaré VI, 369 [1^er Corollaire]).
Die von Poincaré gewählte Formulierung wird üblicherweise (vgl. Dieudonné 1989, 35) in der im Text angegebenen Weise als Vorform der Poincaré-Vermutung interpretiert. Es ist aber nicht klar, was Poincaré mit „Hypersphäre" meint, da er diesen Begriff äquivok verwendet: Er kann sowohl die offene als auch die

An dieser Stelle drängen sich zwei Fragen auf: Warum wendet sich Poincaré hier dem allgemeinen n-dimensionalen Fall zu? und: Warum beschränkt er sich andererseits auf den Fall der Sphäre? Die Antwort auf die erste Frage ist vermutlich, daß der von Poincaré entwickelte Ansatz (kombinatorischer Aufbau plus Inzidenzmatrizen) für diesen allgemeinen Fall genauso gut funktioniert wie für den dreidimensionalen. Hinsichtlich der zweiten Frage könnte man Poincaré angesichts der weiteren Entwicklung des Homöomorphieproblems für 3-Mannigfaltigkeiten (1919 zeigte J.W.Alexander, daß dieses im allgemeinen nicht mit den traditionellen Invarianten lösbar ist; vgl. 5.1.1) einen geradezu genialen Weitblick unterstellen (von Alexanders Ergebnis wird der Fall der 3-Sphäre nicht tangiert). Das scheint mir aber doch zu weit zu gehen. Eine andere Interpretation, eine eher nüchterne, ist, daß sich Poincaré an dieser Stelle auf die Sphäre (vgl. aber auch Anm. 178) beschränkt, weil er nur für diese die fraglichen Invarianten, die in seiner Formulierung auftreten (also Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten) explizit angeben konnte.

Besonders bemerkenswert ist ferner, daß Poincaré hier keinerlei Voraussetzung über die Fundamentalgruppe macht. Das erstaunt umso mehr, als er ja in der Abhandlung von 1895 bereits die Mittel bereit gestellt hatte, die einzusehen erlauben, daß die konkreten Mannigfaltigkeiten, die er aus Beispiel 6 ableitete und die sich bezüglich ihrer Torsionskoeffizienten unterscheiden, auch in ihrer Fundamentalgruppe differieren (vgl. hierzu Anm. 173).

Dies mag zum einen daran gelegen haben, daß Poincaré im 1. und 2. Komplement die Fundamentalgruppe generell nicht in Betracht sieht, zum andern aber auch daran, daß das Zusammenspiel der Voraussetzungen „geschlossene 3-Mannigfaltigkeit", „orientierbar" und „Fundamentalgruppe", welches ja erst dazu führt, daß die Fundamentalgruppe alle wichtigen Informationen enthält (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 205f), Poincaré noch nicht klar war. Dabei ist zu beachten:

1. Die Voraussetzung der Dreidimensionalität ist von entscheidender Bedeutung. Schon für 4-Mannigfaltigkeiten muß man über die zweidimensionale Homologie eigens Voraussetzungen einführen.[179]

2. Die Torsionskoeffizienten der Dimension zwei einer 3-Mannigfaltigkeit werden durch deren Orientierbarkeitscharakter und i.a. nicht durch die Fundamentalgruppe festgelegt. Insofern hatte Poincaré recht, wenn er in den Torsionskoeffizienten ein neues, von der Fundamentalgruppe unabhängiges Element sah. Allerdings trifft es zu, daß geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe stets orientierbar sind (vgl. Tietze 1908, 111); ob das Poincaré klar war, läßt sich kaum entscheiden.

---

abgeschlossene Kugel B^n beziehungsweise E^n meinen (z.B. Poincaré VI, 365 - vgl. hierzu das oben Gesagte über die Unterscheidung der verschiedenen Arten von Polyedern) als auch die Sphäre S^n im heutigen Sinne. Da Poincaré selten den Randfall - gemeint ist hier die nte Betti-Zahl und die entsprechenden Torsionskoeffizienten - betrachtet, kann man bestenfalls dem Kontext entnehmen, was er mit „Hypersphäre " meint (vgl. auch Scholz 1980, 317). An der hier interessierenden Stelle läßt dieser keinerlei Rückschlüsse auf die Bedeutung des fraglichen Terminus zu, weshalb man auch lesen könnte:
Ein Polyeder (orientierbar und geschlossen dürfen wir sicher ergänzen), dessen Betti-Zahlen in den Dimensionen 1 bis n-1 alle 1 sind und das keine Torsionskoeffizienten aufweist, ist homöomorph zu E^n, also insbesondere zusammenziehbar (B^n kommt wegen der Geschlossenheit der Mannigfaltigkeit nicht in Betracht).

179 Das führt zur verallgemeinerten Poincaré-Vermutung, auf die wir in 7. Ausblick kurz zu sprechen kommen werden.

3. Die Tatsache, daß die Fundamentalgruppe neben der ersten Betti-Zahl auch die eindimensionalen Torsionskoeffizienten festlegt, wurde - im kombinatorischen Kontext - erst 1908 von H. Tietze bewiesen (vgl. unten 4.2). Ob Poincaré diesen Zusammenhang gesehen hat, bleibt unklar.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Torsionskoeffizienten der Dimension 1 immerhin hinreichen, um die Beispiele 3 (Quaternionenraum), 5 (projektiver Raum - Heegards Gegenbeispiel) und die S^3 voneinander zu unterscheiden, ohne auf die Fundamentalgruppe zurückzugreifen. Auch dies mag Poincaré in seinem Glauben an die Stärke der Torsionskoeffizienten bestärkt haben.

Mit den beiden ersten Komplementen hebt Poincaré seine topologischen Untersuchungen auf eine neue Ebene: Durch die Einführung kombinatorischer Methoden, die sich auf den Aufbau einer Mannigfaltigkeit aus niederdimensionalen Bestandteilen und die diesen Aufbau beschreibenden Inzidenzmatrizen stützen, gelingt es ihm nun weitgehend, „intuitive" Argumente bei der Ermittlung von Invarianten zu vermeiden. Insofern ist die Assoziation zu jener Veränderung der Analysis, die im 19. Jahrhundert stattfand und die Felix Klein auf den Namen „Arithmetisierung" taufte, welche Seifert-Threllfall im nachfolgenden Zitat herstellen, durchaus berechtigt:

> „Mit der Einführung der Inzidenzmatrizen hat Poincaré (...) den entscheidenden Schritt zur Arithmetisierung der Topologie getan."
>
> (Seifert-Threlfall 1934, 317 Anm. 14)

Ist eine Mannigfaltigkeit samt Zerlegung gegeben, so lassen sich ihre Invarianten mit den Mitteln der - modern gesprochen - linearen Algebra ermitteln. Das Kontinuierliche wird gleichsam diskretisiert. Deshalb - und das war ja Poincaré's eigentlicher Ansatzpunkt - kann man nun Sätze über zellenzerlegte Mannigfaltigkeiten - insbesondere den Dualitätssatz - ohne Rückgriff auf intuitiv-geometrische Vorstellungen beweisen.[180] Man kann sagen, daß hier die Topologie zu einer theoretischen Wissenschaft zu werden beginnt.

Natürlich werden durch diese Entwicklung auch Fragen und Probleme aufgeworfen. Da ist einmal die Frage, ob sich wirklich jede Mannigfaltigkeit in Zellen zerlegen läßt,[181] und

---

180 Vgl. Dieudonné's erschütterter Kommentar zu Poincaré's intuitiv-geometrischer Vorgehensweise:
„After this clever proof, section VI of this first Complément, which follows, shows Poincaré at his worst, intersecting and „deforming" manifolds in the most reckless way without the slightest justification in an attempt to prove statement B in the particular case n=4, q=1." (Dieudonné 1989, 31)

181 Vgl. hierzu den elften Paragraphen des 1. Komplements sowie die Kritik hieran bei Dieudonné 1989, 31f. Allgemein muß man aber festhalten, daß derartige Fragen (Triangulierbarkeit, Möglichkeiten eines Zellenaufbaus etc.) bei Poincaré stark unter der Unschärfe seiner Definition leiden. Die weitere Entwicklung wird, wie wir in 4. sehen werden, zuerst einmal eine Präzisierung der kombinatorischen Begrifflichkeit (v.a. bei Dehn und Heegard, Tietze [Hauptvermutung!] und Steinitz) bringen, während sich die allgemein topologische Begrifflichkeit ausgehend von Hausdorffs „Grundzüge der Mengenlehre" (1914) weitgehend unabhängig von der kombinatorischen Topologie entfaltete. Allerdings ist festzuhalten, daß schon um 1930 herum ein geschärftes Bewußtsein für das Spannungsverhältnis zwischen kombinatorisch-diskreten und kontinuierlich-topologischen Fragen und Methoden festzustellen ist (vgl. etwa Waerden 1930 und unter 5.2). Eine Zusammenführung in Gestalt von Fragen nach dem Verhältnis der verschiedenen Kategorien zueinander (topologische Mannigfaltigkeiten, Differenzierbarstrukturen, PL-Strukturen usw.) setzte erst um 1930 herum verstärkt ein (vgl. 6).

allgemeiner diejenige nach dem Verhältnis von topologischen und kombinatorischen Methoden (Tietze, Steinitz [vgl. 4.2]), zum andern bleibt das Problem, konkrete Mannigfaltigkeiten zu konstruieren oder zu zerlegen. Die Konstruktion von Gegenbeispielen wird auch in der weiteren Geschichte des Hömöomorphieproblems eine wichtige Rolle spielen. Der „geometrische Rest" blieb darüber hinaus in der Suche nach Normalformen virulent, ohne die das Hömöomorphieproblem für Mannigfaltigkeiten - und damit als dessen prominentester Ausdruck, die Poincaré-Vermutung - nicht zu lösen ist.

3.4 Die Poincarésche Homologiesphäre und die Poincaré-Vermutung

Die Komplemente 3 und 4, die Poincaré im Jahr 1902 seinen Arbeiten zur Analysis situs folgen ließ, beschäftigten sich überwiegend mit Fragen, die wir heute der algebraischen Geometrie zuordnen würden. Zwei Aspekte, die in ihnen bzw. im 5. Komplement von 1904 auftreten, sind jedoch für unseren Zusammenhang hier unmittelbar relevant. Das ist zum einen eine neuartige Beschreibung des sechsten Beispiels aus der Arbeit von 1895, die Poincaré im 3. Komplement gibt und die dieses mit der Theorie algebraischer Kurven und automorpher Funktionen verknüpft, und andererseits die Konstruktion einer Homologiesphäre, des Dodekaederraums (diese Bezeichnung geht auf Threlfall und Seifert, 1931 zurück; vgl. 5.2), welche er im 5. Komplement durchführt. Diese gibt dann Veranlassung zur Formulierung jener Frage, die später als „Poincaré-Vermutung" berühmt werden sollte. Da der Dodekaederraum eine wichtige Rolle in der frühen Topologie spielte und von verschiedenen Autoren (M. Dehn, Kreines, Weber-Seifert, Threlfall-Seifert) unter verschiedenen Gesichtspunkten (Knotentheorie, geometrische Beschreibung, Diskontinuitätsbereich) wieder aufgegriffen wurde, soll im vorliegenden Abschnitt die weitere Entwicklung dieses Beispiels mit betrachtet werden. Die andere historisch wichtige Beispielgruppe - die Linsenräume - werden wir in 4.1 im Zusammenhang mit den Beiträgen H. Tietzes und in 5.3 näher untersuchen.

Wenden wir uns aber zuerst noch einmal kurz dem 6. Beispiel zu. Im dritten Komplement (Poincaré VI, 373-392) geht Poincaré allgemein von einer Gleichung $z^2 = F(x,y)$ aus, wobei x,y und z komplexe Variablen und F ein Polynom sein soll mit der zusätzlichen Forderung, daß die durch $F(x,y) = 0$ definierte algebraische Kurve nur Singularitäten bestimmter Art aufweist.[182] Auf diese Art erhält man eine (reell) vierdimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne Poincaré's. Schränkt man y auf eine geschlossene Kurve in C ein, so

Früh schon nahm allerdings L.E.J. Brouwer mit seiner berühmten „méthode mixte" (welche man sich als Methode der simplizialen Approximation vorstellen darf) eine Mittlerrolle ein.

[182] Ist $(x,y) \in C \times C$ ein Punkt mit $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, so soll weder $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ noch $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ Null werden; in Doppelpunkten $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ muß $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \neq 0$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 \neq 0$ sein. Andere Singularitäten dürfen nicht auftreten. Beispiele dieser Art waren aus der algebraischen Geometrie geläufig; vgl. etwa Picard-Simart 1897, 88-90.

bekommt man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Es zeigt sich, daß diese Zugangsweise unter anderem das Beispiel 6 umfaßt.

Genauer sieht man das so ein (vgl. Poincaré VI, 375f). Es sei F ein Polynom vierten Grades (die algebraische Kurve $F(x,y)=0$ hat dann das Geschlecht 1) in x. Hält man y fest, so ist

$$t = \int_0^u \sqrt{F_y(x)}\, dx$$

ein elliptisches Integral und dessen Umkehrung eine elliptische Funktion mit den Perioden w und w'.

Das zugehörige Fundamentalpolygon ist ein Parallelogramm R, wobei die beiden Seiten w und w' die Perioden („en gandeur et direction" [Poincaré VI, 375]) darstellen.
Durchläuft y eine einfach geschlossene Kurve genau einmal, so induziert dies den Übergang zu einem anderen Parallelogramm R_1, dessen Seiten sich in der Form $\alpha w + \beta w', \gamma w + \delta w'$ darstellen lassen, wobei die aus α, β, γ und δ gebildete Koeffizientenmatrix M aus SL(2,Z) sein soll. Untersucht werden soll nun die dreidimensionale Mannigfaltigkeit

$V = \{(x,y,z) \in C^3 |$ y durchläuft eine einfache geschlossene Kurve und $z^2 = F(x,y)$, F ein Polynom in x und y, vom Grad 4 in x$\}$

Den Punkten dieser Mannigfaltigkeit ordnet nun Poincaré Transformationen des reellen dreidimensionalen Raumes mit den drei reellen Variablen ξ, η, ζ zu mit folgenden Eigenschaften:
ς hängt nur von y ab; sein Wert erhöht sich um 1, wenn y den geschlossenen Weg einmal durchläuft; ξ und η sind lineare Funktionen des Real- und Imaginärteiles des durch $z^2 = F(x,y)$ festgelegten elliptischen Integrals t, wobei für $t \mapsto t + w$ die Variable ξ in $\xi + 1$ übergeht und für $t \mapsto t + w'$ die Variable η in $\eta + 1$. Ersetzt man das Tripel (ξ, η, ζ) durch $(\xi + 1, \eta, \zeta)$ oder durch $(\xi, \eta + 1, \zeta)$ oder auch durch $(\delta\xi - \gamma\eta, \beta\xi + \alpha\eta, \zeta + 1)$, so erhält man immer denselben Punkt von V. Folglich kann man V als Unterlagerung des R^3 auffassen, wobei die Decktransformationsgruppe von den Abbildungen $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi + 1, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, \eta + 1, \zeta)$ und $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta, \zeta + 1)$, erzeugt wird. Also erhält man dieselbe Decktransformationsgruppe wie in Beispiel 6, weshalb die entsprechenden Mannigfaltigkeiten übereinstimmen müssen.
Um die Gestalt dieser Decktransformationen zu ermitteln, muß man die Auswirkung eines vollen Umlaufs von y, oder, wenn man so will, von $\xi \mapsto \xi + 1$ auf ς und η ermitteln. Da der Wert des elliptischen Integrals linear von ξ und η abhängen soll, muß einerseits $t = \xi w + \eta w$ gelten. Andererseits ist nach der Transformation ((ξ_1, η_1) seien die Werte, die (ξ, η) hierbei annehmen) $t = \xi_1(\alpha w + \beta w') + \eta_1(\gamma w + \delta w')$. Also werden - wie die Rechnung zeigt - (ξ, η) und (ξ_1, η_1) durch die Inverse der Transformationsmatrix M, welche wieder aus SL(2,Z) ist, ineinander überführt. Somit lautet die Transformation

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\delta\xi - \gamma\eta, -\beta\xi + \alpha\eta, \zeta + 1)$$

Bei Poincaré gibt es hier einen Vorzeichenfehler. Die Decktransformationsgruppe, die von den angegebenen drei Transformationen erzeugt wird, ist aber dieselbe wie jene aus dem Beispiel 6, da lediglich

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ durch } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1}$$

ersetzt wurde.

Diese Überlegungen werden anschließend auf Kurven höheren Geschlechts beziehungsweie Polynome höheren Grades verallgemeinert (Poincaré VI, 376-392.) Leider sagt Poincaré nichts darüber aus, ob die oben vorgeführten Betrachtungen ihn zur Definition des 6. Beispiels geführt haben, oder ob er sie erst später angestellt hat. Ersteres ist nicht unmöglich, insofern die verwendete Begrifflichkeit ja nicht-topologischen Kontexten entstammt, welche Poincaré auch schon vor 1892 zur Verfügung standen.[183] Wäre dem so, ließe sich neben dem in 3.1.1 angedeuteten allgemeinen Zusammenhang zur Funktionentheorie auch noch ein analytischer herstellen. Im übrigen bemerkt Poincaré noch in der entsprechenden Ankündigung vor der Akademie (Poincaré VI, 371f), daß er auf die durch $z^2 = F(x,y)$ definierten Mannigfaltigkeiten im Zuge seiner Untersuchungen zur Himmelsmechanik (Doppelintegrale für die Reihenentwicklung von Störfunktionen) gestoßen sei. Das wiederum könnte auf einen frühen Ursprung dieser Frage hindeuten, da die Anfänge von Poincaré's Beschäftigung mit der Himmelmechanik, die in den berühmten „Nouvelles méthodes de la Méchanique céleste" (1. Band 1892) gipfelten, schon einige Zeit zurücklagen. Schließlich geht Poincaré auf dem Hintergrund der gerade geschilderten Zugangsweise noch einmal auf Heegards Gegenbeispiel ein (Poincaré VI, 390f), um dieses Mal dessen Fundamentalgruppe zu bestimmen.

Das fünfte Komplement, mit dem Poincaré 1904 die „Analysis-situs"-Reihe abschloß, ist recht lang (vgl. Poincaré VI, 435-498) und reichhaltig. In den gängigen Darstellungen von Poincaré's topologischen Beiträgen (etwa Bollinger 1972, Dieudonné 1989, Hirsch 1985) wird es bestenfalls kurz abgehandelt (eine Ausnahme bildet Scholz 1980, 295f), was die Vermutung nahelegt, daß es hauptsächlich Dinge enthält, die aus moderner Sicht weniger interessant sind oder die erheblich kürzer dargestellt werden können.[184] Dies ist sicherlich teilweise zutreffend; es zeigt sich aber dennoch, daß gerade dieses Komplement einige interessante Ideen und bis heute gültige Resultate enthält. Zudem - und das macht es für unseren Zusammenhang so wichtig - stellt es den Endpunkt in Poincaré's Bemühungen, die 3-Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren, dar.

Das 5. Komplement beschäftigt sich im wesentlichen mit drei Themenkreisen: Skelettaufbau von Mannigfaltigkeiten, geschlossene doppelpunktfreie Kurven auf Henkelflächen sowie mit jener 3-Mannigfaltigkeit, die heute als Dodekaederraum bekannt ist, die wir aber aus Gründen, die später ersichtlich werden, Poincarésche Homologiesphäre nennen wollen. Poincaré beschränkt sich bei seinen Untersuchungen auf 2- und 3-Mannigfaltigkeiten, behauptet aber in der Einleitung, seine Untersuchungen seien verallgemeinerbar.[185] Die allgemeinen Betrachtungen über Skelettaufbau und Zykel fließen teilweise in die Konstruktion der Homologiesphäre ein; wir werden uns im folgenden kurz mit dem Skelettaufbau befassen, um dann zu besagter Mannigfaltigkeit überzugehen.

---

183 Vgl. hierzu 3.1.

184 So „erledigt" Dieudonné die Homologiesphäre, für deren Beschreibung und Erforschung Poincaré viele Seiten braucht (s. unten), in einigen wenigen Zeilen (Dieudonné 1989, 307). Die von Dieudonné gewählte Vorgehensweise entspricht in moderner Ausdrucksweise der Gewinnung der Homologiesphäre von Poincaré als „Diskontinuitätsbereich"; diese geht auf Threlfall-Seifert 1931 zurück (vgl. 5.3).

185 „Cette fois je me suis borné à l'étude de certaines variétés à trois dimensions, mais les méthodes que j'ai émployées pourront être sans doute d'un usage plus général. En passant je me suis étendu assez longuement sur certaines propriétés des courbes fermées que l'on peut tracer sur les surfaces fermées de l'espace ordinaire." (Poincaré VI, 435)

Der Skelettaufbau wird zuerst als Beschreibungsmittel - also nicht als Mittel zum Aufbau - von Mannigfaltigkeiten eingeführt. Ist V eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, die in den R^k ($m \leq k$) eingebettet sein soll,[186] so betrachtet Poincaré die Schnittgebilde, welche entstehen, wenn man V mit einer Schar von Hyperebenen des R^k schneidet. Letztere sollen durch Gleichungen

$$\varphi(x_1,\dots,x_k) = t$$

mit einem reellen Parameter[187] t beschrieben werden und so geartet sein, daß durch jeden Punkt des R^k genau eine dieser Hyperebenen geht. Nun bringe man die Hyperebenen H_t für $t \in R$ mit V zum Schnitt. Es entstehen die Mannigfaltigkeiten[188] $w_1(t),\dots,w_p(t)$, deren Vereinigung mit W_t bezeichnet werde. Somit gilt

$$V = \bigcup_{t \in R} W_t,$$

weshalb man sagen kann, daß das System aller W_t die Mannigfaltigkeit V erzeuge. Darüber hinaus gilt: Ist V geschlossen, so auch jedes $w_i(t)$.[189]

---

186 Da Poincaré im folgenden auch den Fall zuläßt, daß V nichtorientierbar ist, muß er mit der Dimension des R^k „großzügig" verfahren. Früher in der „Analysis-situs"-Reihe wurden meist m-dimensionale Mannigfaltigkeiten im R^{m+1} betrachtet, der nichtorientierbare Fall somit a limine ausgeschaltet (sofern man geschlossene Mannigfaltigkeiten betrachtet).

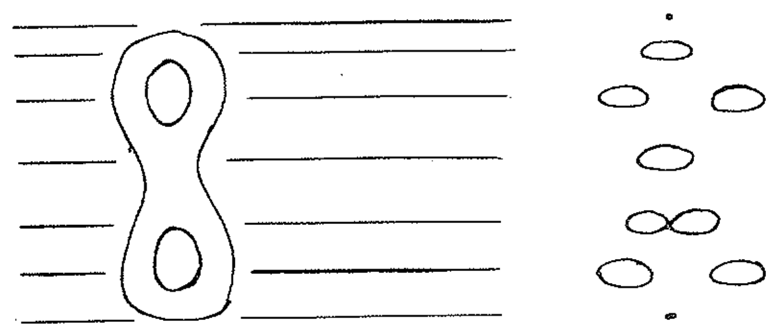
187 Der einfachste Fall wäre, daß $\varphi(x_1,\dots,x_k) = t$ die Gleichung $x_k = t$ bedeutet. Das liefert

$$H(x_1,\dots,x_k) = \{(x_1,\dots,x_k) \mid x_k - t = 0\}$$

Folglich wird eine Hyperebene beschrieben und t ließe sich als „orientierte" Höhe über dem Niveau $x_k = 0$ interpretieren. Die sogleich zu formulierende Eindeutigkeitsbedingung ist hier offensichtlich erfüllt. Vgl. auch 2.2.2.1 für ähnliche Ideen bei Möbius.

188 Stellt man sich V als durch Gleichungen und Ungleichungen gegeben vor (also legt man Poincaré's erste Mannigfaltigkeitsdefinition aus der „Analysis situs" zugrunde), so ergeben sich die $w_1(t),\dots,w_p(t)$ aus V durch Hinzunahme der weiteren Gleichung $\varphi(x_1,\dots,x_k) = t$. Die Tatsache, daß sich bei jedem Schnitt Mannigfaltigkeiten und zwar nur endlich viele ergeben, wird von Poincaré kommentarlos unterstellt.

189 Das ergibt sich direkt aus Poincaré's Definitionen (Poincaré VI, 197f). Im übrigen beachte man, daß i jeweils von t abhängt, was anschaulich besagt, daß das Schnittgebilde $\varphi_t \cap V$ für verschiedene t unterschiedlich viele Komponenten unterschiedlicher Art aufweisen kann. Um ein Beispiel vor Augen zu haben, stelle man sich etwa eine Brezelfläche im R^3 vor, die von Ebenen geschnitten wird:



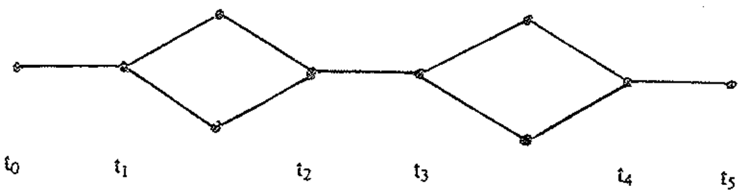
Als nächstes versucht nun Poincaré, die Verhältnisse, die im System aller W_t herrschen, in den R^3 abzubilden. Die Grundidee dabei ist, daß sich zwei Systeme W_t und $W_{t'}$ wenig unterscheiden, wenn t und t' nahe beieinander liegen. Dies ist allerdings nur dann richtig, wenn zwischen t und t' kein „Ausnahmewert" liegt, für den sich das System W_t ändert durch Auftreten einer neuen oder Verschwinden einer alten Komponente (vgl. das Brezelbeispiel aus Anm. 189) oder sich die Gestalt einer Komponente topologisch gesehen ändert (aus einem Punkt wird im Brezelbeispiel eine S^1). Punkte der ersteren Art heißen Verzweigungs- bzw. Vereinigungspunkte, weil der Aufbau der Mannigfaltigkeit später durch Geraden im gewöhnlichen Raum wiedergegeben werden soll.

Dies läßt sich genauer so fassen: Gilt $W_t = \varnothing$ für $t < t_o$ und $t > t_1$ [t_1 minimal, t_0 maximal] (was für kompaktes V der Fall ist), so nehme man für jede Komponente in W_{t_0} einen Punkt. Von diesen gehen Geraden aus, welche sich gemäß der oben geschilderten Weise verzweigen, aber auch wieder zusammenlaufen können.[190] Dabei dürfen Geraden nur dann zusammenlaufen, wenn sich die zugeordneten Mannigfaltigkeiten vereinigen; andere Schnittpunkte sind zu vermeiden. Das entstehende Gebilde nennt Poincaré das Skelett der Mannigfaltigkeit V. Hieran schließen sich zwei Bemerkungen an (vgl. Poincaré VI, 438):

1. Ist V geschlossen und (t_1, y, z) ein Endpunkt einer Strecke, die zum Skelett von V gehört, so wird die zugehörige Komponente w_t für $t \to t_1$ zu einem Punkt.
2. Gilt für eine Mannigfaltigkeit V die Gleichheit
$$W_{t_0} = W_{t_1}$$
(in der oben eingeführten Bedeutung), so kann man die Geraden des Skeletts schließen.[191]

Im weiteren versucht dann Poincaré, die Verzweigungs- und Vereinigungspunkte, die gleichbedeutend mit ausgezeichneten Punkten der entsprechenden Mannigfaltigkeiten

[190] Für unsere Brezelfläche sähe das so etwa aus:

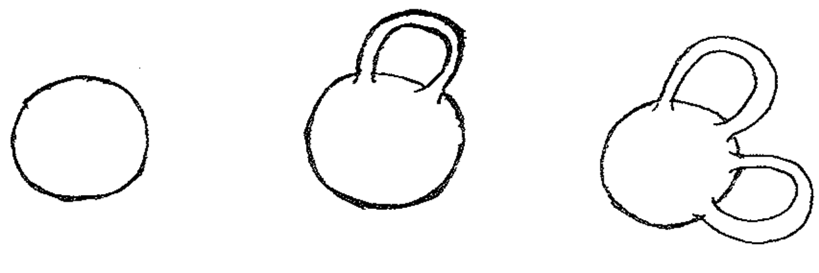


Im übrigen legt Poincaré die Konvention zugrunde, daß die erste Komponente der Punktetripel, welche auf zum Skelett einer Mannigfaltigkeit gehörigen Geraden liegen, gerade gleich t sein soll. Die beiden anderen Komponenten sind soweit beliebig, als nur Geraden der geschilderten Art entstehen müssen.

[191] Hierfür gibt Poincaré den Torus als Beispiel an (Poincaré VI, 438):
„Pour prendre un exemple tout à fait simple, considérons un tore qui sera notre variété V et regardons - le comme engendré par son cercle méridien qui sera notre variété w(t), identique à w(t+2n). Avec nos nouvelles conventions, le squelette de ce tore se réduit à une courbe fermée." (Poincaré VI, 438)
Stellt man sich den Torus als $S^1 \times S^1$ vor, so wird sofort klar, was Poincaré hier gemeint hat und was man modern in etwa einer Faserung oder einer Blätterung gleichsetzen kann.

sind,[192] näher zu charakterisieren (Poincaré VI, 457-447). Es ist hier nicht möglich, die Details der verwickelten Untersuchungen Poincaré's wiederzugeben. Bemerkenswert ist aber aus moderner Sicht jedenfalls, daß er die Singularitäten mit Hilfe differenzierbarer Funktionen, unter Berücksichtigung von deren zweiten Ableitungen, untersucht, wobei er explizit mit den Indizes der Singularitäten arbeitet (Poincaré VI, 439f). Insofern nimmt Poincaré hier wesentliche Ideen der Morse-Theorie vorweg; seine Überlegungen zielen darauf ab festzustellen, wie sich - modern gesprochen - der Homotopietyp einer Mannigfaltigkeit ändert, wenn man einen singulären Punkt (im Skelett beziehungsweise in der Mannigfaltigkeit) passiert.[193] Allerdings findet man nicht explizit die Idee, diesen Übergang im Sinne eines Henkelaufbaus (Dieck 1991, 69) zu standardisieren, vielmehr verwendet Poincaré geometrische Vorstellungen verschiedenster Art. Anders gesagt bleibt sein Vorgehen hier eher beschreibend und wird nicht konstruktiv.[194] Er kommt dabei auch der Vorgehensweise P. Heegards nahe, die dieser bei der Behandlung seiner Diagramme (vgl. unten 4.1) entwickelt hatte. Das werden wir an der jetzt zu besprechenden Homologiesphäre gleich sehen.

Als Vorbereitung zur Definition dieser 3-Mannigfaltigkeit untersucht Poincaré eine (orientierbare) dreidimensionale Mannigfaltigkeit V, deren Skelett das Intervall [0,1] sei. In diesem soll es p Punkte („points remarquables" [Poincaré VI, 475]) $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < 1$ geben, bei deren Überschreitung der Zusammenhang der entsprechenden Mannigfaltigkeit W_t jeweils um 2 zunimmt;[195] W_0 wird als ein Punkt angenommen, W_1 ist dann (2p+1)fach zusammenhängend. Ansonsten soll die Mannigfaltigkeit W_q homöomorph zu sich selbst bleiben, wenn q zwischen zwei Werten t_i und t_{i+1} variiert ($i = 1,\ldots,p-1$). Insbesondere ändert sich deren Homotopietyp nicht zwischen t_i und t_{i+1}.



[192] „Remarquons que si l'on considère une des valeurs t_0 qui correspondent aux points de bifurcation, et pour lesquelles une des variétés w_i se dédouble, la variété $w_i(t_0)$ admet également un point singulier. Cela va donc nous obliger à étudier ces points singuliers." (Poincaré VI, 437)

[193] Das Hauptergebnis für Flächen im orientierbaren Fall lautet:
„Si donc V a deux dimensions et est bilatère, son squelette n'aura d'autre point singulier que les cul-de-sac et les bifurcations. C'est là le secret de la simplicité relative de l'Analysis situs des surfaces ordinaires."
(Poincaré VI, 443)
Im Falle von 3-Mannigfaltigkeiten liegen die Dinge komplizierter (vgl. Poincaré VI, 444-447).

[194] Die einzigen Ausnahmen hiervon sind unten beschrieben. Nebenbei bemerkt findet sich in diesem Zusammenhang bei Poincaré auch das Identifikationsschema der projektiven Ebene; vgl. Poincaré VI, 443.

[195] Da das Skelett nur aus einer Strecke besteht, gibt es zu jedem $t \in [0,1]$ nur eine Zusammenhangskomponente in W_t, die wir der Einfachheit halber selbst mit W_t bezeichnen. Dieses W_t soll immer eine geschlossene orientierbare Fläche sein (Poincaré VI, 475).

Das Überschreiten eines kritischen Wertes t_i entspricht somit dem Anheften eines Henkels (wenn man vom kleineren zu größerem t übergeht) beziehungsweise dem Wegnehmen eines solchen. Letzteres hat Auswirkungen auf die Zykel, in dem Sinne, daß es auf $W_{t_i+\varepsilon}$ zwei Klassen von Zykel gibt,[196] die dort nichthomolog sind, während sie in $W_{t_i-\varepsilon}$ nullhomotop sind bzw. „gar nicht mehr vorhanden". Dabei darf man noch annehmen, daß die fraglichen Zyklenklassen Repräsentanten besitzen, welche doppelpunktfrei sind. Ein Teil der weiteren Ausführungen Poincaré's läßt sich nun so verstehen, daß man Henkel wegnimmt und die entstehenden Löcher (je zwei pro Henkel) durch Kreisscheiben schließt. Die Rolle der Ränder übernehmen dann ausgezeichnete Zykel wie oben beschrieben. Nach Wegnahme aller Henkel entsteht folglich eine Fläche mit 2p Rändern bzw. Löchern, die Poincaré als $W-\sum S_q$ schreibt (Poincaré VI, 477). Nach Verschließen durch Kreisscheiben entsteht eine einfach-zusammenhängende Fläche im Sinne Poincaré's, das heißt eine, die zu S^2 homöomorph ist:

> „$W_1 = W-\sum S+\sum B'+\sum B''$ est homéomorphe à la sphère entière, c'est-à-dire simplement connexe."
>
> (Poincaré VI, 477)[197]

Somit ist W eine Henkelfläche vom Geschlecht p. Merkwürdigerweise benutzt Poincaré diese auf F. Klein zurückgeführte Modellvorstellung (vgl. 2.2.4) nicht explizit. Zusammenfassend stellt Poincaré fest:

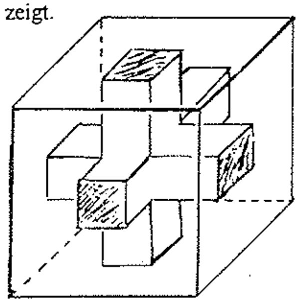
> „On peut donc dire qu'en pratiquant dans V les p coupeurs A_q on rend cette variété simplement connexe. Pratiquant ces p coupures, et déformons notre variété de façon à écarter les deux lèvres de ces coupures; la variété nouvelle U ainsi obtenue sera simplement connexe, limitée par une surface simplement connexe H homéomorphe à une sphère. Sur cette surface simplement connexe nous distinguerons 2p aires simplement connexes qui seront les deux lèvres des p coupures, et que j'appellerau les cicatrices; ces cicatrices seront conjugées deux à deux."
>
> (Poincaré VI, 478)

196 Man denke an einen Zykel, der entlang des Henkels läuft (eine „Parallele" oder ein „Breitenkreis") sowie einen, der um den Henkel herumläuft (ein „Meridian"). Ersterer „verschwindet" in Poincaréscher Terminologie, wenn man den Henkel wegnimmt, letztere wird nullhomotop:
„Supposons que nous fassions décroître t et que t passe par une des valeurs remarquables; il arrive alors ... qu'un des cycles èquivalents à C deviennent èquivalents à zéro et, d'autre part que tous les cycles qui rencontraient C cessent d'exister." (Poincaré VI, 475)

197 „Sphère entière" ist hier im Gegensatz zur gelochten Sphäre gemeint; möglich wäre auch die Lesart „Vollkugel" (denn es geht vermutlich um Henkelkörper, nicht um -flächen).

Damit hat Poincaré gewissermaßen die eine Hälfte dessen, was wir heute eine Heegard-Zerlegung[198] nennen, gewonnen. Die Formulierung „eine Hälfte" soll darauf hindeuten, daß ja geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten durch Identifikation der Oberflächen zweier Henkelkörper miteinander entstehen;[199] diese Idee wird im Anschluß von Poincaré entwikkelt.

An dieser Stelle trat bei Poincaré erstmals explizit die Idee auf, daß man eine geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit in zwei Henkelkörper gleichen Geschlechts zerlegen kann. Auf diese Tatsache hatten zuvor schon andeutungsweise W. Dyck (vgl. 2.3.1) und dann ausführlicher P. Heegard (vgl. 4.1) hingewiesen, wenn auch die fragliche Zerlegung bei letzterem eher eine Folgerung denn die Grundlage seiner Konstruktionsweise für 3-Mannigfaltigkeiten gewesen ist. Bezüglich der Abhängigkeit Poincaré's von Heegard im Punkte Heegard-Zerlegung sollte man bedenken, daß sich gerade Poincaré's Würfelbeispiele aus der Analysis-situs-Arbeit (vgl. 3.2) besonders gut eignen, diese Idee auszubilden, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



Man sieht hier direkt, daß die entstehende Mannigfaltigkeit aus zwei Henkelkörpern vom Geschlecht drei zusammengefügt ist. Im übrigen gibt es viele Berührungspunkte zwischen der gerade vorgeführten Überlegung und jenen, die Poincaré zur Fundamentalgruppe seiner Beispiele führten.

Insgesamt darf man festhalten, daß die Idee der Heegard-Zerlegung Poincaré sicher nicht sehr neu war; es scheint keineswegs ausgeschlossen, daß er diese auf dem Hintergrund seines Beispielsmaterials unabhängig von Heegard, den er ja im 5. Komplement niemals nennt, entwickelt hat.

Im weiteren stellt Poincaré noch einige Überlegungen zu Henkelkörpern an - also zu berandeten 3-Mannigfaltigkeiten, deren Rand eben eine Sphäre mit Henkeln ist. Er kommt dabei zu dem (falschen) Schluß, daß zwei von Henkelflächen berandete 3-Mannigfaltigkeiten homöomorph sind, wenn dies für ihre Randflächen gilt, wenn also - gemäß der Klassifikation der Flächen - die Anzahlen an Henkeln übereinstimmen (Poincaré VI, 479).[200]

198 Vgl. etwa die klassische Darstellung dieses Gegenstands bei Seifert-Threlfall 1934, 219-221 oder die moderne Darstellung bei Hempel 1976, 14-23.

199 Vgl. Seifert-Threlfall 1934, 220.

200 Poincaré warnt ausdrücklich davor, daß man sich das Innere eines Henkelkörpers nicht zu einfach vorstellen darf (Poincaré VI, 479), verfällt aber dennoch in einem ähnlichen Fehler wie vor ihm schon Möbius (vgl. 2.2.2.1). Als Gegenbeispiel nehme man eine gewöhnliche Vollkugel und den von Alexanders

Als Vorbereitung zur Definition seiner Homologiesphäre betrachtet Poincaré folgende Verallgemeinerung der obigen Situation: Es sei V eine 3-Mannigfaltigkeit, deren Skelett sich wieder auf die Strecke [0,1] reduziere. Für die zugehörigen geschlossenen und orientierbaren 2-Mannigfaltigkeiten W_t gelte, daß ihr Zusammenhang zwischen 0 und 1/2 zunehmen und zwischen 1/2 und 1 wieder abnehmen soll. W_0 und W_1 sind jeweils ein Punkt, weshalb V geschlossen ist; darüber hinaus soll $W_{1/2}$ den Zusammenhang (2p+1) haben. Folglich gibt es p Punkte zwischen 0 und 1/2, an denen der Zusammenhang von W_t jeweils um 2 zunimmt, und p Punkte zwischen 1/2 und 1, an denen er jeweils um 2 abnimmt. Also liegt zwischen 0 und 1/2 genau die zuvor betrachtete Situation, zwischen 1/2 und 1 die inverse vor. Es sei

$$V' = \bigcup_{t=0}^{1/2} W_t \text{ und } V'' = \bigcup_{t=1/2}^{1} W_t .$$

Dann entsteht V, indem man V' und V" längs des beiden gemeinsamen Randes $W_{1/2}$ miteinander verheftet:[201]

$$V = V' \underset{W_{1/2}}{\cup} V''$$

Diese Darstellung betont die Analogie zur Heegard-Zerlegung[202], während die Darstellung als Vereinigung $V = V' \cup V''$ mit $W_{1/2} = V' \cap V''$ den weiteren Überlegungen Poincaré's zugrunde liegt. In deren Verlauf versucht er nämlich mit konkret-geometrischen Überlegungen die Fundamentalgruppe von V zu berechnen, wobei er nicht anderes macht, als die „Seifert-van Kampen-Situation"

gehörnter Sphäre begrenzten Raum. Anders geartete, auf Verknotung beruhende Gegenbeispiele konstruierte 1908 H. Tietze (vgl. 4.2).
Ersetzt man allerdings „von einer Henkelfläche berandete 3-Mannigfaltigkeit" durch „von einer Henkelfläche berandeter Henkelkörper" und unterstellt, daß letzterer aus ersterer in Standardmanier hervorgeht, so erhält man eine zutreffende Aussage. Diese Interpretation würde also Poincaré's Behauptung retten, nicht aber diejenige von Möbius, bei dem weder von Henkelflächen noch von -körpern, sondern nur allgemein von Flächen die Rede war.

201 Bei Poincaré heißt es:
„La variété V pourrai se décomposer en deux autres V' et V" correspondant, la première aux valeurs de t comprises entre 0 et 1/2, la seconde aux valenrs de t comprises entre 1/2 et 1. Chacune de ces deux variétés partielles répond aux conditions du paragraphe précédent; elle est développable et c'est la variété V formée par leur réunion qu'il s'agit maintenant d'étudier." (Poincaré VI, 487)
(Der Begriff „développable" bedeutet „homéomorphe à une portion de l'espace plan" [Poincaré VI, 479], was man hier lesen sollte als „in R^3 einbettbar".)
Genauer gesagt geschieht die Verheftung von V' und V" durch einen Homöomorphismus $W_{1/2} \to W_{1/2}$, welcher durch die Bilder bestimmter Kurven festgelegt wird.
Im übrigen ist oft nicht recht klar, ob Poincaré Henkelflächen oder Henkelkörper meint. V' und V" müssen natürlich Henkelkörper sein; allerdings bezeichnet er die W_t ausdrücklich als „surfaces" (Poincaré VI, 487).

202 Stellt man sich vor, daß $W_{1/2}$ durch sukzessives Henkelanhaften entsteht, so reduziert sich ja die Vereinigung $\bigcup_{t=0}^{1/2} W_t$ auf $W_{1/2}$, weil $W_i \subset W_j$ für $0 \le i < j \le 1/2$ gilt. So betrachtet wird der ganze „Unterbau" $\bigcup_{t\in[0,1/2]} W_t$ eigentlich überflüssig und man fragt sich, warum Poincaré ihn überhaupt einführt.

$$\begin{array}{ccc} V & \supset & V'' \\ \cup & & \cup \\ V' & \supset & W_{1/2} \end{array}$$

zu untersuchen. Dabei kommen ihm natürlich die zuvor über V' und V" gewonnen Erkenntnisse, insbesondere jene über Zykel, zugute. Das erste wichtige Zwischenergebnis lautet ($W = V' \cap V'' = W_{1/2}$ bei Poncaré; „équivalent" heißt hier homotop):

„Tout cycle de V est équivalent à un cycle de W." (Poincaré VI, 490)

Schließlich gelangt er zu folgendem Resultat, wobei Δ eine Determinante bedeutet, die sich aus der Aufstellung der Relationen für die Erzeugenden der Fundamentalgruppe von V für die entsprechende Homologie ergeben und die die Art und Weise ausdrückt, wie längs $W_{1/2}$ verheftet wird:[203]

1.) Ist $|\Delta| > 1$, so ist bei Betrachtung von Homologie mit Division $\beta_1(V) = 1$, aber es treten Torsionskoeffizienten auf. Anders gesagt verschwindet in diesem Falle der freie Anteil von $H_1(V)$, aber nicht der Torsionsanteil. Insbesondere gilt nicht $H_1(V) \cong H_1(S^3)$.
2.) Ist $|\Delta| = 1$, so ist $\beta_1(V) = 1$ ohne Division; Torsionskoeffizienten gibt es keine. Somit hat man dann $H_1(V) \cong H_1(S^3) \cong \{0\}$
3.) Ist $\Delta = 0$, so ist $\beta_1(V) > 1$.[204]

Poincaré gelangt hier zu einer weitgehenden Aufklärung der Struktur der Fundamentalgruppe (und damit der ersten Homologiegruppe) einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit, welche aus einer Heegard-Zerlegung des Geschlechts p hervorgeht (siehe unten). Den zweiten Fall kommentiert Poincaré so:

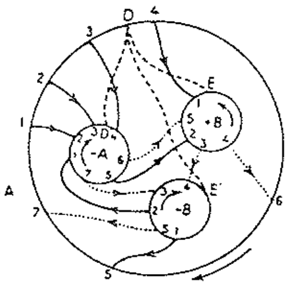
„Le nombre de Betti et les coefficients de torsion sont donc les mêmes que pour une variété simplement connexe. Cela ne veut pas dire comme nous le verrons bientôt, que la variété V soit simplement connexe."

(Poincaré VI, 492)[205]

Man bemerkt, daß hier Poincaré stillschweigend die Orientierbarkeit von V und damit die Gültigkeit des Dualitätssatzes unterstellt: Anderfalls hätte es ja wenig Sinn von der Betti-Zahl zu reden und so zu tun, als seien mit Dimension 1 bereits alle Invarianten festgelegt.[206]

203 Vgl. Poincaré VI, 491f.
204 Dieser Fall wird von Poincaré mit Hilfe der Minoren der Determinante noch weiter ausdifferenziert: vgl. Poincaré VI, 493.
205 „Simplement connexe" ist hier wie schon oft bei Poincaré als „homöomorph zu S^3" zu lesen.
206 Vgl. auch das folgende Zitat, das sich einige Zeilen später findet:
„Revenons au cas Δ est égal à ± 1. Dans ce cas, on peut se demander si la variété est simplement connexe puis qu'elle a même nombre de Betti et mêmes coefficients de torsion que les variétés simplement connexes. Nous allons voir, et c'est le but principal de ce travail, qu'il n'en est pas toujours ainsi, et pour cela nous nous bornerons à donner un exemple."
(Poincaré VI, 493)
Das fragliche Beispiel ist die Homologiesphäre. Man kann dieses Zitat als einen erneuten Hinweis darauf nehmen, wie wichtig Poincaré das Klassifikationsproblem gewesen ist.

Es folgt die Konstruktion der Homologiesphäre und die Bestimmung von deren Fundamentalgruppe (Poincaré VI, 493-498). Hierzu wählt Poincaré $W_{1/2}$ als orientierbare geschlossenen Fläche mit fünffachen Zusammenhang, also als Sphäre mit zwei Henkeln oder auch als Brezelfäche. Die dreidimensionalen von $W_{1/2}$ berandeten und orientierbaren Mannigfaltigkeiten V' und V'' sind die ausgefüllten Henkelkörper, also sozusagen „richtige" Brezeln, in die man hineinbeißen kann. V' und V'' liefern durch Identifikation längs $W_{1/2}$, die geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit V.[207] Wie schon im wesentlichen Heegard erkannt hatte (vgl. 4.1), läßt sich dieser V erzeugende Prozeß durch die Angabe des Identifikationsschemas auf $W_{1/2}$ charakterisieren.[208] $W_{1/2}$ entsteht aus S^2, indem man zwei Paare von paarweise disjunkten Kreisen ausschneidet und die Ränder der Löcher, das sind vier Kreislinien, paarweise identifiziert:



Die vier Kreislinien sind (die Vorzeichen deuten entgegengesetzte Orientierung an) +A, -A, +B und -B. Die Zeichenebene stellt somit die 2-Sphäre dar, wobei man sie sich durch einen unendlich fernen Punkt abgeschlossen vorzustellen hat.[209] Diese Kreise geben anschaulich gesprochen an, wie die Henkel von V' angesetzt werden. Analog muß man durch ein zweites Paar von doppelpunktfreien, sich nicht schneidenden Zykeln auf $W_{1/2}$ festlegen, wie die Henkel von V'' anzufügen sind. Genauer gesagt geschieht dies durch Auszeichnung zweier einfach geschlossener disjunkter Kurven, welche $W_{1/2}$ nicht zerstücken,

Die Annahme der Orientierbarkeit ist gerechtfertigt, insofern Heegard-Diagramme auf (gewöhnlichen) Henkelflächen stets orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten liefern (vgl. etwa Seifert-Threlfall 1934, 219f).

207 Man kann das auch so sagen: Die berandete Mannigfaltigkeit V' (die ausgefüllte Brezel) wird unter einem Automorphismu $\partial V' \to \partial V'$ mit sich selbst identifiziert (vgl. Dieck 1991, 72).

208 Poincaré erwähnt Heegard merkwürdigerweise überhaupt nicht, was die Vermutung nahelegt, daß er diesen Teil von Heegards Arbeit nicht zur Kenntnis genommen hat. Das klingt zunächst einmal befremdlich, ist aber zumindest nicht ausgeschlossen, da Heegard sein Gegenbeispiel gegen Poincaré's Dualitätssatz gerade nicht als Heegard-Diagramm einführt sondern mit Hilfe von Gleichungen (Heegard 1916, 233) und Poincaré sich immer auf diese Darstellung bezog (vgl. 3.3). Auf die Identifikation zweier Volltori längs ihrer Oberfläche kommt Heegard erst im weiteren Verlauf seiner Ausführungen zu sprechen (Heegard 196, 234). Das würde allerdings bedeuten, daß Poincaré Heegards Berechnung der Betti-Zahlen seines Beispiels nicht gelesen hat.

209 Heute nennt man dies die Einpunktkompaktifizierung der Ebene. Die hier gegebene Darstellung folgt im wesentlichen Weber-Seifert 1933, 244; Poincaré selbst verwöhnt seinen Leser nicht durch irgendwelche Kommentare.

auf die die Meridiane von V'' abgebildet werden, wobei die Tatsache benutzt wird, daß solch ein System einen Homöomorphismus der Brezelfläche auf sich eindeutig festlegt.

Die Existenz eines solchen zweiten Systems hat Poincaré durch seine langwierigen Betrachtungen zu geschlossenen Zykeln sicher gestellt (Poincaré VI; 479-494). Auf diese Untersuchungen, die u.a. eine gewisse Klärung der auf der Brezelfläche möglichen Heegard-Diagramme brachten, indem sie die Homologieklassen charakterisierten, welche einfach geschlossene Kurven enthalten, möchte ich nicht näher eingehen. Einige Hinweise zu Poincaré's Ergebnissen findet man bei Reidemeister 1933, 193f oder Stillwell 1993, 214f.

Es ist geradezu erstaunlich, wie nahe Poincaré modernen Vorstellungen hier kommt (wie man sie etwa bei Hempel 1976 findet), wobei sein Vorgehen anders als bei Heegard durchaus klar und gut begreiflich ist. Allerdings beschränkt sich Poincaré auf ein Beispiel und gibt kaum Hinweise zu einer allgemeinen Methode. Graphische Darstellungen wie sie erstmals von Poincaré zur Beschreibung des Aufeinanderklebens zweier Henkelkörper verwendet wurden, heißen heute Heegard-Diagramme; richtiger vom historischen Standpunkt wäre Poincaré-Diagramme.

Genauer gesagt geht Poincaré folgendermaßen vor: Auf der gemeinsamen Randfläche $W_{1/2}$, die topologisch ja eine Brezelfläche, also eine Sphäre mit zwei Henkel, ist, werden zweimal zwei Meridianschnitte vorgegeben, welche die Henkelfläche in eine vierfache gelochte Sphäre zu überführen erlauben. Anschaulich gesprochen geben die Meridiane an, nach welcher „Seite hin" die Henkel auszufüllen sind: In einem ausgefüllten Henkel ist ja der Meridian nullhomotop. Man kann deshalb von Meridianen sprechen, welche „nach innen" nullhomotop bei Ausfüllen werden, und von solchen, welche „nach außen" hin nullhomotop werden (vgl. Reidemeister 1933, 192f).

Das erste Paar liegt natürlich auf der Hand: Das sind gewöhnliche Meridianschnitte („cycles fondamentaux") der Henkel. Bei Poincaré sind dies $K_1' = C_1$ und $K_2' = C_3$ (Poincaré VI, 493). Die beiden anderen Meridianschnitte heißen bei Poincaré K_1'' und K_2''. Der erstere, der die Punktepaare +A1,-A2; +A2,-A3; +A3,-A4; +A4,+B1; -B1,+A5; -A5,+B2; -B2,-A1 durchläuft, ist in der Abbildung durch ausgezogenen Linien wiedergegeben, der zweite, der die Punktepunkte +B3,-B4; +B4,+A6; -A6,+B5; -B5,+A7; -A7,-B3 passiert, ist punktiert dargestellt. Im Anschluß hieran untersucht Poincaré, was geschieht, wenn man $W_{1/2}$ gemäß K_1'' und K_2'' zerschneidet. Schließlich gelangt er zu folgendem Ergebnis:

> „L'identité des deux figures nous montre que la surface W est homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles K_1', K_2', K_1'', K_2'' correspondent les cycles K_1'', K_2'', K_1', K_2'."
>
> (Poincaré VI, 496)

Es gibt also einen involutorischen Automorphismus von $W_{1/2}$ nach $W_{1/2}$, der die Paare von Meridianschnitten gegeneinander austauscht.

Im weiteren berechnet Poincaré die Fundamentalgruppe von V, wobei er den Satz von Seifert und van Kampen in einer konkreten Situation vorwegnimmt. Hierzu wählt er vier Erzeugende C_1, C_2, C_3 und C_4 der Fundamentalgruppe von $W_{1/2}$ und drückt mit ihrer Hilfe die geschlossenen Wege (Meridianschnitte) K_1'' und K_2'' aus (K_1' entspricht ja C_1, K_2' dem C_2). Die auf diese Art und Weise erhaltenen Wörter in C_1 bis C_4 liefern die Relationen für die Fundamentalgruppe von V. Dabei ist zu beachten, daß C_1 und C_3 in V' bzw. V'' nullhomotop werden, weshalb sich die Anzahl der Erzeugenden für $\pi_1(V)$ auf zwei reduziert:[210]

$$\pi_1(V) = \langle C_2, C_4 | C_2^4 C_4 C_2^{-1} C_4 = C_4^{-2} C_2^{-1} C_4 C_2^{-1} = 1 \rangle$$

Diese Gruppe läßt sich homomorph auf die Ikosaedergruppe abbilden, ist also sicher nicht trivial. Vgl. POINCARÉ VI, 496-498; moderne Darstellungen sind Weber-Seifert 1933, 244-253 (eng an Poincaré angelehnt), Seifert-Threlfall 1934, 216-221 und Hempel 1976, 17-20. Genauer gesagt ist die Ikosaedergruppe eine Untergruppe der Ordnung 2 von $\pi_1(V)$; letztere Gruppe wird als binäre Ikosaedergruppe bezeichnet (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 218). Man beachte aber, daß Poincaré keine explizite, über die Angabe der Erzeugenden und Relationen hinausgehende Charakterisierung der Fundamentalgruppe seiner Homologiesphäre angegeben hat. Vgl. auch unten 5.2.

Geht man andererseits zur Homologie über, rechnet man also kommutativ, so ergeben sich die für die oben schon angesprochene Determinante Δ maßgeblichen Relationen:

$$(1')\ 3C_2 + 2C_4 \sim 0 \quad \text{und} \quad (2')\ -C_4 - 2C_2 \sim 0$$

Die zugehörige Determinante ist 1, woraus folgt, daß $\beta_1(V) = 1$ und damit $\beta_2(V) = 1$ ist; Torsionskoeffizienten treten keine auf;[211] beim Abelschmachen ergibt sich ein trivialer Quotient. Folglich ist V eine Mannigfaltigkeit, die bezüglich ihrer Betti-Zahlen und ihrer Torsionskoeffizienten wie die 3-Sphäre aussieht, deren Fundamentalgruppe aber nicht verschwindet. Demnach sind Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten zusammen nicht stark genug, um eine Mannigfaltigkeit vom topologischen Standpunkt aus zu kennzeichnen. Eine Frage liegt nun nahe:[212]

> „Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?"
>
> (Poincaré VI, 498)

Leider läßt Poincaré uns hier im Stich:

> „Mais cette question nous entraînerait trop loin." (Poincaré VI, 498)

Damit hatte die Poincaré-Vermutung, wie man sie später nennen sollte, das Licht der Welt erblickt, welche die Topologen bis heute beschäftigt. Als Vermutung positiv formuliert besagt diese:

[210] Anschaulich entsprechen C_1 und C_3 Meridiankreise der Henkel, während C_2 und C_4 den Henkeln entlanglaufen.

[211] Die Fundamentalgruppe $\pi_1(V)$ des Dodekaederraumes hat die Eigenschaft, daß sie mit ihrer Kommutatoruntergruppe übereinstimmt: Sie ist perfekt. Folglich ergibt sich eine triviale erste Homologiegruppe, da diese ja gerade gleich dem Quotienten von $\pi_1(V)$ nach der Kommentatoruntergruppe ist.

[212] Natürlich liegt eine andere Frage genauso nahe: Wird eine geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit durch ihre Fundamentalgruppe bis auf Homöomorphie eindeutig charakterisiert? Diese wurde nach Vorarbeiten von H. Tietze (1908 - vgl. 4.2) durch J.W. Alexander 1919 (vgl. 5.1.1) definitiv negativ entschieden.
Im Nachhinein ist es äußerst bemerkenswert, daß Poincaré sich gerade auf die einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit seiner Frage einschränkte, da es ja gerade dieser Fall ist, der bis heute allen Beweisversuchen und Widerlegungsbestrebungen getrotzt hat.
Zur Bezeichnung „Poincarésche Vermutung" vergleiche man 5.4, dort insbesondere Anmerkung 89.

Eine geschlossene (orientierbare) 3-Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe trivial ist, ist der 3-Sphäre homöomorph.

Da wir heute anstatt „mit trivialer Fundamentalgruppe" auch - im Unterschied zu Poincaré 1904 - „einfach-zusammenhängend" sagen, können wir die Poincaré-Vermutung so formulieren:

Eine geschlossene (orientierbare) einfach-zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ist der 3-Sphäre homöomorph.

Hierbei ist die Bedingung „orientierbar" überflüssig, da eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe notwendig orientierbar ist. Hierauf hat als erster H. Tietze explizit hingewiesen (vgl. Tietze 1908, 111), während Poincaré nichts über die die genaueren Voraussetzungen seiner Untersuchungen sagt.

Natürlich muß man die Poincaré-Vermutung im allgemeinen Kontext topologischer Klassifikationsbestrebungen insbesondere des Homöomorphieproblemes sehen. Sie stellt aber dabei eine Art von hartem Kern dar, insofern sich weitergehende Klassifikationsbemühungen schon bald als sehr schwierig erweisen sollten (vgl. 5.1.1).

Allerdings sollte man den Stellenwert, welcher Poincaré der von ihm aufgeworfenen Frage einräumte, nicht überschätzen. Die Art und Weise, wie Poincaré seine Abhandlungen schrieb und aufbaute (vgl. auch Anm. 22 in diesem Kapitel) war aus moderner Sicht recht unkonventionell. Man könnte sie am ehesten als schriftlich fixierten inneren Dialog des Autors mit sich selbst kennzeichnen. Im Ablauf dieses Dialogs treten Fragen, und zwar solche, die eine Antwort unmittelbar finden, wie auch solche, bei denen eine Antwort offenbleibt, durchaus häufiger auf. Sie geben den weiteren Gedanken des Autors eine Richtung, ohne aber immer eine ausdrückliche Überzeugung des Verfassers darzustellen.

Bevor wir uns der weiteren Geschichte der Homologiesphäre von Poincaré zuwenden, wollen wir noch einmal kurz den Stand zusammenfassen, der mit Poincaré's letztem Komplement erreicht wurde. Dabei sind drei Aspekte hervorzuheben:

1. Der Skelettaufbau von Mannigfaltigkeiten sollte sich in modifizierter Gestalt des Anheftens von Henkeln im Rahmen der Morse-Theorie als sehr nützlich erweisen. Poincaré führte hier völlig neue Techniken ein, die bis dahin nur im zweidimensionalen Fall eine gewisse Beachtung gefunden hatten (Möbius, Klein). Darüber hinaus verwendete und klärte er die Methode Heegards.

2. Poincaré gelang es mit weitgehend geometrischen Argumenten, die Verhältnisse, die bei der Fundamentalgruppe dreidimensionaler Skelettmannigfaltigkeiten gegeben sind, zu klären.

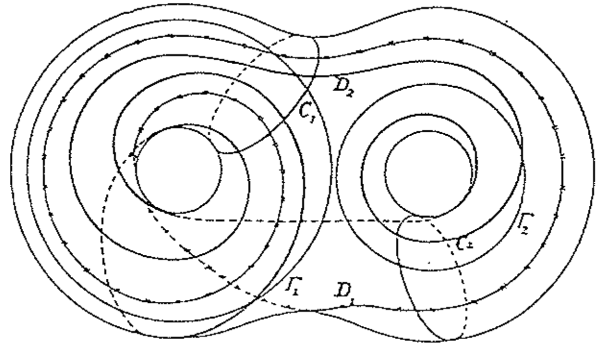
3. Mit der Homologiesphäre fand er ein hochinteressantes Gegenbeispiel, das später - wie wir jetzt sehen werden - in unerwarteter Weise immer wieder auftrat.

Andererseits sollte man auf zwei Beschränkungen hinweisen, die Poincaré auch im 5. Komplement nicht ernsthaft in Frage stellen konnte:

1. Es gab in Gestalt des Skelettaufbaus bestenfalls Ansätze zur Definition einer Normalform für 3-Mannigfaltigkeiten. In diesem Aspekt ging Poincaré nicht über Heegard hinaus - im Gegenteil, er blieb eher hinter jenem zurück, insofern er das Problem gar nicht explizit ansprach.

2. Die einzigen Invarianten, die Poincaré 1904 für Skelettmannigfaltigkeiten berechnen konnte, sind die Fundamentalgruppe, die erste Betti-Zahl und die eindimensionale Torsion. In diesem Punkt blieb er also hinter der kombinatorischen Methode der Inzidenzmatrizen zurück.

Doch wenden wir uns nun dem weiteren Schicksal der Homologiesphäre von Poincaré zu. Ausführliche Erwähnung fand diese im Enzyklopädieartikel von Max Dehn und Poul Heegard[213], wo sie ähnlich wie bei Poincaré durch Identifikation zweier ausgefüllter „Doppelringflächen" (=Brezeln) [vgl. Dehn-Heegard 1907, 185-188] erhalten wird. Dennoch erwies sich die Darstellung als falsch, was man als ein Indiz für die Schwierigkeit dieses Gegenstandes betrachten darf (vgl. Dehn 1907, 573 sowie Reidemeister 1933, 192f; das Dehn-Heegardsche Diagramm wird bei Threlfall - Seifert 1931, 68 Anm. 35 noch kritiklos wiedergegeben, was in Threlfall-Seifert 1933, 585 korrigiert wird). Im übrigen stellt der Artikel von Dehn und Heegard den ersten Versuch einer umfassenden Rezeption der Ideen Poincaré's dar (vgl. 3.5).



Ausführliche Berücksichtigung fand die Poincarésche Homologiesphäre auch in Max Dehns bedeutender Arbeit von 1910 (vgl. 4.3). Dort wurde der Begriff „Poincaréscher Raum" eingeführt für „solche dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die, ohne Torsion und mit einfachem Zusammenhang, doch nicht mit dem gewöhnlichen Raum [das ist hier S^3; K.V.] homöomorph sind" (Dehn 1910, 138).[214] Folglich ist Poincaré's Beispiel ein Poincaréscher Raum. Dehn zeigte nun, wie man mit Hilfe von Knoten unendlich viele Poincarésche Räume konstruieren kann; darunter auch einen, dessen Fundamentalgruppe die

[213] Über die Verfasserschaft heißt es in einer Fußnote:
„Von den beiden Verfassern hat Heegard die literarischen Vorarbeiten zum Artikel geliefert und übrigens an der Ausarbeitung wesentlichen Anteil genommen; verantwortlich für die endgültige Fassung des Artikels ist Dehn" (Dehn-Heegard 1907, 153 Anm. *)
Folglich muß man wohl Dehn als den maßgeblichen Autor sehen. Im übrigen wurde der Artikel 1907 im Januar abgeschlossen.

[214] Die Mannigfaltigkeiten sollten natürlich geschlossen sein; einfacher Zusammenhang bedeutet, daß die erste Betti-Zahl modern gesprochen gleich 0 ist (also bei Poincaré gleich 1).

binäre Ikosaedergruppe ist und von dem man somit annehmen wird, daß er dem Poincaréschen Beispiel homöomorph sei. Diese Frage konnte erst nach 1932 gestützt auf Seiferts Theorie der gefaserten Räume geklärt werden.[215]

Dehns Vorgehen läßt sich kurz so beschreiben: Ist k eine Kleeblattschlinge in S^3, so „dicke" man k zu einem verknoteten Torus $k \times E^2$ auf. Dieser wird aus S^3 ausgebohrt, was zum Knotenaußenraum S^3 - k' (k' sei der verdickte Knoten) führt, dessen Rand eine Torusfläche ist. Längs dieses Rand verhefte man in geeigneter Weise den Knotenaußenraum mit einem Volltorus, was zur gewünschten geschlossenen und orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit V führt. Dieser Prozeß wird heute Dehn-Chirurgie genannt (vgl. Dieck 1991, 70, auch Seifert-Threlfall 1934, 224-226). [Einzelheiten findet man in 4.3]

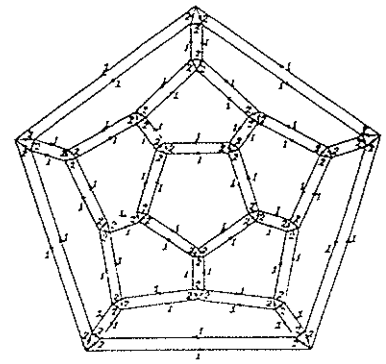
Da die Dehn–Chirurgie erstmals in der Korrektur Dehns aus dem Jahre 1907 zum Enzyklopädieartikel angedeutet wird (vgl. 4.3), liegt die Vermutung nahe, daß Dehn bei der Analyse des falschen Heegard-Diagrammes aus dem Enzyklopädieartikel auf diese Konstruktion gestoßen ist. Wie man von Dehns Kleeblattschlingenraum, wie ich das entsprechende Beispiel Dehns nennen möchte, zu einem Heegard-Diagramm auf der Brezelfläche, also i.w. zu Poincaré's Darstellung, gelangt, kann man Rolfsen 1976, 250 entnehmen. Möglicherweise hat Dehn etwas Ähnliches gesehen.

Für eine spezielle Verheftungskurve gelang es Dehn zu zeigen, daß $\pi_1(V)$ die binäre Iksoaedergruppe[216] ist (Dehn 1910, 159-165). Weiter machte er auf zwei Dinge aufmerksam:

1. Geht man von der Kleeblattschlinge aus, nimmt aber kompliziertere Identifizierungen zwischen Knotenaußenraum und Verschlußtorus vor, so erhält man ebenfalls Poincarésche Räume, deren Fundamentalgruppen allerdings nicht mehr endlich sind (Dehn 1910, 165f).

[215] Für im Sinne Seiferts faserbare Poincarésche Räume gilt nämlich, daß ihr Homöomorphietyp durch ihre Fundamentalgruppe allein festgelegt wird. Vgl. 5.2.

[216] Dehn spricht von der „Ikosaedergruppe mit Spiegelung" (Dehn 1910, 145 und 163). Bemerkenswert ist, daß das Gruppenbild dieser Gruppe die ebene Projektion eines Dodekaeders, also ein Dodekaedernetz, ist.

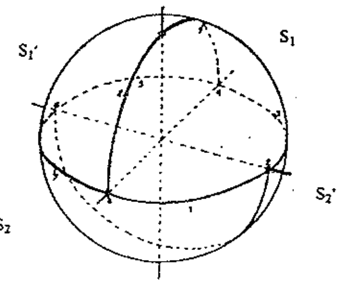


2. Nimmt man andere nicht triviale Knoten zum Ausgangspunkt, so ergeben sich ebenfalls Poincarésche Räume mit unendlicher Fundamentalgruppe (Dehn 1910, 165).

Wir werden auf Dehns Beitrag in 4.3 noch einmal zurückkommen. Hier bleibt festzuhalten, daß Dehn erstens eine interessante geometrische Deutung der Poincaréschen Homologiesphäre gefunden hat, welche auch die Berechnung der Invarianten erheblich erleichterte,[217] und daß sich diese Deutung zweitens zu einem Erzeugungsverfahren für unendlich viele nicht-homöomorphe Poincaré-Räume erweitern läßt. Allerdings blieb (und bleibt!) dem Beispiel von Poincaré eine Sonderstellung vorbehalten, insofern es der einzige Poincarésche Raum mit nichttrivialer aber dennoch endlicher Fundamentalgruppe ist.

Dehns Beitrag ist nicht zuletzt auch deshalb bemerkenswert, weil er zwei bis dahin weitgehend getrennt verlaufende Entwicklungen - die Theorie der Mannigfaltigkeiten und ihrer Invarianten auf der einen Seite, die Knotentheorie auf der anderen - zusammenführte zu einer sehr produktiven Synthese.

Eine andere geometrische Repräsentation der Poincaréschen Homologiesphäre verdankt man dem russischen Mathematiker M. Kreines (1932). Dieser gewann seine Homologiesphäre aus der E^3 durch Identifizierungen auf deren Rand S^2. Hierzu wird diese in vier Viertelkugeloberflächen zerlegt (Kreines 1932, 277), was einem „Polyeder" mit vier Seitenflächen und damit einem Heegard-Diagramm vom Geschlecht 2 entspricht. Diese Darstellung verallgemeinert die auf H. Tietze zurückgehende Konstruktion der Linsenräume (vgl. 4.2).



Es soll jetzt S_1 mit S_1', S_2 mit S_2' gemäß den folgenden Vorschriften identifiziert werden:

$$0123498 \equiv 8076549 \text{ und } 01267 \equiv 32654$$

Das Bild von E^3 unter dieser Abbildung ist die gesuchte Homologiesphäre. Diese Darstellung kommt derjenigen Poincaré's recht nahe, die er für seine Beispiele 1 bis 5 in der

[217] Dehn schreibt hierzu: „Für alle [Poincaréschen Räume; K.V.] werden die Gruppenbilder aufgestellt, diese erledigen die Frage, ob eine gegebene Kurve der betreffenden Mannigfaltigkeit auf einen Punkt zusammenziehbar ist oder nicht. Diese Frage war bisher noch für keine solche Mannigfaltigkeit gelöst, auch wußte man nichts über Endlichkeit oder Unendlichkeit der zugehörigen Fundamentalgruppe. Die Resultate haben noch den besonderen Wert, daß sie eine sehr einfache Methode liefern, um unendlich viele Poincaré'schen Räume zu konstruieren, von denen der Entdecker nur einen einzigen auf komplizierte Weise konstruiert hat." (Dehn 1910, 138f)

„Analysis-situs"-Arbeit von 1895 gewählt hatte (siehe 3.2). [Da Poincaré's Beispiel aus einem Heegard-Diagramm vom Geschlecht 2 hervorgeht, liegt die Vermutung nahe, daß es sich aus einem „vierseitigen Polyeder" durch Flächenidentifikationen gewinnen läßt - vgl. Seifert-Threlfall 1934, 221 Aufgabe.] Auch hier läßt sich - wie bei Poincaré im 2. Komplement für die eben angeführten Beispiele - recht leicht eine Zellenzerlegung für die entstehende geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit ablesen:

Diese hat eine 0-Zelle (einen Punkt, da alle Punkte 0 bis 9 nach der Identifikation zusammenfallen), zwei geschlossene Kanten ($01 \equiv 80 \equiv 98 \equiv 49 \equiv 54 \equiv 32 \equiv 67$ bilden einen Kantenzykel; $07 \equiv 34 \equiv 12 \equiv 65 \equiv 26$ den anderen), zwei Flächen (nämlich S_1'', welches aus S_1 und S_1' entsteht, sowie S_2'', das aus S_2 und S_2' hervorgeht) sowie eine 3-Zelle.

Bezeichnet man die beiden obigen Kantenzykel, deren Homotopieklassen Erzeugende der Fundamentalgruppe sind mit a und b, so ergeben sich die Relationen $a^4ba^{-1}b = 1$ (gemäß S_1'') und $ab^2ab^{-1} = 1$ (gemäß S_2''). Diese lassen sich umformen zu $a^5 = (ab)^2 = b^3$, was gerade die für die binäre Iksoaedergruppe charakteristische Relation ist (vgl. Anhang zu 5.2).

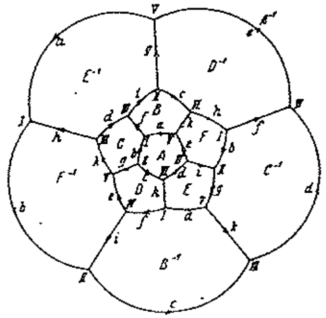
Nimmt man die Relation $(a^{-1}b)^2=1$ hinzu, so ergibt sich tatsächlich die Iksoaedergruppe. All dies befindet sich in Übereinstimmung mit Poincaré's Ergebnissen (vgl. oben). Natürlich ist damit noch nicht gezeigt, daß die Kreines-Mannigfaltigkeit tatsächlich homöomorph zur Poincaréschen Homologiesphäre ist. Dieses Problem, das bei Kreines gar nicht angesprochen wird, wurde erst von H. Seifert - wie bereits oben erwähnt - angegangen.

Die heute gängige Darstellung des Dodekaederraumes, die diesem ja auch zu seinem Namen verhalf, findet sich erstmals[218] bei Threlfall-Seifert 1931, 66. Diese ergibt sich bei den genannten Autoren im größeren Zusammenhang der Untersuchung endlicher Bewegungsgruppen der 3-Sphäre und deren Diskontinuitätsbereiche.[219] Er entsteht aus dem

[218] Die Autoren Threlfall und Seifert weisen in einer Fußnote zu ihrer Arbeit (Threlfall-Seifert 1931, 66 Anm. 31) darauf hin, daß H. Kneser den Dodekaederraum in seinem zweiten DMV-Vortrag (Kneser 1929) erwähnt habe. Bei Kneser heißt es:
„Irreduzibel [das heißt, daß jede S^2 in M^3 eine 3-Zelle berandet; K.V.] ist z.B. das Produkt $S^1 \cdot S^1 \cdot S^1$, ferner jede M^3 mit endlicher Wegegruppe (s.u.), deren Hauptüberlagerungs-M^3 [universelle Überlagerung; K.V.] die S^3 ist. Dazu gehört auch die von Dehn aus der Kleeblattschlinge gewonnene M^3, deren Wegegruppe der binären Ikosaedergruppe isomorph ist. Sie läßt sich nämlich darstellen als Modul-M^3 [Unterlagerung; K.V.] der aus der binären Gruppe in bekannter Weise erwachsenden fixpunktfreien Drehungsgruppe der (metrischen) S^3, die die Zellen des regelmäßigen 120-Zells transitiv vertauscht. Ob diese M^3 symmetrisch ist, scheint nicht ganz leicht zu entscheiden, weil das sonst so nützliche Hilfsmittel der Homologiebetrachtungen versagt." (Kneser 1929, 256)
Kneser weist in diesem Zitat darauf hin, daß der Dehnsche Kleeblattschlingenraum (vgl. 4.3) - und nicht Poincaré's Homologiesphäre - in engem Zusammenhang zu der Raumteilung der S^3 in 120 sphärische Dodekaeder steht (diese wird heute meist durch das Schläfli-Symbol (5,3,3) beschrieben). Insbesondere deutet er an, daß sich die fragliche 3-Mannigfaltigkeit als Orbitraum (modern gesprochen) aus S^3 nach der entsprechenden endlichen Untergruppe der sphärischen Bewegungen gewinnen läßt. Eine geometrische Charakterisierung der zugehörigen Identifizierung fehlt allerdings bei Kneser; diese findet sich erst bei Threlfall-Seifert. Insgesamt muß man aber doch festhalten, daß Kneser einen ganz wichtigen Schritt bei der Identifizierung des Dodekaederraumes vollzogen hat, wobei dessen Fundamentalgruppe eine entscheidende Rolle gespielt hat.

[219] Anders gesagt sollen die Gruppen eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf S^3 operieren. Man kann dann in bekannter Weise zum Orbitraum übergehen und erhält so 3-Mannigfaltigkeiten, deren universelle Überlagerung gerade die fragliche S^3 ist. Betrachtet man S^3 als die Gruppe der Quaternionen mit Betrag 1,

Dodekaeder, indem man diametrial gelegene Fünfecke nach einer Drehung um $\pi/5$ miteinander identifiziert. Diese Vorschrift läßt sich anhand des Netzes des Dodekaeders anschaulich machen und liefert damit auch die Erzeugenden und Relationen für dessen erste Homologie- und dessen Fundamentalgruppe (vgl. etwa Seifert-Threlfall 1934, 216).



Die Berechnung der Fundamentalgruppe der Kreines-Mannigfaltigkeit zeigt also, daß der Dodekaederraum im Sinne von Threlfall und Seifert, die Poincarésche Homologiesphäre, die Kreines-Mannigfaltigkeit und die aus der Kleeblattschlinge durch Dehn-Chirurgie hervorgegangene 3-Mannigfaltigkeit alle isomorphe Fundamentalgruppen besitzen. Darüber hinaus konnten Threlfall und Seifert zusätzlich beweisen, daß sich ihr Dodekaederraum aus zwei ausgefüllten Brezelflächen durch geeignete Identifikationen gewinnen läßt, daß er also ein ähnliches Heegard-Diagramm zuläßt wie Poincaré's Beispiel. Folglich „liegt die Vermutung nahe, daß die Räume topologisch übereinstimmen." (Weber-Seifert 1933, 244). Dies zu beweisen, gelang mit der von H. Siefert 1932 entwickelten Theorie der heute so genannten Seifert-Faserungen, wobei natürlich gezeigt werden muß, daß die fraglichen Räume (das Beispiel von Kreines wird in der Literatur nicht behandelt) faserbar im Sinne Seiferts sind (vgl. 5.2 insbesondere dort Anm. 49).

Im Zusammenhang mit seiner Theorie der gefaserten Räume konnte H. Seifert darüber hinaus zeigen, daß sich der Dodekaederraum auch noch als verzweigte Überlagerung gewinnen läßt und daß alle solcherart erhaltenen Mannigfaltigkeiten unter Einschluß der obigen homöomorph sind. Es handelt sich dabei um die fünfblättrige zyklische Überlagerung der Kleeblattschlinge (genauer gesagt: des Knotenaußenraumes der Kleeblattschlinge, wobei diese als Verzweigungslinie auftritt), die dreiblättrige zyklische Überlagerung des Torusknotens (2,5) und die zweiblättrige zyklische Überlagerung des Torusknotens (3,5). Vgl. hierzu Seifert 1932, 222.

Damit war man zu einer sehr befriedigenden Lösung dieser Frage - eines sehr speziellen Falles des Homöomorphieproblems - gelangt. Man beachte aber, daß ein Großteil der Arbeit hier nicht von den algebraischen Invarianten geleistet wird (deren Übereinstimmung ja nur zeigt, daß die fraglichen Mannigfaltigkeiten homöomorph sein können aber nicht

so kann man als Gruppe, die auf S^3 operiert, die um die Spiegelung erweiterte Symmetriegruppe des Dodekaeders wählen (vgl. Dieudonné 1989, 307 oder Brieskorn 1976, 181f.). Dieser Ansatz wurde von W. Threlfall und H. Seifert in ihren gemeinsamen Arbeiten Threlfall-Seifert 1933 systematisch verfolgt.

müssen), sondern von der eher geometrisch zu nennenden Theorie der Seifert-Faserungen, die eine Art Ersatz für eine Normalform von 3-Mannigfaltigkeiten darstellt. Das geometrische Residuum läßt sich auch hier nicht umgehen.

Die zweite Gruppe von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten, die in der frühen kombinatorischen Topologie eine wichtige Rolle spielte, die Linsenräume nämlich, werden wir in den Kapiteln 4 und 5 im Zusammenhang mit ihrem Entdecker H. Tietze (4.2), mit J. W. Alexander (5.1), der ihre Struktur weitgehend erhellte, sowie mit K. Reidemeister und W. Franz (5.3) näher kennenlernen.

3.5 Zur Rezeption der Ideen Poincaré's

Die Beiträge Poincaré's zur Topologie erstreckten sich, wie wir gesehen haben, über einen Zeitraum von gut zehn Jahren - von der ersten kurzen Mitteilung „Sur l'analysis situs" vor der Akademie der Wissenschaften 1892 bis hin zum 1904 erschienenen 5. Komplement. In den verbleibenden letzten acht Jahren seines Lebens ist Poincaré nicht mehr auf diesen Themenkreis eingegangen; sein Interesse verschob sich (u. a. ist hier sein berühmter Beweis des Uniformierungssatzes 1908 zu nennen) und die zentrale Fragestellung seiner topologischen Arbeiten, die Klassifikation insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, war zu einem gewissen, wenn auch eher negativen, Abschluß gelangt, der seinen Ausdruck in der Formulierung der Poincaré-Vermutung fand. Poincaré hatte bis dahin wichtige Invarianten definiert (Fundamentalgruppe, Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten) und Möglichkeiten zu ihrer Berechnung aufgezeigt (Identifikationsschemata, Inzidenzmatrizen) sowie verschiedene Fassungen des Mannigfaltigkeitsbegriffes vorgelegt (Nullstellengebilde, Karten, Zellenaufbau, Skelettaufbau). Darüber hinaus finden sich, wie wir ebenfalls gesehen haben, die unterschiedlichsten methodischen Ansätze bei Poincaré: topologische und differentialtopologische Vorgehensweise, Andeutungen simplizialer und zellulärer Techniken, Überlagerungstheorie, kombinatorische Gruppentheorie. Nicht zuletzt verdanken wir ihm eine ganze Reihe von wichtigen Beispielen. Man sollte also meinen, daß Poincaré's Untersuchungen mit Interesse aufgenommen und weitergeführt wurden.

Dies trifft natürlich auch zu, wobei allerdings eine beachtliche zeitliche Verzögerung eintrat. Als Anfang der intensiven Poincaré-Rezeption darf man das Jahr 1908 ansetzen, in dem die beiden wichtigen Arbeiten „Beiträge zur Analysis situs" von E. Steinitz und „Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten" von H. Tietze erschienen. Ihnen vorausgegangen war der bereits erwähnte Übersichtsartikel von Dehn und Heegard in der Enzyklopädie, der erstmals eine zusammenfassende und einigermaßen zugängliche Darstellung des in voller Entwicklung begriffenen Gebietes „kombinatorische Topologie" lieferte.[220] 1910 folgte dann Dehns Arbeit[221] sowie erste Beiträge von Brouwer.[222] Letzterer sollte eine Zeitlang zur Zentralfigur in der Entwicklung der Topologie werden, wobei allerdings seine Leistungen in unserem Zusammenhang weniger wichtig

220 Dehn-Heegard 1907.
221 Dehn 1910
222 Besonders bekannt ist Brouwer 1910. Kleinere Arbeiten Brouwers zur Topologie reichen bis 1908 zurück.

sind. Die 1914 erstmals erschienenen „Grundzüge der Mengenlehre" von F. Hausdorff lieferten der allgemeinen - heute mengentheoretisch genannten - Topologie ihren begrifflichen Rahmen, was aber im Bereich der kombinatorischen Topologie zunächst einmal wenig Auswirkungen hatte. Wirklich relevant wurde diese erst mit dem Verlassen des kombinatorischen Rahmens, das zu Beginn der 30er Jahre einsetzte (vgl. 6 und 8).

Soweit eine kurze Vorschau auf Dinge, die wir in den nachfolgenden Kapiteln näher beleuchten werden. Wie aber sahen frühe Reaktionen auf Poincaré aus? Hier ist natürlich als herausragendes Ereignis Heegards Dissertation von 1898 zu nennen, welche wir in 4.1 behandeln werden. Diese enthielt nicht nur kritische Anmerkungen zu Poincaré, sondern in Gestalt der Heegard-Diagramme auch einen wichtigen konstruktiven Beitrag. Daneben ist noch das Buch „Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes" von E. Picard und G. Simart zu erwähnen, das in seinem zweiten Kapitel recht ausführlich den damaligen Stand der Zusammenhangstheorie - also insbesondere Poincaré's Betti-Zahlen von 1895 sowie einige seiner Beispiele in Abwandlung (Picard-Simart 1897, 37-44) - behandelte. Allerdings war dies alles bei Picard-Simart nur Mittel zum Zweck; es handelte sich keineswegs um eine in sich geschlossene Darstellung der kombinatorischen Topologie.[223]

Die geringe Aufmerksamkeit, welche ursprünglich Poincaré's topologischen Arbeiten entgegengebracht wurde, fand ihren Niederschlag auch in den Würdigungen von Poincaré's Werk, die nach dessen Tod erschienen. In ihnen spielt die Analysis-situs-Serie eine untergeordnete Rolle. So schrieb beispielsweise H. Weyl lapidar:

> „Die Analysis situs, jene geometrische Disziplin, die es mit den gegenüber eineindeutigen stetigen Abbildungen invarianten Eigenschaften zu tun hat und die mit Riemann so bedeutungsvoll in die Funktionentheorie hineinspielt, ist von Poincaré, namentlich was die Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionszahl angeht, mächtig gefördert worden."
>
> (Weyl 1912, 162)

1912 war offenkundig noch nicht deutlich geworden, welch große Bedeutung den topologischen Arbeiten Poincaré's einmal zukommen sollte, insbesondere, daß diese eines der dynamischsten Forschungsprogramme der reinen Mathematik des 20. Jahrhunderts begründen sollten.

Verläßt man sich auf das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", das seit 1869/70 eine Rubrik „Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs,...)"[224] kannte, so gab es

223 Man vergleiche hierzu etwa das Referat dieses Buches im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", welches trotz seiner ungewöhnlichen Länge nur einen ganz knappen Hinweis auf das Kapitel über Analysis situs enthält (Stäckel 1897).

224 Die Anzahl der unter dieser Rubrik genannten Arbeiten belief sich auf:

1892	1893/94	1895	1896	1897	1898	1899	1900
21	32	7	12	18	36	17	11

1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908
16	16	7	16	11	24	12	21

Hiervon betraf etwa die Hälfte der Arbeiten Fragestellungen, die heute keineswegs zur Topologie gerechnet werden, wie vor allem die seinerzeit aktuelle Konfigurationstheorie. Andererseits wurden wichtige Beiträge wie Heegards Dissertation aus dem Jahre 1898 und Tietze 1908 im Jahrbuch anderen Rubriken

außer den genannten Abhandlungen im Zeitraum von 1892 bis 1908 so gut wie keine Arbeiten, die sich direkt auf Poincaré bezogen.[225] Insgesamt darf man festhalten, daß die Wirksamkeit der Ideen Poincaré's zur Topologie anfänglich sehr beschränkt war; es bedurfte erst der Aufarbeitung und Vermittlung durch andere Mathematiker, um diese breiteren Fachkreisen zu erschließen und verständlich zu machen (vgl. 8).

zugeordnet (z.B. Tietze der Invarantentheorie), weshalb man insgesamt die Aussagkraft dieser Rubrik im Jahrbuch nicht überschätzen darf. Topologische Themen, die behandelt wurden, waren die Zusammenhangstheorie der Flächen, Knoten u. dgl. sowie vor allem der Jordansche Kurvensatz und der Satz von Schoenflies.

225 Einen expliziten Bezug zu Poincaré gibt es laut „Jahrbuch" (1898, S. 415) nur in einem Beitrag des in Bordeaux wirkenden G. Brunel, der 1895/96 die Behauptung Poincaré's kritisierte, eine im R^n eingebettete (n-1)-dimensionale Mannigfaltigkeit müsse stets orientierbar sein. Brunel hat sich übrigens 1880/81 in Leipzig aufgehalten, wo er unter anderem mit F. Klein in Kontakt kam (vgl. Dugac 1989, 92).
Einen gewissen Bezug zu Poincaré kann man auch in einem Aufsatz von G. Mannoury aus dem Jahre 1898 finden, in dem sich dieser mit Betti-Zahlen und der Verallgemeinerung der Eulerschen Polyederformel in der n-dimensionalen Geometrie beschäftigte. Da Mannoury einen gewissen Einfluß auf Brouwer hatte, ist dies ein möglicher Hinweis auf den Ursprung des Interesses Brouwers an der Topologie. Mannoury benutzte übrigens schon im Vergleich zu Poincaré um 1 reduzierte Betti-Zahlen, eine Vereinfachung, die sich bis heute gehalten hat und welche später allgemein (vgl. z.B. Threlfall-Seifert 1931, 49 Anm. 24) H. Weyl zugeschrieben wurde (Mannoury 1898, 126). Als Referent für das Jahrbuch war in der genannten Rubrik unter anderem A. Schoenflies aktiv, der auch die meisten Arbeiten Poincaré's besprach.

4 Kritik und Fortschritt

Sieht man von dem frühen Beitrag Heegards ab, so beginnt die eigentliche Geschichte der Ausbreitung der topologischen Ideen Poincaré's mit dem Jahr 1907. Damals erschien der Enzyklopädie-Artikel von Dehn und Heegard, welcher eine Übersicht zu den bis dahin vorliegenden Arbeiten zur Topologie lieferte. Selbstredend spielten dabei Poincaré's Arbeiten eine wichtige Rolle. Im nächsten Jahr finden wir dann wichtige Beiträge von Tietze und Steinitz; auch Schoenflies' Referat für die DMV über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten erschien 1908; Brouwer publizierte seine erste topologische Arbeit ebenfalls 1908. Die Weiterentwicklung der Poincaréschen Ideen wurde in den anschließenden Jahren vor allem von folgenden Mathematikern getragen: J.W. Alexander (1888-1971; ab 1913), L.E.J. Brouwer (1881-1966; ab 1908), M. Dehn (1878-1952; ab 1907), H. Tietze (1880-1964; ab 1906) und O. Verblen (1880 - 1960; ab 1905). Hinzu kamen noch A. Schoenflies (1853-1928) und E. Steinitz (1871 - 1928), die relativ spät in ihrer Karriere begannen, topologische Arbeiten zu veröffentlichen. Gewissermaßen umgekehrt verlief die Entwicklung Heegards, der sich nach 1907 anscheinend von der Topologie abwandte und keine Beiträge mehr lieferte. Brouwer wurde oben aufgeführt, obwohl er sich nicht unmittelbar mit dem Klassifikationsproblem beschäftigte, weil sein Einfluß im gesamten Gebiet der Topologie sehr wichtig gewesen ist.[1]

Die Entwicklungen, welche wir in diesem Kapitel kennenlernen werden, knüpften alle an Poincaré an. So war ein zentraler Punkt bei Heegard die Kritik an Poincaré's Dualitätssatz; Dehn-Heegard, Tietze und auch Steinitz versuchten, Poincaré's Topologie auf einen sicheren axiomatischen Boden zu stellen, worin auch Einflüsse der eben erst veröffentlichten Hilbertschen Axiomatik festzustellen sind, und Dehn bezog sich 1910 nicht zuletzt auf Poincaré's Homologiesphäre.

Neben dem bereits erwähnten grundlagentheoretischen Aspekt spielte die Suche nach einer Normalform für (geschlossene) 3-Mannigfaltigkeiten eine zentrale Rolle in den Be-

---

[1] Brouwers Beitrag wird von G.W. Whitehead folgendermaßen charakterisiert:
„Except for the fundamental group, the subject of homotopy theory had its inception in the work of L.E.J. Brouwer, who was the first to define the degree of a map and prove its homotopy invariance." (Whitehead G.W. 1978, VII)
Will man den Unterschied zwischen Poincaré und Brouwer auf eine knappe Formel bringen, so darf man sagen, daß bei ersterem die Mannigfaltigkeit im Mittelpunkt des Interesses stand, während Brouwer überwiegend mit Abbildungen arbeitete. Eine ähnliche Rolle wie Brouwer spielte H. Weyl für die Entwicklung der kombinatorisch-algebraischen Topologie, der so gut wie keine im engeren Sinne topologischen Arbeiten veröffentlichte, aber dennoch einen starken Einfluß auf die Entwicklung dieser Disziplin entfaltete (etwa auf den Mannigfaltigkeitsbegriff).

mühungen von Heegard und - allerdings nie so deutlich - Dehn. Wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, hatte Poincaré diese Seite des Homöomorphieproblems weitgehend vernachlässigt, von der aber andererseits, nicht zuletzt auf dem Hintergrund der bei der Klassifikation der geschlossenen Flächen gewonnenen Erfahrungen, klar war, daß sie eine unverzichtbare Rolle bei der gesuchten Klassifikation spielen würde. Hinsichtlich der Invarianten, die ja immer nur nicht-homöomorphe Mannigfaltigkeiten unterscheiden, nie aber allein den Nachweis der Homöomorphie leisten können, waren gewisse Fortschritte bezüglich Präzisierung und Berechnungsmöglichkeiten zu verzeichnen. Insbesondere zeigte Tietze, daß für geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten alle bekannten Invarianten durch die Fundamentalgruppe festgelegt werden. Hier spielte die Entwicklung der später so genannten kombinatorischen Gruppentheorie eine wichtige Rolle, zu der H. Tietze und dann vor allem M. Dehn ganz wichtige Beiträge geleistet haben. Schließlich wurde der Beispielvorrat an geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten durch Tietzes erst später so genannte Linsenräume (vgl. 5.2) und durch Dehns Homologiesphären, insbesondere durch den Kleeblattschlingenraum, entscheidend vergrößert. Beim ersteren finden wir auch schon die Vermutung, daß das Homöomorphieproblem für geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten mit den traditionellen Invarianten (Fundamentalgruppe, Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten) allein wohl nicht lösbar sein werde, in dem Sinne, daß diese Invarianten nicht stark genug sind, um alle nachweislich nicht-homöomorphen Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden. Dieser Verdacht sollte 1919 von J. W. Alexander bestätigt werden (vgl. 5.1.1).

Versucht man den Entwicklungsstand der Disziplin um 1910 zu charakterisieren, so fällt auf, daß sich die Arbeiten von Dehn-Heegard, Tietze und Dehn weitgehend in dem von Poincaré abgesteckten Rahmen bewegten. Man kann sie somit als rein topologische Arbeiten kennzeichnen; die Entwicklungen, welche sie in anderen verwandten Gebieten zeitigten - da ist natürlich vor allem die kombinatorische Gruppentheorie zu nennen - sind Hilfsmittel, die sich der topologischen Zielsetzung - allem voran der Lösung des Homöomorphieproblems für 3-Mannigfaltigkeiten - unterordneten. Deutlich trat auch das Bestreben hervor, die Topologie von ihren Ursprüngen in anderen Disziplinen, insbesondere in der Funktionentheorie und in der Theorie der algebraischen Kurven, zu lösen, und einen autonomen Aufbau derselben durchzuführen. Gerade hierzu sah man (Dehn-Heegard, Tietze, Steinitz) in kombinatorischen Ansätzen das Mittel der Wahl, was die nun zu kodifizierende Topologie von ihren kontinuumstopologischen Anfängen zu befreien erlauben sollte.

Allerdings wird man keinen der bislang Genannten als reinen Topologen bezeichnen, da alle diese Forscher (Heegard, Dehn, Tietze, Steinitz) auch in anderen mathematischen Gebieten wesentliches geleistet haben. Das gilt auch für fast alle anderen Mathematiker, die eingangs als Weiterführer des Poincaréschen Erbes benannt wurden. Eine Ausnahme hiervon stellte J. W. Alexander dar, den man den ersten Topologen (im Sinne von "arbeitete fast ausschließlich in diesem Gebiet") nennen könnte. Das Auftreten von Spezialisten ist neben dem Vorliegen eines Bestandes an Problemen und Methoden sowie dem Vorhandensein von allgemein akzeptierten Textdarstellungen ein weiteres Merkmal für die Herausbildung einer Disziplin (vgl. 8).

Im folgenden wollen wir einige dieser Beiträge näher betrachten, wobei wir mit P. Heegard beginnen werden.

4.1 Heegards Dissertation

Im Jahre 1898 veröffentlichte Poul Heegard seine in Kopenhagen vorgelegte Dissertation mit dem Titel „Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske Fladers Sammenhaeng", welche 1916 im Auftrag der Société Mathématique de France[2] ins Französische übertragen und in deren Bulletin unter dem Titel „Sur l'analysis situs" veröffentlicht wurde (Heegard 1916). Diese Übersetzung wurde von J. W. Alexander (vgl. 5.1) auf ihre mathematische Richtigkeit überprüft (vgl. Heegard 1916, 163). Wir werden uns auf diese Übersetzung stützen.

Heegards Arbeit enthält eine Fülle interessanter Ideen, die allerdings oft wenig ausgearbeitet werden.[3] Seine Zugangsweise ist stark von anschaulichen Argumenten geprägt; analytische Entwicklungen fehlen meist.

Man entnimmt schon den in Anmerkung 3 zitierten Überschriften, daß Heegards Arbeit keineswegs nur topologische Fragestellungen behandelt. Vieles, was angesprochen wird, würden wir heute der algebraischen Geometrie oder auch der Funktionentheorie zuordnen; die topologischen Probleme stellen sich oft noch im Rahmen anderer Gebiete. Insofern wird man Heegards Dissertation eher noch der vordisziplinären Periode in der Entwicklung der Topologie zuordnen.

---

[2] Das Motiv für dieses Übersetzungsunternehmen war vor allem, den Zugang zu Poincaré's topologischem Werk zu erleichtern:
„Les recherches de Poincaré sur l'Analysis situs sont encore peu connues bien qu'elles constituent l'une des parties les plus profondes de son oeuvre mathématique. C'est pour aider à les faire connaître davantage et comprendre mieux que le Conseil de la Société mathématique a décidé la traduction et la publication du Mémoire de M. Heegard." (Heegard 1916, 161)
Man vergleiche zur Rezeption Poincaré's 3.5 oben.

[3] Da Heegards Arbeit wenig bekannt ist, sei hier eine Inhaltsangabe in Gestalt der Kapitelüberschriften angefügt:
„1^{e} partie: Sur une représentation intuitive des points imaginaires d'une surface algébrique
I Représentation intuitive d'une variété à quatre dimensions
II La droite
III Courbes algébriques
IV Le plan
V Surface algébrique
2^{e} partie: Sur les nombres topologiques de connexion
VI Topologie
VII Analysis situs
VIII Le diagramme des surfaces de Riemann
IX Le diagramme d'une variété à 3 dimensions
X Variétés orientées
XI Suite de l'examen de diagramme d'une variété à 3 dimensions
XII Comparaison avec des considérations antérieurs
XIII Les espaces de Riemann
XIV Applications
Remarques finales"
Die französische Übersetzung (Heegard 1916) umfaßt 79 Seiten.

Wir wollen uns im folgenden auf zwei Aspekte beschränken: nämlich auf Heegards Herleitung dessen, was wir heute Heegard-Zerlegungen und Heegard-Diagramme nennen, sowie auf das Gegenbeispiel, mit dem er den Dualitätssatz entkräften wollte.

Heegards Ausgangspunkt ist die Theorie komplexer algebraischer Flächen, für die er eine der Klassifikation der gewöhnlichen Flächen analoge Klasseneinteilung aufstellen möchte.[4] Die Topologie[5] ist für ihn also mehr Mittel zum Zweck denn von eigenständigem Interesse. Sein Verdienst liegt vor allem in der Erkenntnis, daß die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten[6] höherer Dimension als zwei die Aufstellung einer Normalform erfordert. Diese geometrische Seite des Problems wird ja, wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, bei Poincaré nicht behandelt.

Dabei ging Heegard von einem Verfahren aus, das der Kopenhagener Funktionentheoretiker Julius Petersen[7] im Zusammenhang mit gewöhnlichen Flächen, insbesondere auch mit Riemannschen, entwickelt hatte[8]. Dieses wird von ihm auf den n-dimensionalen Fall

---

4 „...; puis, il fallait déterminer des criteria topologiques pour la correspondance uniforme entre deux d'entre elles [ce sont des surfaces algébriques; K.V.]. Et, comme il a déjà été dit, les instruments de recherche que existaient à cette époque étaient ou insuffisants ou défectueux. C'est en essayant de corriger les fautes et de combler les lacunes que le contenu des pages suivantes a pris naissance." (Heegard 1916, 168)

5 Wie bereits bemerkt (vgl. Anm. 2 in Kapitel 3), unterschied Heegard zwischen Analysis situs und Topologie. Für den Historiker interessant sind die Anmerkungen, die Heegard zur Geschichte der Topologie macht (vgl. hierzu Anm. 5 in Kapitel 3), insbesondere, daß er mit Nachdruck auf Listing aufmerksam macht (vgl. Heegard 1916, 165-168 und 191-194). Heegard hat sich in seiner weiteren Karriere verstärkt der Geschichte der Mathematik zugewendet; ihm verdankt man viele wertvolle Biographien von Mathematikern in der norwegischen Nationalbiographie, aber auch die sehr ausführlichen Literaturangaben in Dehn-Heegard 1907.

6 Heegard übernimmt die erste der von Poincaré gegebenen Definitionen des Mannigfaltigkeitsbegriffs durch Gleichungen und Ungleichungen (vgl. 3.2). Besser dem Wesen der Topologie angepaßt scheint es ihm aber, davon ausgehen, daß eine 3-Mannigfaltigkeit durch Oberflächenidentifikation zwischen einem oder mehreren Polyedern entstehe (vgl. Heegard 1916, 197). Diese Vorgehensweise ist uns ja von Poincaré her vertraut, von dem auch Heegard sie übernommen hat. Das Spannungsverhältnis zwischen Definition und Erzeugungsweise wird auch bei Heegard nicht diskutiert.

7 Petersen war einer der akademischen Lehrer von Heegard und dessen „wahrer" Doktorvater (der offizielle war Zeuthen). Sein Name ist im Rahmen der kombinatorischen Topologie im Zusammenhang mit graphentheoretischen Überlegungen bekannt geblieben (vgl. Reidemeister 1932, 116 und 120). Außer in Kopenhagen hat Heegard noch in Paris und in Göttingen studiert.

8 Eine ausführliche Darstellung desselben findet sich in Petersen 1898, 72-80 (das dänische Original erschien 1895). Im übrigen ist diese Schilderung ein beredtes Zeugnis für das didaktische Geschick, das man Petersen nachsagt:
„Wir denken uns eine zusammenhängende zweiseitige Fläche, nötigenfalls punktiert, so daß sie wenigstens eine Randkurve hat [„punktieren" heißt bei Petersen „ein Elementarflächenstück entfernen", K.V.]; wir lassen eine oder mehrere von den Randkurven sich stetig so ändern, daß das begrenzte Flächenstück beständig verkleinert wird; die Verkleinerung wird an jedem Punkt so lange fortgesetzt, bis der Abstand zwischen einem Randteil und dem nächsten Randteil (...) eine kleine endliche Größe ist. Das Flächenstück wird dadurch in ein System von schmalen Streifen verändert, die sich auf alle möglichen Arten verzweigen und vereinigen, sowie über- und untereinander weglaufen können (ohne an einer solchen Stelle miteinander verbunden zu sein)." (Petersen 1898, 72f)
Man kann das entstehende Bändergewirr topologisch transformieren in eine Kreisscheibe mit angehefteten Bändern (Petersen 1898, 76-78). Diese Normalform findet sich übrigens unter Einbeziehung des nichtorientierbaren Falles auch bei Dehn-Heegard 1907, 190 - 195; vgl. 2.4.

übertragen und dann konkret auf 3-Mannigfaltigkeiten angewandt. Summarisch läßt sich das fragliche Verfahren so beschreiben: Man entferne aus der n-Mannigfaltigkeit eine geeignete Umgebung eines Punktes[9] und vergrößere anschließend stetig dieses „Loch", bis man entweder in die Nähe eines Randes der Mannigfaltigkeit oder aber in die Nähe des Randes des vergrößerten „Lochs" gelangt. Das entstehende Gebilde, das wir heute als Deformationsretrakt der gelochten Mannigfaltigkeit bezeichnen würden, heißt bei Heegard „Diagramm" der Mannigfaltigkeit (Heegard 1916, 193). Geht man davon aus, daß die fragliche Mannigfaltigkeit einen kombinatorischen Aufbau besitzt, in dem nur eine Zelle höchster Dimension auftritt, so besteht das Petersen-Heegardsche Verfahren darin, diese Zelle nach Punktierung „weitgehend" wegzudeformieren. Das Komplement des Diagrammes einer solchen Mannigfaltigkeit bezogen auf eben diese ist folglich immer eine Zelle (höchster Dimension). Als Vorläufer dieser Idee von Diagramm nennt Heegard (in Heegard 1916, 193) J. B. Listing (Listing 1862, No. 13) und E. Betti (Betti 1871, 149f). Allerdings scheinen mir Listings Ansichten doch deutlich verschieden zu sein von denen Heegards.

Die Bestandteile des Diagramms sind nach Konstruktion noch n-dimensional; allerdings sind sie in einer Dimension „sehr dünn". Nimmt man den „Rand" des Diagrammes (wobei der Rand der Ausgangsmannigfaltigkeit - so vorhanden - nicht berücksichtigt wird), so erhält man den „Kern" des Diagrammes, dessen Dimension eins kleiner ist als die der Mannigfaltigkeit. Im kombinatorischen Bild wäre der Kern einer n-Mannigfaltigkeit deren (n-1)-Gerüst; man bemerkt, daß man Heegards Ausdruck „Rand" nicht im modernen Sinn verstehen darf.[10]

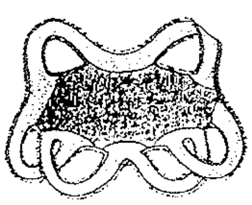
Führt man dies bei einem Volltorus aus, so erhält man als Diagramm einen aufgedickten gewöhnlichen Torus - sozusagen die Kruste -, in dem eine zylindrische Scheibe eingespannt ist. Der Kern besteht dann aus einem Torus mit einer Meridiankreisscheibe.

Heegard hebt zwei Eigenschaften des Diagramms hervor (Heegard 1916, 194):

1. Es ist der gelochten Ausgangsmannigfaltigkeit (homotopie-) äquivalent.
2. Sein Kern gibt an, durch welche (n-1)dimensionalen Schnitte die n- Mannigfaltigkeit einfach-zusammenhängend gemacht werden kann.

Diese recht vagen Betrachtungen werden dann speziell auf 3-Mannigfaltigkeiten angewandt (Heegard 1916, 197), von denen noch ausdrücklich verlangt wird, daß sie zusammenhängend und geschlossen sein sollen. Der Kern des Diagramms besteht dann aus Flä-

---



Zu Petersens Leben und Werk vgl. man Discrete Mathematics (1992).

9 Diese ist per definitionem homöomorph einer n-Kugel E^n.

10 In der Petersenschen (zweidimensionalen) Normalform ist das Diagramm die Kreisscheibe mit Bändern; der Kern besteht aus den "Seelen" der Bänder sowie aus der Kreislinie, ist also im wesentlichen eine zusammenhängende Summe von Kreislinien.

chenstücken, die man als einfach-zusammenhängend voraussetzen darf. Diese treffen in Kurvenstücken aufeinander; die Schnittpunkte solcher Kurvenstücke nennt Heegard „Verbindungspunkte".[11] Damit hatte Heegard nun die Basis gewonnen, um eine Heegard-Zerlegung im modernen Sinn zu erhalten. Hierzu werden die Verbindungspunkte mit Sphären umgeben und die verbindenden Kurvenstücke zu Röhren erweitert (Heegard 1916, 198). Das entstehende Gebilde[12] ist äquivalent einer Henkelfläche vom Geschlecht p mit dem Zusammenhang 2p + 1. Das Diagramm selbst der 3-Mannigfaltigkeit - Heegard arbeitet hauptsächlich mit diesem - besteht aus dem entsprechenden Henkelkörper, an den bereits sämtliche dreidimensionalen Platten (das sind die „Überreste" der wegdeformierten Topzelle) angeheftet worden sind. Diese Henkelfläche ist nun, um die 3-Mannigfaltigkeit zu erhalten, einerseits mit einem Henkelkörper zu umgeben, andererseits mit einem ebensolchen auszufüllen. Wie diese Henkelkörper aneinanderzufügen sind, gibt ein p-elementiges System einfacher, sich einander nicht-schneidender geschlossener Kurven, auf das die Meridianschnitte des anderen Henkelkörpers zu legen sind, auf der Henkelfläche an.[13] Hinreichend und notwendig für die Geschlossenheit der dargestellten 3-Mannigfaltigkeit ist, daß die geschlossenen Kurven, entlang denen die Verheftung der Henkel stattfinden soll, die Henkelfläche nicht zerstücken.

Mit modernen Augen betrachtet, ist vor allem der erste Teil in der Vorgehensweise Heegards - also das Deformieren der punktierten 3-Mannigfaltigkeit sowie die Beschreibung

---

[11] „point de jonction" (Heegard 1916, 197)

[12] Dieses darf man sich ähnlich wie das Brüsseler Atomium vorstellen; allerdings können zwei Sphären durch mehrere Röhren verbunden sein.

[13] Die Beschreibung, die Heegard gibt, liest sich so: „Considérons maintenant le diagramme lui-même. Chaque point de jonction est entouré d'une variété élémentaire (un élément de volume) à laquelle nous pourrons donner par exemple la forme sphérique; les arcs de courbe reliant les sphéres sont entourés d'espaces filiformes attachés aux surfaces sphériques par de petits éléments de surface. Appelons ces espaces fils: ils peuvent être tracés par un élément de surface se déplacant d'une des surfaces sphériques à l'autre;(...)
L'espace entourant un élément de surface de diagramme est un espace en forme de plaque limité par deux éléments de surface formant les côtes de la plaque et par une surface en forme de bande de même connexion qu'un anneau circulaire, et qui forme le bord de la plaque. Cet espace, que nous appellerons une plaque, est attaché le long de son bord à une bande appartenant à la surface de la variété formée par les fils et les sphéres aux points de jonction des fils. Supposons que le diagramme ait en tout a sphères aux points de jonction, b fils et c plaques. A l'aide de a-1 des fils, les sphères peuvent être réunies en un seul espace élémentaire auquel on peut donner la forme sphérique et de cette sphère centrale sortiront b-a+1 = p fils. Sur cette surface, dont la connexion est 2p+1, se trouvent c courbes fermées le long desquelles les bords des plaques doivent être attachés.
La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel système de fils, avec de courbes d'attachement pour des plaques, puisse représenter le diagramme d'un espace fermé est celle-ci: que les courbes d'attachement soient formées par p coupures fermées qui laissent la surface du système de fils connexe." (Heegard 1916, 198)
Noch eine Bemerkung zur Terminologie: Heute stellt man sich unter einem „Heegard-Diagramm" meist eine graphische Darstellung der Identifikationsvorschrift auf der gelochten Sphäre vor oder auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht g (vgl. Rolfsen 1976, 245), während man die abstrakte Beschreibung eine Heegard-Zerlegung nennt. Die Diagramme Heegards sind also eher Zerlegungen im modernen Sinne; eine graphische Repräsentation sucht man bei ihm vergeblich. Diese begegnet erstmals bei Poincaré im 5. Komplement (vgl. 3.5), weshalb er also der eigentliche Entdecker (oder Erfinder, je nach Auffassung) der Heegard-Diagramme wäre! Man beachte auch, daß Heegards Diagramme eine von 1 größere Dimension haben als unsere.

von dessen Resultat - anfechtbar. Was man bekommen muß, ist das System von Punkten und Verbindungskurven, das man zur Henkelfläche erweitern kann. Unter dem Einfluß kombinatorischer Vorstellungen, wie sie Poincaré im 1. und 2. Kompliment inaugurierte und wie sie vor allem von Dehn-Heegard, Tietze und Alexander-Veblen propagiert wurden (vgl. 3.4 sowie unten 4.2), lag es später dann nahe, sich auf eine Zellenzerlegung oder auch auf eine simpliziale Zerlegung der Mannigfaltigkeit zu stützen. Dies ist der Weg, den z.B. Dehn (Dehn 1910, 166 f), Veblen (Veblen 1931, 156 ff) und Seifert und Threlfall wählten (Seifert-Threlfall 1934, 219f) und der auch heute noch eingeschlagen wird (vgl. etwa Hempel 1976, 17f)[14].

Ein anschauliches Verständnis für Heegards Vorgehensweise gewinnt man vielleicht am einfachsten, wenn man von Poincaré's Würfelbeispielen ausgeht, etwa vom 3-Torus (vgl. 3.2). Hier nimmt man aus dem Würfelinneren eine Vollkugel heraus und läßt anschließend das entstandene „Loch" expandieren, bis schließlich nur noch dünne Platten - im wesentlichen die zu identifizierende Außenfläche nämlich - übrigbleiben. Das ist das Diagramm, während der Kern des Diagramms die Oberfläche des Würfels ist (beide Male muß man sich natürlich die Identifizierungen ausgeführt denken). Ein Henkelmodell erhält man, indem man eine Vollkugel für die einzige Ecke des 3-Torus und je einen (ausgefüllten) Henkel für dessen drei Kanten nimmt. Auf diesen Henkeln sind Kurven (im wesentlichen sind das je zwei Parallelen) einzutragen, die die Einheftung der Platten regeln. Natürlich kann man eine analoge Überlegung eine Dimension tiefer auch für den gewöhnlichen Torus durchführen.

Die Diagramme werden von Heegard im Abschnitt XII seiner Arbeit noch einmal aufgegriffen. Hier stellt er u.a. verschiedene Überlegungen an, ob und wie man Diagramme vereinfachen kann.[15] Für uns interessanter ist der Versuch Heegards, die Diagramme auf dem Torus zu charakterisieren (Heegard 1916, 207-211), wozu er die Klassen[16] nicht-nullhomologer einfacher Kurven auf dem Torus aufzählt. Er findet: 1. die Meridiankurven; 2. die Parallelen und 3. Kombinationen von beiden, die Heegard in der Form $\lfloor n\beta \pm \lambda \rfloor$ und $\lfloor \beta \pm n'\lambda \rfloor$ schreibt [β ist eine Parallele, λ ein Meridian, n, n' natürliche Zahlen; die fraglichen Kurven entsprechen Torusknoten (n,±1) bzw. (1,±n')].

Ist auf dem Torus ein Paar nicht-nullhomologer geschlossener Kurven gegeben, so kann man diese dazu verwenden, zwei Volltori entlang ihrer gemeinsamen Grenzfläche - dem fraglichen Torus - so miteinander zu verheften, daß die beiden Kurvensysteme gerade aufeinander fallen. Heegard diskutiert drei Fälle (Heegard 1916, 211):[17]

---

[14] Die Existenz einer Heegard-Zerlegung wird also unter der Voraussetzung der Triangulierbarkeit abgeleitet. Für 3-Mannigfaltigkeiten wurde die Existenz von Triangulierungen 1952 von E.E. Moise bewiesen, weshalb man feststellen darf, daß jede 3-Mannigfaltigkeit tatsächlich eine Heegard-Zerlegung zuläßt. Ein analoges Ergebnis gilt aber nicht mehr für 4-Mannigfaltigkeiten (Casson, Freedman - vgl. Massey 1989, 52).

[15] So weist er ausdrücklich darauf hin, daß man i. a. nicht erreichen kann, daß die verheftenden Kurven jeden Henkel nur einmal durchlaufen (Heegard 1916, 207), was er mit einem Beispiel untermauert (Heegard 1916, 209). Man vgl. auch die Beschreibung, die Poincaré vom Dodekaederraum gibt (3.4).

[16] Die Klassen sollen nach der Relation „stetige Deformierbarkeit", also nach der Homotopierelation, gebildet werden. Im Grunde genommen untersucht Heegard hier die Fundamentalgruppe des Torus, wobei er vom Grundpunkt absieht.

[17] Man beachte, daß bei Heegard der Begriff „tore" sowohl Volltorus als auch Torus bedeuten kann; einer analogen Äquivokation unterliegt „sphère". Es sei noch bemerkt, daß die dritte Zuordnung, welche im

1. Die Zuordnung wird so vorgenommen, daß Parallelen auf Meridiankurven fallen und vice versa. Die entstehende Mannigfaltigkeit ist eine 3-Sphäre.
2. Zwei Volltori sollen so miteinander verheftet werden, daß Meridiane auf Meridiane und Parallelen auf Parallelen fallen. Das ergibt das Sphärenbündel $S^1 \times S^2$ (modern gesprochen).
3. Die Zuordnung wird so vorgenommen, daß die Parallelen auf die Kurven $[2\beta \pm \lambda]$ fallen, während die Meridiane auf die Parallelen β abgebildet werden.

Von besonderer Bedeutung ist das dritte Beispiel, da es später (Heegard 1916, 217 und 234) als Gegenbeispiel zu Poincaré's Dualitätssatz verwandt wird: Seine „Betti-Zahlen" vergeben sich nämlich zu $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = 1$ Das liegt natürlich (vgl. 3.4) daran, daß hier in der Dimension 1 ein Torsionskoeffizient mit dem Wert 2 auftritt.[18] Heegard macht noch darauf aufmerksam (Heegard 1916, 209), daß man sich $[2\beta+\lambda]$ als Randkurve eines Möbius-Bandes vorstellen kann.

Später gibt der Verfasser noch eine andere Darstellung dieser Mannigfaltigkeit im Rahmen der algebraischen Geometrie. Es handelt sich dabei um den Schnitt des Kegels $z^2 = xy$ in C^3 mit dem Zylinder $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Diese kurze Charakterisierung führt Poincaré im 3. Komplement (Poincaré VI, 390) an; Heegard selbst (Heegard, 1916, 233) und auch Poincaré bei früheren Gelegenheiten geben eine etwas andere, aber gleichwertige Beschreibung (Poincaré VI, 355). Die Behauptung, daß beide Beschreibungen (analytisch, mittels Diagramm auf dem Torus) dieselbe Mannigfaltigkeit (vom Standpunkt der Topologie aus) liefern, wird von Heegard nicht begründet.[19]

Text angegeben ist, nicht genau unseren Vorstellungen entspricht, weil wir das Bild des Meridians vorgeben (und nicht, wie bei Heegard, das der Parallelen).
Weiter muß man beachten, daß Heegard oft mit zwei Kurvenscharen auf dem Torus arbeitet, was daran liegt, daß er ja Platten anheften will. Diese Kurvenscharen bestehen aus zwei geschlossenen einfachen Kurven, weshalb man eine von ihnen zur Verheftung in unserem heutigen Sinne nehmen kann.
Allgemein gilt: Um einen Homöomorphismus des Torus (bis auf Isotopie) festzulegen, muß man nur das Bild eines kanonischen Kurvenpaares angeben (vgl. Stillwell 1993, 206 - 215).

[18] Heegard begründet dies so:
„Prenons ensuite la variété percée ayant comme diagramme un fil sur lequel la bande d'attachement de la plaque parcourt la courbe $[2\beta+\lambda]$; elle peut évidemment être rendue simplement connexe par une certaine coupure linéaire, partant du point percé et y retournant, et par une coupure superficielle dont la frontière parcourt la surface de la ligne de coupure le long d'une ligne $[2\beta+\lambda]$; mais cette coupure superficielle ne peut pas être transformée en une coupure transversale puisque la bande d'attachement ne peut pas être ramenée à la surface de percement seulement." (Heegard 1916, 217)
Man beachte, daß "fil" den Volltorus mein; an ihn wird eine "Platte" längs der vorgegebenen Kurve angefügt.
Eine weitere ausführlichere Begründung findet sich einige Seiten weiter (Heegard 1916, 235), wobei Heegard sich wesentlich auf das Diagramm in seinem Sinne stützt.
Allgemein entspricht die aus der Verheftung zweier Volltori längs der Kurve $[m\beta + n\lambda]$ entstehende Mannigfaltigkeit einem Linsenraum $L(m, n')$ mit $ggT(m, n') = 1$ und mit $n' \equiv n \bmod m$ (vgl. Tietze 1908, 111, Anm. 1). Man beachte, daß diese Verheftungskurve in moderner Schreibweise dem Torusknoten (m, n) entspricht.

[19] Heegard benutzte anscheinend die algebraische Beschreibung, um der ersten Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffes gerecht zu werden. Er schreibt über diese:
„Ceci montre que la variété est de celles auxquelles la théorie topologique de Poincaré-Picard doit être applicable,..." (Heegard 1916, 232)

Was verbirgt sich nun hinter dieser ominösen Mannigfaltigkeit? In Kenntnis späterer Entwicklungen fällt die Antwort hierauf nicht allzu schwer. 1932 gelang es nämlich L. Goeritz, nach Vorarbeiten von H. Seifert (Seifert 1931), zu beweisen, daß die geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten, welche durch ein Heegard-Diagramm auf dem Torus definiert werden, entweder zu den Linsenräumen gehören (zu diesen werden die 3-Sphäre und der reelle projektive Raum aus Gründen der Systematik hinzugerechnet) oder aber ein Produkt $S^1 \times S^2$ (auch als Linsenraum $L(0,1)$ bezeichnet) sind. Die Fundamentalgruppe der Heegard-Mannigfaltigkeit ist zyklisch von der Ordnung zwei, weshalb unter den genannten Mannigfaltigkeiten nur der reelle projektive Raum, also der Linsenraum $L(2,1)$, in Betracht kommt![20] Die Kurve $[2\beta+\lambda]$ entspricht dann P_1R, welches nicht selbst, wohl aber zweimal durchlaufen in P_3R berandet.

Fassen wir unsere Betrachtungen über Heegard zusammen. Die Bedeutung der Kritik Heegards an Poincaré's Dualitätssatz als Initialproblem für die Hinwendung des letzteren zu strengeren, kombinatorischen Methoden ist allgemein anerkannt und wird in den gängigen Darstellungen auch entsprechend gewürdigt.[21] Sein konstruktiver Beitrag zur Topologie der 3-Mannigfaltigkeiten, die Heegard-Diagramme, fand zunächst hingegen kaum Beachtung. Demgegenüber muß aber festgehalten werden, daß die Heegard-Diagramme nach wie vor eine wichtige Rolle in den Bemühungen um die Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten spielen. Historisch war es so, daß diese Idee erst mit erheblicher Verzögerung zu wirken begann - nicht zuletzt bedingt durch Heegards schwer faßliche Darstellung einerseits und die Hinwendung zu kombinatorischen Methoden andererseits. Eine systematische Behandlung benötigt ja auch - wie wir im Zusammenhang mit Poincaré's Homologiesphäre gesehen haben (vgl. 3.4) - so etwas wie den Satz von Seifert-van Kampen.

Sieht man einmal vom sporadischen Auftreten der Heegard-Diagramme bei Poincaré und Dehn-Heegard zur Darstellung des Dodekaederraums (vgl. 3.4) sowie bei Alexander zur Gewinnung von Linsenräumen (vgl. 5.1.1) ab, so erfuhr das Interesse an diesem Gegenstand erst zu Beginn der 30er Jahre eine Wiederbelebung. Neben den bereits genannten Arbeiten von Goeritz und Seifert wären hier u.a. Singer (Singer 1933) und Reidemeister (Reidemeister 1928 und Reidemeister 1934) zu nennen. Erwähnung finden die Heegard-Diagramme in Veblens bekanntem Lehrbuch (Veblen 1931, 155-157: „The most direct way of attacking the problem of classifying three-dimensional manifolds is to try to reduce them to normal form...." [Veblen 1931, 155]), auf den auch die Bezeichnung zurückzugehen scheint, und natürlich bei Seifert-Threlfall (Seifert-Threlfall 1934, 219 - 221).

Die Heegard-Diagramme bilden auch heute noch einen Gegenstand topologischer Forschung. So verfügt man mittlerweile über einen Entscheidungsalgorithmus, welcher es erlaubt herauszufinden, ob ein vorgebenes Heegard-Diagramm die 3-Sphäre darstellt oder nicht (T. H. Rubinstein 1991). Offen bleibt aber nach wie vor die Frage, wie Heegard-Diagramme i.a. aussehen. Übrigens spielten diese auch in dem als inkorrekt erkannten Beweis der Poincaré-Vermutung, den Rourke und Régo 1986 veröffentlichten, eine wichtige Rolle.

---

[20] Unsere Behauptung findet sich bestätigt bei Dehn-Heegard 1907, 184 Anm. 77.
Wie wir weiter oben (in 3.2) gesehen haben, tritt P_3R bei Poincaré als fünftes Beispiel auf, das aus dem Oktaeder durch Identifikation gewonnen wird. Eine Verbindung zum Heegardschen Beispiel hat Poincaré anscheinend später nicht gesehen.
Zu den Heegard-Diagrammen auf dem Torus vgl. man Seifert-Threlfall 1934, 220.

[21] Vgl. etwa Bollinger 1976, 124-127; Scholz 1980, 393 und Dieudonné 1989, 28f. Eine ältere Darstellung ist Alexandroff-Hopf 1935, 7.

Die prinzipielle Bedeutung der Heegard-Diagramme liegt darin, daß sie die Konstruktion von 3-Mannigfaltigkeiten zurückführen auf ein zweidimensionales Problem: nämlich auf die Angabe von Heegard-Diagrammen, also auf die Angabe von Systemen nicht-nullhomologer doppelpunktfreier und disjunkter Zykel auf Henkelflächen (erstmals systematisch von Poincaré im 5. Komplement in Angriff genommen). Um zu einer Klassifikation zu gelangen, wären somit zwei Aufgaben zu lösen:

1. Man zähle alle Heegard-Diagramme auf.
2. Man gebe Verfahren an, die es erlauben, zu entscheiden, ob zwei Heegard-Diagramme dieselbe Mannigfaltigkeit definieren oder nicht.

Diese sind - wie bereits oben angedeutet - i.a. nicht gelöst. Einen Teilerfolg stellt die bereits erwähnte Aufzählung aller Heegard-Diagramme auf dem Torus durch Seifert und Goeritz dar verbunden mit der Lösung des Homöomorphieproblems für die Linsenräume (vgl. 5.3). Insgesamt betrachtet harrt damit der im folgenden wiedergegebene Wunsch Heegards auch heute noch seiner Erfüllung:

> „Si l'on réussit à établir des formes normales auxquelles les diagrammes peuvent être réduits, la condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés fermées soient équivalentes devient celle-ci: que les formes normales de leurs diagrammes soient identiques."
>
> (Heegard 1916, 194)

4.2 Der Ausbau des kombinatorischen Ansatzes durch Heinrich Tietze und Ernst Steinitz

Die nach Heegard nächste wichtige Etappe in der Rezeption der Ideen Poincaré's zur Theorie der Mannigfaltigkeiten stellt - sieht man von Picard - Simart ab - der Enzyklopädieartikel von Max Dehn und Poul Heegard dar, auf den wir schon in 2.4 und in 3.5 kurz eingegangen sind. Da sich dieser neben Grundlagenfragen hauptsächlich auf die Betrachtung und Klassifikation der Flächen konzentrierte - von den meisten Autoren wird dieser Artikel als die erste vollständige und korrekte Klassifikation der Flächen bezeichnet[22] - und die von ihnen verwendete kombinatorische Grundlegung sich in ähnlicher Weise bei H. Tietze und vor allem E. Steinitz wiederfindet, wollen wir uns hier auf die beiden letztgenannten Autoren beschränken. Insbesondere ging die Dehn-Heegardsche Axiomatik in der Steinitzschen auf, weshalb wir letztere betrachten werden. Erwähnenswert ist aber noch die Tatsache, daß bei Dehn und Heegard der kombinatorische Ansatz (vgl. auch 6) mit einem Geltungsanspruch auftritt, der in dieser Form wohl kaum noch einmal in Erscheinung trat:

[22] Vgl. etwa Seifert-Threlfall 1934, 319 Anm. 22. Die Lösung von Dehn-Heegard setzt allerdings die Triangulierbarkeit voraus, welche erst 1922 im Falle der Flächen durch T. Radó bewiesen wurde. Gelegentlich, z.B. bei Massey 1989, 53 (mit Vorbehalten) und Levi 1929, 297, sowie Tucker 1935, 470, wird auf R.H. Brahana aufmerksam gemacht (Brahana 1921). Einzelheiten hierzu findet man in 2.4.

> „Durch die Entwicklung der ersten sieben Nummern dieses Abschnittes ist die Analysis situs dargestellt als ein durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichneter Teil der Kombinatorik."
>
> (Dehn-Heegard 1907, 170)

Dagegen sehen schon H. Tietze und E. Steinitz die kombinatorische Auffassung mehr als Mittel zum Zweck denn als autonomes Gebiet (vgl. Steinitz 1908, 30 und Tietze 1908, 2).

Vom Standpunkt der Disziplinentwicklung (vgl. 8) aus betrachtet markiert die Arbeit von Dehn-Heegard den Abschluß einer proliferierenden Phase, die vor allem mit Poincaré's Namen verknüpft ist. Der Stand der Dinge wurde bei Dehn-Heegard gesichert, geordnet und eine Grundlegung kodifiziert. Dabei mußte klarerweise vieles ausgesondert werden, vor allem fast alle kontinuumstopologischen Ansätze Poincaré's.

Heinrich Tietze (1880 - 1964) hat hauptsächlich in Wien studiert. Wie er selbst an verschiedenen Stellen erwähnt, kam er hier durch eine Vorlesung W. Wirtingers in Berührung mit der Topologie sowie mit den Ideen Poincaré's.[23] Neben der Habilitationsschrift Tietze 1908, auf die wir uns im weiteren stützen werden, ist im Hinblick auf die Topologie noch deren Vorläuferarbeit Tietze 1906 erwähnenswert in dieser frühen Schaffensperiode. Bis heute bekannt geblieben ist Tietzes Arbeit aus dem Jahre 1905 "Über das Problem der Nachgebiete im Raum".

Tietze unterzog die Poincaréschen Arbeiten einer kritischen Durchsicht, welche in einen kombinatorischen Aufbau der Topologie mündete. Dabei legt Tietze eine dem Zellenaufbau Poincaré's nachempfundenen Aufbau von Mannigfaltigkeiten zugrunde. So entsteht z. B. eine 3-Mannigfaltigkeit aus einer endlichen Anzahl von Kugeln, deren Oberflächen in endlich viele Polygone zerlegt sind, indem man paarweise sphärische Polygone miteinander identifiziert.[24] Dabei sind orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Zuordnungen zu unterscheiden (Tietze 1908, 17); eine Mannigfaltigkeit, bei der nur orientierungserhaltende Identifikationen stattfinden, heißt bei Tietze zweiseitig (wir sprechen in Zukunft von orientierbar). Die Kugeln heißen Zellen des die 3-Mannigfaltigkeit definierenden Schemas, Paare zugeordneter Polygone sowie freie Polygone sind Lamellen, Zykeln korrespondierender Polygonseiten sind Kanten und Klassen zugeordneter Ecken sind Ekken. Die Gesamtheit der Zuordnungen heißt Schema der Mannigfaltigkeit.

Im Unterschied zu Poincaré, bei dem die Zellenzerlegung ein Mittel zur Beschreibung oder auch Erzeugung einer Mannigfaltigkeit war und damit kein Gegenstand eigenständigen Interesses, versucht Tietze nun, eine unabhängige Theorie der kombinatorischen Mannigfaltigkeiten aufzustellen.

[23] Vgl. hierzu Tietze 1908, 7 Anm. 10), wo von einer Vorlesung Wirtingers im Sommer 1904 über algebraische Funktionen die Rede ist, und Tietze 1922, 19, wo von einer Vorlesung Wirtingers im Jahre 1903 über Riemannsche Flächen gesprochen wird. Es ist bemerkenswert, daß sowohl im Falle von Heegard als auch in jenem von Tietze jeweils ein Funktionentheoretiker - nämlich dort Julius Petersen, hier Willy Wirtinger - eine wichtige Rolle spielten. Dies zeigt, daß gerade in den Anfängen Topologie und Funktionentheorie eng miteinander verknüpft waren. Einzelheiten zum Werdegang Tietzens findet man bei Einhorn 1983, 76 - 96. Zu W. Wirtingers Rolle vergleiche man Epple 1994.

[24] Es sollen nur Polygone mit gleicher Kantenanzahl miteinander identifiziert werden. Polygone, die mit keinem anderen identifiziert werden, heißen frei.

Die zentrale Idee hierbei ist die kombinatorische Äquivalenz.[25]. Ein derartiger Begriff tritt bei Poincaré nicht explizit auf, wenn dieser natürlich sehr wohl das Werkzeug der Unterteilung einer Zellenzerlegung oder dergleichen zu handhaben wußte. Erstmals ausdrücklich genannt und betrachtet wurde die kombinatorische Äquivalenz bei Dehn-Heegard im Abschnitt 3 „Interne Transformation und Homöomorphismus (Elementarverwandtschaft)" [Dehn-Heegard 1907, 159f]. Da zur Erreichung einer konsequent kombinatorischen Auffassung nicht nur die kombinatorische Definition der Objekte sondern auch die der (modern gesprochen) Morphismen gehört, muß man deshalb festhalten, daß die strikt kombinatorische Sichtweise erst mit Dehn-Heegard erreicht wurde. Insofern erstaunt es auch nicht, daß bei Poincaré das Spannungsverhältnis zwischen kombinatorischer und kontinuumstopologischer Sichtweise kaum thematisiert wird, was dann aber mit Tietze und Steinitz zu einem ganz wichtigen Thema werden sollte (siehe unten).

Die kombinatorische Äquivalenz gründet sich auf den elementaren Unterteilungen, von denen es im dreidimensionalen Fall[26] drei Arten gibt (Tietze 1908, 21f):

a) Zerlegung einer Kante durch einen mittleren Punkt in zwei Kanten nebst entsprechender Unterteilung aller demselben Kantensystem angehörigen Kanten und geeigneter Erklärung der Identifikation;

b) Zerlegung eines Polygons durch eine Diagonale in zwei Polygone nebst analoger Unterteilung des mit diesem zu identifizierenden Polygons (falls es sich nicht um ein freies handelt) und geeigneter Festsetzung der Identifikation;

c) Zerlegung einer Kugel in zwei Kugeln. Hierzu wird auf der die Kugel begrenzenden Sphäre ein geschlossener Polygonzug gebildet, dessen Kanten alle der vorgegebenen polygonalen Unterteilung entstammen sollen. Folglich gibt es Bereiche dieser Unterteilung, die im Innern des fraglichen Polygonzuges liegen, und solche, die ausserhalb desselben sind. Nun verbinde man die Punkte des Polygonzuges mit dem Kugelmittelpunkt und schneide das entsprechende Stück aus der Kugel aus. Die Oberflächen der beiden sich ergebenden Kugelteile lassen sich wieder als 2-Sphären mit polygonaler Unterteilung auffassen. Vom topologischen Standpunkt aus erhält man somit zwei Kugeln, zwischen denen die Identifikationen folgendermaßen festzulegen sind: Zwischen „alten" Polygonen bestehende Zuordnungen werden unverändert übernommen; die beiden neu hinzugekommenen Polygone - die von dem zerlegenden Polygonzug herrühren - sind so zuzuordnen, daß durch die Trennung separierte Ecken und Kanten wieder zusammenfallen.[27]

Diese Zerlegungen heißen Zerlegung einer Kante, einer Lamelle und einer Zelle. Zwei Schemata, die durch elementare Umformungen auseinander hervorgehen, oder die ein

[25] Tietze selbst spricht auch hier von „Homöomorphie" (Tietze 1908, 21), was wir wegen zu befürchtender Mißverständnisse vermeiden möchten. Bei Tietze werden allerdings beide Bedeutungen sorgsam - aber eben nicht terminologisch - geschieden.

[26] Wir beschränken uns im weiteren auf diesen Fall, der auch bei Tietze eine herausgehobene Rolle spielt. Die Übertragung auf den allgemeinen Teil, die Tietze vornimmt (Tietze 1908, 24 - 26), liegt weitgehend auf der Hand.

[27] Man bemerkt hier deutlich die Nachteile, die Tietzes Vorgehen im Vergleich zur Verwendung von Simplizes aufweist.

gemeinsames drittes Schema besitzen, das aus beiden durch elementare Umformungen gewonnen werden kann, heißen kombinatorisch äquivalent.

Tietze unterscheidet - wie bereits erwähnt - klar zwischen der Homöomorphie von Punkt- oder kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten (wie Tietze sich ausdrückt) und der kombinatorischen Äquivalenz der zugehörigen Schemata. Werden zwei Mannigfaltigkeiten durch kombinatorisch äquivalente Schemata definiert, so sind erstere offenkundig auch homöomorph. Hiervon gilt aber nicht unbedingt die Umkehrung, da eine Übertragung der polygonalen Zerlegung von einer Mannigfaltigkeit auf eine homöomorphe Schwierigkeiten bereitet. Der Durchschnitt der übertragenen Zerlegung mit der ursprünglich vorhandenen braucht keine Zerlegung mehr zu sein, da z. B. Endlichkeitsbedingungen verletzt werden können (vgl. Tietze 1908, 13f und 41). Dieses ganz typische Superpositionsproblem ist uns schon bei Riemann begegnet (vgl. 2.1). Das sich in ihm manifestierende Spannungsverhältnis von kombinatorischer und kontinuierlicher Auffassung[28], das in ähnlicher Weise auch bei Steinitz (vgl. 4.3) angesprochen wird, sollte später als „Hauptvermutung" (diese Bezeichnung geht auf H. Kneser [Kneser 1926, 6] zurück) berühmt werden. Außer im zweidimensionalen Fall, wo es durch Tietze erledigt wurde[29], bot dieses Problem ganz erhebliche Schwierigkeiten - vergleichbar vielleicht denen, die aus der Poincaré-Vermutung resultieren. 1952 gelang es E. Moise zu zeigen, daß die Hauptvermutung in der Dimension 3 für Mannigfaltigkeiten richtig ist[30], während J. Milnor 1961 Gegenbeispiele in der Dimension 8 gefunden hat.[31] Heute weiß man, daß die Hauptvermutung in den Dimensionen größer/gleich fünf falsch und in den Dimensionen kleiner/gleich drei richtig ist; die Dimension vier harrt einer Klärung.

Die Homologietheorie[32] wird im weiteren von Tietze rein kombinatorisch, das heißt ausschließlich für Schemata, unter Zuhilfenahme der Berandungsrelationen aufgebaut, also ganz ähnlich dem Standpunkt, den Poincaré im ersten und zweiten Komplement eingenommen hatte. Er bezieht neben der Frage nach der Endlichkeit und der Existenz einer - modern gesprochen - Homologiebasis (Tietze 1908, 33f und 36) auch zwei Probleme ein, die Heegard bereits angesprochen hatte: Müssen die Untermannigfaltigkeiten, welche den Rand eines Teiles der fraglichen Mannigfaltigkeit bilden, immer orientierbar sein? Dürfen sich diese überschneiden oder nicht? Schließlich gelangt Tietze zur Aufstellung dessen, was er Poincarésches Relationensystem[33] nennt (Tietze 1908, 30) - also zu einem vollständigen Verzeichnis der Berandungsbeziehungen zwischen den verschiedenen Bausteinen der Mannigfaltigkeit -, mit dessen Hilfe er die Inzidenzmatrizen aufstellen kann.

[28] „Sind zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten mit Zellenzerlegungen stets auch kombinatorisch äquivalent?", lautet die Kernfrage.

[29] Vgl. Tietze 1908, 106 - 110. Kneser weist auf Kérékjarto 1923, 134f hin (Kneser 1926, 6 Anm. 3).

[30] Kneser behauptet, daß die Hauptvermutung für zwei und drei Dimensionen bewiesen sei (Kneser 1926, 6) und verweist auf zwei Abhandlungen von Furch (Furch 1924 und 1924a).

[31] Vgl. hierzu Henn-Puppe 1990, 677f. Bemerkenswerterweise spielt auch hier - wie am angegebenen Ort nachgelesen werden kann - der Dodekaederraum eine wichtige Rolle. Milnor gewann seine Gegenbeispiele mit Hilfe von Linsenräumen. Zum Problemkreis Hauptvermutung vergleiche man auch 6.

[32] Bei Tietze finden sich die hierher gehörigen Betrachtungen im II. Kapitel (Tietze 1908, 26-48 [Betti-Zahlen] und Tietze 1908, 49 - 56 [Torsionszahlen]). Einen Überblick hierzu gibt Bollinger 1972, 147 - 160.

[33] Bei Poincaré war dies das Schema eines Polyeders (oder auch einer Mannigfaltigkeit), das in den Inzidenzmatrizen seinen Ausdruck fand.

Letztere wiederum werden zur Definition der Betti-Zahlen[34] und der Torsionskoeffizienten herangezogen. Das ganze gipfelt dann im Nachweis, daß die Betti-Zahlen und die Torsionskoeffizienten „topologische Invarianten" sind, das heißt hier, daß kombinatorisch äquivalente Schemata auch die gleichen Invarianten aufweisen.[35]

Im gleichen Geiste nähert sich Tietze auch der Fundamentalgruppe. Bevor er auf diese genauer eingeht, stellt er im § 11 seiner Arbeit noch einige Überlegungen zur kombinatorischen Gruppentheorie an, die von großer Bedeutung sein sollten. Letztlich laufen diese auf den Versuch hinaus, ein Invariantensystem zur Charakterisierung endlich erzeugter Gruppen anzugeben, mit dessen Hilfe man dann entscheiden können sollte, ob zwei Gruppen isomorph sind oder nicht.[36] Hier betont Tietze ausdrücklich, daß er einen abstrakten Begriff von Gruppe zugrunde legt:

> „Dabei ist zu bemerken, daß die Elemente dieser Gruppen nicht Operationen von bestimmter Bedeutung sind, daß vielmehr nur die Gesetze für die Zusammensetzung dieser Elemente in Betracht kommen, und wir es also mit dem allgemeinen Gruppenbegriff zu tun haben werden."
>
> (Tietze 1908, 56f)[37]

Im Anschluß hieran geht Tietze auf Gruppen ein, die durch endlich viele Erzeugende $s_1,...,s_n$ und endlich viele Relationen F_i $(s_1,...,s_n) = 1$ $(i = 1,...,m)$ gegeben sind, wobei er sehr klar das Grundproblem, das mit dieser Darstellungsweise verbunden ist, formuliert:

> „Man bemerkt sofort, daß es vorkommen kann, daß durch zwei verschiedene Systeme von erzeugenden Operationen und definierenden Relationen Gruppen definiert werden, die einander isomorph sind und also im Sinne des allgemeinen Gruppenbegriffes eine und dieselbe Gruppe repräsentieren. Doch ist weder das allgemeine Problem gelöst, die Gesamtheit all der verschiedenen Erzeugungsweisen, welche eine und dieselbe Gruppe definieren, theoretisch zu überblicken, noch auch nur ein Mittel gefunden, um im speziellen Falle zu entscheiden, ob zwei durch verschiedene Systeme erzeugender Operationen und definierender Relationen gegebene Gruppen identisch, d.h. also isomorph sind. Eine notwendige Bedingung aber dafür, daß zwei in verschiedener Weise erzeugte Gruppen isomorph sind, wird im folgenden beigebracht werden. Sie besteht in der Gleichheit der aus den Systemen definierender Relationen abzuleitenden Poincaréschen Zahlen der beiden Gruppen."
>
> (Tietze 1908, 57f)

Die fraglichen Invarianten ergeben sich aus Summen der Exponenten in den definierenden Relationen, die in geeigneter Weise umgeformt werden. Diese Umformungen sind heute als „Tietze-Transformationen" bekannt. Die Exponentensummen werden in einer Matrix zusammengefaßt, deren Elementarteiler und deren Rang zu bestimmen sind. Aus moderner Sicht läuft das darauf hinaus, die fragliche Gruppe abelsch zu machen und auf das Ergeb-

[34] Hierin äußert sich die kombinatorische Sichtweise deutlich - vgl. Poincaré, wo die Betti-Zahlen geometrisch interpretiert werden. Vgl. Tietze 1908, 37.

[35] Einen allgemeineren Invarianzbeweis bezüglich Homöomorphie im üblichen Sinne gab erst Alexander (Alexander 1915 und Alexander 1926), wobei diese Beweise simpliziale und sogar singuläre Techniken verwandten (vgl. Dieudonné 1989, 43-49).

[36] Wie wir bei Poincaré im Zusammenhang mit dem sechsten Beispiel gesehen haben, kann dies ja durchaus eine schwierige Frage sein.

[37] Damit wird also in etwa der Stand erreicht, der sich in H. Webers „Lehrbuch der Algebra" (1895) findet; vgl. Wussing 1969.

nis den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen anzuwenden.[38] Insgesamt kann man festhalten, daß die kombinatorische Gruppentheorie bei Tietze, verglichen mit seinen beiden wichtigsten Wegbereitern, Dyck und Poincaré, deutlich an Profil gewann.

Die konkreten Ausführungen Tietzes zur Fundamentalgruppe (Tietze 1908, 65-69) lesen sich fast wie ein Kommentar zu Poincaré's entsprechenden Arbeiten. Tietze erklärt sehr sorgfältig, wie das Zustandekommen der Fundamentalgruppe im kombinatorischen Rahmen aussieht (vgl. oben 3.2) und wie sich die Relationen zwischen den Erzeugenden der Fundamentalgruppe ergeben. Weiter vermag er einen Algorithmus zu formulieren, der zu einer vorgegebenen Zellenzerlegung der Mannigfaltigkeit deren Fundamentalgruppe liefert (vgl. Dieudonné 1989, 301f). Gestützt hierauf gelingt es Tietze im § 13 nachzuweisen, daß kombinatorisch äquivalente Schemata isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, daß also letztere eine topologische Invariante in seinem Sinne ist.[39]

Während die bisher geschilderten Ausführungen Tietzes in der Hauptsache in dem von Poincaré gesteckten Rahmen bleiben, geht er im § 14 über diesen hinaus, indem er zeigt, daß sich die Torsionskoeffizienten in der Dimension 1 aus der Fundamentalgruppe ergeben.[40] Dies folgt direkt aus der Betrachtung der entsprechenden Inzidenzmatrix (Tietze

[38] Vgl. auch die Darstellung bei Chandler-Magnus 1982, 15-17. Der Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen, der von Tietze Frobenius und Stickelberger (1879) zugeschrieben wird (Tietze 1908, 62 Anm. 8), besagt in moderner Terminologie:
Eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G gestattet eine Zerlegung der Form

$$G \cong Z \oplus Z \oplus ... \oplus Z \oplus Z_{q_1} \oplus ... \oplus Z_{q_m},$$

wobei $q_i (i = 1,...,m)$ Primzahlpotenzen sind und jedes q_i das nachfolgende q_{i+1} teilt (für $i=1,...,m-1$) Die Zahlen q_i und r, das ist die Anzahl der freien Summanden Z, sind eindeutig bestimmt.
Im übrigen spricht es für Tietzes Streben nach Strenge, daß er beweist, daß seine Poincaréschen Zahlen - die identisch mit Poincaré's Torsionskoeffizienten sind (also modern gedacht die Zahlen q_1 bis q_m von oben) - von „der Wahl des die Gruppe definierenden Relationensystems unabhängig sind" (Tietze 1908, 62).
Die Betrachtung der Poincaréschen Zahlen muß noch ergänzt werden durch die Angabe der Anzahl der Erzeugenden des freien Anteils $Z \oplus ... \oplus Z$ (die im übrigen gerade gleich $\beta_1 - 1$ im Poincaréschen Sinne ist [vgl. Tietze 1908, 64 und 77-79]). Erst die simultane Übereinstimmung in diesen beiden Zahlen oder Zahlensystemen stellt eine notwendige Bedingung für die Isomorphie von endlich erzeugten abelschen Gruppen dar. Im übrigen macht Tietze noch darauf aufmerksam, daß man diese Zahlen beliebig vorgeben kann und dennoch eine sie realisierende Gruppe zu finden vermag (Tietze 1908, 64 Anm 12).
Schließlich sei noch erwähnt, daß Tietze umgehend zeigt, daß die Übereinstimmung der Poincaréschen Zahlen nur notwendig, nicht aber hinreichend für Isomorphie der fraglichen Gruppen ist. Er verwendet hierzu die zyklische Gruppe Z_2 und die Gruppe $(u,t \mid t^3 = 1, u^2tu^{-1}t^{-1} = 1, u^3 = 1)$ welche isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist. Macht man letztere abelsch, so erhält man ebenfalls Z_2. Ein anderes Beispielpaar liefert die triviale Gruppe und die binäre Ikosaedergruppe, da ja letztere nach Abelschmachen auch trivial wird (Tietze 1908, 64f).

[39] In einer Anmerkung (Tietze 1908, 69 Anm. 1) weist Tietze darauf hin, daß diese Invarianz im allgemeineren (sprich: modernen) Sinn bei Poincaré „aus der Bedeutung der Fundamentalgruppe für die in der Mannigfaltigkeit ausgebreiteten unverzweigten Funktionen" hervorgehe, was sich auf Poincaré's Definition der Fundamentalgruppe vermöge von Substitutionen (vgl. oben 3.2) bezieht.

[40] Der Zusammenhang von Fundamentalgruppe und eindimensionalen Torsionskoeffizienten wird bei Poincaré in der Tat nirgends thematisiert, vielleicht, weil er in den ersten beiden Komplementen - wo diese Koeffizienten ausführlich behandelt werden - nichts über die Fundamentalgruppe sagt. Nur im 5. Komplement, im Zusammenhang mit dem Dodekaederraum, werden Fundamentalgruppe und Torsionskoeffi-

1908, 79). Dabei weist Tietze darauf hin, daß man die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit, die wie fast immer bei Tietze durch das entsprechende Schema repräsentiert sein soll, auch mit Hilfe des „reziproken Schemas"[41] berechnen kann, was er dann für die 3-Sphäre und den reellen projektiven Raum vorführt.[42] Schließlich bemerkt Tietze noch, daß sich seine Überlegungen auch auf den Fall berandeter Mannigfaltigkeiten erweitern lassen (Tietze 1908, 80).

Die Quintessenz all dieser Ausführungen über die Fundamentalgruppe ergibt sich für den Fall dreidimensionaler geschlossener orientierbarer (kombinatorischer)[43] Mannigfaltigkeiten:

> „Die eben ausgesprochenen Sätze zeigen nun, daß wegen $P_1 = P_2$ für zweiseitige geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten aus der Fundamentalgruppe allein alle übrigen bekannten topologischen Invarianten sich ableiten lassen.
> Da es andererseits, wie Poincaré gezeigt hat, Mannigfaltigkeiten gibt, welche gleiche Bettische Zahlen und Torsionszahlen, aber verschiedene Fundamentalgruppen aufweisen, so dient die Angabe der Fundamentalgruppe mehr zur Charakterisierung einer zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit als die aller übrigen bis jetzt bekannten topologischen Invarianten zusammengenommen."
>
> (Tietze 1908, 80)

Der Nachweis, daß alle bis dahin bekannten topologischen Invarianten im Falle dreidimensionaler (geschlossener, orientierbarer, zusammenhängender würden wir hinzufügen) Mannigfaltigkeiten durch die Fundamentalgruppen eindeutig bestimmt sind, wurde von Wirtinger in seinem Gutachten, die Habitilationsschrift Tietzes betreffend, ausdrücklich als deren „Hauptergebnis" bezeichnet (vgl. Einhorn 1982, 79). Bedenkt man, daß die von Tietze bewiesene Einsicht eine Schlüsselrolle im Bereich der dreidimensionalen Topologie spielt, so erscheint Wirtingers Beurteilung dadurch angemessen.

Somit könnte für diese spezielle Sorte von Mannigfaltigkeiten der Stein der Weisen doch in der Fundamentalgruppe liegen! Wie wir gleich sehen werden, legte Tietze mit den von ihm konstruierten Linsenräumen den Grundstein dafür, daß diese eben formulierte Hoffnung als trügerisch nachgewiesen werden konnte (vgl. auch 5.1.1). Er machte aber schon an dieser Stelle noch auf ein anderes Problem aufmerksam:

zienten gleichzeitig in Betracht gezogen. Hier aber geht es um ein konkretes Beispiel, nicht um theoretische Erörterungen.
Es ist aber sicherlich nicht abwegig anzunehmen, daß Poincaré den von Tietze thematisierten Zusammenhang zumindest geahnt hat.

41 Wir würden heute von der dualen Triangulierung sprechen. Die Idee geht auf Poincaré zurück, der sie im ersten Komplement (Poincaré VI, 313-319) im Zusammenhang mit dem Dualitätssatz entwickelt hat. Sie steht natürlich letzten Endes in der Tradition der Platonischen Körper und ihrer dualen.

42 Diese Überlegung geht in den Nachweis ein, daß die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Mannigfaltigkeit die erste Betti-Zahl und die eindimensionalen Torsionskoeffizienten bestimmt. Hierbei beschränkt sich nämlich Tietze auf den Fall, daß nur eine Ecke im Schema vorhanden ist. Dies läßt sich dadurch rechtfertigen, daß man das reziproke Schema eines Schemas nehmen kann, welches in der höchsten Dimension nur eine Zelle aufweist. Letzteres wiederum läßt sich durch eine kombinatorische Äquivalenz für jedes (zusammenhängende) Schema bewerkstelligen (Tietze 1908, 70).

43 Tietzes Argumente gelten ja nur im Bereich der kombinatorischen Auffassung. Sie lassen sich aber auf topologische Mannigfaltigkeiten übertragen, da sie - was den Zusammenhang von Fundamentalgruppe, erster Betti-Zahl und eindimensionalen Torsionskoeffizienten angeht - rein gruppentheoretischer Natur sind (solange die Fundamentalgruppe endlich erzeugt ist).

> „Während sich nämlich die Gleichheit von zwei Zahlenreihen stets feststellen läßt, ist (vgl. § 11) die Frage, ob zwei Gruppen isomorph seien, nicht allgemein lösbar."
>
> (Tietze 1908, 80)

Damit wies Tietze erneut auf eine grundlegende gruppentheoretische Schwierigkeit hin, nämlich auf das schon oben angesprochene Isomorphieproblem. Allerdings darf man Tietze hier nicht überinterpretieren: In dem zitierten § 11 hatte er nur bemerkt, daß das Isomorphieproblem in Ermangelung hinreichender Bedingungen ungelöst sei;. er hat aber nicht dessen prinzipielle Unlösbarkeit gezeigt.

Die bisher geschilderten Ergebnisse der Tietzeschen Arbeit waren eher allgemeiner, theoretischer Natur und lassen sich vor allem unter dem Gesichtspunkt „Kritik und Präzisierung von Poincaré's Ideen"[44] fassen. Es gibt aber noch eine andere, bislang wenig beachtete aber ebenfalls sehr wichtige Seite der Arbeit von Tietze, auf der es hauptsächlich um konkrete Beispiele von Mannigfaltigkeiten, insbesondere von geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten, ging. Hierbei möchte ich zwei Punkte herausgreifen[45]: Die Einführung von Knoten und die Definition der Linsenräume.

44 Es ist bezeichnend, daß Tietze an topologischen Arbeiten - sieht man einmal vom zweidimensionalen Fall ab - nur Poincaré und Heegard sowie Dehn-Heegard zitiert (wobei Tietze immer nur Dehn als Autor bezeichnet [vgl. Tietze 1908, 2]). Andere wesentliche Beiträge gab es anscheinend keine (vgl. das in 3.5 zur Rezeption der Ideen Poincaré's Gesagte).
Wirtinger spricht in dem bereits erwähnten Gutachten von „Revision und Weiterführung der Poincaré'schen Untersuchungen" (Einhorn 1983, 79).

45 Tietze betrachtet folgende Beispiele:
$\varepsilon_2\left(=E^2\right)$ besitzt als Schema ein Zweieck ohne Randzuordnung: zweidimensionale Elementarmannigfaltigkeit (Tietze 1908, 15);
$\sigma_2\left(=S^2\right)$, dessen Schema aus zwei Zweiecken besteht, deren Seiten paarweise orientierungserhaltend verheftet werden: sphärische zweidimensionale Mannigfaltigkeit (Tietze 1908, 23);
$\varepsilon_3\left(=E^3\right)$ besitzt als Schema eine Kugel mit zweigeteiltem Äquator und zwei Halbkugeln: dreidimensionale Elementarmannigfaltigkeit (Tietze 1908, 23);
$\sigma_3\left(=S^3\right)$, dessen Schema aus zwei Kugeln mit zweigeteilten Äquatoren besteht, wobei die Bögen paarweise orientierungserhaltend verheftet werden (entsprechend die Halbkugeln): sphärische dreidimensionale Mannigfaltigkeit (Tietze 1908, 23). σ_3 ist der Linsenraum [siehe unten] (1,0);
Torus T^2, erhalten aus Rechteck durch gewöhnliche Identifizierungen (eine Ecke, zwei Kanten, eine Lamelle [Tietze 1908, 31]);
P_3R, erhalten aus ε_3 durch Diametralpunktidentifizierung (Tietze 1908, 49), was auch das entsprechende Schema liefert (eine Zelle, eine Lamelle, eine Kante, eine Ecke);
Kreisring, erhalten aus einem Rechteck durch Identifikation zweier Seiten (Tietze 1908, 79)
$S^2 \times S^1$, erhalten durch Identifikation von je zwei Punkten auf konzentrischen Kugeln (Seiferts „Schalenraum", vgl. 5.2) [Tietze 1908, 100]; Linsenraum L(0,1) [vgl. 4.1];
$P_3R \# P_3R$,zusammenhängende Summe zweier projektiver reeller Räume; wird bei Tietze erhalten als Kugelschalenraum (s. oben), wobei aber jetzt Diametralpunktepaare auf den beiden berandenden Sphären miteinander identifiziert werden (Tietze 1908, 100 - vgl. auch Seifert 1932, 229). Tietze gibt noch zwei weitere Darstellungen (vermöge zweier Zylinder und durch einen Automorphismus des Torus) und schließt hieraus, daß die „Darstellungsart für zweiseitige Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen nicht mehr eindeutig ist" (Tietze 1908, 100).

Tietze war nach Heegard der erste Mathematiker, der in einer Publikation einen Zusammenhang zwischen Knoten[46] und Mannigfaltigkeiten hergestellt hat, ein Zusammenhang, der später bei Dehn (vgl. 4.3) systematisch entwickelt werden sollte. Das erste Beispiel Tietzes hierzu soll Schwierigkeiten mit dem Homologiebegriff aufweisen:

> „Man ziehe im dreidimensionalen Raume eine im Innern einer Zylinderfläche Z verlaufende, einen Knoten bildende Linie AB (siehe Fig.1). An diese setze man eine wieder innerhalb Z liegende kongruente Linie BC und so fahre man fort, nach beiden Seiten unendlich viele zu AB kongruente Linien zu einer einzigen Linie K zusammenzufügen."

(Tietze 1908, 33f)

Anschließend führe man eine projektive Transformation des einpunktkompaktifizierten Raumes derart aus, daß der Zylinder Z in einen Doppelkegel übergeht. An der Spitze dieses Doppelkegels liegt dann eine „unendlich oft verknotete" Linie vor.[47] Schließt man diese Kurve geeignet durch ein Kurvenstück RS (siehe unten) und bettet das ganze in eine Vollkugel ein, so entsteht die Frage, ob man den fraglichen Zykel als nullhomolog bezeichnen darf (Tietze 1908, 34).[48]

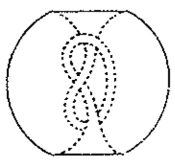
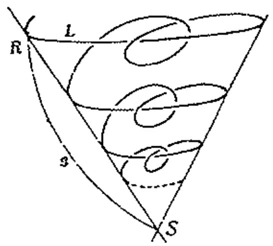


Fig. 3.



(ausgefüllter) Zylinder, der durch eine auf einem Durchmesser des Grundkreises senkrecht stehende Ebene in zwei kongruente Teile zerlegt wird, welche wie Boden- und Deckfläche in geeigneter Weise identifiziert werden (Tietze 1908, 102).
(ausgefülltes) Tetraeder ABCD mit den Zuordnungen BCD ≡ ACD und ABC ≡ DAB; Diese Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^3 (Tietze 1908, 116 Anm.1). [Dieses Beispiel weist eine gewisse Ähnlichkeit zur Gieseking-Mannigfaltigkeit auf (vgl. 5.2 sowie Weeks 1985, 228f)]

[46] Die Knotentheorie als mehr oder minder eigenständige Disziplin hatte natürlich 1908 schon eine lange Geschichte hinter sich: vgl. etwa Dehn-Heegard 1907, 207-215. Knoten traten zuvor auch schon - gewissermaßen implizit - in der aus der Funktionentheorie bekannten Theorie der Riemannschen Flächen auf. Betrachtet man diese als verzweigte Überlagerungen, so haben die Verzweigungslinien Knotencharakter. Eine Diskussion dieses Aspektes gibt bereits Heegard 1916, Kap. XIV. Knotentheoretische Probleme ergaben sich auch beim Studium komplexer algebraischer Kurven und ihrer Singularitäten, wie es u.a. von Wirtinger betrieben wurde. Vermutlich gingen von diesem Anregungen für Tietze zur Beschäftigung mit Knoten aus; vgl. hierzu Chandler-Magnus 1982, 19, wo auf eine kurze Andeutung von Wirtinger in dessen DMV-Vortrag „Über die Verzweigungen bei Funktionen von zwei Veränderlichen" (1905) hingewiesen wird, welche allerdings nur durch die spätere Arbeit eines seiner Schüler (Brauner 1928) bekannt ist. Für eine ausführliche Untersuchung dieses Themenkreises vergleiche man Epple 1994.

[47] Vgl. auch Seifert-Threlfall 1934, 224.

[48] Vom modernen Standpunkt der singulären Homologietheorie gibt es hier kein Problem, worauf auch Maya Bollinger aufmerksam macht (Bollinger 1972, 154). Das beantwortet aber noch nicht unbedingt Tietzes Frage. Letztlich hängt die Antwort wohl davon ab, was man als 1-Zykel ansehen will, also davon, ob diese Definition so weit gefaßt wird, daß auch unendlich oft verknotete Linien zugelassen werden. Für Tietze selbst waren derartige Komplikationen ein Argument, sich auf den kombinatorischen Standpunkt zurückzuziehen (Tietze 1908, 35).

Ein zweites Mal[49] treten dann bei Tietze Knoten im Zusammenhang mit (berandeten) 3-Mannigfaltigkeiten auf (Tietze 1908, 82f).

Dabei geht es um die Kugel E^3, aus der zuerst ein Kanal ausgebohrt wird; die resultierende Fundamentalgruppe ist dann Z.

> „Würde man stattdessen einen verknoteten Kanal wie in Fig.3 aus der Kugel ausbohren,so wäre die Fundamentalgruppe der so entstandenen Mannigfaltigkeit aus zwei Erzeugenden mit der Relation sts = tst aufgebaut, so daß diese Mannigfaltigkeit mit der erstgenannten nicht homöomorph sein kann. Würde man den ausgebohrten Kanal in komplizierterer Weise verknotet annehmen, so erhielte man wieder andere Mannigfaltigkeiten."

(Tietze 1908, 82)[50]

Anschließend beschreibt Tietze, daß man sich die Entstehung der geschilderten Mannigfaltigkeiten auch so denken könne, daß man in der 3-Sphäre einen Knoten nimmt und ihm entlang eine kleine Kugel wandern läßt. Der überstrichene Raum wird dann ausgebohrt. Weiter heißt es:

> „Ob zwei derart entstandene Mannigfaltigkeiten nur dann homöomorph sein können, wenn die Linie L, die bei der Herstellung der einen Mannigfaltigkeit verwendet wurde, mit der zur anderen Mannigfaltigkeit gehörenden Linie L oder mit deren Spiegelbild "gleichartig verknotet,, ist (so daß die Linien ineinander oder die eine in das Spiegelbild der anderen deformiert werden können) ist nicht untersucht worden."

(Tietze 1908, 83)

Diese Konstruktion findet sich übrigens schon 1906 in einer kurzen Note, welche Tietze in der Wiener Akademie vorlegte. Dort nimmt er auch aus S^3 einen gewöhnlichen Torus und eine „aufgedickte" Kleeblattschlinge heraus, um die entstehenden berandeten Mannigfaltigkeiten anschließend durch eine Transformation mit reziproken Radien - wobei das Transformationszentrum im Innern der ausgebohrten Räume liegen soll - „in eine ganz im Endlichen gelegene, von einer Fläche vom Geschlechte 1 berandete Mannigfaltigkeit" (Tietze 1906, 845) zu verwandeln. Die Fundamentalgruppen der entstehenden Mannigfaltigkeiten sind isomorph den Knotengruppen, weshalb die Mannigfaltigkeiten sicher nicht homoömorph sind. Andererseits sind aber ihre Randflächen homöomorph - es handelt sich beidesmal um einen Torus -, womit eine entsprechende Aussage Poincaré's, die man lesen könnte als „Zwei berandete 3-Mannigfaltigkeiten sind homöomorph, wenn dies ihre Randflächen sind" (vgl. Poincaré VI, 479 und oben 3.4), widerlegt wäre.

Ähnliche knotentheoretische Fragen wie bei Tietze werden zwei Jahre später von Dehn behandelt werden, der allerdings im Unterschied zu Tietze geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten durch Knoten konstruiert. Dennoch bleibt Tietze das Verdienst, auf die interessanten Verwendungsmöglichkeiten von Knoten in der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten bereits 1906 aufmerksam gemacht zu haben.

Zum Abschluß unserer Ausführungen über Tietzes Arbeit von 1908 wollen wir noch auf seinen wohl bedeutendsten Beitrag zur dreidimensionalen Topologie eingehen, nämlich auf

[49] Sieht man einmal von der eher marginalen Bemerkung Tietze 1908, 32 Anm. 16 ab.

[50] Die von Tietze genannte Fundamentalgruppe ist natürlich nichts anderes als die Knotengruppe des Torusknoten (2,3), also der Kleeblattschlinge. Die entsprechende Einsicht wurde schon von Dyck in einem Brief angedeutet (vgl. 2.3.2).

die Einführung der Linsenräume („ein in gewisser Hinsicht möglichst einfacher Typus von zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten" [Tietze 1908, 110]).

Das Schema der Linsenräume, das bei Tietze in der Form (ℓ,λ) notiert wird ($[\ell,\lambda]$) ist dagegen der Linsenraum selbst), - im weiteren benutzen wir für letzteren die heute übliche Bezeichnung $L(\ell,\lambda)$ - beruht auf einer Zelle a^3, die man sich als Kugel vorstellen darf. Deren Oberfläche werde durch den in ℓ gleiche Teile geteilten Äquator in zwei Hemisphären zerlegt, die gemäß der Vorschrift (φ sei die geographische Länge, ϑ die geographische Breite eines Punktes auf der oberen Hemisphäre, φ' und ϑ' entsprechend auf der unteren)

$$\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\lambda}{\ell}, \quad \vartheta' = -\vartheta \qquad (\lambda = 1,2,\ldots,\ell-1)$$

identifiziert werden. Anschaulich bedeutet dies, daß man die untere Halbkugel um den Winkel $\frac{2\pi\lambda}{\ell}$ gegen die obere dreht, um dann die beiden Halbkugeln vermöge einer Ebenenspiegelung an der Äquatorebene zur Deckung zu bringen. Aus der Identifikationsvorschrift ist direkt ersichtlich, daß man sich auf den Fall, ℓ und λ relativ prim, beschränken kann, weshalb für λ nur $\varphi(\ell)$ - wobei φ die Eulersche Funktion ist - Werte in Betracht kommen.

Weiter erkennt man, daß alle ℓ Teile des Äquators zu ein und derselben Kante der Mannigfaltigkeit identifiziert werden und daß alle Unterteilungspunkte zu der einzigen Ecke der Mannigfaltigkeit identifiziert werden. Folglich besteht das Schema eines Linsenraumes aus einer Zelle a^3, einer Lamelle a^2, einer Kante a^1 und einer Ecke a^0 - ist also in der Tat denkbar einfach aufgebaut! Das zugehörige Poincarésche Relationensystem lautet:

$$a^3 \equiv 0, \quad a^2 \equiv \ell a^1, \quad a^1 \equiv 0$$

Folglich gilt $\beta_1 = \beta_2 = 1$ (Die entsprechenden Homologiegruppen besitzen keinen freien Anteil); es gibt einen Torsionskoeffizienten in der Dimension eins mit dem Wert ℓ und die Fundamentalgruppe ist zyklisch von der Ordnung ℓ, also insbesondere unabhängig von λ. Tietze weist noch darauf hin, daß man die Linsenräume auch als Heegard-Diagramme auf dem Torus bekommen könne (vgl. 5.1.1) und als verzweigte Überlagerung der S^3 (Tietze 1908, 111 Anm. 1 sowie 112). Weiter heißt es:

> „Man bemerke, daß wir hier endliche von der identischen Gruppe verschiedene Fundamentalgruppen vor uns haben, während alle zweiseitigen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Ausnahme der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe sich auf die Identität reduziert, unendliche Fundamentalgruppen besitzen. (...). Die Frage, ob es außer der sphärischen noch andere geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, deren Fundamentalgruppe die identische Gruppe ist (...), ist unentschieden."
>
> (Tietze 1908, 111, Anm. 2)

Die später (vgl. 5.4) so genannte Poincaré-Vermutung wird hier also als offene Frage bezeichnet. Im letzten Paragraphen, dem 22., geht Tietze nochmals auf das Klassifikationsproblem ein, wobei er ein wichtiges, später von J.W. Alexander bewiesenes Resultat antizipiert (vg. 5.1.1).

Dieser Paragraph beginnt mit einer allgemeinen Formulierung des Homöomorphieproblems, die man in dieser oder ähnlicher Weise später immer wieder finden kann:

> „Bei diesem Problem erscheint es als letztes Ziel, ein System aus einer vorgelegten Mannigfaltigkeit stets bestimmbarer topologischer Invarianten von solcher Art zu finden, daß aus der Übereinstimmung aller Invarianten dieses Systems für zwei Mannigfaltigkeiten auf die Homöomorphie dieser Mannigfaltigkeiten geschlossen werden kann."
>
> (Tietze 1908, 116) [51]

Anschließend führt Tietze aus, daß die beiden geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten $L(5,1)$ und $L(5,2)$ dieselbe Fundamentalgruppe besitzen und folglich in allen bis dahin bekannten topologischen Invarianten (Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten) übereinstimmen, aber dennoch möglicherweise nicht homöomorph seien. Diesen Verdacht begründet Tietze mit einem geometrischen Argument. Analysiert man nämlich die Identifikationen, die die Zuordnungen

$$\varphi' = \varphi + \frac{2\pi}{5}, \quad \vartheta' = -\vartheta \qquad \text{und} \qquad \varphi' = \varphi + \frac{4\pi}{5}, \quad \vartheta' = -\vartheta$$

auf dem Kreisbogenfünfeck, in das der Äquator der Kugel [52] zerlegt wird, definieren, so ergibt sich ein Unterschied: Während die erste Zuordnung die Fünfeckseiten in zyklischer Ordnung miteinander identifiziert, „springt" die zweite jeweils in den übernächsten Abschnitt; die Identifikation verläuft in der Art eines Pentagrammes. Zerlegt man weiterhin die beiden Hemisphären in sphärische Dreiecke, indem man den jeweiligen Pol mit den Ecken des Kreisbogenfünfecks verbindet, so stellt man fest, daß die Bilder dieser Dreiecke unter der Identifizierung in unterschiedlicher Reihenfolge an der Kante, zu der die Fünfeckseiten zusammengefaßt werden, grenzen. Tietzes Fazit lautet so:

> „Die eben angestellte Betrachtung der Mannigfaltigkeiten [5,1] und [5,2], die beide die zyklische Gruppe 5. Ordnung zur Fundamentalgruppe haben, zeigt, daß gewisse Anordnungsverhältnisse der Schemata auch in der Fundamentalgruppe nicht zum Ausdruck kommen."
>
> (Tietze 1908, 117f)

Diese geometrische Einsicht wurde 1924 durch J.W. Alexander in eine analytische Invariante - die später so genannte Eigenverschlingungszahl - umgesetzt; die Einsicht Tietzes bildete die Grundlage des Beweises für die Nicht-Homöomorphie von $L(5,1)$ und $L(5,2)$ durch J.W. Alexander 1919 (beruhend auf Homologiebetrachtungen) [vgl. 5.1.1].

Fassen wir die Errungenschaften, die mit Tietzes Arbeit von 1908 erreicht wurden, zusammen, so können wir festhalten:

1. Durch eine konsequente Entwicklung des kombinatorischen Standpunktes gelingt es Tietze, in vielen Punkten die Ergebnisse, Begriffe und Methoden Poincaré's zu präzisieren. Tietzes Beweise halten im großen und ganzen auch modernen Anforderungen stand.

2. Dennoch bleibt die Spannung zwischen kombinatorischer und topologischer Auffassung bei Tietze bewußt, was ihn u.a. zu einer prägnanten Formulierung der später so genannten Hauptvermutung führte.

---

[51] Fünfzehn Jahre später kommentierte Tietze dieses Problem folgendermaßen: „Bekanntlich ist dieses Problem ebenso wichtig als ungelöst, von einigen Resultaten speziell für die niedrigsten Dimensionen abgesehen." (Tietze 1923, 20)

[52] Später - vgl. etwa Seifert-Threlfall 1934, 210 - spricht man von der scharfen Kante der Linse. Die Bezeichnung Linsenraum findet sich (verständlicherweise) noch nicht bei Tietze. Name und heute geläufige Darstellung gehen auf Threlfall-Seifert 1931, 58 zurück. Zur weiteren Entwicklung bzgl. der Linsenräume vgl. man 5.2 und 5.3.

3. Tietze versteht es, wichtige Methoden der kombinatorischen Gruppentheorie zu entwickeln; durch eine konsequent algebraische Behandlung der Fundamentalgruppe gelingt es ihm, insbesondere die Abhängigkeit der eindimensionalen Torsion von dieser zu zeigen.
4. Durch die Einbeziehung von Knoten und durch die Konstruktion der Linsenräume bereicherte Tietze erheblich den Bestand an konkreten Beispielen.
5. Wie schon im Zusammenhang mit Poincaré's kombinatorischen Ansätzen erwähnt, bringen diese eine Verschiebung des Problems mit sich - nämlich von der Berechnung der Invarianten weg zur Aufstellung einer Zellenzerlegung hin. Sieht man aber von dieser Schwierigkeit ab, so kann man gestützt auf Zellenzerlegungen allgemeine Sätze (z.B. Invarianz unter kombinatorischer Äquivalenz, Dualität,...) beweisen. In dieser Hinsicht stehen die Zellenzerlegungen am Anfang der Topologie als theoretischer - das heißt von der Betrachtung konkreter Beispiele weitgehend losgelöster - Wissenschaft.

Im selben Jahr (1908) erschien noch eine andere wichtige Arbeit zur kombinatorischen Topologie, nämlich die „Beiträge zur Analysis situs" von Ernst Steinitz. Bekanntlich bildeten die Polyeder im traditionellen Sinne einen bevorzugten Forschungsgegenstand Steinitz' - der seinen endgültigen Niederschlag in dessen Enzyklopädieartikel über „Polyeder und Raumteilungen" (1916) sowie in den bekannten „Vorlesungen über die Theorie der Polyeder" (posthum von Rademacher 1934 herausgegeben) fand, während die erste große Arbeit aus Steinitz' Feder zum Themenkreis „Polyeder und Topologie" bereits 1906 erschien und er schon 1904 einen Vortrag bei der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte über die „Analysis situs im projektiven Raum" hielt. Insofern ist es nicht erstaunlich, daß Steinitz die neuen Entwicklungen, die die Topologie bei Poincaré und Dehn-Heegard fand, zur Kenntnis nahm. Allerdings ist Steinitz' Abstand zu Poincaré deutlich größer als derjenige Tietzes; insbesondere finden die topologischen Invarianten bei ihm keine besondere Beachtung.[53] Dagegen schließt er sich recht eng an Dehn und Heegard an, z.B. was den Begriff der kombinatorischen Äquivalenz anbelangt (vgl. Steinitz 1908, 32), die bei ihm auf den Begriff der „internen Transformation" (so Dehn-Heegard 1908, 168f) oder „Zellteilung" (so Steinitz 1908, 32; später auch bei Tietze: vgl. Tietze 1923, 20) begründet wird, womit aber nichts wesentlich anderes als bei Tietze gemeint ist. Auch Steinitz thematisiert das Verhältnis zwischen topologischen und kombinatorischen Begriffen anhand der Frage „Sind homöomorphe Mannigfaltigkeiten stets durch kombinatorisch äquivalente Polyeder gegeben?" (Steinitz 1908, 32), wobei er in einer Fußnote gewisse Zweifel anmeldet.[54]

[53] Steinitz arbeitet mit der Euler-Charakteristik, welche er als Wechselsumme über die Anzahlen der Bestandteile des Polyeders in den entsprechenden Dimensionen definiert (Steinitz 1908, 32), mit dem Orientierbarkeitscharakter sowie mit der Ränderzahl. Dabei erkennt Steinitz durchaus, daß die Verallgemeinerung der Euler-Charakteristik im dreidimensionalen Falle nichts bringt, gilt doch sogar: „D.h. jede geschlossene Mannigfaltigkeit ungerader Dimension hat die Charakteristik 0, ein Satz, der wohl zuerst von Poincaré für n = 3, von Dehn-Heegard allgemein bewiesen wurde." (Steinitz 1908, 33)

[54] Die entsprechende Fußnote lautet bei Steinitz:
„1) Es kommen hier die Zerlegungsaxiome [Dehn-Heegard 1907, 168f] in Betracht. Die unter a) angeführten Axiome, durch welche die für den Homoömorphismus angegebenen Bedingungen als hinreichend charakterisiert werden, dürfte wohl jeder ohne weiteres als der Anschauung gemäß anerkennen. Die Aufstellung des Axiomes b) hingegen, aus welchem die Notwendigkeit der Bedingung folgen würde, scheint mir doch - namentlich, wenn man zu höheren Dimensionen aufsteigt, aber auch schon im dreidimensionalen Gebiet - gewagt. Seine Widerspruchslosigkeit genügt natürlich nicht. Ich habe mich noch nicht davon überzeugen können, ob man nicht doch genötigt sein könnte, für $n \geq 3$ dem Begriff des Homöomorphismus eine allgemeinere Zellteilung zugrunde zu legen. Ich komme bei anderer Gelegenheit auf diesen Punkt zurück, welcher eine ausführliche Erörterung fordert." (Steinitz 1908, 32 Anm. 1)
Die letzte Ankündigung hat Steinitz meines Wissens nicht wahrgemacht.

Ähnlich wie schon Dehn-Heegard bemüht sich auch Steinitz um eine axiomatische Grundlegung seiner kombinatorischen Topologie, also insbesondere um eine strenge Fassung des Begriffes „Polyeder":

„1. Eine polyedrische Mannigfaltigkeit ist ein endliches System von Elementen.
2. Jedem Element a wird eine Dimension [a] zugeschrieben; dieselbe ist gleich einer der Zahlen 0,1,... n.[55]
3. Zwei Elemente a,b heißen entweder inzident (in Zeichen (a,b)=1 oder (b,a)=1) oder nicht inzident ((a,b)=0 oder (b,a)=0).
4. Ist [a]=[b], so ist dann und nur dann (a,b)=1, wenn a=b; ist (a,b)=1, (b,c)=1, [a]≥[b]≥[c], so ist (a,c)=1.
5. Jedes Element erster Dimension (Strecke) ist mit zwei Elementen 0ter Dimension (Ecken), jedes Element (n-1)ter Dimension mit ein oder zwei Elementen nter Stufe inzident....
6. Ist (a,b)=1, [a]=[b]+2, so gibt es genau zwei Elemente x, welche den Bedingungen [x]=[b]+1, (a,x)=1, (b,x)=1 genügen."

(Steinitz 1908, 37f)

Weiter führt Steinitz den Begriff „Weg" (= Streckenzug) ein, welcher ihm Begriffe wie „zusammenhängend" und „Homotopie von Wegen" (rein kombinatorisch!) liefert. Die Axiomatik für die n-dimensionale polyedrische Mannigfaltigkeit $M^{(n)}$ wird dann durch einige weitere Bedingungen ergänzt:

„7. $M^{(n)}$ ist ein zusammenhängendes System.
8. Ist [a]≥2 (bzw. [b]<a-2), so existieren Elemente (d.h. es existiert wenigstens ein Element) x, welche den Bedingungen [x]<a, (a,x)=1 (bzw. [x]>b, (b,x)=1) genügen, und diese Elemente bilden ein zusammenhängendes System. [Es sollte [x]<[a], [x]>[b] heißen; K.V.] Im Falle n = 2 stellen die unter 1. bis 8. gemachten Angaben ein vollständiges System von Grundbegriffen und Axiomen dar. Ist n > 2, so schließt sich der Bedingung 8. zunächst die folgende an:
9. Ist (a,b)=1, [a]≥[b]+3, so existieren Elemente x, welche den Bedingungen (a,x)=1, (b,x)=1, [a]>[x]>[b] genügen; dieselben bilden ein zusammenhängendes System."

(Steinitz 1908, 38)

Insgesamt ein bemerkenswert abstrakter Versuch, der kombinatorischen Topologie eine Grundlage zu verschaffen. Auffällig ist, daß dieser völlig „geometriefrei" erfolgt, da ja über die Natur der „Elemente" keinerlei Voraussetzungen gemacht werden. Der leitende Gesichtspunkt ist bei Steinitz die Inzidenzstruktur, welche die Topologie vollständig verdrängt. Diese Sichtweise hat sich letztlich nicht durchsetzen können. Nimmt man aber die Geometrie zu Steinitz' System hinzu, indem man eine bestimmte Interpretation der Bau-

[55] Vor Brouwers Beweis der Invarianz der Dimension, der 1911 publiziert wurde (Brouwer 1911), war eine derartige Festsetzung natürlich problematisch, andererseits aber unumgänglich. Vgl. das berühmte Diktum, welches d'Alembert zugeschrieben wird: „En avant et la foi vous viendra!"
Allerdings trifft dieser Einwand weniger Steinitz als andere Autoren, da ersterer ja eine rein kombinatorische Theorie im Sinne einer Inzidenzstruktur aufbauen will. Dabei könnte man die Dimension der Grundbausteine eventuell als eine Art von undefiniertem Grundbegriff ansehen.

steine etwa im Sinne von Simplizes vornimmt, so erweist sich sein Ansatz durchaus als vielversprechend.[56]

Diese abstrakte Sichtweise liegt letztlich in der Entwicklungslinie von Hilberts „Grundlagen der Geometrie" (1899/1900) und der darin entwickelten Lehre von den impliziten Definitionen. Sie findet sich ähnlich schon 1907 bei Dehn und Heegard, wobei natürlich gerade Dehn stark durch seinen Doktorvater Hilbert beeinflußt gewesen sein dürfte.

Den wichtigsten Gegenstand der Abhandlung von Steinitz bildet einmal das Problem, das mit den Begriffspaaren einseitig/zweiseitig beziehungsweise nicht-orientierbar/orientierbar[57] charakterisiert werden kann, und zum andern die Produktstruktur auf Polyedern und Mannigfaltigkeiten.

Zum ersten Problemkreis arbeitet Steinitz deutlich heraus, daß die Frage von Einseitigkeit oder Zweiseitigkeit von der Einbettung der Mannigfaltigkeit in den umgebenden Raum abhängt.[58] Er erwähnt, daß er diesen Unterschied anläßlich der Untersuchung des einseitigen Heptaeders bemerkt habe, dem Steinitz eine ganze Arbeit im Crelle-Journal gewidmet hatte (Steinitz 1906). Dieses Polyeder, das erstmals von C. Reinhardt, einem Schüler von A.F. Möbius, betrachtet worden war (Reinhardt 1885), geht aus dem Oktaeder hervor, indem man dieses durch die drei in ihm enthaltenden Quadrate ergänzt, dafür aber je eine der beiden diametral gelegenen Dreiecksflächen wegnimmt (wobei die entfernten vier Dreiecke paarweise keine gemeinsamen Kanten haben sollen). Es entsteht ein Siebenflächner, daher der Name, von dem man leicht einsieht, daß er einseitig ist.[59] Dieses Beispiel, das ja keine Mannigfaltigkeit liefert, zeigt deutlich, daß Steinitz - wie schon oben bemerkt - in einer anderen Problemtradition stand als Tietze und Poincaré.

---

[56] Allerdings kann man in diesen Bemühungen die Anfänge einer rein algebraisch orientierten Homologietheorie sehen, wie Dieudonné dies vorschlägt (Dieudonné 1989, 38), welche eben gerade durch das Absehen von der geometrischen Natur der betrachteten Zykel etc. gekennzeichnet ist (etwa im Sinne einer axiomatischen Homologietheorie).
Spätere Arbeiten, die dem Steinitzschen Standpunkt recht nahe kamen, waren Weyl 1923, Weyl 1924, Alexander 1926 und 1930, Kampen 1929 sowie Tucker 1933.

[57] Steinitz spricht in Klein-Dyckscher Tradition von „mit und ohne umkehrbare Indikatrix" (Steinitz 1908, 35)

[58] Sein einfachstes Beispiel hierfür ist eine einseitige Fläche im Raum - etwa das Möbius-Band - und eine geeignete geschlossene doppeltfreie Kurve in dieser. Dann ist letztere, aufgefaßt als Teil der Fläche, einseitig. Betrachtet man diese Linie aber losgelöst von der Fläche und legt sie z.B. auf eine geeignete Sphäre, so wird sie zweiseitig. Konkret kann man die projektive Gerade nehmen, die in der projektiven Ebene einseitig, auf dem Hyperboloid aber zweiseitig ist (Steinitz 1908, 35f - vgl. auch Steinitz-Rademacher 1934, 198). Folglich vermag eine einseitige Mannigfaltigkeit einer zweiseitigen homöomorph zu sein.
Im übrigen macht Steinitz auf Dyck aufmerksam, der bereits 1888 (Dyck 1888, 474) auf dieses Problem hingewiesen habe, aber „seine Bemerkung ist offenbar nicht richtig verstanden worden, da sich niemand daran gekehrt hat, obwohl seine Arbeit wohlbekannt ist." (Steinitz 1908, 35). Der Problemkreis einseitig/zweiseitig versus orientierbar/nicht-orientierbar wird auch später immer wieder ausführlich thematisiert, so z.B. bei Seifert 1931, 50.

[59] Steinitz gibt darüber hinaus noch eine analytische Darstellung (Steinitz 1908, 35). Eine ausführliche Diskussion des Heptaeders findet man bei Hilbert/Cohn-Vossen 1973, 266-268. Dort wird auch gezeigt, wie sich dieses in die römische Fläche von Steiner deformieren läßt. Die Euler-Charakteristik des Heptaeders ist 1.

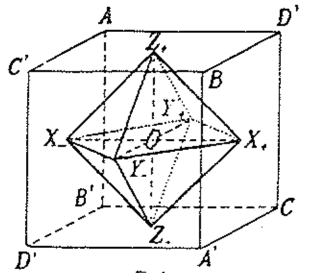


Fig. 1.

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha = X_+ Y_- Z_-, & \beta = X_- Y_+ Z_-, \\ \xi = Y_- Z_- Y_+ Z_+, & \eta = Z_- X_- Z_+ X_+, \end{cases}$$

$$\gamma = X_- Y_- Z_+, \quad \delta = X_+ Y_+ Z_+,$$
$$\zeta = X_- Y_- X_+ Y_+$$

Außer dem Heptaeder treten bei Steinitz nur einige ganz einfache Mannigfaltigkeiten ($Œ^n$, S^n, R^n) auf sowie einige Beispiele für Produkte.

Wie wir bereits gesehen haben, tauchte ein „nicht-triviales" Produkt bei Poincaré als Beispiel 8 auf[60]: Dort handelt es sich um $S^{q-1} \times S^{q-1}$. Diese Idee wurde von Steinitz wieder aufgegriffen, indem er im Abschnitt III seiner Abhandlung das Produkt zweier Mannigfaltigkeiten im Rahmen seiner kombinatorischen Auffassung definierte:

> „Das Produkt A × B = B × A = C bezeichnet eine polyedrische Mannigfaltigkeit von m+n Dimensionen. Die Elemente von C werden durch die Kombinationen (Produkte) ab=ba aus je einem Element a von A und einem Element b von B bezeichnet. Es ist [ab] =[a] + [b].
>
> Ist $[ab] \geq [a_1 b_1]$, so ist $(ab, a_1 b_1) = (a_1 b_1, ab) = 1$, wenn $(a, a_1) = 1$, $(b, b_1) = 1$, $[a] \geq [a_1]$, $[b] \geq [b_1]$ ist; sonst ist $(ab, a_1 b_1) = (a_1 b_1, ab) = 0$."
>
> (Steinitz 1908, 44)

Diese Festlegung liefert, wie Steinitz betont, wieder eine polyedrische Mannigfaltigkeit, falls die Faktoren solche sind. Das Motiv, das zur Betrachtung von Produkten führte, ist die Zerlegung von Mannigfaltigkeiten in einfachere Bestandteile oder auch der Aufbau von komplizierteren aus einfachen. Gerade im Hinblick auf die letztere Möglichkeit ist die Bedeutung des Produktes kaum zu überschätzen. Konsequenterweise machte sich Steinitz auch darüber Gedanken, wie die von ihm betrachteten Invarianten Charakteristik, Ränderzahl und Indikatrix (Orientierbarkeit) eines Produktes mit denen seiner Faktoren zusammenhängen.[61] Dieser Ansatz sollte später von H. Künneth, einem Schüler Tietzes, wieder aufgegriffen werden, der die Zusammenhänge zwischen den Betti-Zahlen, den Torsionskoeffizienten, der Fundamentalgruppe eines Produktes und seinen Faktoren klärte.[62]

---

[60] Weitere Bespiele für Produktmannigfaltigkeiten, die in der frühen Topologie auftraten, finden sich bei Künneth 1922. Dieser nennt E. Study (bei diesem allerdings im Rahmen der nichteuklidischen Geometrie) und W. Dyck (Dyck 1890, 284ff und 308ff) als Vorläufer.

[61] Hierzu merkt Steinitz an:
„Die tiefere Bedeutung des Multiplikation beruht natürlich darauf, daß der Typus des Produktes unverändert bleibt, wenn man die Faktoren durch andere von demselben Typus ersetzt, woraus folgt, daß von einer Multiplikation der Typen gesprochen werden kann." (Steinitz 1908, 45 Anm. 1)
Typus meint hier „kombinatorisch äquivalent".

[62] Vgl. dessen Dissertation „Ueber die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit" (Erlangen, 1922) sowie Künneth 1922, Künneth 1922-23, Künneth 1923 und Künneth 1924.

Steinitz selbst führt einige meist einfache Beispiele für Produkte an (in moderner Schreibweise): E^n, E^2, $E^1 \times S^1$, $S^1 \times S^1$ („die einzigen zerlegbaren Flächen", Steinitz 1908, 43).[63] Das einzige schwierigere Beispiel, das sich bei Steinitz findet, ist das Produkt $P_2R \times P_3R$, welches er als System der Flächenelemente im projektiven Raum interpretiert. An die Definition der Produktmannigfaltigkeit schließen sich bei Steinitz nochmals Betrachtungen zur Frage der Einseitigkeit/Zweiseitigkeit an. Zum Abschluß seiner Arbeit gelangt er zu der Einsicht, daß das Produkt zweier einfach-zusammenhängender[64] Mannigfaltigkeiten einfach-zusammenhängend ist. Weiter weist er darauf hin, daß aber das Produkt $S^{2q} \times \ldots \times S^{2q}$ nicht homöomorph zu einer entsprechenden Sphäre sein könne (wie die Betrachtung der Charakteristiken zeige).[65] Damit ist die Urform der Poincaré-Vermutung, die jener gegen Ende seiner großen Arbeit von 1895 als Frage formulierte (Poincaré VI, 258) und die lautete: „Sind zwei n-Mannigfaltigkeiten mit isomorphen Fundamentalgruppen immer homöomorph?", negativ beantwortet. Darauf macht Steinitz allerdings nicht aufmerksam.

Zum Abschluß dieser Ausführungen zu Steinitz, der im übrigen keine weiteren Arbeiten zur Topologie, wohl aber zur Theorie der Polyeder veröffentlichte, seien noch Bemerkungen erwähnt, die Steinitz zu Beginn seiner Abhandlung über das Klassifikationsproblem macht. Dort heißt es:

> „Eins der wichtigsten Probleme der Analysis situs ist die Aufstellung der verschiedenen Typen von Mannigfaltigkeiten nter Dimension."
>
> (Steinitz 1908, 31)

Hieran schließen sich die bereits oben wiedergegebenen Überlegungen zur Hauptvermutung an. Weiter werden dann Riemann, Betti und Poincaré erwähnt, die sich mit der Suche nach Invarianten für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten beschäftigt hätten, „ohne daß dadurch die Lehre vom Homöomorphismus auch nur für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten erledigt würde." (Steinitz 1908, 34)[66] Dies alles zeigt, daß auch für Steinitz das Klassifikationsproblem eine wichtige Rolle spielte, wenn er auch wenig explizit dazu sagte.

Tietze und Steinitz wurden hier neben Dehn-Heegard als die wichtigsten Wegbereiter der kombinatorischen Auffassung in der Topologie behandelt. Es liegt deshalb nahe, zum Abschluß dieses ihnen gewidmeten Paragraphen zwei Fragen zu stellen:

---

63 Steinitz weist darauf hin, daß die Regelfläche zweiten Grades vom Typus der Ringfläche $S^1 \times S^1$ sei. Da die Regelscharen von ihm als 1-Sphären aufgefaßt werden, verwendet Steinitz die projektive Auffassung. Faßt man die Regelfläche komplex auf, so werden die Regelscharen reell zu 2-Sphären, und deren Produkt $S^2 \times S^2$ ist vom selben Typus wie die Gesamtheit der reellen orientierten Geraden im projektiven Raum (Steinitz 1908, 43). Letztere ist dem Beispiel homöomorph, das von Study betrachtet wurde (vgl. Künneth 1922-23, 215).

64 Dieser Begriff wird natürlich bei Steinitz kombinatorisch gefaßt (Steinitz 1908, 49).

65 Vgl. Steinitz 1908, 49. Dabei erkennt Steinitz im wesentlichen den Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe eines Produktes und den Fundamentalgruppen der Faktoren, den Künneth dann 1922-23 näher untersuchte.

66 Über Poincaré's Torsionskoeffizienten schreibt Steinitz: „Auf diese Untersuchungen, welche auf die rein arithmetische Theorie der Elementarteiler führen und sich mittels derselben verhältnismäßig einfach erledigen lassen, soll hier nicht eingegangen werden." (Steinitz 1908, 34)
Bemerkenswerterweise erwähnt Steinitz Poincaré's wichtigste Entdeckung - die Fundamentalgruppe - überhaupt nicht. Außer in dem genannten Zusammenhang wird Poincaré bei Steinitz nur noch ein einziges Mal genannt, nämlich im Zusammenhang mit dem Dualitätssatz „Ein Polyeder ist stets kombinatorisch äquivalent zu seinem reziproken." (vgl. Steinitz 1908, 31 Anm. 1). Ein krasser Unterschied zu Tietze!

1. Was waren die Motive für den Übergang zur kombinatorischen Auffassung?
2. Welche Tragweite wurde dieser Methode zuerkannt?

Bevor wir hierauf näher eingehen, seien noch einmal die wichtigsten Errungenschaften bei Steinitz zusammengestellt:

1. Es gelingt diesem, den kombinatorischen Standpunkt gestützt auf seine Weiterentwicklung der Dehn-Heegardschen Axiomatik konsequent durchzuführen. Dabei bleibt aber, wie die Andeutungen zur Hauptvermutung belegen, die Spannung zum eigentlich topologischen Standpunkt - dem Kontinuitätsprogramm - bewußt.
2. Steinitz leistet mit seiner Klärung des Verhältnisses der Begriffspaare „einseitig/zweiseitig" und (modern gesprochen) „nicht-orientierbar/orientierbar" einen wichtigen Beitrag zur Begrifflichkeit. Insbesondere zeigt er, daß die Dichotomie „einseitig/zweiseitig" nicht zur Klassifikation von Mannigfaltigkeiten dienen kann, da sie nicht invariant unter Homöomorphismen ist.
3. Die von Steinitz erstmal näher untersuchte Produktbildung von Mannigfaltigkeiten (unter Einschluß der kombinatorischen Struktur) bildet eine Quelle interessanter Gegenbeispiele (vorausgesetzt, man beherrscht die entsprechenden Invarianten!), wie Steinitz selbst mit $S^{2q} \times \ldots \times S^{2q}$ zeigt.

Kehren wir nun zu den beiden obigen Fragen zurück! Die Motive für die Verwendung kombinatorischer Methoden lagen bei Poincaré eindeutig auf beweistechnischer und kalkulatorischer Ebene. Sie erlaubten es ihm einerseits, Heegards Einwänden gerecht zu werden und einen wirklichen Beweis für den Dualitätssatz zu liefern, und andererseits, für kombinatorisch aufgebaute Mannigfaltigkeiten Invarianten[67] „rein arithmetisch" (Steinitz) zu berechnen. Die kombinatorische Methode ist eine unter mehreren, die Poincaré immer dann anwendet, wenn sie entsprechende Ergebnisse liefert. Ist das nicht der Fall, so wählt er andere Ansätze[68]: Methodenreinheit war kein Ziel, dem Poincaré nacheiferte. Will man das Gesagte auf einen kurzen Nenner bringen, so kann man die kombinatorische Methode bei Poincaré als eine ad-hoc-Methode[69] kennzeichnen, die in ein Feld anderer, mehr oder minder verwandter Methoden eingebettet ist und keine besondere Hervorhebung erfährt.

Bei Tietze und Steinitz hingegen haben sich die Gewichtungen bereits verschoben: Zwar nennt ersterer noch die Verwendung der auf dem Zellensystem aufbauenden kombinatorischen Auffassung, die Poincaré „als Hilfsmittel der Analysis Situs der Punktmannigfaltigkeiten in ergiebigster Weise" verwendet habe (Tietze 1908, 3), schreibt aber andererseits, daß diese Darstellungsweise „ein besonderes theoretisches Interesse dadurch besitzt, daß sie einen von dem Heranziehen unendlicher Punktmengen oder funktionentheoreti-

---

67 Dabei standen bei Poincaré eindeutig die Torsionskoeffizienten im Vordergrund. Darüber hinaus wird aber auch der Zusammenhang zu den Betti-Zahlen hergestellt, während die Fundamentalgruppe bei Poincaré keine kombinatorische Behandlung erfährt.

68 So ist z.B. im 5. Komplement von kombinatorischen Ansätzen keine Rede.

69 Tietze hat dies einmal so auf den Begriff gebracht:
„Die Formeln (6) erscheinen dort [in Poincarés 1. Komplement; K.V.] nicht wie bei uns als Definition von Zellteilungsinvarianten, sondern als Formeln zur Berechnung entsprechend definierter topologischer Invarianten von kontinuierlichen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Doch ist über die Bedeutung von (kombinatorischen) Zellteilungsinvarianten für die Analysis situs kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten das letzte Wort noch nicht gesprochen." (Tietze 1923, 26 Anm. 15)

schen Hilfsmittel freien Aufbau der Analysis Situs gestattet" (Tietze 1908, 2). Letzteres darf als Zeichen der Überlegenheit gelten, wenn dies Tietze auch nirgends so explizit ausspricht. Deutlich angesprochen wird bei Tietze aber das Ziel einer Dekontextualisierung der Topologie, die sich von den Disziplinen, in denen ihre Ursprünge liegen (z.B. Funktionstheorie), absetzen soll zugunsten einer Autonomie. Es fällt auf, daß er das Problem der Anschauung - also das der mangelnden Strenge[70], so darf man hinzufügen - gerade im Zusammenhang mit den „kontinuierlichen Punktmannigfaltigkeiten" thematisiert. Versucht man diese Verhältnisse auf einen Begriff zu bringen, so wird man sagen: „Was die kontinuierliche Topologie der Anschauung als evident entlehnt (entlehnen muß), vermag die kombinatorische Auffassung streng logisch zu beweisen." Dies paßt z.B. sehr gut mit Tietzes Invarianzbeweisen für die topologischen Invarianten zusammen, einer Tatsache, die bei Poincaré stets unterstellt wird. Natürlich war unklar, ob sich das Kontinuitätsprogramm nicht dahingehend verbessern ließe, daß es auch solche Beweise liefern könnte (wie das J.W. Alexander später im Falle der Homologie tun sollte). Darüber hinaus enthielt das kombinatorische Programm in Gestalt der Hauptvermutung und der Frage nach Triangulierbarkeit selbst noch grundlegende Probleme. Dennoch konnte es sich bis in die 30er Jahre hinein als das vielversprechendere Programm halten. Dieser grundlagentheoretische Aspekt ist bei Steinitz fast noch deutlicher als bei Tietze, wobei sich ersterer eine Ausschaltung der Anschauung - ähnlich wie das Hilbert mit seiner Axiomatik für die Geometrie geleistet hatte - im Rahmen der Analysis situs durch eine entsprechende Axiomatik, welche ihrerseits eine Axiomatik der kombinatorischen Auffassung[71] war, versprach:

> „Tatsächlich haben sich auch so hervorragende Mathematiker wie Riemann keineswegs gescheut, bei der Bearbeitung der Analysis situs auf die Anschauung zu rekurrieren. In neuerer Zeit ist vielfach der Versuch gemacht worden, dies durch analytische Behandlung zu vermeiden: dabei werden die größten Schwierigkeiten dadurch umgangen, daß man bei den definierenden Funktionen außer der Stetigkeit wenigstens noch Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung voraussetzt. Aber wer sich mit Problemen der Analysis situs beschäftigt hat, wird sich kaum des Gefühls erwehren können, daß bei derartiger Behandlung Begriffe herbeigezogen werden, die dem Wesen der Sache fremd sind. Es ist mir auch kein Fall einer konsequenten analytischen Durchführung bekannt.
>
> ...
>
> Es ist deshalb gewiß als ein Fortschritt zu begrüßen, daß der Artikel über Analysis situs in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ein Axiomensystem bringt, welches für den Aufbau dieser Disziplin, wenigstens im dreidimensionalen Raum ausreicht. Dadurch werden natürlich die wichtigen und schwierigen Probleme, welche die Analysis situs im Rahmen der gewöhnlichen Geometrie darbietet, weder gelöst noch aus der Welt geschafft; aber es ist die Möglichkeit gegeben, eine

[70] Vgl. folgendes Zitat von Tietze:
„Abgesehen von diesem Teile der Arbeit [§15/16, welche den kontinuierlichen Punktmannigfaltigkeiten gewidmet sind; K.V.], der für die strenge Beantwortung der behandelten Fragen nur als Vorarbeit anzusehen ist, bewegen sich die Ausführungen des vorliegenden Aufsatzes in der eben besprochenen Auffassung des Zellensystems als eines selbständigen von seiner Beziehung zu Punktmannigfaltigkeiten unabhängigen Begriffes." (Tietze 1908, 2f)

[71] Die Begrifflichkeit, welche eine Axiomatik im Sinne des Kontinuitätsprogrammes erlaubt hätte, stand ja 1908 noch gar nicht zur Verfügung. Diese wurde erst von F. Hausdorffs „Grundzüge der Mengenlehre" (1914) einerseits, und der hierauf aufbauenden Fassung des Begriffes „topologische (differenzierbare, analytische) Mannigfaltigkeit" andererseits, an der verschiedene Mathematiker (u.a. Weyl, Veblen-Whitehead, Ehresmann) beteiligt waren, ermöglicht.

> Analysis situs als selbständige Disziplin in voller Strenge weiterzuführen, ohne die Erledigung jener Fragen abwarten zu müssen."
>
> (Steinitz 1908, 30)

Also bleibt sowohl bei Tietze als auch bei Steinitz das Bewußtsein wach dafür, daß die kombinatorische Auffassung eine Verengung gegenüber der kontinuierlichen darstellt, gewissermaßen einen Rückzug auf zuverlässiges Terrain. Bei beiden manifestiert sich darüber hinaus das Bestreben, die Topologie aus ihren ursprünglichen Bezügen zu lösen und sie auf eigene (kombinatorische) Grundlagen zu stellen. Halten wir zum Abschluß noch einmal die wichtigsten Probleme fest, die dem kombinatorischen Programm anhafteten:

1. Die Geltung der Hauptvermutung im Falle von mehr als zwei Dimensionen blieb offen. Diese war ein wichtigstes Beweishilfsmittel und nahm eine zentrale Stellung im kombinatorischen Rahmen ein; sie verbindet diesen mit der kontinuierlichen Sichtweise.[72]

2. Die Frage nach der Existenz von Zellenzerlegungen („Triangulierbarkeit") von beliebigen kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten. Eine affirmative Antwort hierauf würde die Reduktion der kontinuierlichen auf die kombinatorische Auffassung ein Stück weit rechtfertigen.

3. Das kombinatorische Programm verschiebt die Schwierigkeiten insofern, als es die Berechnung der Invarianten für zellenzerlegte (triangulierte) Mannigfaltigkeiten erlaubt. Die Auffindung solcher Zerlegungen für konkrete Mannigfaltigkeiten wird aber dadurch keineswegs erledigt. Man könnte dies die hypothetische Wende nennen.

Wir werden im weiteren gelegentlich noch die kombinatorische Auffassung streifen, ohne sie ausführlich zu thematisieren. Die wichtigste Weiterentwicklung war hier zweifellos die Einführung simplizialer Methoden durch Alexander, Brouwer und Newman, die vor allem in technischer Hinsicht die Durchführung des kombinatorischen Standpunktes erleichterte.

Erwähnt sei noch zum Abschluß der Vortrag „Die Topologie der Mannigfaltigkeiten", den H. Kneser 1924 bei der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte hielt und der in überarbeiteter Form im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erschien (Kneser 1926). In ihm gab Kneser, der sich in jener Zeit intensiv mit der Topologie beschäftigte, einen Überblick zu Möglichkeiten und Grenzen der kombinatorischen Methode, wobei die Frage, ob zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten stets auch kombinatorisch äquivalent seien, eine zentrale Rolle spielt und konsequenterweise erstmals als „Hauptvermutung" (Kneser 1926, 6)[73] bezeichnet wurde. Knesers Fazit lautet:

[72] So schreibt Tietze 1923 über die Hauptvermutung, also über die Frage nach der kombinatorischen Äquivalenz von homöomorphen Mannigfaltigkeiten:
„Erst wenn sie bejahend beantwortet ist, ist eine nach beiden Richtungen gangbare Brücke von der kombinatorischen zur kontinuierlichen Analysis situs geschlagen." (Tietze 1923, 31)

[73] Knesers Formulierung lautet wörtlich:
„Hauptvermutung: Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen einer Mannigfaltigkeit in Elementarräume, so kann man von Z_1 durch (endlich viele) e.T. [elementare Transformationen; K. V.] zu Z_2 oder zu einer mit Z_2 isomorphen Zerlegung gelangen." (Kneser 1926,6)
Weiter erwähnt er, daß diese Vermutung in den Dimensionen zwei und drei bewiesen sei, wobei er auf Kerekjártó 1923, 134f sowie auf Furch 1923 verweist. Eine ähnliche Aussage findet sich auch bei Tietze

> „Der geschilderte Aufbau der kombinatorischen Topologie ist zwar sicher gegründet und entwicklungsfähig, hat aber, wie schon gesagt, den Mangel, daß seine freie Anwendung auf eigentlich topologische Fragen wesentlich von der für mehr als drei Dimensionen noch unbewiesenen Hauptvermutung abhängt."
>
> (Kneser 1926, 12)

Bemerkenswerterweise erwähnte Kneser das eng mit der Hauptvermutung zusammenhängende Problem der Triangulierbarkeit, das im Fall der Flächen 1925 von T. Radó gelöst worden war, überhaupt nicht.[74] Dennoch bleibt es ein wichtiges Verdienst Knesers, auf die Bedeutung der Hauptvermutung hingewiesen zu haben: Kombinatorische Invarianten sind leicht zu berechnen; sie sind aber nur dann topologische Invarianten, wenn die Hauptvermutung (und die Triangulierbarkeit) gilt (vgl. Kneser 1926, 7). Auch bei Kneser nahm das Klassifikationsvorhaben eine wichtige Stellung ein:

> „Hier entsteht das Problem, ein vollständiges Invariantensystem zu finden, d.h. ein System topologischer Invarianten, die bei zwei Mannigfaltigkeiten nur dann alle dieselben Werte haben, wenn die Mannigfaltigkeiten homöomorph sind."
>
> (Kneser 1926, 7)

Dies könnte man in Anspielung auf den bekannten „Jugendtraum von Kronecker" (der in Erfüllung gehen sollte) den „Jugendtraum der Topologen" nennen (dem ein weniger günstiges Schicksal beschieden sein sollte).

Drei Jahre nach Kneser hielt B.L. van der Waerden einen Vortrag vor der DMV mit dem Titel „kombinatorische Topologie", der sich zum Ziel gesetzt hatte, Knesers Ausführungen zu aktualisieren. Auch bei van der Waerden - dessen Referat im Kapitel 6 zur Algebraisierung der Topologie besprochen wird - neigt sich deutlich die Waagschale zugunsten des Kontinuitätsprogrammes, das er als „méthode mixte" faßt.

1923, 21 Anm. 6), der den Beweis im Zweidimensionalen für sich selbst (Tietze 1908, §19) und den für die Dimensionen drei und vier für seinen Schüler E. Bilz reklamiert (mit dessen Erlanger Dissertation „Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs" [1922] - vgl. hierzu Bilz 1923) Dieses Urteil (bezüglich Furch und Bilz) wird heute nicht mehr von den Historikern geteilt; es wäre im Detail zu prüfen, warum sich die erwähnten „Beweise" als nicht stichhaltig erwiesen.
Erwähnt sei noch, daß Kneser unter Verwendung der von Hausdorff 1914 entwickelten Begrifflichkeit eine modernen Ansprüchen durchaus gemäße Charakterisierung des Begriffes „topologische Mannigfaltigkeit" gibt, wobei er auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom berücksichtigt.

[74] Da das Manuskript Knesers bereits am 11.11.24 der DMV vorlag, war natürlich eine Berücksichtigung des Radóschen Ergebnisses nicht möglich.

Insgesamt darf man wohl feststellen, daß sich in der zweiten Hälfte der 20er Jahre das Kontinuitätsprogramm durchzusetzten begann und die kombinatorische Betrachtungsweise zu einem Mittel zum Zweck wurde.

4.3 Max Dehn: Knoten und Gruppen

Während Tietze und Heegard eine funktionentheoretische Vergangenheit hinter sich hatten und Steinitz von der Polyedertheorie kam, entstammte Max Dehn, der vierte große Topologe der ersten Generation nach Poincaré, dem Umkreis D. Hilberts. Hilbert ist zwar nicht mit Arbeiten zur Topologie im engeren Sinne hervorgetreten; aber immerhin zeigt sein Aufsatz „Über die Grundlagen der Geometrie" ein gewisses Interesse für dieses Gebiet: Hier formulierte Hilbert Umgebungsaxiome für die Ebene (wie schon kurz zuvor in Hilbert 1902) und dachte über „eine strenge axiomatische Behandlung der Analysis situs" (Hilbert 1972, 180 f Anm 1)[75] nach. Auch in Hilberts berühmter, bereits oben angesprochener Liste mathematischer Probleme (Hilbert 1979) kamen Fragen aus der Topologie vor, welche allerdings wenig Bezug zur Theorie der Mannigfaltigkeiten hatten: Vgl. die Probleme 16 („Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen") und 18 („Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern"). Ein Hinweis darauf, daß damals in Göttingen auch von Seiten der Ordinarien Hilbert, Klein und Minkowski Interesse an der Topologie bestand, ist die Dissertation (unter Minkowski) Wernicke 1904, die eine kurze Bestandsaufnahme der Ideen Poincaré's darstellt. Man vergleiche dort vor allem die Einleitung. Dehns frühe Arbeiten galten - sicher angeregt durch seinen Doktorvater - grundlagentheoretischen Fragen der Geometrie[76]. Allerdings hat sich Dehn schon früh (1899) mit topologischen Fragen - nämlich mit dem Jordanschen Kurvensatz - beschäftigt, ohne allerdings hierüber etwas zu veröffentlichen (vgl. Magnus-Moufang 1954, 220f).[77] Darüber hinaus hielt er auch Vorlesungen über Flächentopologie und Gruppentheorie (vgl. Dehn 1987). Seine erste Publikation zu diesem Themenkreis war der mit Poul Heegard verfaßte[78] Enzyklopädieartikel von 1907, dem drei Jahre später ein kürzer gefaßter und einfacher gehaltener Übersichtsartikel für Pascals Repertorium der höheren Mathematik (Band III) folgte. Im selben Jahr 1910 erschien auch Dehns große Abhandlung „Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes" (Dehn 1910), die uns im folgenden hauptsächlich beschäftigen wird, deren Ideen aber

---

[75] Im Original (Hilbert 1902a) fehlt allerdings diese Bemerkung; sie wurde also erst später in den "Grundlagen" eingefügt, zu deren Anhängen der fragliche Aufsatz gehört.

[76] Am bekanntesten hiervon sind wohl Dehn 1900, wo es um die Rolle der Legendreschen Sätze in den Grundlagen der Geometrie geht und Dehn eine nichtarchimedrische Geometrie konstruiert (Winkelsumme im Dreieck größer zwei Rechte bei unendlich vielen Parallelen), sowie Dehn 1901, mit der Lösung des dritten Hilbertschen Problems (Existenz von nicht-zerlegungsgleichen, aber rauminhaltsgleichen Tetraedern). Die von Dehn in diesem Zusammenhang angedeutete Invariante, welche heute Dehn-Invariante genannt wird, spielt gegenwärtig bei der geometrisch ausgerichteten Untersuchung von 3-Mannigfaltigkeiten wieder eine Rolle.

[77] Dehn scheint des öfteren - hierin an Gauß erinnernd - wichtige Ergebnisse nicht veröffentlicht zu haben. Das gilt z. B. für den Satz „Die Untergruppen einer freien Gruppe sind wieder frei", der von Schreier 1927 bewiesen wurde (vgl. Chandler-Magnus 1982, 27), aber auch für die höheren Homotopiegruppen (vgl. Hurewicz 1935a, 521 Anm. 2).

[78] Zur Problematik dieser „gemeinsamen" Verfasserschaft vgl. oben Anm. 44.

teilweise, wie die Korrektur zum Enzyklopädieartikel (Dehn 1907) zeigt, schon in die Zeit von 1907 zurückreichen. Dehn hat im Anschluß hieran weitere Arbeiten veröffentlicht, die sich mit Topologie und Gruppentheorie beschäftigten (Dehn 1912, Dehn 1914, Dehn 1936 und Dehn 1939), insbesondere 1911 „Über unendliche diskontinuierliche Gruppen", wo es Dehn u.a. gelang, das Wort- und das Konjugationsproblem für die Fundamentalgruppen geschlossener 2-Mannigfaltigkeiten mit Hilfe des heute nach ihm benannten Reduktionsalgorithmuses zu lösen (vgl. Chandler-Magnus 1982, 20f.) In der Abhandlung „Die beiden Kleeblattschlingen" (Dehn 1914) findet sich vielleicht Dehns bekanntestes topologisches Resultat überhaupt: Zwei Kleeblattschlingen, die zueinander spiegelbildlich sind, lassen sich nicht ohne Selbstdurchdringung ineinander überführen.[79]

Im Jahre 1908 stellte Dehn eine Arbeit fertig, welche die "topologischen Eigenschaften, die den gewöhnlichen Raum vor allen anderen charakterisieren" (Dehn 1908), untersuchen sollte, ein Problem, das - wie Dehn ausdrücklich schreibt - Poincaré in seinen Komplementen beschäftigt habe. Insbesondere glaubte er beweisen zu können, "es gibt keine geschlossenen einseitigen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten" (Dehn 1908). Schon diesen Andeutungen kann man entnehmen, daß Dehn damals intensiv am Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten arbeitete und daß er dieses für sehr wichtig und aktuell hielt.

Er bat Hilbert, die entsprechende Abhandlung in den Göttinger Nachrichten möglichst schnell drucken zu lassen (er fürchtete, daß ihm „jemand, z. B. Poincaré, zuvorkommen könnte" (Dehn 1908)), mußte aber zwei Monate später (April 1908) diese zurückziehen - die Korrekturbögen waren mittlerweile angedruckt worden -, weil Tietze ihn auf einen nicht zu behebenden Fehler aufmerksam gemacht hatte. Dehns Charakterisierung war übrigens diese, „daß der gewöhnliche Raum die einzige 3dim. Mannigfaltigkeit ist, in der jeder „geschlossene Flächenkomplex" (...) zerstückelt." (Dehn 1908) Ähnliche Überlegungen zur Zerlegung geschlossener orientierbarer 3-Mannigfaltigkeiten durch geschlossene orientierbare Flächen traten später bei Dehn in Dehn 1910, 139 wieder auf.

Die Bezeichnung „gewöhnlicher Raum" bezog sich bei Dehn in der Regel auf die S^3 (vgl. etwa Dehn 1910, 159, wo dies deutlich wird). Das Problem, das Dehn 1908 beschäftigte, wurde von diesem auch in der Einleitung zu seiner großen Arbeit von 1910 wieder angesprochen, wo es heißt:

> „Der § 2 geht etwas auf die wichtige Frage der topologischen Charakterisierung des gewöhnlichen Raumes ein, ohne doch das Problem zur Erledigung zu bringen."
>
> (Dehn 1910, 139)

Nachdem er kurz auf die Geschichte des Homöomorphieproblems eingegangen ist, insbesondere auf Poincaré's Homologiesphäre, schrieb er weiter:

> „Es liegt nun nahe, zu untersuchen, ob es nicht genügt vorauszusetzen, daß jede Kurve des Raumes ein Elementarflächenstück begrenzt. Dies wird auch am Ende der Poincaréschen Arbeit angedeutet. Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Reduktion des Problems scheint aber noch nicht direkt zur Lösung führen zu können. Es dürfte eine tiefere Untersuchung der bekannten Fundamentalgruppen für zweiseitige geschlossene Flächen nicht zu umgehen sein."
>
> (Dehn 1910, 139).

[79] Diese Frage hatte Tietze 1908 aufgeworfen, als er schrieb:
„Auch diese ist eine der Anschauung oder, wenn der Ausdruck gestattet ist, der topologischen Erfahrung entnommene Tatsache, für die ein strenger Beweis nicht bekannt ist." (Tietze 1908, 97 Anm. 12)

Dies ist die erste Stelle in der Literatur, in der die Poincaré-Vermutung, ohne daß diese explizit so genannt würde, ausführlich angesprochen wird, wobei durchaus eine Ahnung von der Schwierigkeit dieses Problems mitschwingt.

Kommen wir nun zu Dehns Abhandlung aus dem Jahre 1910[80]. Die darin enthaltenen Errungenschaften betreffen einerseits die kombinatorische Gruppentheorie (Gruppenbild [heute meist als Cayley-Graph bezeichnet] für endlich erzeugte Gruppen mit endlich vielen Relationen, klare Formulierung des Wort- und des Konjugationsproblems), andererseits die Topologie (Knoten und ihre Gruppen, Bestimmung der Knotengruppe aus der ebenen Projektion eines Knotens, Isotopie von Knoten, insbesondere deren Trivialität, Konstruktion von 3-Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Knoten [sogenannte Dehn-Chirurgie], insbesondere von Homologiesphären).

Wir wollen hier auf den ersten Themenkreis nicht im Detail eingehen; eine ausführliche Darstellung des Dehnschen Gruppenbildes findet man bei Chandler-Magnus 1982, 14-21. Kurz gesagt besteht das Dehnsche Gruppenbild darin, daß man die Elemente der fraglichen Gruppe durch Ecken repräsentiert und die (endlich vielen) Relationen durch geschlossene Kantenzüge. Dabei werden zwei Ecken dann und nur dann durch eine Kante verbunden, wenn sich das der einen Ecke zugehörige Gruppenelement - Dehn spricht immer (noch) von „Substitutionen" - durch Verknüpfung mit einem erzeugenden Gruppenelement in das der zweiten Ecke entsprechende Gruppenelement überführen läßt. Das Gruppenbild ist also ein Streckenkomplex in der damaligen Ausdrucksweise; als Beispiel führt Dehn später die binäre Ikosaedergruppe vor, welche als Gruppenbild eine Art Dodekaedernetz besitzt (Dehn 1910, 161).[81]

Im § 3 formuliert Dehn sein berühmt gewordenes Lemma:

> „Ein Flächenkomplex C_2 möge ganz im Inneren einer homogenen Mannigfaltigkeit M_n ($n > 2$) liegen. Auf dem C_2 möge die Kurve k ein Elementarflächenstück E_2' begrenzen. Hat E_2' auf seinem Rande keine Singularitäten, dann begrenzt k in der M_n auch ein völlig singularitätenfreies Elementarflächenstück."
>
> (Dehn 1910, 147)

Dieses Lemma wird später (Dehn 1910, 94) dazu benutzt, zu zeigen, daß eine Kurve genau dann unverknotet ist, wenn ihre Knotengruppe abelsch ist. Diese Einsicht wird anschließend von Dehn folgendermaßen eingesetzt: Ist ein Knoten echt - also wirklich verknotet - so kann man in ihn kein Elementarflächenstück, sondern nur eine Fläche höheren Zusammenhanges singularitätenfrei einspannen (Dehn 1910, 160).[82] Das Dehnsche Lemma sollte in die Geschichte eingehen, denn fast zwanzig Jahre später entdeckte H.

[80] Eine englische Übersetzung derselben nebst sehr nützlichen Anmerkungen des Übersetzers J. Stillwell findet sich in Dehn 1987; auch Stillwell 1993 bringt umfangreiche Informationen zu Dehn und zu dessen Knotentheorie/Topologie. Weiter vergleiche man Epple 1994, insbesondere 23-2.

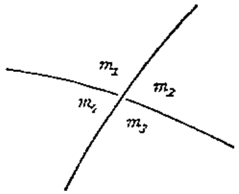
[81] Hier wurden also erstmals Dodekaeder, binäre Ikosaedergruppe und eine Homologiesphäre in Beziehung gebracht, wobei die Verbindung zu Poincaré's Beispiel aber noch offen blieb (siehe unten 5.2). Dehn weist noch darauf hin, daß ein entsprechender Zusammenhang für die gewöhnliche Ikosaedergruppe schon Maschke 1896 bekannt gewesen sei (Dehn 1910, 144 Anm. *). Man vgl. hierzu die Diskussion dieses Verweises bei Chandler-Magnus 1982, 25.

[82] Eine moderne Darstellung des Dehnschen Lemmas findet man bei Rolfsen 1976, 100 - 102. Die Idee, Knoten über einzuspannende Flächen zu charakterisieren, wurde später von H. Seifert wieder aufgegriffen und führte zum sogenannten Geschlecht eines Knotens (vgl. Seifert 1934).

Kneser einen Fehler im Beweis des Lemmas (Kneser 1929, 260).[83] Einen stichhaltigen Beweis konnte erst Papakyriakopoulos 1957 (vgl. 7 unten) vorlegen.

In unserem Zusammenhang hier ist besonders der letzte Paragraph „Spezielle Knoten und Poincarésche Räume" des zweiten Kapitels von Dehns Arbeit interessant (Dehn 1910, 159 - 165). Ihm voran gehen Betrachtungen über Knoten und deren Gruppen, die von Dehn einer systematischen Betrachtung unterzogen werden.[84]

Aus der Projektion eines Knotens in eine geeignete Ebene gewinnt Dehn wie vor ihm ähnlich schon W. Wirtinger und H. Tietze eine Darstellung der Knotengruppe[85], also der Fundamentalgruppe des Komplementes des Knotens im Raum. Dabei ist für jedes Elementarflächenstück, das die Projektion des Knotens ganz umschließt, ein Erzeugendes C_i zu nehmen. Die Relationen zwischen den Erzeugenden werden an den Überkreuzungspunkten in der folgenden Weise abgelesen[86]:



liefert $C_{m_1}C_{m_2}^{-1}C_{m_3}C_{m_4}^{-1} = 1.$

[83] Kneser ließ seiner am 7.11.1928 bei der DMV eingereichten Arbeit „geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten" - der Titel verweist schon unmittelbar auf Dehns Lemma - einen Zusatz in der Korrektur folgen, in dem er auf eine Lücke im Beweis des Lemmas hinwies und mitteilte, daß sich diese auch nicht, wie Gegenbeispiele zeigen, in Ordnung bringen läßt. Kneser hatte zuvor schon seine Entdeckung brieflich Dehn mitgeteilt (am 22.04.1929; vgl. Dehn 1987, 87, wo man noch weitere Informationen des Übersetzers zur Geschichte und zur Bedeutung des Dehnschen Lemmas findet).
Zwei Jahre nach Kneser bemerkte van der Waerden zur Frage des Dehnschen Lemmas lapidar:
„Zu erwähnen ist weiter, daß der Dehnsche Beweis des Dehnschen Lemmas sich als falsch herausgestellt hat; was zwar schon längst vielen Leuten bekannt war, aber noch nie öffentlich ausgesprochen wurde. Ob das Lemma selbst richtig ist, ist noch unentschieden." (Waerden 1930, 133)

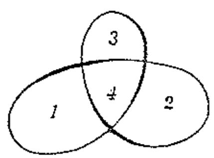
[84] Der für die Knotentheorie grundlegende Begriff der „Isotopie" findet sich explizit bei Dehn-Heegard 1907, 166f, wobei die wichtige Erkenntnis die ist, daß die Deformation von Knoten so geschehen muß, daß der ganze umgebende Raum „mitgenommen" wird (vgl. Dehns Definition von „unverknotet" in Dehn 1910, 153). Die Einsicht, Knoten durch die Fundamentalgruppe ihres Komplementes zu charakterisieren und die Repräsentierung der letzteren aus dem Komplement abzulesen, scheint auf W. Wirtinger zurückzugehen (vgl. Epple 1994). Dabei lag das Zentrum des Interesses anscheinend weniger auf den Knoten selbst als auf entsprechenden Überlagerungen, d.h. erstere traten als Verzweigungslinien auf. Tietze gibt eine Darstellung des Wirtingerschen Verfahrens in Tietze 1908, 102-106 (vgl. auch daselbst S. 82f und 96f). Inwieweit Dehn Kenntnis dieser Einsichten hatte, ist unklar. Klar dagegen ist, daß dieser im Unterschied zu P. Heegard und W. Wirtinger - und ähnliches gilt weitgehend auch für H. Tietze - Knoten als eigenständige Objekte betrachtete, also an die traditionelle kombinatorische Knotentheorie (Simony, Tait) anknüpfte. Da M. Dehn die Knotengruppe hauptsächlich kombinatorisch behandelt, kann man sagen, daß er den Rahmen des kombinatorischen Ansatzes trotz Verwendung von Fundamentalgruppen hier nicht wesentlich überschreitet.

[85] Dehn spricht auch von der „zu einem Knoten gehörigen Fundamentalgruppe" (Dehn 1910, 154); die Bezeichnung „Knotengruppe" findet sich bei Reidemeister 1928.

[86] Diese Vorschriften werden bei Dehn ausführlich begründet (vgl. Dehn 1910. 154-157).

Dabei sind die C. entsprechend zu orientieren. Liegt die Überkreuzung auf dem äußeren Rand der Projektion des Knotens, so tritt ein Erzeugendes weniger in der Relation auf. Für die (linkshändige) Kleeblattschlinge[87] erhält man vier Erzeugende C_1, C_2, C_3, C_4 und drei Relationen

$$C_1C_4^{-1}C_2 = 1,\ C_2C_4^{-1}C_3 = 1,\ C_3C_4^{-1}C_1 = 1.$$



Mit Hilfe der Kleeblattschlinge wird nun modern gesprochen eine Homologiesphäre (Dehn spricht von einem Poincaréschen Raum) gewonnen. Die entsprechende Konstruktion, die heute als Dehn-Chirurgie bezeichnet wird, läßt sich allgemein für Knoten durchführen. Hierzu werden diese zu einem (ausgefüllten) Schlauch erweitert[88]; dessen Rand ist topologisch gesehen ein Torus. Dieser ist in der gleichen Weise verknotet wie der Ausgangsknoten.

Der Dehnschen Konstruktion liegt folgende Einsicht zugrunde: Die Fundamentalgruppe des Außenraumes des verknoteten Schlauches bezüglich S^3 ist isomorph der Knotengruppe des Ausgangsknotens. Diese wiederum ist, falls es sich um einen wirklichen Knoten handelt, eine nicht-abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen. Macht man diese Gruppe abelsch, geht man also modern gesprochen zur ersten Homologiegruppe des Außenraumes über, so erhält man stets die unendlich zyklische Gruppe. Schließt man nun den Raum wieder, indem man den ausgebohrten verknoteten Schlauch durch Einfügen eines Volltorus ausfüllt, so bewirkt dies sowohl im Falle der ersten Homologiegruppe als auch im Falle der Fundamentalgruppe die Einführung einer weiteren Relation. Um eine Homologiesphäre zu bekommen, muß man dafür sorgen, daß diese zusätzliche Relation das erzeugende Element der ersten Homologiegruppe trivial macht, wobei aber die Fundamentalgruppe nicht trivial werden darf. Hierzu benötigt man eine einfach geschlossene Kurve auf dem Torus, der ja gemeinsamer Rand von Außenraum und verknotetem Schlauch ist, welche dem erzeugenden Element der ersten Homologiegruppe homolog nicht aber homotop ist. Entlang dieser Kurve wird dann der Verschlußtorus so eingefügt, daß sein Meridian auf die ausgezeichnete Kurve fällt, was in den zusätzli-

[87] Die rechtshändige Kleeblattschlinge besitzt dieselbe Knotengruppe. Die von Dehn angegebene Darstellung der Knotengruppe der Kleeblattschlinge läßt sich noch vereinfachen. Allgemein ist diese Gruppe für einen Torusknoten (m,n) von der Form $\left\langle \alpha,\beta \middle| \alpha^m = \beta^n \right\rangle$; die Kleeblattschlinge ist der Torusknoten (2,3). Unter gruppentheoretischen Gesichtspunkten wurden solche Gruppen später von O. Schreier untersucht in Schreier 1924. Überzeugt man sich noch davon, daß die Knotengruppe der Kleeblattschlinge nicht abelsch ist, so ist damit gezeigt, daß diese ein echter Knoten ist. Dieser Nachweis gelingt Dehn anhand des Gruppenbildes (Dehn 1910, 160). Einfacher erhält man dieses Ergebnis, indem man einen Epimorphismus der Knotengruppe auf die symmetrische Gruppe vom Grad 3 angibt (vgl. Rolfsen 1976, 51f.). Die Tatsache, daß die Kleeblattschlinge nicht auflösbar ist, wurde auch schon von H. Tietze (vermutlich nach dem Vorbild von W. Wirtinger) bewiesen (Tietze 1908, 105), ohne daß dies allerdings klar gesagt würde.

[88] Modern gesprochen nimmt man eine Tubenumgebung des Knotens in S^3.

chen Relationen seinen Ausdruck findet. Um eine derartige Kurve (es gibt deren viele) zu finden, bedient sich Dehn seines Gruppenbildes.
Dehn zeigt genauer folgendes (Dehn 1910, 153f):

1. Auf diesem Torus gibt es eine zum ursprünglichen Knoten isotope Kurve.[89]
2. Zeichnet man auf dem Torus eine Meridiankurve m_0 aus, so gibt es auf diesem eine weitere geschlossene Kurve A, welche m_0 in einem Punkt schneidet und auf dem Torus nicht, wohl aber im Außenraum berandet.[90]
3. Weiter wähle man auf dem Torus eine geschlossene Kurve K, welche A nur einmal schneidet und die Homologie $K \sim m_0 + nA$ erfüllt.
4. Nun schließe man den Außenraum wieder ab, indem man diesem $K \times E^2$ hinzufügt, also den Schlauch wieder ausfüllt.

Die entstehende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, die wir Dehnscher Kleeblattschlingenraum nennen wollen, besitzt eine triviale erste Homologie, da in ihr jede geschlossene Kurve berandet. Sie ist aber in der Regel nicht der 3-Sphäre homöomorph, wie die zugehörige Fundamentalgruppe zeigt.[91]

---

[89] Diese spielt für die Dehnsche Konstruktion keine Rolle.

[90] Mit dem Außenraum ist S^3 minus das Innere des Schlauches gemeint. In dieser Hinsicht ist Dehn aber nicht immer konsequent. Da die erste Homologiegruppe des Außenraumes von der Homologieklasse von m_0 erzeugt wird (sie ist unendlich zyklisch), gilt für jede geschlossene Kurve C auf dem Torus, welche m_0 nur einmal schneidet, die Homologie $C \sim sm_0$ mit geeignetem ganzzahligen s. Folglich ist $C - sm_0 \sim 0$; man kann für A jede $C - sm_0$ homologe geschlossene Kurve wählen, welche m_0 nur einmal schneidet.

[91] Die geschilderte Konstruktion wurde - wie bereits erwähnt - 1907 von Dehn in seiner Korrektur zum Enzyklopädieartikel kurz skizziert. Dort heißt es:
„Ein sehr übersichtliches Beispiel für solche merkwürdige Mannigfaltigkeiten [gemeint sind Homologiesphären, K.V.] kann man folgendermaßen konstruieren: Eine im gewöhnlichen Raume liegende in demselben verknotete Ringfläche T_2 zerlegt denselben in einen gewöhnlichen Ringraum T_3 und einen nicht mit T_3 homöomorphen Teil K_3. Mögen die auf T_2 liegenden, T_2 nicht zerstückelnden Kurven C resp. Γ in T_3 resp. K_3 begrenzen. Mit K_3 verschmelze man einen mit ihm homöomorphen Körper K_3', der von T_2' (mit den Kurven C' und Γ') begrenzt sein möge, und zwar derart, daß T_2 mit T_2', C' mit Γ, C mit Γ' zusammenfällt. In der entstehenden geschlossenen M_3 begrenzt jede Kurve einmal genommen. Aber sie ist nicht mit dem gewöhnlichen Raum homöomorph, denn die M_3 wird durch eine Ringfläche T_2 in zwei Teile K_3 und K_3' zerlegt, von den keiner mit dem gewöhnlichen Ringraum homöomorph ist" (Dehn 1907, 573)
Da es an der korrigierten Stelle des Enzyklopädieartikels um das Heegard-Diagramm von Poincaré's Homologiesphäre ging, ist es naheliegend anzunehmen, daß Dehn bei seinen Überlegungen hierzu zu ähnlichen Einsichten gelangte, wie sie bei Rolfsen zu finden sind (Rolfsen 1976, 250).
Bemerkenswert ist hier die Nähe, die diese Beschreibung mit Heegards Diagrammen, so wie dieser sie eingeführt hatte (vgl. oben 4.1), aufweist: Im Grunde genommen reduziert sich die Dehn-Chirurgie auf die paarweise Zuordnung von zwei zweielementigen Kurvensystemen auf dem Torus zueinander. Der Knoten dient dabei hauptsächlich als Hilfsmittel zur Auffindung des einen Kurvensystems.
Eine sehr anschauliche Darstellung der Dehn-Chirurgie für die Kleeblattschlinge gibt Rolfsen 1976, 246-248, vgl. auch Stillwell 1993, 263-266.
Mit modernen Hilfsmitteln läß sich die Dehnsche Konstruktion folgendermaßen beschreiben (nach Dieck 1991, 70):
Es sei $t: E^2 \times S^1 \longrightarrow S^3$ eine Einbettung, $K = t(E^2 \times S^1)$ deren Bild (der verknotete Torus, wobei $\{0\} \times S^1$ der Knoten ist). Nun betrachte man $S^3 \setminus K$ (den Außenraum). In diesem hefte man $S^1 \times E^2$ (den schlie-

Wesentlich ist nun, daß Dehn bei der konkreten Anwendung dieser allgemeinen Konstruktion die Kurven A, K, m_0 mit Hilfe des Gruppenbildes[92] explizit charakterisieren kann (Dehn 1910, 160). Er findet für die Fundamentalgruppe der durch Dehn-Chirurgie aus der Kleeblattschlinge zur Kurve K gewonnenen 3-Mannigfaltigkeit die Darstellung:

$$\langle C_1, C_2, C_3, C_4 : C_1C_4^{-1}C_2 = 1,\ \ C_2C_4^{-1}C_3 = 1,\ \ C_3C_4^{-1}C_1 = 1,\ \ C_1C_2C_3C_2^{-1}C_2^{-1} = 1 \rangle$$

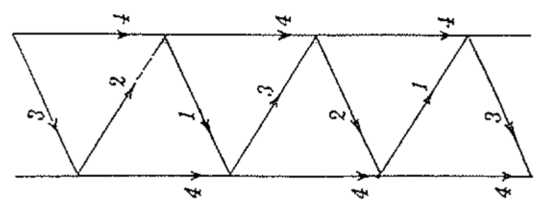
Die ersten drei Relationen charakterisieren gerade die Knotengruppe der Kleeblattschlinge; nach Dehn-Chriurgie ist also eine weitere Relation hinzugekommen, welche der verhefteten Kurve K entspricht.

Die weitere Untersuchung zeigt dann[93], daß es sich bei der fraglichen Gruppe um die durch die Spiegelung erweiterte Ikosaedergruppe - später binär genannte (vgl. 5.2) - handelt. Somit hat Dehn eine Mannigfaltigkeit konstruiert, die in sämtlichen Invarianten mit dem Poincaréschen Beispiel übereinstimmt.[94] Dies ist aber erst aufgrund der späteren

---

ßenden Volltorus) ein, indem man (z,w) aus $S^1 \times S^1 \subset S^1 \times E^2$ mit $t(z^a w^b, z^c w^d)$ identifiziert, wobei a,b,c und d ganze Zahlen sein sollen mit $ad - bc = 1$. Vom anschaulichen Standpunkt aus ist es wichtig, sich klarzumachen, daß das Einfügen des Verschlußtorus den Außenraum beeinflußt, diesen also keineswegs unverändert läßt.
Die Verheftung wird durch eine Matrix aus SL(2,Z) festgelegt, welche ihrerseits i.w. einen Homöomorphismus des Torus bestimmt. Letzterer wiederum läßt sich aber auch durch Vorgabe eines kanonischen Kurvenpaares (also i.w. eines Meridians) und dessen Bild bestimmen. Es ist bemerkenswert, in welch ansprechender Weise sich hier sehr unterschiedliche Dinge zusammenfügen.

[92] Das von Dehn verwendete Gruppenbild sieht so aus (hier um 180° gedreht):



1,2,3,4 stehen für C_1, C_2, C_3, C_4; die Relationen entsprechen den Dreiecken.
Unendlich viele Streifen dieser Art werden zu einem räumlichen Gebilde zusammengefügt; alternativ hierzu kann man eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene bilden, wobei jeweils acht Dreiecke in einem Punkt zusammentreffen.
Der im Außenraum berandenden Kurve A entspricht das Element $C_1C_2C_3C_2^{-1}C_2^{-1}C_2^{-1} = C_1C_2C_3C_2^{-3}$, K entspricht $C_1C_2C_3C_2^{-1}C_2^{-1} = C_1C_2C_3C_2^{-2}$ und dem m_0 C_1.

[93] Der Schlüssel zu dieser Interpretation liegt in den Beziehungen $C_2^5C_4^3 = 1$ und $C_1^{10} = C_2^{10} = C_3^{10} = C_4^6 = 1$, welche sich aus den die Fundamentalgruppe definierenden Relationen leicht ableiten lassen. Konkret werden C_1, C_2, C_3 interpretiert als Drehungen um die drei Ecken einer Ikosaederfläche, gefolgt von einer Spiegelung am Mittelpunkt des Körpers, C_4 als Drehung um den Mittelpunkt der Fläche, verbunden wieder mit einer Spiegelung am Körpermittelpunkt (Dehn 1910, 163).
Hier deutet sich also ein Zusammenhang zur Symmetriegruppe des Ikosaeders (oder des hierzu dualen Dodekaeders) an, den später Threlfall und Seifert aufklären sollten (vgl. 5.2).

[94] Für solche Beispiele ist heute die Bezeichnung „Homologiesphären" üblich; der Name „Poincaréscher Raum" geht auf Dehn zurück (Dehn 1910, 159). Gemeint sind in beiden Fällen geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten mit nichttrivialer Fundamentalgruppe, deren Homologiegruppen denen der 3-Sphäre isomorph sind. Die 3-Sphäre ist also keine Homologiesphäre. Dehn charakterisiert diese (für uns mißverständlich!)

Entwicklung klar; es muß demgegenüber festgehalten werden, daß Poincaré selbst (vgl. 3.4) die Fundamentalgruppen seiner Homologiesphäre nicht explizit ausgerechnet hatte, sondern nur gezeigt hatte, daß diese nicht trivial ist.

Im weiteren führt Dehn noch ein zweites auf der Kleeblattschlinge aufbauendes Beispiel an. Dieses ergibt sich aus einer anderen Wahl der Kurve R, welcher nun die Relation

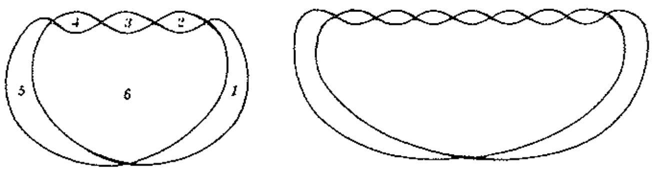
$$C_1C_2C_3C_1C_2C_3C_2^{-5} = 1$$

entsprechen soll (K schneidet m_0 zweimal, A einmal). Dies läßt sich natürlich noch verallgemeinern, indem man K den Meridian m_0 n-mal und A einmal schneiden läßt. Das entsprechende Ergebnis lautet:

> „Alle Poincaréschen Räume, die zur Kleeblattschlinge gehören, haben, mit Ausnahme des oben untersuchten [d.i. der dem Dodekaederraum homöomorphe Kleeblattschlingenraum; K.V.] und des gewöhnlichen Raumes, unendliche Gruppen, deren Bilder durch reguläre Polygoneinteilung der Nicht-Euklidischen Ebene, bei der je drei (6n-1)-Ecke (n>1) in einem Punkte zusammenstoßen, erzeugt werden."
>
> (Dehn 1910, 164)

Damit war es Dehn gelungen, einen überraschenden Zusammenhang zum Parkettierungsproblem der hyperbolischen Ebene (und damit zu einem Fall des Clifford-Kleinschen Raumproblems; vgl. 2.5) herzustellen. Letzteres wiederum läßt sich vermöge von Transformationen dieser Ebene in sich gruppentheoretisch fassen. Dieser Ansatz wurde später von W. Threlfall in seiner 1927 vorgelegten, aber erst 1932 veröffentlichten Dresdener Habilitationsschrift aufgegriffen und weiter ausgebaut (Threlfall 1932).[95]

Schließlich diskutiert Dehn noch Poincaré-Räume, die aus anderen Knoten entstehen, wobei er sich auf eine Klasse beschränkt, die aus der Kleeblattschlinge durch „Umschaltungen" an den Kreuzungspunkten hervorgehen $(n \in N)$:



als „geschlossene M_3 ohne Torsion mit einfachem Zusammenhang" (Dehn 1910, 159). Zu beachten ist, daß heute unter Poincaréschen Räumen gelegentlich auch in Abweichung vom hergebrachten Sprachgebrauch solche Räume verstanden werden, die die Poincaré-Dualität erfüllen. Zur Beziehung des Dehnschen Kleeblattschlingenraums zu Poincaré's Beispiel vergleiche man unten 5.2.

95 In der Einleitung zu dieser Arbeit heißt es zusammenfassend: „Die Beispiele ordnen sich den Verallgemeinerungen der regelmäßigen (platonischen) Kugelteilungen auf Flächen höheren Geschlechts unter. Die platonischen Polyeder vom Zusammenhange der Kugel, vielmehr ihre Normalunterteilungen in die aus der Funktionentheorie bekannten weißen und schwarzen Dreiecke, sind Zellsysteme, die in sich die drei Eigenschaften vereinen, geschlossene Polyedernetze (§6), Gruppenbilder (§1) und universelle Polygonnetze (§6) zu sein. Auf Flächen höheren Geschlechts fallen diese drei Eigenschaften auseinander.[...] So vollständig wie für das Geschlecht 0 lassen sich die Polygonnetze nur noch für die projektive Ebene (k=1) und die orientierbare (p=1) und nichtorientierbare (k = 2) Ringfläche ermitteln. Für höheres Geschlecht müssen wir uns mit Konstruktionsverfahren begnügen, die gewisse Typen oder Normalformen von Polygonnetzen (§15) liefern, und statt allgemeiner Sätze und einer vollständigen Polyedertheorie bietet die Arbeit da nur Einzelergebnisse und Beispielmaterial." (Threlfall 1932, 2)

Auch in diesem Falle ergeben sich für die entstehenden Mannigfaltigkeiten unendliche Fundamentalgruppen, die durch Parkettierungen der hyperbolischen Ebene erzeugt werden (Dehn 1910, 164f).

Die Abhandlung Dehns schließt mit einigen Bemerkungen zu geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten. Hier stellt er u.a. fest, daß jede derartige Mannigfaltigkeit eine Heegard-Zerlegung zuläßt.[96]

Dieses Ergebnis ist insofern wichtig, als es zeigt, daß das Heegardsche Verfahren eine Normalform für geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten liefert. Allerdings haben sich die hiermit verbundenen Schwierigkeiten als bis heute unüberwindlich gezeigt (vgl. 7); auf diese spielte Dehn möglicherweise mit seiner Bemerkung, eine genauere Untersuchung der Fundamentalgruppen der Flächen sei erforderlich zur Bewältigung des Homöomorphieproblemes (siehe oben), an. Dehn selbst hat später in Gestalt der Abbildungsklassengruppe (vgl. Dehn 1939) Wichtiges hierzu beigetragen.

Versucht man zusammenfassend diese Pionierarbeit Dehns zu würdigen, so muß man ihre Wichtigkeit für die kombinatorische Gruppentheorie (vgl. Chandler-Magnus 1982, 17 - 28) sowie für die Knotentheorie hervorheben. Von unmittelbarer Bedeutung für das uns hier beschäftigende Klassifikationsproblem der Topologie war vor allem Dehns Entdekkung, wie man systematisch aus Knoten 3-Mannigfaltigkeiten zu gewinnen vermag. Insbesondere kann man - und Dehn beschränkt sich auf zwei Beispiele aus dieser Kategorie - so unendlich viele Homologiesphären herstellen.[97] Damit war der Bestand an interessanten Beispielen zumindest potentiell erheblich erweitert.
Dehns Arbeit warf einige interessante Fragen und Probleme auf:

1. Kann man umgekehrt jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit durch Dehn-Chirurgie erhalten?

Diese Frage wurde von Wallace (1960) und Lickorish (1962) positiv beantwortet, wobei man allerdings eine Chirurgie mit mehreren, eventuell miteinander verschlungenen Knoten (sog. Verkettungen) zulassen muß. Die Ergebnisse dieser Autoren wurden später (1978) von Kirby zum sogenannten Kirby-Kalkül ausgebaut.[98] Vgl. unten 7.

2. Gibt es neben der aus der Kleeblattschlinge gewonnenen Mannigfaltigkeit noch andere Homologiesphären mit endlicher Fundamentalgruppe?

Dieses Problem ist bis heute ungelöst.

3. Ist die in 2. erwähnte Mannigfaltigkeit dem von Poincaré im 5. Komplement konstruierten Beispiel homöomorph?

Diese Frage wurde durch die Arbeiten von Seifert, Weber und Threlfall beantwortet: vgl. unten 5.2.

96 In dieser Allgemeinheit scheint diese Aussage vor Dehn nicht gemacht worden zu sein. Dehns Betrachtungen bleiben allerdings eher vage und auf zellenzerlegte Mannigfaltigkeiten - also auf den kombinatorischen Kontext - beschränkt. Das allgemeine Resultat ist aber in der Tat richtig (vgl. Hempel 1976, 17f.) und wird auch heute noch ähnlich wie bei Dehn angedeutet bewiesen. Wieder aufgegriffen wurde diese Problematik von O. Veblen in seinem Analysis-situs-Lehrbuch (vgl. Veblen 1931, 155-157).

97 Dieses Verdienst heben z. B. O. Veblen (Veblen 1931, 154) und Seifert-Threlfall (Seifert-Threlfall 1934, 321 Anm. 33), aber auch Rolfsen (Rolfsen 1976, 246) hervor.

98 Vgl. Dieck 1991, 70 und Dehn 1987, 88 sowie Rolfsen 1976, 257-283.

Hierzu muß man die von H. Seifert entwickelte Theorie der gefaserten Räume benutzen sowie die Tatsache, daß faserbare Poincarésche Räume endlicher Fundamentalgruppe bezüglich ihres Homöomorphietyps vollständig durch ihre Fundamentalgruppe festgelegt sind. Folglich muß man Faserungen für die drei fraglichen Mannigfaltigkeiten angeben.

Einen anschaulichen Nachweis der Äquivalenz von Dehns Chirurgie mit der Kleeblattschlinge und Poincaré's Darstellung des Dodekaederraumes als Heegard-Diagramm gibt Rolfsen 1976, 250.

4. Zerlegt ein verknoteter Torus, wie das Dehn in seiner Korrektur von 1907 behauptete, tatsächlich die S^3 in einen dem Volltorus homöomorphen Innen- und einen hierzu nicht homöomorphen Außenraum?

Diese Frage wurde 1924 durch J.W. Alexander positiv beantwortet (Alexander 1924)[99], wobei er sich allerdings im kombinatorischen Rahmen bewegte.

Das Jahr 1910, in dem Dehns Arbeit erschien, kann als eine Zäsur in der Geschichte des topologischen Klassifikationsproblems angesehen werden. Mit ihm geht die Phase der unmittelbaren Rezeption der Ideen Poincaré's zu Ende, in der diese durch Dehn-Heegard, Tietze und Steinitz im kombinatorischen Kontext systematisiert und präzisiert wurden, womit zugleich die Frage nach dem Verhältnis von kombinatorischer und topologischer Auffassung - von kombinatorischem und Kontinuitätsprogramm -, die sich in der Hauptvermutung und in der Frage nach Triangulierbarkeit auskristallisieren sollte, aufgeworfen wurde. Wir haben aber darüber hinaus gesehen, daß diese Phase keineswegs bloß rezeptiv war: Sie brachte eine Fülle neuer und interessanter Beispiele (Tietzes Linsenräume, Homologiesphären) und Erzeugungsmethoden (Heegard-Zerlegungen, Dehn-Chirurgie). Damit erhöhten sich die Chancen, das Klassifikationsproblem in seiner vollen Allgemeinheit („Zwei geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten mit isomorpher Fundamentalgruppe sind homöomorph") negativ beantworten zu können. Eine Vorahnung hiervon fanden wir bei Tietze, bestätigen sollte sich diese bei Alexander 1919. Das bis heute ungelöste spezielle Klassifikationsproblem, welches wir seit den 20er Jahren als „Poincaré-Vermutung" bezeichnen („Eine einfach-zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist der 3-Sphäre homöomorph"), spielte in dieser frühen Phase, in der die Topologen weitgehend noch ihrem klassifikatorischen Jugendtraum anhingen, keine herausgehobene Rolle. Im übrigen gilt auch heute noch die Dehn-Chirurgie als aussichtsreicher Ansatz zur Beantwortung der Poincaré-Vermutung (vgl. unten 7.).

Die nachfolgende Entwicklung bis in die 30er Jahre hinein wird einerseits, wie bereits erwähnt, die negative Beantwortung des allgemeinen Klassifikationsproblems durch Alexander mit sich bringen, sie wird aber andererseits auch Teilerfolge bezüglich der Klassifikation erzielen (Seiferts Theorie der gefaserten Räume, Homöomorphieproblem der Linsenräume [Seifert, Reidemeister], Homöomorphieproblem des Dodekaederraumes [Seifert, Threlfall, Weber]). Dabei wird man sich im großen und ganzen in dem begrifflichen Rahmen bewegen, der schon 1910 zur Verfügung stand und der in Standardwerken wie Lefschetz 1930, Veblen 1931, Seifert-Threlfall 1934 und Alexandroff-Hopf 1935 seinen Niederschlag finden sollte. In den beiden letztgenannten Büchern sind allerdings schon erste Spuren der Algebraisierung deutlich, jener Umwälzung also, welche das Gesicht der Topologie ab der zweiten Hälfte der 1930er Jahre nachhaltig verändern sollte (Vgl. 6). Auf

[99] Auf Alexander geht bekanntlich die gehörnte Sphäre zurück, welche eindringlich zeigt, daß man mit derartigen "intuitiv klaren" Behauptungen vorsichtig sein muß (Alexander 1924b).

die hier in 4. geschilderte Phase, welche nicht zuletzt durch das Bestreben, eine autonome Disziplin Topologie (im Sinne von: Theorie der Mannigfaltigkeiten) nach axiomatisch-kombinatorischer Art grundzulegen, gekennzeichnet war und die deshalb kodifizierend genannt werden kann (vgl. 8), folgte in den 30er Jahren eine Öffnung hin zu Algebra, Geometrie und mengentheoretischer Topologie. Dazwischen (1910 - 1930) lag eine Periode "normaler" Weiterentwicklung.

5 Neue Einsichten, Teilerfolge und Fehlschläge

Das Teilgebiet der Topologie, das wir hier betrachten und das man anfänglich kombinatorische, später dann algebraische, schließlich auch geometrische Topologie nannte, hat seinen eigentlichen Ursprung in den Arbeiten Poincaré's (vgl. 3), die von einer ersten Generation von Topologen (Heegard, Tietze, Steinitz, Dehn) kritisiert, ergänzt und fortgeführt wurden. Die Beiträge der Genannten lieferten der kombinatorischen Topologie ihre Methode, sie stellten sie auf eine axiomatische Grundlage und brachten zahlreiche wichtige Ergebnisse. Andererseits bezog die kombinatorische Topologie aber zentrale Problemstellungen - allen voran das Klassifikationsproblem - aus der ursprünglich nicht kombinatorisch aufgefaßten Topologie. Dieses Spannungsverhältnis zwischen allgemein begriffenen Fragestellungen und engeren kombinatorischen Methoden, wie es seinen Ausdruck in der Hauptvermutung und dem Triangulierungsproblem fand, blieb auch für die weitere Entwicklung charakteristisch: Die kombinatorische Topologie war fortan nicht mehr Selbstzweck (wie etwa bei Dehn - Heegard; vgl. 4.2), sondern Mittel zum Zweck. In den 20er und 30er Jahren änderte sich durch das Eindringen algebraischer und verwandter abstrakter Methoden sowie durch die Rezeption der mengentheoretischen Topologie das Antlitz der kombinatorischen Topologie. Es entstand die algebraische Topologie (vgl. 6), welche Invarianten unabhängig von einer kombinatorischen Struktur zu definieren und - in anfänglich eher bescheidenem Maße - zu berechnen erlaubte. Für die tiefliegenden Fragen einer geometrisch orientierten Topologie - insbesondere für das Klassifikationsproblem bei 3-Mannigfaltigkeiten und für die Poincaré-Vermutung - scheint jedoch auch heute noch eine Rückbesinnung auf eine kombinatorische Struktur unumgänglich. Diese hat natürlich Veränderungen erfahren und ist zur „PL-Topologie" (piecewise linear, stückweise linear also, auch semilinear genannt) im Rahmen der geometrischen Topologie geworden.

Das sich hier anschließende fünfte Kapitel beschreibt einige Entdeckungen und Entwicklungen aus den Jahren 1919 bis 1935, welche noch weitgehend im Rahmen der alten kombinatorischen Topologie standen. Da ist zuerst einmal die negative Beantwortung des Klassifikationsproblems für orientierbare geschlossene zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten bei Beschränkung auf die Fundamentalgruppe, welche J.W. Alexander 1919 gab, zu nennen (5.1.1). Dann werden wir auf die Theorie der Diskontinuitätsbereiche und der gefaserten Räume von H. Seifert und W. Threlfall eingehen, wobei letztere eine partielle Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten lieferte (5.2). Schließlich betrachten wir die Lösung des Homöomorphieproblems der Linsenräume durch Reidemeister und Franz (5.3). In 5.4 gehen wir dann kurz auf eine Arbeit von F. Frankl sowie auf J. H. C. Whiteheads fehlerhaften Beweis für die Poincaré-Vermutung ein, der erste für uns greifbare Fehlschlag dieser Art, dem noch andere folgen sollten (vgl. 7). Die Algebraisierung der kombinatorischen Topologie, welche etwa in demselben Zeitraum einsetzte, den wir in diesem Kapitel betrachten (sie begann um 1926 herum) und die zu einer grundlegenden Neuorientierung dieser Disziplin führen sollte, werden wir in Kapitel 6 behandeln.

5.1 Einige Beiträge von J. W. Alexander

James Weddell Alexander (1888 - 1971), Professor an der Universität Princeton, später daselbst am Institute for Advanced Studies tätig, war einer der wichtigsten und produktivsten Topologen der zweiten Generation nach Poincaré. Im Unterschied zu den Mathematiker, die unmittelbar an Poincaré anknüften, war Alexander ein Forscher, der fast ausschließlich topologische Probleme bearbeitete. Er war somit der erste bedeutende Spezialist dieser neuen Disziplin. Seine erste wichtige Arbeit, entstanden in Zusammenarbeit mit seinem Lehrer Oswald Veblen, „Manifolds of n dimensions", in der Poincaré's Resutate konsequent vom simplizialen Standpunkt aus rekonstruiert werden, die von Tietze bereits angedeutete (Tietze 1908, § 10) Homologie modulo 2 untersucht wird und Dualitätssätze formuliert werden[1], stammt aus dem Jahr 1913. Ihr folgte eine ganze Serie[2] von wichtigen Beiträgen, die hauptsächlich in der 20er Jahren erschienen. Deren Inhalte mögen hier durch einige Stichworte umrissen werden: Invarianzbeweis für die Betti-Zahlen[3], Alexanderscher Dualitätssatz, gehörnte Sphäre, Berandungsverhalten verknoteter Tori. Kurz darf man diesen Mathematiker als einen der wichtigsten Vertreter der kombinatorischen Auffassung in der Topologie bezeichnen.

Alexander wurde zusammen mit Veblen und dem etwas später (1916) hinzugekommenen Lefschetz zum Repräsentanten der sogenannten Schule von Princeton. Vor allem dieser Schule war es zu verdanken, daß die im Aufbruch befindliche US-amerikanische Mathematik im Bereich der Topologie früh Weltgeltung erlangte und auch einen eigenen, von der kontinentalen Topologie gelegentlich durchaus abweichenden Stil topologischer Forschung entwickeln konnte (vgl. 6). In diesem Zusammenhang ist auch noch G. D. Birkhoff zu nennen, der sich intensiv mit der Poincaré-Vermutung beschäftigte, wenn er auch hierüber nichts publiziert hat.

1 Eine ausführlichere Darstellung gibt Bollinger 1972, 162-166.

2 Im Literaturverzeichnis von Seifert-Threlfall 1934 ist Alexander mit 22 Arbeiten Spitzenreiter vor Hopf mit 20 und Alexandroff, Brouwer, Lefschetz mit jeweils 16 Titeln. Auch in Dieudonné 1989 nimmt Alexander mit 13 Nennungen noch eine führende Position ein (Eilenberg 23, Lefschetz 15, Hopf 13, Leray und Steenrod 12, Whitehead und Whitney 11). Natürlich darf man solchen Zahlen keine allzu große Bedeutung (u. a. werden manche Autoren mit ihren gesammelten Werken zitiert) beimessen, aber einen gewissen Informationswert kann man ihnen auch nicht streitig machen.

3 Das heißt, daß die Betti-Zahlen unabhängig von der gewählten Zerlegung der Mannigfaltigkeit sind. Alexander hat hierfür insgesamt drei Beweise (1915, 1924) gegeben, wobei er so wichtige Ideen wie die simpliziale Approximation (im Anschluß an Brouwer) und singuläre Ketten entwickelte (vgl. Bollinger 1972, 166-169 oder Dieudonné 1989, 44-49).

5.1.1 Das Gegenbeispiel von 1919 und die Verschlingungsinvarianten

Für uns besonders wichtig ist „Note on two three-dimensional Manifolds with the same Group" aus dem Jahre 1919, wo Alexander die Hoffnung zunichte machte, die Fundamentalgruppe allein könne die geschlossenen dreidimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeiten klassifizieren. Wie wir gesehen haben, tauchte diese Vermutung bei Poincaré als Frage auf[4], für welche bereits Tietze (vgl. 4.2) eine negative Antwort vermutete. Bemerkenswerterweise benutzte Alexander zwei Linsenräume - nämlich in moderner Schreibweise L(5,1) und L(5,2) -, also genau jene Mannigfaltigkeiten, welche Tietze dazu veranlaßten, seine Zweifel zu formulieren. Dabei gelang es Alexander später (1924), die unterschiedlichen geometrischen Verhältnisse, die in L(5,1) und L(5,2) vorliegen und auf die bereits Tietze aufmerksam gemacht hatte, durch eine numerische Invariante - heute als Eigenverschlingungszahl bekannt - zu fassen (in seiner ersten Arbeit [1919] verwendete Alexander komplizierte Homologiebetrachtungen), eine Idee, die von H. Seifert (1933) noch weiter ausgebaut wurde. Erstaunlich bei all dem ist aber, daß Alexander seinen Vorläufer Tietze mit keinem Wort erwähnte![5] Als weitere wichtige Leistung der Alexanderschen Arbeit von 1919 ist die explizite Reinterpretation der Linsenräume als Heegard-Zerlegungen vom Geschlecht 1 zu nennen, die die Grundlage für seine weiteren Betrachtungen lieferte - eine Idee, welche bei Tietze nur kurz angedeutet worden war (vgl. 4.2). Alexander, dessen Arbeit von 1919 in Paris datiert ist, hat die französische Übersetzung der Heegardschen Dissertation bezüglich ihrer mathematischen Zuverlässigkeit geprüft (vgl. Heegard 1916, 163), was ihn auf die geschilderte Idee - Kenntnis von Tietze 1908 vorausgesetzt - gebracht haben könnte (vgl. auch unten Anm. 6).

Die kurze nur vier Seiten lange Note beginnt mit einer Zusammenfassung der bislang erzielten Resultate und der Zielsetzung des Autors:

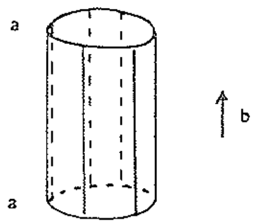
> „1. Poincaré has proved that there exist 3-dimensional manifolds with identical Betti numbers and coefficients of torsion but which are nevertheless distinguishable in the sense of Analysis Situs by the fact that they have different groups. It is proposed to set up an example of two 3-dimensional manifolds which are by no means equivalent but which cannot even be differentiated by their groups. Since the manifolds have the same group, they also have the same Betti numbers and coefficients of torsion, for in the 2-sided 3-dimensional case, these other invariants are functions of the group alone"
>
> (Alexander 1919, 339)

Das gewünschte Beispiel zweier nichthomöomorpher 3-Mannigfaltigkeiten mit isomorpher Fundamentalgruppe wird nun mit Hilfe zweier Heegard-Diagramme auf dem Torus konstruiert. Letzterer wiederum wird aus einem Zylinder durch Identifikation von Boden- und Deckfläche gewonnen, wobei eine Drehung um $2\pi/5$ (im Falle von L(5,1)) beziehungsweise $4\pi/5$ (Fall von L(5,2)) vorgenommen wird. Hierbei geht eine Schar von fünf Strecken, die auf dem Zylinder in gleichem Abstand aufgetragen wurde, in eine geschlossene Kurve auf

4 Bei Poincaré geht es 1895 allgemeiner um zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und Gruppe; vgl. Poincaré VI, 258. Diese Fragestellung wird dann im 5. Komplement zur Poincaré-Vermutung modifiziert (vgl. 3.4).

5 Ähnlich verhielt sich Alexander gegenüber Brouwers Priorität bezüglich der Idee der simplizialen Approximation, vgl. Dieudonné 1989, 45 Anm. *.

dem Torus über, welche sich fünffach in Richtung der Parallelen und einmal beziehungsweise zweimal in Richtung der Meridiane um diesen windet. Modern gesprochen entstehen also die Torusknoten (5,1) bzw. (5,2).



Schematisch lassen sich diese beiden nichtberandenden Kurven K beziehungsweise K' darstellen als $K = ab^5$ und $K' = a^2b^5$ (b entspricht der Parallelenrichtung, a der der Meridiane; zugehörige Homologieklassen werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet). Die gewünschten 3-Mannigfaltigkeiten erhält man wie üblich, indem man zwei Henkelkörper des Geschlechtes 1 entlang ihrer Oberflächen so zusammenfügt (vgl. 4.1), daß die Verheftungskurven K bzw. K' auf einen Meridian fallen.[6]

Wird die Verheftung allgemein längs einer Kurve $K'' = a^n b^m$ vorgenommen, so kann man die Fundamentalgruppe der entsprechenden 3-Mannigfaltigkeit M sofort angeben[7]:

$$\pi_1(M) \cong Z_m$$

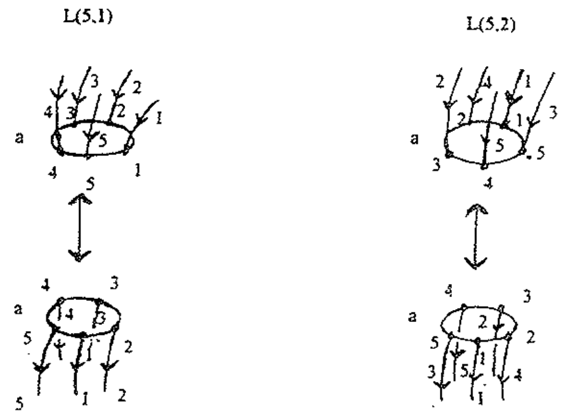
Dieses Ergebnis findet sich natürlich schon bei Tietze. Alexanders wesentlicher Beitrag bestand darin, daß er Tietzes Einsicht, L(5,1) und L(5,2) seien „irgendwie" geometrisch unterschiedlich, präzisieren konnte. Hierzu betrachten wir die Art und Weise, wie die Kurven K beziehungsweise K' den ausgezeichneten Meridian a - längs dessen wir uns den Torus aufgeschnitten denken und der zur Erzeugung der Linsenräume L(5,1) und L(5,2) in sich gedreht wird (um $2\pi/5$ bzw. $4\pi/5$) - schneiden.

Nun bemerkt man folgendes: Durchläuft man in L(5,1) die verschiedenen Umläufe (deren gibt es insgesamt fünf) der Kurve K in der Reihenfolge 12345, so trifft man die Punkte von a in der Reihenfolge 123451; bei L(5,2) hingegen ergibt sich der Zyklus 135241. Stellt man sich losgelöst vom Torus zwei Kurven vor, die die Punkte 12345 auf a in den angegebenen

[6] Im Punkt 3. seiner Note (Alexander 1919, 340) gibt Alexander eine knappe Beschreibung von Heegards Verfahren, wobei er diesen ausdrücklich erwähnt (auch die französische Übersetzung seiner Dissertation von 1916) aber den Begriff „Diagramm" weitgehend im modernen Sinne verwendet. Alexander spricht allerdings in Anlehnung an Heegard, aber im Unterschied zu modernen Gepflogenheiten, von einem Diagramm, wobei er einen Volltorus mit nichtberandender geschlossener Kurve meint. Das heißt, daß die Anheftung des einen Henkelkörpers vom Geschlecht 1, der das „Innere" des Torus ausfüllt, bereits vollzogen ist.
Die Linsenräume, die man so erhält, wurden nach gewissen Andeutungen bei Dyck 1884 und Heegard 1898 erstmals von Tietze beschrieben; vgl. 4.2. Dieser erwähnte auch schon ausdrücklich Heegards Diagrammdarstellung (Tietze 1908, 111 Anm. 1). Man kann alternativ hierzu - und dieser Gedanke spielt bei Alexander auch eine Rolle - die Linsenräume L(p,q) auch durch Dehn-Chirurgie aus dem Torusknoten (p,q) erhalten (Rolfsen 1976, 236).

[7] Diese ergibt sich durch Hinzufügen der Relationen $\alpha = 1$ und $\alpha^n\beta^m = 1$ aus der Fundamentalgruppe des Torus. Angewendet wird also ein „Seifert-van Kampen-Argument".

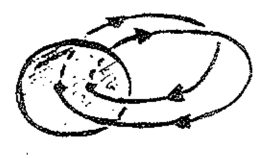
Weisen miteinander verbinden, so liegt die Vermutung nahe, daß diese in jeweils unterschiedlicher Weise im Raum mit sich selbst verschlungen[8] sind.



Die Art und Weise, wie Alexander vorgeht, entspricht aber nicht exakt den Vorstellungen, welche man heute mit Eigenverschlingungszahlen verbindet.[9] Alexanders Ausgangspunkt (vgl. auch Stillwell 1993, 258-260) ist vielmehr folgender: Angenommen, L(5,1) und L(5,2) seien homöomorphe Mannigfaltigkeiten. Dann könnte man diese Mannigfaltigkeit M einmal gemäß des zu L(5,1) gehörigen Heegard-Diagrammes zerlegen und einmal gemäß dem zu L(5,2) gehörigen, d.h. man hätte zwei Zerlegungen $M = T_1 \cup T_2$ und M =

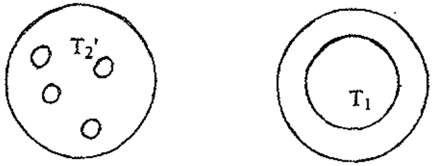
[8] Das Studium von Verschlingungsverhältnissen war ja historisch gesehen einer der Anfänge der Topologie (nämlich bei Gauß - vgl. Pont 1974, 36). Die Verschlingungszahlen selbst wurden durch Brouwer eingeführt (Brouwer 1912).

[9] Im einfachsten Falle der Eigenverschlingungszahlen einer 3-Mannigfaltigkeit läuft dies darauf hinaus, zwei disjunkte nullhomologe 1-Zykel zu nehmen, in einen von beiden die von ihm berandete Fläche einzuspannen und dann zu zählen, wie oft der andere 1-Zykel diese Fläche durchdringt, wobei die Orientierung durch Vorzeichen zu beachten ist. Man vergleiche hierzu das weiter unten besprochene Beispiel von L(5,1) und L(5,2).



Die unterschiedlichen Möglichkeiten, Verschlingungszahlen für Knoten zu definieren, werden in Rolfsen 1976, 132-136 diskutiert.

$T_1' \cup T_2'$, wobei T_i, T_i' Volltori sind, deren Oberflächen - jeweils gewöhnliche Tori - so miteinander identifiziert sind, daß die Verheftungskurven K bzw. K', welche auf T_2 bzw. T_2' liegen sollen, mit jeweils einem Meridian von T_1 bzw. T_1' zusammenfallen. Wesentlich ist nun, daß man diese Zerlegungen so einrichten kann, daß T_1 ganz im Innern von T_1' (man schrumpfe T_1 geeignet auf eine Tubenumgebung seiner Seele) und T_2' ganz im Innern von T_2 zu liegen kommt. Insbesondere sind dann T_1 und T_2' disjunkt.



T_2 $\qquad$ T_1'

Wir wollen im weiteren diese abgeänderten Zerlegungsbestandteile mit denselben Buchstaben bezeichnen wie die Bestandteile der Ausgangszerlegung. Alexander weist noch ausdrücklich darauf hin (Alexander 1919, 341), daß T_2' in komplizierter Weise in T_2 liegen kann. Es sei Θ die algebraische (d. h. unter Berücksichtigung von Vorzeichen) Anzahl der Windungen, welche T_2' in T_2 in Parallelrichtung ausführt. Das Komplement R des Innern von T_2' in T_2 besitzt die Betti-Zahl 3; als Erzeugende für $H_1(R)$ kann man z. B. α' (die Homologieklasse eines Meridians a' von T_2') und β (diejenige eines Breitenkreises b auf T_2) wählen. Folglich gilt für jeden 1-Zykel z in R eine Homologie der Form

$$z \sim ua' + vb,$$

wobei a' und b wie oben gewählt wurden. Nimmt man für z speziell die Verheftungskurve $K = ab^5$, welche auf T_2 liegt, so ergibt sich wegen $\Theta\alpha' = \alpha$ ein Ausdruck der Form

$$\Theta\alpha' + 5\beta$$

mit dem obigen Θ. Geht man nun zu $M \equiv L(5,1)$ über, so wird die Kurve K in M - Int(T_2') nullhomotop (sie fällt dort mit einem Meridian zusammen) und damit erst recht nullhomolog:

$$\Theta\alpha' + 5\beta = 0$$

Im nächsten Schritt betrachtet man die Kurve K' auf T_2', welche zu L(5,2) Veranlassung gibt. In Meridianrichtung ergibt sich eine Gesamtwindung von $5(k+2/5) = 5k + 2$ für ein geeignetes $k \in N$, in Parallelrichtung unter Berücksichtigung des Vorzeichens $\pm 5\Theta$, weil K' fünfmal um T_2 in Parallelrichtung läuft und T_2' nach Voraussetzung Θ-mal in T_2 sich windet. Also gilt in M - Int(T_2'): $(5k+2)\alpha' \pm 5\beta = 0$.

Somit gehören K und K' in M - Int(T_2')' zur selben Homologieklasse, nämlich zur trivialen. Also müßte zwischen ihnen eine Beziehung der Form ($n \in Z$)

$$(a')^{5k+2}b^{\pm 5\Theta} \sim ((a')^{\Theta}b^5)^n$$

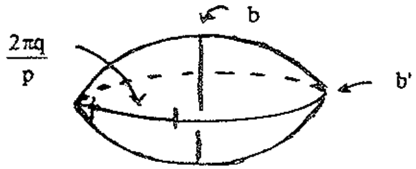
gelten und damit für die Exponenten

$$5k + 2 = n\Theta$$
$$\pm 5\Theta = 5\alpha$$
$$\text{oder } 5k + 2 = \pm n^2$$
$$\text{bzw. } n^2 \equiv \pm 2 \bmod 5$$

Diese Kongruenz ist aber unerfüllbar, da jedes natürlichzahlige Quadrat kongruent 0 oder kongruent ± 1 modulo 5 ist.

Man bemerkt, daß die Eigenverschlingungszahlen bei Alexander nur implizit auftreten. Allerdings ist diese Invariante, wie sich zeigen sollte (siehe unten), relativ schwach; so kann man mit Hilfe der Eigenverschlingungszahlen schon nicht mehr L(7,1) und L(7,2) voneinander unterscheiden. Hier hilft die Reidemeister-Franz-Torsion weiter, mit deren Hilfe das Klassifikationsproblem für die Linsenräume 1935 allgemein gelöst werden konnte (siehe unten 5.3). Die beiden Linsenräume L(5,1) und L(5,2) blieben bis heute das gängige Beispiel zweier 3-Mannigfaltigkeiten mit isomorpher Fundamentalgruppe, welche nicht homöomorph sind.

Die Eigenverschlingungszahl läßt sich bei Linsenräumen folgendermaßen ermitteln (nach Seifert-Threllfall 1934, 279): Es bezeichne b die Linsenachse des Linsenraumes L(p,q). Dann erzeugt die Homologieklasse von b die erste Homologiegruppe $H_1(L(p,q)) \cong Z_p$.



Bestimmt werden soll die Eigenverschlingungszahl V(b,b). Da nicht unmittelbar klar ist, welche Fläche sich in den nullhomologen Zykel pb einspannen läßt, ersetze man b durch einen homologen Zykel b'. Dieser soll so geartet sein, daß er ganz in der scharfen Linsenkante liegt (genauer gesagt, müßte man hier natürlich zwischen der Linse und dem aus ihr durch Identifikation entstehenden Linsenraum unterscheiden; es dürfte aber klar sein, wie unsere Ausführungen gemeint sind). Da b' geschlossen sein soll, müssen sein Anfangs- und Endpunkt bei der Identifikation äquivalent sein, folglich durch eine Drehung um $2\pi p/q$ ineinander überführbar sein.

Wir berechnen nun (vgl. unten Anm. 13) V(b,b') = V(b,pb')/p = V(b,B')/p, wobei B' eine von pb' berandete Fläche ist. Für B' kann man die q-fach genommene Kreisscheibe, welche einfach genommen die Äquatorialebene der Linse bildet, wählen. Offensichtlich gilt dann: $V(b,B') = q(\pm 1)$, da ja die Linsenachse die Äquatorialebene genau einmal schneidet. Folglich ist: $V(b,b') = V(b,B')/p = (\pm q)/p$. Weil $b \sim b'$ ist und b' im Komplement von b bezüglich L(p,q) liegt (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 278), ist damit auch V(b,b) gefunden.

Nun ist die Homologieklasse von b Erzeugendes von $H_1(L(p,q))$. Folglich kann man die Eigenverschlingungszahl eines beliebigen Zykels a berechnen, indem man $a \sim nb$ ($0 \le n \le p-1$) verwendet. So ergibt sich dann

$$V(a,a') = V(nb,nb')/p = (\pm n^2 q)/p$$

Damit hat man eine vollständige Übersicht über alle in L(p,q) auftretenden Eigenverschlingungszahlen gewonnen. Wäre nun L(p,q) zu L(p'q') homöomorph, so müßte erstens p=p' sein (wegen H_1 oder π_1) und zweitens müßten die Mengen von Eigenverschlingungszahlen übereinstimmen, insbesondere sollte die Eigenverschlingungszahl q'/p der Linsenachse von L(p,q') auch in L(p,q) auftreten. Das bedeutet, daß q'/p und ein $\pm n^2 q'/p$ kongruent modulo 1 sein müßten (d.h. sie führen auf dieselbe zwischen 0 und 1 liegende rationale Zahl), oder daß anders gesagt, $q' \equiv \pm n^2 q \bmod p$ gelten müßte. Nimmt man speziell q = 1, q'

= 2 und p = 5, so erkennt man, daß eine derartige Kongruenz nicht besteht, da 2 kein quadratischer Rest modulo 5 ist. Somit sind L(5,1) und L(5,2) nicht homöomorph.

Diese Vorgehensweise liefert allerdings für L(7,1) und L(7,2) schon keine Lösung mehr, da sich hier für beide Mannigfaltigkeiten dieselben Eigenverschlingungszahlen ergeben (insbesondere ist 2 ein quadratischer Rest modulo 7!). Die anschaulich-geometrische Bedeutung der Eigenverschlingungszahl tritt in den obigen Ausführungen deutlich hervor.

Alexander selbst ist auf die Eigenverschlingungszahlen in der kurzen Note Alexander 1924a expliziter zu sprechen gekommen. Ist V eine geschlossene, orientierbare und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit mit einem Torsionskoeffizienten der Dimension 1 vom Werte τ, so betrachte man einen erzeugenden Zykel y_1 aus der entsprechenden Homologieklasse endlicher Ordnung. Nach Voraussetzung berandet τy_1 ein Flächenstück[10] y^1. Die Eigenverschlingungszahl π^{11} wird dann festgelegt als die modulo τ genommene Anzahl der (orientierten) Schnitte, welche y^1 mit y_1 aufweist. Diese Konstruktion wird von Alexander verallgemeinert, insofern er K Torsionskoeffizienten in der Dimension 1 zuläßt, welche allerdings dann alle vom Wert τ sein sollen. Er erhält so einen Tensor[11] π^{ij}, wobei die Einträge als Schnittzahlen wie oben definiert werden. Abschließend hebt Alexander noch einmal sein Ergebnis von 1919 hervor, ohne allerdings Details anzugeben:

> „By means of the tensors π^{11}, it is even possible to distinguish between manifolds with the same group. There are, for instance, two distinct manifolds of group 5 such that the Heegard diagram of each may be formed on an anchor ring, but such that the characteristic curve of a diagram is ab^5, of the other a^2b^5. For the first manifold, the possible values of the tensor π^{11} are 1 and 4, modulo 5, depending upon the choice of the fundamental surface y_{11}; for the second manifold, the possible values are 2 and 3."
>
> (Alexander 1924a, 101)

Die Fundamentalfläche y_1 (y_{11} dürfte ein Druckfehler sein!), von der hier die Rede ist, ist diejenige Fläche, welche in ab^5 eingespannt wird. Die Werte 1 und 4 ($\equiv -1$ mod 5) ergeben sich aus der unterschiedlichen Orientierung von y_1.[12] Alexanders Absicht, die er in dieser Note verfolgte, kann man als Algebraisierung kennzeichnen, insofern er vor allem die algebraische Seite seiner Invarianten betrachtete und anreicherte. Darüber hinaus fällt auf, daß Alexander den Invarianzcharakter der Eigenverschlingungszahlen zwar reklamierte, nie aber begründete. Vielleicht sah er diesen als selbstverständlich an, gehen doch in ihre Definition nur Begriffe der Homologietheorie ein. Genauere Ausführungen hierzu findet man in H. Seiferts Habilitationsschrift „Verschlingungsinvarianten", welche vorgelegt von L. Bieberbach 1933 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erschien (Seifert 1933). Dort heißt es:

> „Es ist klar, daß Begriffe wie geschlossene Kurve, eingespannte Fläche, Schnittzahl, Addition von Kurven noch einer präziseren Definition bedürfen."
>
> (Seifert 1933, 814)

Als Abhilfe, die nur in einer Fußnote angedeutet wird, da die Seifertsche Arbeit hauptsächlich algebraisch ausgerichtet war, wurde empfohlen, „die Begriffe Kurve und Fläche

10 Die Stellung der Indizes hängt damit zusammen, daß Alexander die heute so genannte Einsteinsche Summationskonvention verwendet.

11 Dieser ist ersichtlicherweise - wie auch der Autor bemerkt (Alexander 1924a, 101) - zweiter Stufe, also eine Matrix. Es treten darüber hinaus in der Alexanderschen Note auch höherstufige Tensoren auf.

12 Vgl. Seifert-Threlfall 1934, 279.

durch singuläre 1-Kette und 2-Kette zu ersetzen. Die Definition der Schnittzahl geschieht dann mittels Approximation der singulären Ketten in dualen Zellteilungen." (Seifert 1933, 814 Anm. 1) Man bemerkt hier die innerhalb eines Dezenniums (gemessen an Alexander 1919 und Alexander 1924a) gestiegenen Strengeanforderungen.

Ist eine orientierte 3-Mannigfaltigkeit gegeben, so führt Seifert die Verschlingungszahl zweier geschlossener disjunkter nullhomologer Kurven a^1 und b^1 endlicher Ordnung in der üblichen Art und Weise ein.[13] Er macht dann darauf aufmerksam, daß die Verschlingungszahl zweier Homologieklassen nur bis auf Addition ganzer Zahlen bestimmt ist. Um die hieraus resultierende Mehrdeutigkeit zu umgehen, werden alle auftretenden Verschlingungszahlen aus [0,1] gewählt.[14]

Ist M eine orientierte 3-Mannigfaltigkeit und bezeichnet T den Torsionsanteil von $H_1(M)$ - der hier als nicht-trivial angenommen werden soll -, so kann man zwei beliebigen Elementen α_i und α_j aus T[15] eine Verschlingungszahl $V(\alpha_i, \alpha_j)$ zuordnen. Die Gesamtheit dieser Verschlingungszahlen läßt sich zu einer quadratischen Matrix zusammenfassen, deren Zeilenzahl gleich der Mächtigkeit von T ist.[16] Seiferts Hauptergebnis lautet nun:

> „Damit zwei orientierte Mannigfaltigkeiten mit Erhaltung der Orientierung topologisch aufeinander abbilden lassen, müssen die Torsionsgruppen sich so isomorph aufeinander beziehen lassen, daß die Verschlingungsmatrizen übereinstimmen."
>
> (Seifert 1933, 815)

Um diese notwendige Bedingung für Homöomorphie - die sich im Prinzip immer durch Ausprobieren in endlich vielen Schritten nachprüfen läßt - einfacher handhabbar zu machen, gab Seifert im folgenden eine fast vollständige Klassifikation der Verschlingungsmatrizen, wobei er hauptsächlich Hilfsmittel der linearen Algebra verwendete. Anders ausgedrückt, stellte er Normalformen für die fraglichen Matrizen auf (Seifert 1933, 823f). Aus diesen folgt wiederum:

> „In einer orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 sei T die Torsionsgruppe, also die von den Elementen endlicher Ordnung der Homologiegruppe H [= $H_1(M^3)$]gebildete Untergruppe. T ist direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung.Gibt es unter ihnen genau m

13 Das heißt, man spanne in a^1 eine Fläche a^2 ein (die Indizes geben bei Seifert die Dimension an) und gewichte jeden Schnittpunkt von b^1 mit a^2 mit +1 oder -1 je nach Orientierung. Die Verschlingungszahl ergibt sich dann hieraus als Summe; sie ist gleich der Schnittzahl von Kurve und Fläche:

$$V(a^1, b^1) = S(a^2, b^1)$$

Ist a^1 nicht nullhomolog, wohl aber τa^1, so setze man

$$V(a^1, b^1) = V(\tau a^1, b^1)/\tau = S(a^2, b^1)/\tau$$

(Seifert 1933, 812f). Analog ergibt sich für b^1 mit $\sigma b^1 \sim 0$

$$V(a^1, b^1) = V(a^1, \sigma b^1)/\sigma = S(a^2, b^1)/\sigma$$

Die Theorie der Schnittzahlen, welche ja von derjenigen der Verschlingungszahlen vorausgesetzt wird, geht auf Kronecker und Poincaré (Dualitätssatz!) zurück (vgl. Dieudonné 1989, 21). Die Definition der Verschlingungszahlen läßt sich in naheliegender Weise auf höhere Dimensionen verallgemeinern (vgl. Seifert-Threlfall 1934, §77).

14 Dies geht deshalb, weil nur noch Torsionselemente betrachtet werden.

15 Das sind also Homologieklassen endlicher Ordnung.

16 Die Alexandersche Matrix π^{ij} ist hiervon ein Spezialfall, der sich ergibt, wenn alle Torsionskoeffizienten von $H_1(M)$ übereinstimmen (vgl. Seifert 1933, 822 Anm. 1). Die Matrix der Verschlingungszahlen läßt sich dann auf eine besonders einfache Form bringen.

Die Eigenverschlingungszahlen sind im übrigen gerade die Diagonalelemente der Verschlingungsmatrizen.

> Gruppen der Ordnung p^e ($p \neq 2$) und sind $B_1, B_2, \ldots, B_m$ Erzeugende dieser m Gruppen, so hat die Matrix der Verschlingungszahlen $(V(B_i,B_k))$ die Gestalt $(V(B_i,B_k)) = (1/p^e)A$, wo A eine ganzzahlige Matrix und $|A|$ prim zu p ist. Dann ist die Eigenschaft von $|A|$, quadratischer Rest oder Nichtrest (mod p) zu sein, eine topologische Invariante von M^3. Auf diese Weise gehört zu jedem System untereinander zyklischer Summanden von T_p eine solche „Verschlingungsinvariante."
>
> (Seifert 1933, 824)

Man beachte, daß diese Verschlingungsinvariante nur für $p \neq 2$ definiert ist.

Aus dem Ergebnis Seiferts folgt direkt die Nichthomöomorphie von L(5,1) und L(5,2), wenn man nur weiß, daß die entsprechenden Eigenverschlingungszahlen 1/5 bzw. 2/5 sind. Die (Eigen-) Verschlingungsinvarianten lauten dann (die Matrizen $(V(B_i,B_k))$ sind jeweils einelementig!) 1 und 2, wobei 1 ein quadratischer Rest modulo 5 ist, während dies auf 2 nicht zutrifft.

Zum Abschluß seiner Arbeit gab Seifert noch verschiedene Anwendungen seiner Theorie, u.a. auf die Frage nach der Asymmetrie einer Mannigfaltigkeit[17] und der Amphicheiralität von Knoten sowie auf die Äquivalenz von Knoten mit gleicher Knotengruppe. Schließlich wird noch auf verwandte Untersuchungen von de Rham (Rham 1931) und Reidemeister (Reidemeister 1934 - vgl. 5.3) hingewiesen.

Mit den genannten Arbeiten von de Rham, Reidemeister und Seifert gelangte das Kapitel „Verschlingungszahlen" zu einem gewissen Abschluß. Insgesamt blieb ihre Verwendbarkeit im Rahmen des Klassifikationsproblems recht beschränkt. Dennoch bildeten sie den ersten Schritt hinaus über den von Poincaré gesteckten Rahmen. Eine wesentliche Weiterentwicklung dieses Ansatzes gelang erst J.H.C.Whitehead (vgl. 5.4), zuerst im Rahmen der simplizialen Auffassung (Whitehead 1939a), später dann mit Hilfe der von ihm eingeführten CW-Komplexe (Whitehead 1949, Whitehead 1952). Die hierher gehörigen Stichworte sind einfacher Homotopietyp (vgl. Cohen 1973) und Whitehead-Torsion (Milnor 1966). Allen diesen Ansätzen ist eine Grundeinsicht gemeinsam: Man baue (in unserem Falle) 3-Mannigfaltigkeiten aus einfacheren geometrisch bedeutungsvollen Bestandteilen (Simplizes, Zellen) auf und versuche, die Art und Weise, wie diese Bausteine aneinandergefügt sind, durch numerische Invarianten wiederzugeben. Klar ist, daß die Verhältnisse umso schwieriger zu beschreiben sein werden, je mehr Bausteine man benötigt - eine Tatsache, welche die Überlegenheit der CW-Komplexe in diesem Zusammenhang begründet (vgl. auch 5.3 und 5.4).

5.1.2 Der Vortrag von 1932

Im Jahre 1932 hielt J.W. Alexander beim internationalen Mathematikerkongreß einen „großen Vortrag"[18] mit dem Titel „Some problems in topology" (Alexander 1932).[19]

17 „Symmetrisch heiße eine M^3, wenn sie sich mit Umkehrung der Orientierung topologisch auf sich selbst abbilden läßt. Das einfachste Beispiel einer unsymmetrischen M^3 ist die Torus-M^3 (3,1), allgemeiner die Torus-M^3 (k,l) [das ist der Linsenraum L(k,l); K.V.], wenn -1 quadratischer Nichtrest mod k ist." (Kneser 1929, 256 Anm. 1).

18 So die Bezeichnung des Tagungsbandes; man darf wohl an einen Hauptvortrag denken. Alexanders Beitrag war nebenbei bemerkt der erste Hauptvortrag eines internationalen Mathematikerkongresses, der ausschließlich topologischen Fragen gewidmet gewesen ist.

Darin beschrieb der Verfasser zunächst einmal drei Arten von Analysis situs:[20] die punktmengentheoretische Analysis situs, welche hauptsächlich aus den Bedürfnissen der Analysis und der Betrachtung abstrakter Räume heraus entstanden sei,[21] die kombinatorische Analysis situs, welche Räume studiere, die aus einfachen, ihrem Wesen nach unbestimmten Bestandteilen aufgebaut sind, und die „ebene" Analysis situs,[22] welche Räume aus Simplizes zusammenfüge und somit eine Mittlerrolle zwischen den beiden andern Spielarten der Analysis situs einnehme. An dieser Einteilung fällt aus moderner Sicht zweierlei auf: Erstens erwähnte Alexander mit keinem Wort die algebraischen Methoden, die seit Mitte der 20er Jahre in der Entwicklung begriffen waren (vgl. 6) - insbesondere kennt er keine algebraische Analysis situs als eigenständigen Zweig oder auch als Fortsetzung der kombinatorischen Topologie mit anderen Mitteln - und zum anderen sprach er von der kombinatorischen Richtung in einem Sinne vergleichbar dem Dehn-Heegardschen (vgl. 4.2), der heute im Rahmen der Topologie überhaupt keine Rolle mehr spielt.[23] Der erste Punkt hatte sicher damit zu tun, daß Alexander vor allem auf das Klassifikationsproblem abhob, zu dem die Beiträge der algebraischen Methoden anfänglich eher bescheiden waren und von den Ergebnissen her im Bereich der Mannigfaltigkeiten nicht weiter führten als das Rechnen mit den traditionellen Inzidenzmatrizen, dem vor allem die amerikanischen Topologen vorerst treu blieben (vgl. 6).

Anschließend diskutierte Alexander in seinem Vortrag das Verhältnis der drei genannten Sparten zueinander, wobei natürlich die Hauptvermutung (allerdings ohne diese Bezeichnung) und die Triangulierbarkeit eine wichtige Rolle spielten (Alexander 1932, 252-

19 Damit leitete er, Hilbert mit seinem berühmten Pariser Vortrag über mathematische Probleme folgend, die lange Serie von Zusammenstellungen von (hier:) topologischen Fragen ein, unter denen hier genannt seien: Eilenberg 1949, Massey 1955, Papakyriakopoulos 1958, Smale 1963, Lashof 1965 und Novikov 1965.
Die Tatsache, daß in einem bestimmten Arbeitsgebiet ein Fragenkatalog erstellt und publiziert wird, kann als Indiz dafür gelten, daß eben dieses Gebiet zu einer Disziplin geworden ist mit klar definierten Grundbegriffen, deutlich umschriebenen Methoden und breit akzeptierten Fragestellungen.

20 Dieser Begriff ist bei Alexander synonym mit Topologie; die Unterscheidung selbst findet sich ähnlich schon bei Alexander 1930, 292.

21 Die Anfänge dieser Theorie gehen ja in der Tat auf G. Cantor u.a. zurück und das Bestreben, Singularitätenmengen als Teilmengen der reellen Zahlen topologisch zu charakterisieren. Man vgl. hierzu Manheim 1964.

22 Bei Alexander heißt es „flat analysis situs" (Alexander 1932, 251); 1930 sprach er von „rectilinear analyis situs" (Alexander 1930, 292), um den geometrischen Charakter dieser Auffassung hervorzuheben. Letzteres kommt unserem modernen „piecewise linear" nahe.

23 Sucht man nach einem modernen Pendant, so wird man wohl an eine Art von n-dimensionaler Inzidenzgeometrie denken. Diese rein symbolische Auffassung wurde von J. W. Alexander (Alexander 1926, Alexander 1930), N. H. A. Newman (Newman 1926, Newman 1930) und A. W. Tucker (Tucker 1932, Tucker 1933) ausgearbeitet. Zur Vorgeschichte dieses Zuganges bemerkt Tucker:
„The abstract method of attack - an early source for which is the work of Dehn and Heegard - allies itself with Weyl's important exposition [Weyl 1923; K. V.], elements of which de Rham has incorporated in the first chapter of his thesis [Rham 1931; K. V.] and with a pair of interesting papers by Mayer [Mayer 1929, Mayer 1929a; K. V.]." (Tucker 1933, 192)
Außer den schon oben Genannten erwähnt Tucker noch seinen Doktorvater S. Lefschetz (vor allem Lefschetz 1930) und E. R. van Kampen (Kampen 1929).
Die Bedeutung dieses Ansatzes lag wohl - im Nachhinein betrachtet- weniger in der Art und Weise, wie Mannigfaltigkeiten oder Komplexe symbolisch als Inzidenzstrukturen aufgebaut wurden, sondern darin, daß durch ihn die Entwicklung der abstrakten Homologietheorie gefördert wurde.

- Diagramme, was natürlich eine gewisse Einschränkung darstellt. Hier sollten Seifert-Threlfall, wie wir gleich sehen werden, einen umfassenderen Standpunkt einnehmen.

Der Vortrag Alexanders schloß mit zwei weiteren Bemerkungen: 1. Es sei wünschenswert, eine vollständige Übersicht über alle geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe aufzustellen. Die universelle Überlagerung einer derartigen Mannigfaltigkeit ist immer ein Poincaré-Raum mit trivialer Fundamentalgruppe, also insbesondere eine Homologiesphäre in moderner Ausdrucksweise, wobei der Verfasser die Vermutung äußerte, daß es sich dabei stets um die Hypersphäre S^3 handele. Diese Überlegungen stehen also wieder im engen Zusammenhang mit der Poincaré-Vermutung.

Schließlich erwähnte Alexander zweitens noch den hauptsächlich von Dehn (vgl. 4.3) untersuchten Zusammenhang zwischen 3-Mannigfaltigkeiten und Knoten. Er wies darauf hin, daß sich jede orientierbare 3-Mannigfaltigkeit als Riemannscher Raum (das heißt als verzweigte Überlagerung hier der S^3) darstellen läßt, der eine entsprechende Blätterzahl aufweist mit entsprechenden Verzweigungskurven, welche in beliebiger Weise verknotet und ineinander hängen können (vgl. 7). Diese Überlegungen schlossen mit einem Hinweis auf Knoteninvarianten.[29]

Das von Alexander in den Mittelpunkt gestellte Problem der Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten wurde auch von Seifert-Threlfall in ihrem berühmten Topologielehrbuch von 1934 angesprochen. Auch dort werden mehrere Zugangsweisen diskutiert:

1. Das bereits besprochene Verfahren der Heegard-Zerlegung, zu dem es heißt:

„Durch das Heegard-Diagramm ist die Kontruktion der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt, nämlich auf die Aufzählung aller Heegard-Diagramme. Selbst wenn aber diese Aufzählung gelungen wäre, so wäre damit das dreidimensionale Homöomorphieproblem noch nicht gelöst, weil noch die Entscheidung ausstünde, wann zwei Heegard-Diagramme dieselbe Mannigfaltigkeit erzeugen."

(Seifert-Threlfall 1934, 221)

2. Man versucht, alle Polyeder mit paarweiser Seitenzuordnung aufzuzählen.[30]

„Auch dieses ist ein zweidimensionales Problem, das so wenig wie die Aufzählung der Heegard-Diagramme gelöst ist."

(Seifert-Threlfall 1934, 221)

[29] Eine der wichtigsten Knoteninvarianten, die heute so genannten Alexander-Polynome, geht ja auf Alexander selbst zurück (Alexander 1928).

[30] Es gilt: Eine 3-Mannigfaltigkeit, die aus einem Polyeder durch p paarweise Seitenzuordnungen entsteht, besitzt ein Heegard-Diagramm des Geschlechts p. Folglich haben Poincaré's Würfelbeispiele (also seine Beispiele 1,3 und 4; vgl. 3.2) alle Heegard-Diagramme vom Geschlecht 3, während sein „Oktaederraum" (Beispiel 5) eines vom Geschlecht 4 aufweist. Da letzteres - wie wir gesehen haben (vgl. 3.2) - nichts anderes als der reell-projektive Raum ist, der seinerseits dem Linsenraum L(2,1) homöomorph ist, besitzt dieses Beispiel auch ein Heegard-Diagramm vom Geschlecht 1. Das zeigt schon, wie schwierig die Verhältnisse hier sind. Auch bei der Beispielgruppe 6 liegen die Dinge kompliziert, weil ja hier die Seitenflächen des Würfels unter Umständen weiter unterteilt werden müssen, was das Geschlecht des zugehörigen Heegard-Diagramms erhöhen kann. Ob man zur Darstellung einer Mannigfaltigkeit tatsächlich ein Heegard-Diagramm vom Geschlecht p braucht, hängt davon ab, ob deren Fundamentalgruppe wirklich p Erzeugende hat, oder ob man mit weniger auskommen kann.
Jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit läßt sich andererseits durch Polyederidentifikation gewinnen, da man jede derartige Mannigfaltigkeit triangulieren kann. Das gesuchte Polyeder erhält man durch „Verschmelzen" geeigneter Simplizes der Triangulierung.

3. Die Darstellung einer geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit als verzweigte Überlagerung der 3-Sphäre, wobei die Verzweigungslinien Knoten sind.

„Auch hier führt die Aufzählung und Unterscheidung der einzelnen Überlagerungsräume zu ungelösten Fragen. Die Mannigfaltigkeiten lassen sich unter Umständen auf vielfache Art aus ganz verschiedenen Verzweigungsknoten ableiten;..."

(Seifert-Threlfall 1934, 221)

So ergibt sich der Dodekaederraum als fünffache Überlagerung der Kleeblattschlinge, als zweifache Überlagerung des Torusknoten (3,5) und als dreifache des Torusknoten (5,2); vgl. Seifert 1932, 222 oder Seifert-Threlfall 1934, 322 Anm. 33. Bereits 1922 hatte Veblen in seinem Topologielehrbuch klar gemacht, daß die Methoden 1. und 2. alle geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten liefern, setzt man voraus, daß diese triangulierbar sind (vgl. Veblen 1931, 155-158). Somit darf man diese Gewinnungsweisen als Normalformen bezeichnen, die allerdings sehr schwierige Probleme aufwerfen (vgl. 7).

Auf die auf Dehn (vgl. 4.3) zurückgehende Idee, geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten aus Knoten zu gewinnen, gingen Seifert und Threlfall ausführlich in einem eigenen Paragraphen ein (§ 65 = Seifert-Threlfall 1934, 224-227). Allerdings diskutierten sie nicht die Frage, inwieweit diese Vorgehensweise allgemeinen Charakter hat, ob sich also jede derartige Mannigfaltigkeit so gewinnen läßt. Hier mußte man bis zu den 60er Jahren auf entsprechende Ergebnisse warten (vgl. 7). In einer Anmerkung, die sich im Paragraphen über Dehns Vorgehensweise findet, gaben Seifert-Threlfall noch zwei weitere Zugangsweisen zum Homöomorphieproblem an, nämlich die Theorie der Diskontinuitätsbereiche und diejenige der (im Sinne Seiferts) gefaserten Räume. Auf beide werden wir in 5.2 ausführlich zu sprechen kommen.

Der Stand der Dinge, den wir in Alexanders Übersichtsvortrag und in der Zusammenstellung bei Seifert-Threlfall kennengelernt haben, markiert einen ersten Endpunkt, den das Klassifikationsproblem in dem von uns betrachteten Zeitraum gefunden hat. Dieser läßt sich wie folgt charakterisieren:

1. Die von Poincaré betrachteten Invarianten (Fundamentalgruppe, Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten) genügen nicht, um das Klassifikationsproblem für 3-Mannigfaltigkeiten allgemein zu lösen. Sie bilden also kein vollständiges Invariantensystem. Offen bleibt aber die Frage, ob sie für die Kennzeichnung der Homöomorphieklasse der 3-Sphäre ausreichen.

2. Verschiedene Ansätze zur Zurückführung auf Normalformen für 3-Mannigfaltigkeiten (z.B. Dehn-Chirurgie, Heegard-Diagramme, Polyederidentifikationen, Überlagerungen) stehen zur Verfügung. Diese reduzieren dreidimensionale auf zweidimensionale Probleme, welche sich aber als unüberwindlich erweisen.

3. Die Grundbegriffe insbesondere und vor allem der Mannigfaltigkeitsbegriff - sind weitgehend geklärt und ihre Bedeutung stabilisiert. Das Klassifikationsproblem wird als ein kontinuumstopologisches angesehen, das mit algebraisch - geometrisch - kombinatorischen Methoden anzugehen ist. Ein Rückzug auf einen ausschließlich kombinatorischen Standpunkt gilt als unbefriedigend (vgl. auch 6).

Wie wir gesehen haben (vgl. Kapitel 3 und 4) spielte das Homöomorphieproblem der geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten eine ganz wesentliche Rolle in der Frühgeschichte der Topologie; es war deren leitende Fragestellung, welche der im Entstehen begriffenen Disziplin eine Art von Kristallisationskern verschaffte, auf den sich die Anstrengungen der Forschenden konzentrieren konnten.

Nach Alexanders Ergebnis von 1919 trat allmählich das nun als mit traditionellen Mitteln unlösbar erkannte allgemeine Homöomorphieproblem zurück zugunsten der Frage, ob die Fundamentalgruppe wenigstens hinreiche, die Homöomorphieklasse der 3-Sphäre zu charakterisieren. Dabei spielte wohl auch eine Rolle, daß die neuentwickelten Invarianten (insbesondere die Verschlingungszahlen) kaum Aussicht auf allgemeine Lösungen boten; sie blieben in ihrer Nützlichkeit meist auf bestimmte Mannigfaltigkeiten oder Klassen derselben beschränkt.

Für die eben angesprochene Frage hatte Kerektjártó die nicht ganz zutreffende Bezeichnung „Poincaré-Vermutung" eingeführt (vgl. unten Anmerkung 89). H. Kneser sprach wenig später von einer „der wichtigsten und nächstliegenden Fragen" (Kneser 1926, 128) und E. van Kampen brachte das „bis jetzt ungelöste" „Sphärenproblem" (Kampen 1929, 1) in Verbindung mit dem Mannigfaltigkeitsbegriff (um nur einige Beispiele zu nennen). Dieses ausgeprägte Interesse an einer topologischen Kennzeichnung der 3-Sphäre wurde gefördert durch die Entwicklung der topologischen (das heißt unverzweigten) Überlagerungstheorie, in deren Zusammenhang ja gerade einfach-zusammenhängende Überlagerungen eine wichtige Rolle spielen (Hopf 1926, Reidemeister 1928, Seifert 1932). Interessante gerade die Sphären betreffende Resultate erzielte anfangs der 30er Jahre H. Hopf (Hopf-Faserung [vgl. 5.2], Vektorfelder auf Sphären), und die in den Aufsätzen von W. Hurewicz entwickelte Homotopietheorie (Hurewicz 1935, 1935a, 1936 und 1936a) wies den Sphären eine herausgehobene Position zu.

Auch die Tatsache, daß die Poincaré-Vermutung zunehmend zum Zentrum eines ganzen Netzes von äquivalenten oder von ihr abhängigen Aussagen wurde, zeigt ihre wachsende Wichtigkeit.

Schließlich muß noch erwähnt werden, daß wir in den 30er Jahren die erste Arbeit finden, die sich ausschließlich der Poincaré-Vermutung widmete (Frankl 1931 - vgl. 5.4), sowie den ersten veröffentlichten falschen Beweis derselben (von J.H.C. Whitehead - vgl. 5.4). All dies belegt, daß die Poincaré-Vermutung, wie sie fortan - nicht zuletzt unter dem normierenden Einfluß der einflußreichen Lehrbücher Seifert-Threlfall 1934 und Alexandroff-Hopf 1935 - genannt wurde, zu Beginn der 30er Jahre das allgemeine Homöomorphieproblem aus seiner Schlüsselrolle zu verdrängen begann. Fortan erschien sie als das erfolgsversprechendere Forschungsprogramm, wobei natürlich alle Ansätze und Invarianten, welche bis dahin im Zusammenhang mit dem Homöomorphieproblem entwickelt worden waren, weiterhin ausgenutzt werden konnten.

In Kapitel 7 werden wir kurz auf die Frage zurückkommen, wie sich der in diesem Abschnitt geschilderte Stand aus heutiger Sicht darstellt, das heißt, welche Probleme gelöst wurden und welche ungelöst blieben. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels 5 betrachten wir noch die Beiträge von Seifert (oft mit Threlfall als Koautor), welche zu einer Teillösung für das Klassifikationsproblem führten, von K. Reidemeister, F. Frankl und von J.H.C. Whitehead.

5.2 Die Beiträge von H. Seifert und W. Threlfall

In der ersten Hälfte der 1930er Jahre entfaltete H. Seifert, damals in Dresden, 1935 vertretungsweise und dann 1937 Professor in Heidelberg, eine bemerkenswerte Aktivität[31] im Bereich der (dreidimensionalen) Topologie. Zwei Arbeiten entstanden in Zusammenarbeit mit W. Threlfall, der seit 1927 als Privatdozent an der Dresdner Hochschule tätig war[32] und durch dessen Topologievorlesung Seifert auf dieses Gebiet aufmerksam wurde. Seifert und Threlfall verfaßten - z.T. auf der Basis der noch zu besprechenden Arbeiten - gemeinsam das „Lehrbuch der Topologie" (1934), das wir schon häufig zitiert haben und das gerade für den Bereich der dreidimensionalen Topologie zu einem Klassiker geworden ist. Diese fruchtbare Zusammenarbeit wurde übrigens 1938 mit der „Variationsrechnung im Großen. Morsesche Theorie" fortgesetzt. Mit ihren Arbeiten beginnt eine neue Entwicklungslinie im Bereich der dreidimensionalen Topologie, welche durch den Einbezug geometrischer Überlegungen charakterisiert ist und die um 1980 herum eine überraschende Neubelebung erfuhr.

Nicht selten entsteht in der Mathematikgeschichte das Neue dadurch, daß Ideen, welche in getrennten Gebieten der Mathematik vorhanden waren, miteinander in überraschender Weise kombiniert werden, was zu grundlegend neuen Einsichten führen kann (man denke etwa an die Zahlentheorie und die Theorie der elliptischen Kurven). Ein derartiges Zusammenführen charakterisiert auch die Originalarbeiten von Threlfall und Seifert, in denen Gebiete wie Matrizenrechnung (Transformation auf Blockform), analytische Geometrie (Zerlegung von Räumen in direkte Summen), Polyedertheorie und Raumteilungen (reguläre Polytope und Raumteilung der S^3), zwei- und dreidimensionale sphärische Geometrie, kombinatorische Gruppentheorie und Theorie der Transformationsgruppen sowie natürlich auch die Topologie angesprochen werden. Damit wurde die Entwicklungslinie, welche Trelfall in seiner Dresdner Dissertation von 1926 und im nachfolgenden Jahr in seiner Habilitationsschrift (Trelfall 1932) eingeschlagen hatte, fortgeführt.

Ganz wichtige Vorarbeiten zu diesem Unternehmen finden sich in der 1889 erschienenen Arbeit von M. E. Goursat, welcher unter anderem die endlichen Untergruppen der SO(4) bestimmt (wobei auch er sich schon der Rückführung auf $SO(3) \times SO(3)$ bediente), Fundamentalbereiche ermittelt und die geometrische Wirkung von Abbildungen aus SO(4) erforscht hatte. Was bei Goursat natürlich noch völlig fehlte, war ein Bezug zur Topologie, insbesondere zur Erzeugung von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten. Das Fehlen einer geeigneten Darstellungsweise für Gruppen (durch Erzeugende und Relationen) macht sich bei ihm nachteilig bemerkbar. Im übrigen ist interessant, daß Goursat als Ausgangspunkt

[31] In den Jahren 1931 bis 1936 veröffentlichte Seifert - teilweise mit Koautoren (W. Threlfall, C. Weber) - insgesamt mindestens neun topologische Originalarbeiten (vgl. Literaturverzeichnis) sowie zusammen mit Threlfall das bereits erwähnte „Lehrbuch der Topologie".

[32] In der Druckfassung der Threlfallschen Habilitationsschrift „Gruppenbilder" (Threlfall 1932) findet sich auch ein Hinweis auf H. Seifert. Dort heißt es in einer Fußnote: „Zu der vorliegenden Umarbeitung der ersten Paragraphen hat Herr Seifert beigetragen." (Threlfall 1932, 2 Anm. 1)

seiner Arbeit ausdrücklich Poincaré's Abhandlung über Kleinsche Gruppen erwähnt (vgl. Goursat 1889, 9), insbesondere die darin enthaltenen Ideen zur hyperbolischen Raumteilung - also genau jene Ideen, die Poincaré selbst zum Studium der geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten veranlaßt haben dürften (vgl. 3.1).

Doch zurück zu W. Threlfall und seinem Studenten H. Seifert! Es sei noch angemerkt, daß ersterer auf dem Gebiet der Mathematik Autodidakt gewesen ist (er hatte ursprünglich Biologie studiert), was einerseits eine anfängliche (in der Arbeit von 1931 spürbare) Unkenntnis der einschlägigen Literatur erklärt, aber auch das Auffinden eines ganz neuen Ansatzes - außerhalb aller damals gängigen Forschungsprogramme der Topologen - begünstigt haben könnte. Insbesondere war Threlfall und Seifert eine Arbeit von Hopf über das Clifford-Kleinsche Raumproblem entgangen (vgl. Threlfall-Seifert 1933, 585), übrigens die einzige dieser Art in den 20er Jahren, welche die gruppentheoretischen Überlegungen, von denen oben andeutungsweise die Rede gewesen ist, ausführlich enthielt und diese auch mit topologischen Fragen (z. B. Fundamentalgruppen von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten) in Zusammenhang brachte (Hopf 1926). Auch die von Threlfall und Seifert gepflegte topologische Überlagerungstheorie (im mehr als zweidimensionalen Fall) war hier schon berücksichtigt worden.

Die erste Arbeit von Threlfall[33] „Topologische Untersuchungen der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes" (Threlfall-Seifert 1931 - eingereicht 8.3.1930), bei der Seifert explizit als Koautor auftritt, knüpft in Stil und Idee an die 1927 vorgelegte Threlfallsche Habilitationsschrift (Threlfall 1932) an. In der Einleitung heißt es:

> „Die Aufzählung aller nicht stetig ineinander abbildbaren, geschlossenen, dreidimensionalen Räume ist eine ungelöste Aufgabe. Eine Dimension tiefer tritt jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich [[34]] einer diskreten Gruppe von metrisch starren Bewegungen der Kugel, der euklidischen oder der hyperbolischen Ebene auf. Es liegt daher nahe, die Diskontinuitätsbereiche dreidimensionaler diskreter Bewegungsgruppen der Hypersphäre, des euklidischen und des hyperbolischen Raumes auf ihre topologischen Eigenschaften zu untersuchen."
>
> (Threlfall-Seifert 1931, 2)

Schon aus diesem Zitat erkennt man, daß die Untersuchungen von Threlfall und Seifert über den Bereich hinausgreifen, den man (heute wie damals) zur Topologie rechnet, werden doch z.B. Eigenschaften aus der metrischen Geometrie verwendet. Die Grundidee ist - topologisch gesprochen -, dreidimensionale Mannigfaltigkeiten als Unterlagerungen, z.B. im sogenannten sphärischen Fall der S^3, zu konstruieren; dabei ergeben sich diese durch Übergang zum homogenen Raum bezüglich einer endlichen Untergruppe der Gruppe

33 Zu deren Ursprung heißt es: „Die Arbeit ist aus einer Beispielsammlung einer von W. Threlfall an der Technischen Hochschule Dresden gehaltenen Topologievorlesung hervorgegangen." (Threlfall-Seifert 1931, 2 Anm. 1)

34 Heute spricht man von einem homogenen oder Orbitraum. Oft meint allerdings „Diskontinuitätsbereich" einfach einen Teil des gewöhnlichen Raumes unter Absehung von den Identifikationen auf dem Rand. Es sollte aber aus dem Zusammenhang stets klar sein, was gemeint ist. Der zu schildernde, auf Threlfall zurückgehende Ansatz steht in der Tradition des Raumformenproblems (Clifford, Klein, Killing, Hopf u.a.); vgl. auch Hopf 1926 sowie oben 2.5.

der sphärischen Bewegungen, das sind diejenigen „reellen linearen homogenen Transformationen der Koordinaten..., die die Quadratsumme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

die Entfernung vom Nullpunkt, ungeändert lassen." (Threlfall-Seifert 1931, 3). Wegen der Endlichkeit der Gruppe erfolgt deren Operation stets eigentlich diskontinuierlich; auf die Frage der Fixpunktfreiheit wird noch eingegangen werden.

Die entstehenden 3-Mannigfaltigkeiten sind dann lokal-isometrisch der S^3, weshalb es möglich ist, ihnen eine sphärische Geometrie aufzuprägen. Hiervon wird allerdings bei Threlfall-Seifert kein Gebrauch gemacht, was einen Unterschied zur modernen Vorgehensweise, welche genuin geometrische Invarianten (etwa das Volumen) verwendet, darstellt. In moderner Terminologie geht es also um orientierungserhaltende orthogonale lineare Abbildungen R^4 nach R^4, d.h. um die Gruppe SO(4), und um endliche Untergruppen derselben. Gestützt auf geometrische Überlegungen gelingt es den Verfassern zu zeigen, daß sich jede derartige sphärische Bewegung als Produkt einer sogenannten Links- und einer sogenannten Rechtsdrehung darstellen läßt.[35]

Dabei läßt sich jede Matrix aus SO(4) auf zwei verschiedene Arten und Weisen als Produkt einer Rechts- und einer Linksdrehung darstellen (auszunehmen sind natürlich die Identität und die Diametralpunktabbildung), weshalb später ein Faktor 2 auftreten wird. In der Terminologie von damals sprach man von „Zweistufigkeit".

Weiter wird jeder Links- bzw. Rechtsdrehung (des R^4) ein Element aus SO(3) zugeordnet; insbesondere ergeben sich im Falle endlicher Gruppen die von den Verfassern als platonisch bezeichneten Gruppen, also die Symmetriegruppen der platonischen Körper.[36]

35 Diese Begriffe werden über die Untersuchung isotroper Ebenen (das sind zweidimensionale Eigenräume) der entsprechenden linearen Abbildungen gewonnen (Threlfall-Seifert 1931, 3-8), was modern gesprochen auf die Ermittlung von Eigenvektoren bzw. Eigenräumen hinausläuft. In Matrixdarstellung bezüglich einer geeigneten Basis aus Eigenvektoren hat eine sphärische Bewegung - also ein Element von SO(4) - die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

Speziell besitzt eine sogenannte Rechtsdrehung, die entsteht, wenn $\varphi = \psi$ ist, das Aussehen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

während eine Linksdrehung (hier ist $\varphi \equiv \psi \bmod \pi$)so aussieht:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Rechts- bzw. Linksdrehungen im R^4 werden auch als Cliffordsche Schiebungen erster und zweiter Art bezeichnet (vgl. Threlfall-Seifert 1933, 545 Anm. 4 oder Hopf 1926, 322 f).

36 Einzelheiten bei Threlfall-Seifert 1931, 10-14. Die Entsprechung zwischen sphärischer Bewegung des R^4 und Paaren von Drehungen des R^3 ist i.a. nicht monomorph, sondern - in damaliger Terminologie - zweistufig.

Es gilt, wie bereits bemerkt, wovon man sich durch Matrizenmultiplikation überzeugen kann: Jede Matrix aus SO(4), welche auf Blockgestalt gebracht wurde, läßt sich auf genau zwei Weisen als Produkt einer Rechts- und einer Linksdrehung darstellen. Bezeichnen E_{12} und E_{34} die zweidimensionalen Eigenräume der auf Blockgestalt gebrachten Matrix einer sphärischen Bewegung, so stellt man fest, daß E_{12} um die Summe des Rechts- und des Linksdrehwinkels, E_{34} und deren Differenz gedreht wird:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_r+\chi_l) & -\sin(\chi_r+\chi_l) & 0 & 0 \\ \sin(\chi_r+\chi_l) & \cos(\chi_r+\chi_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\chi_r-\chi_l) & -\sin(\chi_r-\chi_l) \\ 0 & 0 & \sin(\chi_r-\chi_l) & \cos(\chi_r-\chi_l) \end{pmatrix}$$

Diese Resultate werden bei Threlfall-Seifert nicht algebraisch über Matrizen, sondern geometrisch durch Betrachtung des Abbildungsverhaltens gewonnen, was die Sache für den modernen Leser reichlich mühsam macht.

Ist nun eine Rechtsdrehmatrix sowie ein Ortsvektor $\vec{e} \in R^4$ (also ein Punkt auf S^3) gegeben, so kann man offenkundig eine Linksdrehmatrix finden, so daß das Produkt der beiden Drehmatrizen den Eigenraum E_{12} in sich dreht, während es E_{34} - in dem o.B.d.A. der Ortsvektor $\vec{e}$ liegen soll - punktweise festhält: Hierzu muß man nur $\chi_r = \chi_l = \chi$ nehmen. Man erhält folgende Gestalt für die Produktmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\chi & -\sin 2\chi & 0 & 0 \\ \sin 2\chi & \cos 2\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dieser entspricht in eindeutiger Weise eine Matrix aus SO(3) - man streiche die letzte Zeile und Spalte. Analog verfährt man mit Linksdrehmatrizen. Da diese Überlegung von den Basen abhängen, stellen sie nur Plausibilitätsbetrachtungen dar. Ein wirklicher Beweis bedarf zusätzlicher Überlegungen; die Behauptung ist aber richtig (siehe unten).

Ist somit eine Matrix aus SO(4) gegeben, so zerlege man diese in ein Produkt aus einer Links- und einer Rechtsdrehmatrix (was i. a. auf zwei Weisen möglich ist) und ordne jeder dieser Drehmatrizen eindeutig eine Matrix aus SO(3) zu, wie wir das eben gesehen haben. Bezeichnet man mit SOR(4) und SOL(4) die Untergruppen von SO(4), welche aus allen Rechts- bzw. Linksdrehungen bestehen, so erhält man einen Epimorphismus

$$SO(4) \to SOR(4) \times SOL(4)$$

dessen Kern aus E_4 und $-E_4$ (E_4 ist die (4x4)-Einheitsmatrix) besteht sowie einen Isomorphismus

$$SOR(4) \times SOL(4) \to SO(3) \times SO(3)$$

welche man zu einem Epimorphismus

$$SO(4) \to SO(3) \times SO(3)$$

zusammensetzen kann, dessen Kern wieder aus E_4 und $-E_4$ besteht. Im Rahmen der linearen Algebra sind dies heute bekannte Dinge (vgl. etwa Storch/Wiebe 1990, 399 und 544), wobei allerdings keinerlei geometrische Überlegungen mehr einfließen und an die Stelle der Links- und Rechtsdrehungen Spinoren treten.

Vielleicht ist es hier angebracht, kurz die moderne Auffassung - welche anstelle von SO(4) die Gruppe SU(2) in den Vordergrund stellt - zu charakterisieren und ein paar Worte zur Geschichte zu sagen: Modern gesprochen wird hier der bekannte, über die Möbius-Transformationen vermittelte Epimorphismus SU(2) $\to$ SO(3) verwendet, dessen Kern aus E_2 und $-E_2$ (das sind (2x2)-Einheitsmatrizen) besteht. Das Urbild der Ikosaedergruppe, welche eine Untergruppe von SO(3) ist, unter diesem Homomorphismus ist die binäre Ikosaedergruppe, von der schon verschiedentlich die Rede war (vgl. Brieskorn 1976, 181 - 183 oder Tzanakis 1994). Entsprechendes gilt auch für die anderen platonischen Gruppen.

Die Kenntnis des oben genannten Epimorphismus, der topologisch betrachtet eine universelle Überlagerung darstellt, geht auf A. Cayley sowie auf F. Kleins Arbeiten zum Ikosaeder (1875) zurück (vgl. Tzanakis 1994, 30). Explizit läßt sich dieser Zusammenhang so darstellen, wobei ψ, θ und Φ die Eulerschen Winkel einer Drehung im Dreidimensionalen sind: Jede Matrix A aus SO(3) läßt sich schreiben als Produkt

Die gesuchten sphärischen (vierdimensionalen) Bewegungsgruppen ergeben sich dann aus Untergruppen des direkten Produktes zweier platonischer Gruppen, d.h. von Symmetriegruppen platonischer Körper. Diese Untergruppen wiederum entsprechen Normalteilern der beiden Faktoren, die isomorphe Faktorgruppen liefern.[37] Das geschilderte Verfahren, das natürlich rein gruppentheoretisch ist, wird von den Autoren als Gruppenpaarung bezeichnet. Damit ist gruppentheoretisch gesehen eine weitgehende Reduktion des Problems „Studium der endlichen Untergruppen von SO(4)" geleistet, welche es insbesondere auch erlaubt, Erzeugende und Relationen für die interessierenden Untergruppen der SO(4) anzugeben.

Um das zu Anfang genannte Ziel - Studium der Unterlagerungen der S^3 bezüglich Gruppen sphärischer Bewegungen - zu realisieren, bedarf es in erster Linie noch der Kenntnis des Zusammenhanges zwischen der benutzten Bewegungsgruppe der S^3 und der Fundamentalgruppe der entstehenden Mannigfaltigkeit. Dabei ist zu beachten, daß die sphärischen Bewegungen Fixpunkte haben können, weshalb unter Umständen der Rahmen der (heute gängigen) Überlagerungstheorie überschritten wird.[38] Das Ergebnis von Threlfall und Seifert lautet:

> „Die Fundamentalgruppe F des Diskontinuitätsbereiches M einer endlichen Bewegungsgruppe der Hypersphäre ... ist die Quotientengruppe der Bewegungsgruppe G und der Untergruppe N von G, die von allen fixpunkthaltigen Bewegungen von G erzeugt wird: F = G/N"
>
> (Threlfall-Seifert 1931, 44)

$$A_\psi A_\theta A_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deren Urbild T in SU(2) hat dann die Gestalt

$$T_\psi T_\theta T_\Phi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix}$$

Dabei bewirkt der Faktor 1/2, daß jeder Matrix A zwei Matrizen T entsprechen, da ω und ω + π zum selben Bild führen. Insbesondere liefern eine Rechts- und eine Linksdrehung dasselbe Bild.

37 Dieses Problem wird in einem zweiten Schritt noch weiter reduziert, und zwar auf die Betrachtung der inneren Automorphismen der Quotientengruppen und auf die Frage, wie viele nicht-konjugierte Paargruppen durch diese entstehen (Threlfall-Seifert 1931, 17f). Anders gesagt gelang es Threlfall und Seifert hier allgemein, die gruppentheoretische Frage nach dem Zusammenhang zwischen Untergruppen eines direkten Produktes zweier Gruppen und den Untergruppen der Faktoren zu beantworten.
Zu beachten ist, daß die Faktorgruppen platonischer Gruppen wieder platonische sind.
Im übrigen gilt noch: Zwei Untergruppen, die in der Gruppe der sphärischen Bewegungen zueinander konjugiert sind, liefern dieselben Diskontinuitätsbereiche. Bei Threlfall-Seifert heißen derartige Gruppen metrisch ähnlich; metrisch ähnliche Gruppen können also für topologische Zwecke als gleich gelten (Threlfall-Seifert 1931, 13).

38 Wie bereits bemerkt, war damals die (topologische) Überlagerungstheorie noch im Entstehen begriffen. Vgl. auch Waerden 1930, 133, wobei zu beachten ist, daß Reidemeister 1928 fast ausschließlich den zweidimensionalen Fall behandelt. Wichtige Einsichten zur dreidimensionalen Überlagerungstheorie enthielt Hopf 1926, eine Arbeit,, die aber Threlfall und Seifert nicht bekannt war, als sie ihren Artikel schrieben (vgl. Threlfall-Seifert 1933, 585). Eine Behandlung der Überlagerungstheorie allgemein - u.a. mit dem Terminus „universelle Überlagerung" - gibt Seifert 1932, § 9.

Damit ist die Brücke zwischen dem algebraisch-geometrischen Gebilde Bewegungsgruppe und dem topologischen Objekt Mannigfaltigkeit geschlagen. Bekannt sind dabei die Bewegungsgruppen vermöge ihrer oben geschilderten Rückführung auf Gruppenpaarungen von platonischen Gruppen. Dagegen wird es die auf E. Goursat zurückgehende Kenntnis der geometrischen Wirkung der Abbildungen aus SO(4) erlauben, bestimmte Diskontinuitätsbereiche bezüglich ihrer geometrischen Gestalt zu charakterisieren. Hier liegt der Ursprung der Linsenräume, so wie wir sie heute auffassen, und der gängigen Interpretation der Poincaréschen Homologiesphäre (vgl. 3.4) als Dodekaederraum. Allerdings wird dieses Programm von den Autoren nur im einfachsten Falle durchgeführt, der aber schon reichhaltige Ergebnisse zeitigt. Es ist dies die Klasse der von Threlfall und Seifert so genannten „Drehgruppen". Diese unten mit G bezeichneten Gruppen überlagern zweistufig direkte Produkte einer platonischen Gruppe R mit der trivialen Gruppe E. Genauer gesagt ergeben sich in diesem Falle tatsächlich Untergruppen des direkten Produktes, weil man R selbst als Normalteiler von R nimmt und dann offenkundig R/R isomorph E/E ist. Also sind R und E Normalteiler, welche zu isomorphen Faktorgruppen führen; folglich liefern sie nach dem von Trelfall und Seifert hergeleiteten Kriterium eine Untergruppe des direkten Produktes, welche vermöge des Epimorphismus nach SO(4) in Gestalt von G zurückgenommen werden kann. Drehgruppen sind ersichtlich fixpunktfrei, weshalb G immer isomorph der Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit ist.[39]

Ich gebe hier die Ergebnisse der Arbeit von Threlfall und Seifert tabellarisch wieder, wobei ich auf die Herleitung der Linsenräume noch genauer eingehen werde. Die Prismaräume begegnen uns noch einmal in der Seifertschen Dissertation (siehe unten). Die numerischen Invarianten $(\beta_1,\beta_2;\tau_1,\tau_2)$ der vierten Spalte sind folgendermaßen zu interpretieren (erste Betti-Zahl, zweite Betti-Zahl; Torsionskoeffizienten der Dimension 1, Torsionskoeffizienten der Stufe 2), ein Strich (-) bedeutet: nicht vorhanden. Der Zusatz „binär" besagt, daß die fragliche Gruppe G die entsprechende platonische Gruppe als Normalteiler

[39] Anders gesagt ist R eine Untergruppe von SO(3), ebenso E, während G eine von SO(4) ist.
Threlfall-Seifert diskutieren auch die Frage, ob sich ihr Verfahren auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. Dies ist eine der ersten Stellen der Literatur, wo eine derartige Fragestellung detailliert erörtert wird. Eine Übertragung auf den vierdimensionalen Fall, d.h. konkret: Betrachtung der Diskontinuitätsbereiche sphärischer Bewegungsgruppen der S^4, ist nicht möglich, da diese im Falle fixpunkthaltiger Bewegungsgruppen keine Mannigfaltigkeiten mehr liefern (Threlfall-Seifert 1931, 41). Zusammenfassend heißt es:
„Der Satz [über den Zusammenhang von Fundamentalgruppe und Bewegungsgruppe; K.V.] überträgt sich, wie wir sahen, nicht auf höhere Dimensionen, dagegen wohl auf die gewöhnliche Kugel, den zweidimensionalen sphärischen Raum. Da alle starren Bewegungen erster Art der Kugel fixpunkthaltig sind, so besteht die Fundamentalgruppe des Diskontinuitätsbereiches einer endlichen Bewegungsgruppe der Kugel (einer platonischen Gruppe) aus dem Einheitselement, und da die Fundamentalgruppe in zwei Dimensionen die Mannigfaltigkeit topologisch eindeutig bestimmt, so stimmen die Diskontinuitätsbereiche dieser Gruppen mit der Kugel selbst überein. Das topologische Interesse an den Diskontinuitätsbereichen metrischer Bewegungsgruppen beginnt daher in zwei Dimensionen nicht schon mit der sphärischen Geometrie, sondern erst bei den unendlichen Bewegungsgruppen der euklidischen und hyperbolischen Ebene, die die Ringfläche und die Flächen höheren Geschlechts liefern. Daß es fixpunktlose starre Bewegungen der Hypersphäre gibt, daran liegt das Auftreten topologisch wichtiger Diskontinuitätsbereiche in der sphärischen dreidimensionalen Geometrie." (Threlfall-Seifert 1931, 45)
Die orientierungserhaltenden Bewegungen - von den Autoren als solche erster Art bezeichnet - der S^2 sind gerade die Drehungen um Diametralpunktepaare.

vom Index 2 enthält. Das Auftreten dieses Phänomens hängt natürlich mit der Zweistufigkeit der Beziehung von SO(4) zu den Rechts- und Linksdrehungen zusammen.

R	L	G	Diskontinuitätsbereich	Invarianten
E	E	Z_2	P_3R	(0, 0; 2; -)
Z_p	E	Z_{2p} $(p>2)$ Z_p $(p>2)$	L(p,1) L(p,1)	(0, 0; 2p; -) p gerade (0, 0; p; -) p ungerade
Diedergruppe der Ordnung m' = 2m	E	binäre Diedergruppe	Prismaraum P(m,1)	(0, 0; 2, 2; -) m gerade (0, 0; 4; -) m ungerade
Tetraeder-Gruppe	E	binäre Tetraedergruppe	sphärischer Oktaederraum (Seitenflächen um $\pi/3$ verschrauben)	(0, 0; 3; -)
Oktaeder-Gruppe	E	binäre Oktaedergruppe	abgestumpfter Würfel (Dreiecke um $\pi/3$, Achtecke um $\pi/4$ verschrauben)	(0, 0; 2; -)
Ikosaeder-Gruppe	E	binäre Ikosaedergruppe	sphärischer Dodekaederraum	(0 ,0 ; -; -)

Zu beachten ist, daß bei Seifert-Threlfall die Betti-Zahlen, abweichend von Poincaré und den unmittelbar an diesen anknüpfenden Autoren (Dehn-Heegard, Tietze, Alexander), im modernen Sinne - also um 1 vermindert - verwendet werden. Da sämtliche in der Tabelle auftretenden Mannigfaltigkeiten infolge der Endlichkeit ihrer Fundamentalgruppe orientierbar sind, entfallen die Torsionskoeffizienten der Dimension 2. Der Prismaraum P(2,1) ist nichts anderes als der Quaternionenraum Poincaré's (also dessen drittes Beispiel; vgl. 3.2), allerdings jetzt aus einem „sphärischen" Würfel gewonnen. Die 3-Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe die binäre Oktaedergruppe ist, stimmt, was ihre Homologie anbelangt, mit P_3R überein, ohne zu diesem homöomorph zu sein. Bei der Behandlung der Linsenräume tritt im geraden Fall bei Threlfall-Seifert im Vergleich zu modernen Auffassungen ein Faktor 2 auf, der allerdings unwesentlich ist.

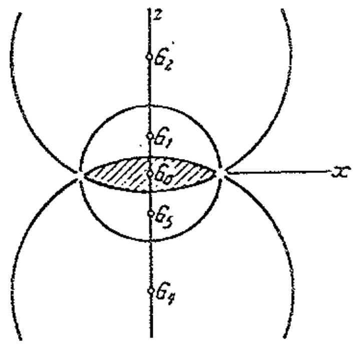
Interessant ist vor allem, wie von den Autoren die geometrische Gestalt der Linsenräume gewonnen wird. Wie man obiger Tabelle entnehmen kann, ergeben sich diese aus dem Diskontinuitätsbereich einer endlich-zyklischen Untergruppe von SO(4). Wir beschränken uns auf gerades p; der Fall p ungerade ist völlig analog.

Ist allgemein ein Element f aus SO(4) gegeben, so läßt sich die zugehörige Matrix bekanntlich auf Blockgestalt bringen, was geometrisch bedeutet, daß die beiden von den entsprechenden Eigenvektoren aufgespannten zweidimensionalen Eigenräume - wir bezeichnen sie mit E_{12} und E_{34} - in sich gedreht werden. Dabei liefern E_{12} und E_{34} eine Zerlegung des R^4 in eine direkte Summe, woraus folgt, daß die entsprechenden Schnittgebilde mit der S^3 (zwei Einheitskreise) ebenfalls in sich gedreht werden. Projiziert man nun die S^3 stereographisch vom Punkt (0,0,0,1) aus in den R^3, so läßt sich dies so einrichten, daß E_{12} in die x-y-Ebene abgebildet wird, während die z-Achse (und damit das Bild von E_{34}) in ihrem orthogonalen Komplement zu liegen kommt. Es ist zweckmäßig, R^3 durch die Einpunktkompaktifizierung wieder zu S^3 (von Threlfall und Seifert dann als konformer Raum K^3 bezeichnet (Threlfall-Seifert 1931, 37)) zu schließen, was die z-Achse zu einer Kreislinie endlicher sphärischer Länge macht. Bei stereographischer Projektion[40] gehen die Drehungen der S^3 (aus SO(4)) in konforme Abbildungen des R^3 über, welche eng mit räumlichen Inversionen zusammenhängen, wie bereits Gorusat festgestellt hatte (vgl. Goursat 1889, 38). Anschaulich lassen sich die projizierten Abbildungen im K_3 als Schraubungen charakterisieren, wobei die z-Achse die Schraubungsachse ist. Bei Rechts- oder Linksdrehungen sind diese Schraubungen besonders einfach, da sie die sphärische Ganghöhe 1 besitzen (will sagen, daß der Winkel, um den die z-Achse gedreht wird, der gleiche (eventuell bis aufs Vorzeichen) ist wie der Drehwinkel der x-y-Ebene). Ist Z das erzeugende Element der zyklischen Gruppe Z_{2p}, so läßt sich dessen Wirkung nach stereographischer Projektion so chrakterisieren, daß diese die z-Achse des K^3 sowie den hierzu senkrechten Einheitskreis der x-y-Ebene jeweils in sich dreht. Durch sukzessive Anwendung von Z ergeben sich auf der z-Achse und auf dem x-y-Einheitskreis sphärisch gleichlange Stücke, wobei die Bilder des Koordinatenursprungs die Strecken auf der z-Achse begrenzen. Bezeichnet man diesen mit G_0 und seine Bilder mit $G_1, G_2, \ldots, G_{2p-1}$, so erhält man nach einer bekannten Konstruktion (vgl. Weber-Seifert 1933, 238) den Diskontinuitätsbereich, der G_0 enthält, aus der Betrachtung der (hier: sphärischen) Symmetrieebenen, welche G_0 in G_1, G_1 in G_2, allgemein G_i in G_{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, 2p-1)$ durch Spiegelung ineinander überführen. Diese Ebenen, die im vorliegenden Fall natürlich Kugelflächen sind, gehen alle durch den x-y-Einheitskreis, weshalb sich der gesuchte Diskontinuitätsbereich letztlich einfach als Durchschnitt der beiden von G_0 am nächsten gelegenen Kugeln berandeten Räumen ergibt. Diese Symmetriekugeln schneiden sich (wie übrigens alle anderen Symmetriekugeln auch) unter dem Winkel π/p. Die beschriebene Situation wurde übrigens schon von E. Goursat explizit bechrieben (vgl. Goursat 1889, 82).

Die scharfe Linsenkante fällt also mit dem Einheitskreis der x-y-Ebene zusammen; sie ist in 2p äquivalente Strecken der sphärischen Länge $\varphi = \pi/p$ geteilt. Die obere und die untere Linsenkalotte gehen durch Schraubung um die z-Achse ineinander über. Die Darstellung der Linsenräume als Heegard-Diagramme, wie sie bei H. Tietze (vgl. 4.2) angedeutet und bei J. W. Alexander (vgl. 5.1.1) verwendet wurde, ergibt sich aus der hier vorgestellten, indem man aus der Linse eine Tubenumgebung der Linsenachse ausbohrt (dieser Zylinder wird zu einem Volltorus geschlossen, wobei entsprechend gedreht wird) und die verbleibenden Teile (die man sich als Keile vorstellen kann, welche von der Unterteilung der scharfen Linsenkante herrühren) zu einem zweiten Volltorus

[40] Dieses Verfahren war u.a. von F. Klein beim Vergleich von SU(2) und SO(3) verwandt worden (vgl. Anm. 36 oben oder Tzanakis 1994, 30).

zusammenfügt; vgl. Stillwell 1993, 256f oder Rolfsen 1976, 237f. Die (topologische!) Äquivalenz der Linsenauffassung zu Tietzes ursprünglicher Darstellung liegt auf der Hand.



Auf den letzten Seiten ihrer Arbeit gehen Threlfall und Seifert noch auf den Dodekaederraum ein (vgl. 3.4), wobei sie erstmal dessen geometrische Darstellung als Quotientenraum des Dodekaeders explizit angeben. Diese ergibt sich - den Linsenräumen ähnlich - aus der Betrachtung der zugehörigen sphärischen Bewegungsgruppe. Letztere entspricht der Gruppenpaarung der Ikosaedergruppe mit der trivialen Gruppe. In die Paargruppe bildet sich die binäre Ikosaedergruppe, die geometrisch betrachtet als Gruppe von Rechtsdrehungen der S^3 aufgefaßt werden kann, zweistufig ab. Die Bilder der Rechtsdrehungen der Ordnung 10 der S^3 bei stereographischer Projektion in den K^3 sind Schraubungen der Ordnung 10. Die sechs zugehörigen Schraubungsachsen gehen durch den Ursprung und liegen zueinander wie die sechs Drehachsen des Dokaeders von der Ordnung fünf. Der Diskontinuitätsbereich des Ursprungs ergibt sich wieder durch Schnitt von Symmetriekugeln. Diesesmal sind es deren zwölf. Man erhält also ein sphärisches Dodekaeder (Threlfall-Seifert 1933, 64f), dessen Seitenflächen um $\pi/5$ verschraubt zu identifizieren sind. Die S^3 wird in 120 solcher Dodekaeder zerlegt; man erhält damit eines der sechs vierdimensionalen regulären Polytope, nämlich dasjenige mit dem Schläfli-Symbol (5,3,3).[41]

Anschließend an die Bestimmung der Invarianten des Dodekaederraumes wird die Frage andiskutiert, ob dieser, der Dehnsche Kleeblattschlingenraum und Poincaré's Beispiel homöomorph seien - eine Frage, die erst 1933 abschließend (in mehreren Teilschritten) beantwortet werden konnte (vgl. unten Anmerkung 49). Im übrigen besitzt der sphärische Dodekaederraum auch ein hyperbolisches Gegenstück, auf das wir später noch kurz zu sprechen kommen werden.

[41] Die Erforschung der Analoga der platonischen Körper im vier- und höherdimensionalen Bereich war in den 1870er Jahren ein wichtiges Anliegen (vgl. Schlegel 1886). Auch E. Goursat äußerte sich zu diesem Thema (vgl. Goursat 1889, 93-102).

Fragt man sich nach den Mitteln, mit denen die Autoren Threlfall und Seifert arbeiten, so muß man in erster Linie auf die zwei- und dreidimensionale sphärische Geometrie verweisen sowie auf die Kenntnis der sphärischen Bewegungen im Falle der S^3. Eine wichtige Rolle spielten aber auch die Matrizen- und die Gruppentheorie. Auch hier also - ähnlich wie bei der Algebraisierung (vgl. 6) - eine zunehmende Verzahnung mit anderen Teilgebieten der reinen Mathematik (vgl. 8)! In gewisser Hinsicht leisteten Trelfall und Seifert selbst eine Algebraisierung, insofern sie nämlich die Aufzählung bestimmter Mannigfaltigkeiten auf diejenige von Untergruppen zurückführten.

Die Arbeit von Threlfall und Seifert behandelt ersichtlich nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Spektrum aller möglichen Bewegungsgruppen (nämlich nur sphärische und hier nur Drehgruppen [in der Terminologie der Autoren]). Eine ausgedehntere Untersuchung wurde 1931 angekündigt: „Die übrigen Gruppen werden einer Fortsetzung dieser Arbeit vorbehalten." (Threlfall-Seifert 1931, 2).

Diese erschien tatsächlich zwei Jahre später unter dem Titel „Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes (Schluß)" (Threlfall-Seifert 1933). Die ursprünglich vorgesehene Konzeption wurde jedoch in Anbetracht der weiter unten zu besprechenden Theorie der (Seifert-)gefaserten Räume, die jetzt zur Verfügung stand (Seifert 1932), geändert:

> „Die Ermittlung der topologischen Eigenschaften der Diskontinuitätsbereiche der Drehgruppen wurde durch die einfache Gestalt des normalen Diskontinuitätsbereiches dieser Gruppen ermöglicht. Die normalen Diskontinuitätsbereiche der übrigen Bewegungsgruppen sind zum Teil verwickelte sphärische Polyeder, und es wäre eine langweilige Mühe, sie einzeln zu beschreiben. Ihre vollständige topologische Untersuchung wäre daher unterblieben, wenn nicht die Ergebnisse über gefaserte Räume das Mittel an die Hand gäben, die Diskontinuitätsbereiche mit einem Schlag zu erledigen."
>
> (Threlfall-Seifert 1933, 543f)

Dieses Mittel ist der Satz, daß die Diskontinuitätsbereiche endlicher fixpunktloser sphärischer Bewegungsgruppen mit den (Seifert-)gefaserten Räumen endlicher Fundamentalgruppe übereinstimmen.[42] Da die Seifertsche Theorie über letztere einen vollständigen Überblick lieferte, verlor die Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche mit herkömmlichen Mitteln naturgemäß an Interesse.

In der Arbeit von 1933 werden drei Themenkreise angesprochen: Linsen - und Prismaräume, fixpunktlose sphärische Bewegungsgruppen, fixpunkthaltige sphärische Bewegungsgruppen. Entsprachen 1931 die Linsenräume noch Diskontinuitätsbereichen von Drehgruppen, also von solchen Gruppen, bei denen der eine Paarungsfaktor trivial ist, so werden jetzt allgemeinere Paarungen betrachtet mit zwei zyklischen Gruppen als Paarungsfaktoren. Das entspricht dem Übergang von L(p,1) zu L(p,q). Analog werden die Prismaräume von P(p,1) zu P(p,q) generalisiert. Die Linsenräume werden eingehender diskutiert, wobei das Homöomorphieproblem angesprochen wird (vgl. 5.3) und die Zerlegung in zwei Vollringe - die Heegard-Zerlegung also, wie sie schon von J. W. Alexander verwendet worden war (vgl. 5.1.1) - behandelt wird.[43] Ähnliche Betrachtungen werden auch für die Prismaräume angestellt.

---

[42] Fixpunkthaltige Begungsgruppen sind so nicht zu behandlen.

[43] Das hier dargebotene Material hat wie manches andere Eingang gefunden in das „Lehrbuch der Topologie" (Seifert-Threlfall 1934, 215f). Überhaupt fällt sowohl bei den gemeinsamen Arbeiten von Threlfall und Seifert als auch bei Seifert selbst eine fast lehrbuchartige (gut verständliche!) Darstellungsweise auf, die ihre Originalarbeiten oft geradezu als Vorarbeiten für das Lehrbuch erscheinen läßt.

Im zweiten Abschnitt wird dann ein Überblick gegeben zu allen orientierungserhaltenden endlichen fixpunktlosen sphärischen Bewegungsgruppen sowie der bereits genannte Hauptsatz formuliert und bewiesen.[44] Schließlich wird im dritten Teil gezeigt, daß man topologisch betrachtet durch fixpunkthaltige sphärische Bewegungsgruppen keine neuen Diskontinuitätsbereiche bekommt.

Versucht man die beiden hier betrachteten Arbeiten von Threlfall-Seifert zusammenfassend[45] zu würdigen, so sind sie sicher einerseits als Vorarbeiten zum „Lehrbuch" hervorzuheben, andererseits aber auch als Vorbereitung zur Theorie der Seifert-Faserungen. Der Ansatz selbst wurde erst in neuester Zeit (vgl. 7) durch W. Thurston u. a. weitergeführt[46], vermutlich wohl, weil die Schwierigkeiten bei der Behandlung des hyperbolischen Falles[47] zu groß waren. Zudem stellte sich bald heraus (siehe unten), daß man nicht alle geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten durch Diskontinuitätsbereiche bekommen kann. Darüber hin-

---

[44] Aus dem Hauptsatz folgt unmittelbar die folgende bemerkenswerte Aussage:
„Der Diskontinuitätsbereich einer jeden fixpunktlosen sphärischen Bewegungsgruppe kann erhalten werden, indem man die drei Randringflächen des topologischen Produktes aus der dreifach gelochten Kugelfläche und der Kreislinie mit Vollringen, sogenannten Verschlußringen, in geeigneter Weise schließt." (Threlfall-Seifert 1933, 568)
Betrachtet man im übrigen den Beweis des Hauptsatzes genauer, so wird die Vermutung nahegelegt, daß Seifert in der Auseinandersetzung mit den Diskontinuitätsbereichen sphärischer Bewegungen auf die Anfänge seiner Theorie gefaserter Räume gestoßen ist. Dies unter anderem deshalb, weil die Bahnkurven einer zyklischen Rechtsdrehgruppe eine gewissermaßen kanonische (Seifert-) Faserung liefern (Threlfall-Seifert 1933, 569).

[45] Eine Übersicht zu den wichtigsten Resultate der Theorie der Diskontinuitätsbereiche gab W. Threlfall unter dem Titel „Dreidimensionale Raumformen" beim Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich 1932; vgl. Threlfall 1932a, 198f.

[46] Als Vorläufer verweisen Threlfall und Seifert und in einer Art Nachtrag (Threlfall-Seifert 1933, 585f) auf Hopf 1926.

[47] Das analoge Problem für euklidische Raumformen - also für Diskontinuitätsbereiche von eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppen des R^3 [diese Bedingung ist jetzt notwendig, da anders als im sphärischen Fall Endlichkeit nicht mehr gegeben ist]- wurde nach Angaben von Weber und Seifert (Weber-Seifert 1933, 240 Anm. 4) von Steinitz gelöst in dessen Enzyklopädieartikel über Polyeder und Raumteilungen (Steinitz 1916, 129); wiederaufgegriffen wurde es dann von Nowacki 1934 und von Hantzsche-Wendt 1935 (zu den letzteren vgl. unten im Text).
Im übrigen heißt es bei Threlfall 1932a, 199 lapidar: „Nicht so vollständig sind bisher die hyperbolischen Diskontinuitätsbereiche untersucht worden."
Genaueres erfahren wir ein Jahr später bei C. Weber und H. Seifert, wo es heißt:
„Während das erste Konstruktionsverfahren [Randidentifikationen bei Polyedern ohne Verwendung von Bewegungsgruppen; K.V.] bisher nur zur Auffindung einzelner Raumformen gedient hat, lassen sich nach dem zweiten Verfahren [welches umgekehrt von den Bewegungsgruppen ausgeht; K.V.] alle sphärischen und euklidischen Raumformen ermitteln, weil man alle eigentlich diskontiuierlichen Gruppen des sphärischen und euklidischen Raumes kennt. Von den eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppen des hyperbolischen Raumes sind nur einzelne bekannt, z.B. die Picardsche Gruppe."
(Weber-Seifert 1933, 240)
Man bemerkt in diesem Zitat auch das deutliche Bestreben, von den mehr oder minder empirischen Erzeugungsweisen für 3-Mannigfaltigkeiten, sie sie beispielsweise Poincaré verwendet hatte, wegzukommen zu einem systematischen Ansatz. Dies ist interessant im Hinblick auf die disziplinäre Entwicklung der Topologie (vgl. 8).

aus ist zu bemerken, daß der Wert der Ergebnisse von Threlfall und Seifert in gewisser Weise von der Poincaré-Vermutung abhängt. Wäre diese nämlich zutreffend, so gäbe es nur eine geschlossene orientierbare zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit, die als universelle Überlagerung auftreten könnte - die Dreisphäre nämlich. Dies vorausgesetzt würden die Resultate über Diskontinuitätsbereiche sphärischer Bewegungsgruppen gewisse Rückschlüsse auf die möglichen Unterlagerungen liefern (vgl. Threlfall-Seifert 1933, 567). Inwieweit diese vom topologischen Standpunkt vollständig ist, ist dann weiter zu prüfen.[48]

Die dreidimensionalen euklidischen Raumformen, also jene geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten, welche sich als homogene Räume fixpunktloser eigentlich diskontinuierlich operierender Untergruppen der Bewegungsgruppen des gewöhnlichen euklidischen Raumes ergeben, wurden im Jahre 1935 von den Threlfall-Schülern W. Hantzsche und H. Wendt erschöpfend behandelt (bis auf affine Äquivalenz; vgl. Ratcliffe 1994, 340): Es gibt zehn derartige Mannigfaltigkeiten, darunter vier nicht-orientierbare (im Unterschied zum sphärischen Fall sind hier die betrachteten Fundamentalgruppen in der Regel nicht endlich!). Die erste Betti-Zahl sowie die Torsionskoeffizienten der Dimension 1 lauten (vgl. Hantzsche/Wendt 1935, 610):

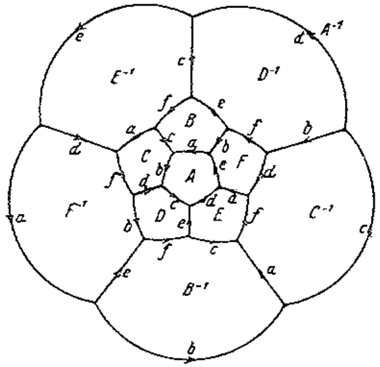
a) orientierbarer Fall: (3;-) (das ist der 3-Torus), (1;2,2), (1;3), (1;2), (1;-), (0;4,4);
b) nicht-orientierbarer Fall: (2;2), (2;-), (1;2,2), (1;4)

Im Jahr 1933 erschien eine weitere Arbeit von H. Seifert, diesmal zusammen mit dem Dresdner Werkstoffkundler Constantin Weber. Diese trug den Titel „Die beiden Dodekaederräume" und behandelte hauptsächlich den sphärischen Dodekaederraum sowie die Frage nach der Homöomorphie desselben mit dem Dehnschen Kleeblattschlingenraum und dem Poincaréschen Beispiel.[49] Daneben trat in ihr auch erstmals der hyperbolische Dode-

[48] Es ist ja a priori nicht klar, ob die S^3 nicht noch andere Decktransformationen zuläßt als die von Threlfall und Seifert betrachteten sphärischen Bewegungen. Der Zusammenhang der Poincaré-Vermutung mit der universellen Überlagerung wurde schon von Veblen 1931, 155 herausgestellt. Im übrigen wies J. W. Alexander 1932 in seinem Züricher Vortrag darauf hin, daß neben den aufgrund zweidimensionaler Resultate zu erwartenden einfach-zusammenhängenden überlagernden Räume auch noch andere (ohne zweidimensionales Analogon) auftreten können; vgl. 5.1.2.

[49] Weil dieses Problem mehrfach an verschiedenen Stellen angesprochen wurde, sei hier noch einmal eine Übersicht gegeben. Die folgenden 3-Mannigfaltigkeiten standen zur Diskussion:
1. Poincaré's Beispiel aus dem fünften Komplement, definiert durch ein Heegard-Diagramm auf der Brezelfläche (Poincaré VI, 493f - vgl. 3.4);
2. Dehns Kleeblattschlingenraum, definiert durch Dehn-Chirurgie auf der gewöhnlichen Kleeblattschlinge (Dehn 1910, 153f - vgl. 4.3);
3. sphärischer Dodekaederraum, definiert als Diskontinuitätsbereich einer Gruppe sphärischer Bewegungen (Threlfall-Seifert 1931 - siehe oben) und darum darstellbar als Dodekaeder mit nach Verschraubung um $\pi/5$ identifizierten Seitenflächen
(Hinzu kommt noch die von M. Kreines gegebene Darstellung vermöge einer Polyederidentifikation [vgl. 3.4], die allerdings von H. Seifert und W. Threlfall nicht diskutiert wird, und die ebenfalls nicht in Betracht gezogene Darstellung als verzweigte Überlagerung von Knoten [vgl. Seifert 1932, 222].)
In allen drei Fällen handelt es sich um Homologiesphären, deren Fundamentalgruppen der binären Ikosaedergruppe isomorph sind. Die Lösung des vorliegenden speziellen Homöomorphieproblems beruht auf dem Satz, daß es zu vorgegebener endlicher Fundamentalgruppe (bis auf Homöomorphie) höchstens eine Seifert-gefaserte Homologiesphäre geben kann (Seifert 1932, 204 [Satz 10] und 209 [Satz 12]). Zu zeigen ist also noch, daß 1. - 3. faserbar im Sinne Seiferts sind. Das geschieht an folgenden Stellen:

kaederraum auf. Dieser entsteht aus einem Dodekaeder des hyperbolischen Raumes mit dem Kantenwinkel $2\pi/5$, indem man gegenüberliegende Seitenflächen um $(2/10)*2\pi = 2\pi/5$ verschraubt miteinander identifiziert. Man beachte, daß man diesen Kantenwinkel euklidisch nicht realisieren kann. Andererseits ist er aber unerläßlich, damit die Identifikation eine Mannigfaltigkeit mit hyperbolischer Struktur liefert. Deshalb muß man den hyperbolischen Raum bemühen. Das Netz des hyperbolischen Dodekaederraumes sieht so aus:



(Man vergleiche auch die Darstellung in Weeks 1985, 221-226.) Während der sphärische Dodekaederraum fünf Ecken aufweist, besitzt sein hyperbolisches Pendant nur eine.

Analog seinem sphärischen Gegenstück liefert auch der hyperbolische Dodekaederraum eine Raumteilung diesmal natürlich des hyperbolischen Raumes (vgl. Poincaré's Ausgangspunkt in 3.1). Dieser Dodekaederraum besitzt folgende Invarianten (0, 0; 5, 5, 5; -) und ist im Sinne Seiferts nicht faserbar (vgl. Weber-Seifert 1933, 249-253). Während der hyperbolische Dodekaederraum seinerzeit nur wenig Beachtung fand, spielen 3-Mannigfaltigkeiten mit einer hyperbolischen Struktur heute eine zentrale Rolle in der dreidimensionalen Topologie (vgl. Meyerhoff 1992, insbesondere S. 48, wo Seifert und Weber erwähnt werden, sowie Weeks 1985, 221 - 226, Ratcliffe 1994 und Kapitel 7 dieser Arbeit).

Das erste Beispiel einer hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit überhaupt findet sich bei H. Gieseking (1912); es ist heute als Gieseking-Mannigfaltigkeit bekannt (Meyerhoff 1992, 51), die aus einem dreifach-asymptotischen hyperbolischen 3-Simplex durch geeignete Seitenflächenidentifikationen entsteht. Das Giesekingsche Beispiel ist nicht-orientierbar, nicht-kompakt, weist aber dennoch ein endliches Volumen auf (vgl. Milnor 1982, 13). Da sein Ursprung wenig bekannt ist, sei an dieser Stelle H. Gieseking zitiert:

> „Es sei nun als Diskontinuitätsbereich gegeben, ein reguläres hyperbolisches Tetraeder, dessen Ecken auf dem absoluten Gebilde liegen.*) Da der Kantenwinkel eines solchen Tetraeders den Wert $2\pi/6$ besitzt, so stoßen in dem Zellensystem in jeder Kante sechs derartige Tetraeder zusammen. ... Wir bezeichnen die Ecken dieses Tetraeders mit A, B, C, D, und setzen nun folgende Zuordnung für die Seitenflächen fest:

3. ist faserbar als Diskontinuitätsbereich einer sphärischen Bewegungsgruppe (Threlfall-Seifert 1933, 568); 2. ist faserbar (Seifert 1932, 212) und 1. ist faserbar (Weber-Seifert 1933, 245-248).

ABC ≡ ACD

ABD ≡ BCD

wobei durch diese Schreibweise auch noch angegeben sein soll, in welcher Weise die Ränder der Flächen einander entsprechen. Es folgen also hieraus sofort die Zuordnungen für die Kanten AB ≡ AC ≡ AD ≡ BD ≡ CD ≡ BC und Ecken A ≡ B ≡ C ≡ D, d. h. beim Zusammenheften der entsprechenden Seitenflächen ... ABC mit ... ACD und ... ABD mit ... BCD kommen sämtliche Ecken und Kanten des Tetraeders zum Zusammenfallen."

(Gieseking 1912, 159f)

In der Anmerkung * heißt es: „M. Dehn hat mir dieses Beispiel zur Behandlung empfohlen." Gieseking konstruierte sein Beispiel weniger aus Interesse an der Mannigfaltigkeit selbst, als vielmehr um die Gruppe $\langle a,b \mid a^2b^2a^{-1}b^{-1} = 1\rangle$ geometrisch als Fundamentalgruppe (nämlich eben dieser Mannigfaltigkeit) zu realisieren. Die weiteren Untersuchungen Giesekings galten denn auch dieser Gruppe, wobei er wesentlich gewisse Kenntnisse der Bewegungen des hyperbolischen Raumes (nach Klein - Fricke 1897) einsetzte. Man beachte ansonsten, daß Giesekings Konstruktion ganz in Poincaréschem Stil verläuft (vgl. 3.2).

Weiteres Material zum Thema hyperbolische Raumformen enthält Löbell 1931, eine Arbeit, die sich weitgehend im Rahmen der räumlichen hyperbolischen Geometrie bewegt, ohne auf topologische Aspekte einzugehen; Verallgemeinerungen der Dodekaederräume finden sich bei Friedge 1940. Zur Anknüpfung dieser Entwicklungslinie an klassische (differential-) geometrische Probleme, insbesondere an das von F. Klein, W. Clifford und W. Killing bearbeitete Raumformenproblem, vergleiche man Milnor 1982, 12f. sowie Kapitel 2.5 oben. Zu H. Gieseking, einem Schüler von M. Dehn, vergleiche man auch Chandler-Magnus 1982, 26f und 39.

Im engen Zusammenhang mit den bereits geschilderten Untersuchungen standen zwei wichtige Arbeiten, die H. Seifert als Alleinautor veröffentlichte: „Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume" (Seifert 1931) und „Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume" (Seifert 1932). Die erste Abhandlung war Seiferts Dissertation in Dresden; sie wurde der Sächsischen Akademie am 23. Februar 1931 von G. Kowalewski vorgelegt. Die zweite Abhandlung legte Seifert als Dissertation in Leipzig bei B.L. van der Waerden vor.

Bekannt geblieben ist die erstgenannte Arbeit in erster Linie wegen des darin erstmals explizit (allerdings kombinatorisch) formulierten und bewiesenen Satzes[50] über die Fundamentalgruppe eines Raumes, der in zwei Teilräume (verläßt man den kombinatorischen Standpunkt, muß man diese als offen voraussetzen) mit nichtleerem Durchschnitt D zerlegt werden kann.[51]

[50] Wie wir bereits in 3.4 gesehen haben, benutzte Poincaré in einer speziellen Situation bereits diesen Zusammenhang, ohne allerdings allgemeinere Ausführungen zu machen. Ähnliches gilt auch für M. Dehn und andere.

[51] Dieser Satz wird heute in der englischsprachigen Literatur meist als Satz von van Kampen bezeichnet; seltener (z.B. Massey 1989) als Satz von Seifert und van Kampen. Letztere Bezeichnung ist historisch gesehen sicher angebrachter, da H. Seifert dieses Theorem erstmals (für simpliziale Komplexe) aufstellte und bewies, während E. van Kampen es dann im Rahmen eines Beweises - ohne allerdings das Theorem explizit zu formulieren - verallgemeinerte (Kampen 1933 - vgl. Henn-Puppe 1990, 684). Dies wird leider bei

„Satz I. K ist eine Quotientengruppe des freien Produktes K' · K" von K' und K". Man erhält K aus K' · K", wenn man je zwei Elemente von K' und K", die denselben Elementen von D entsprechen, zusammenfallen läßt."

(Seifert 1931, 33f)

Dabei bedeuten K, K' und K" die Fundamentalgruppen der entsprechenden Komplexe (k, k', k" mit $k = k' \cup k''$) und D die Fundamentalgruppe des Durchschnittes $k' \cap k''$. Formulierung und Beweis bewegen sich ganz im kombinatorischen Kontext, insbesondere wird die Homotopierelation durch die der elementaren Deformierbarkeit ersetzt.[52]

Der Satz von Seifert-van Kampen ist bei Seifert keineswegs Selbstzweck, sondern wird gezielt zur Untersuchung von 3-Mannigfaltigkeiten eingesetzt. Diese bilden das Hauptthema der Seifertschen Arbeit, wobei auch hier (wie schon bei Threlfall-Seifert 1931) das Klassifikationsproblem im Hintergrund steht:

„Solange das vollständige Invariantensystem der dreidimensionalen geschlossenen Räume gegenüber stetigen Abbildungen aussteht, ist die Konstruktion einzelner solcher Räume gerechtfertigt, die die fehlende vollständige Aufzählung durch eine Beispielsammlung ersetzt."

(Seifert 1931, 26)[53]

Zu Beginn seiner Abhandlung diskutiert Seifert verschiedene „Konstruktionsprinzipe" für 3-Mannigfaltigkeiten (Seifert 1931, 27f): Identifikation im Rand eines berandeten Raumstückes bezüglich einer involutorischen Selbstabbildung des ersteren, Heegard-Zerlegung,

Dieudonné 1989, 302-304 nicht deutlich, wenn er sagt: „Seifert proved an identical statement at the same time..." (Dieudonné 1989, 304).

[52] Im „Lehrbuch" wird dann dieser kombinatorische Standpunkt weitgehend zugunsten des kontinuumstheoretischen aufgegeben (Seifert-Threlfall 1934, 7. Kapitel); der Satz von Seifert-van Kampen wird allerdings auch hier nur für simpliziale Komplexe formuliert und bewiesen (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 177-179).

[53] Weiter weist Seifert auf den zweidimensionalen Fall hin, wo die Theorie der Diskontinuitätsbereiche zu einer Klassifikation (durch Euler-Charakteristik und Orientierbarkeitscharakter) der geschlossenen Flächen führe, während es unsicher sei, daß die analoge Theorie im Dreidimensionalen tatsächlich alle geschlossene Räume liefere (Seifert 1931, 26). Dieser Verdacht wurde dann 1932 von Threlfall in seinem Züricher Vortrag bestätigt:
„Nun tritt jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich einer diskreten fixpunktlosen metrischen Bewegungsgruppe der Kugelfläche, der euklidischen oder der hyperbolischen Ebene auf. Entsprechendes gilt in drei Dimensionen nicht, vielmehr gibt es dreidimensionale geschlossene Räume, die sich weder mit einer sphärischen noch mit einer euklidischen oder hyperbolischen Metrik ausstatten lassen, z. B. das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche. Dagegen liefern die Diskontinuitätsbereiche metrischer Bewegungsgruppen ein wichtiges Beispielmaterial dreidimensionaler Räume." (Threlfall 1932a, 198)
Damit war also die ursprünglich wohl vorhandene Hoffnung, über die Diskontinuitätsbereiche zu einer vollständigen Klassifikation zu gelangen, zunichte gemacht. Der dreidimensionale Fall erwies sich als ungeahnt reichhaltig und vielgestaltig. Die Tatsache, daß $S^1 \times S^2$ keine gewöhnliche Geometrie (sphärisch, hyperbolisch, euklidisch) zuläßt, sieht man sofort durch Übergang zur universellen Überlagerung. Diese ist offenkundig $R \times S^2$, was topologisch weder S^3 (damit scheidet die sphärische Geometrie aus) noch R^3 (weshalb die beiden anderen klassischen Geometrien ausgeschlossen sind) homöomorph ist (dieses Beispiel wurde auch von J. W. Alexander in Zürich zitiert - vgl. 5.1.2). Es war gerade eine wesentliche Leistung Thurstons, die klassische Liste an möglichen Geometrien ergänzt zu haben (vgl. Reitberger 1984, 223f), wenn auch ein abschließender Beweis für die Vollständigkeit der Liste von Thurston noch aussteht. Zu allgemeineren Gesichtspunkten des Verhältniss vgl. manman auch Kapitel 8 unten.

Dehn-Chirurgie, Bildung zusammenhängender Summen[54] aber auch Schalenräume[55] und Produktbildung., Es werden dann noch einige weitere Möglichkeiten, z.B. Überlagerungen, angedeutet; eine systematische Untersuchung unterbleibt aber in allen genannten Fällen.

Die weiteren Ausführungen Seiferts sind hauptsächlich der Konstruktion von Klassen von Räumen - i. w. die Linsen- und Prismaräume - vorbehalten, welche durch eine Verallgemeinerung des von Heegard angegebenen Verfahrens gewonnen werden. Hierzu wird von einem Volltorus - das heißt hier von einem Torus mit Angabe des Meridians, welcher im Volltorus nullhomolog sein soll - ausgegangen. Aus diesem wird ein weiterer Volltorus ausgebohrt, was zu einem Schalenring führt. Stillschweigend unterstellt wird bei Seifert immer, daß die entsprechenden Mannigfaltigkeiten in Standardweise eingebettet sind. Um aus dem Schalenring eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit zu bekommen, ist zweierlei erforderlich:

> „1. Alle möglichen berandeten Räume Σ konstruieren, die aus dem Schalenring $\overline{\Sigma}$ durch involutorische Selbstabbildung seiner einen Randfläche R entstehen.
>
> 2. Σ auf alle möglichen Weisen durch einen Vollring P zu einem geschlossenen Raume schließen."
>
> (Seifert 1931, 39)

Anders gesagt bedeutet 1., alle involutorischen Selbstabbildungen des Torus zu ermitteln, und 2., auf die Randringfläche alle im Verschlußvolltorus (nicht aber in der Ringfläche) null-homotopen Kurven einzutragen, entlang deren dann durch Anheften einer Zweizelle

---

[54] Sind zwei 3-Mannigfaltigkeiten gegeben, so nehme man aus beiden im Innern jeweils eine Vollkugel heraus und verhefte dann beide längs der entstandenen Ränder. Die Bildung zusammenhängender Summen spielt auch heute noch eine wichtige Rolle in der dreidimensionalen Topologie (vgl. Milnor 1962a und Hempel 1976, 24f). Soweit ich sehe, wird sie hier erstmals explizit als Konstruktionsprinzip verwendet; implizit eingesetzt wurde die Summenbildung aber schon von H. Kneser in Kneser 1929. Dort findet sich die sogenannte Kneser-Vermutung, welche in moderner Ausdrucksweise besagt, daß das Zerfallen der Fundamentalgruppe einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit stets durch deren Zerfallen in eine zusammenhängende Summe induziert wird (Hempel 1976, 66-68). Der von Kneser gegebene Beweis für diesen Satz beruhte auf dem Dehnschen Lemma und stellte sich somit bis zum Beweis des letzteren als gegenstandslos heraus. Vgl. aber 7.
Die Summenbildung wird bei Seifert-Threlfall 1934, 218f kurz erwähnt als Aufgabe; sie soll weiterhin dazu verwendet werden, zu zeigen, daß man eine „dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit beliebig vorgegebener erster Homologiegruppe" (Seifert-Threlfall 1934, 219 Aufgabe 4) konstruieren kann. Sie kann auch zum Beweis der Tatsache, daß man jede endlich präsentierbare Gruppe als Fundamentalgruppe einer 4-Mannigfaltigkeit realisieren kann, herangezogen werden (Massey 1989, 144 - vgl. auch Seifert-Threlfall 1934, 180 Aufgaben 3 und 4). Bereits 1931 gab Seifert als Anwendung seines berühmten Satzes an: „Die Fundamentalgruppe der Summe zweier Räume ist das freie Produkt der Fundamentalgruppen der Summanden." (Seifert 1931, 36)
Hier herrscht gleichsam eine prästabilierte Harmonie, die sich kategorientheoretisch fassen läßt.

[55] „Man legt zwei gleichartige geschlossene Flächen in den dreidimensionalen Raum, so daß sie eine dünne Schale einschließen. Indem man die innere und die äußere Oberfläche aufeinander bezieht, entsteht ein geschlossener dreidimensionaler Raum." (Seifert 1931, 28f). Modern gesprochen läuft das also darauf hinaus, für eine geschlossene Fläche F das Produkt $F \times [0,1]$ zu bilden und $(x, 0)$ mit $(f(x),1)$ zu identifizieren, wobei $f: F \to F$ topologisch ist. Das von Poincaré betrachtete 6. Beispiel (vgl. 3.2) ist, wie Seifert bemerkt, ein Schalenraum, der von Tori berandet wird. Andere Schalenräume ergeben sich aus der Hohlkugel (vgl. Seifert 1931, 48f), nämlich $S^1 \times S^2$ und das dreidimensionale Analogon der Kleinschen Flasche (ersteres ist der Linsenraum L(0,1); letzteres Poincaré's viertes Beispiel [der „verdrehte Torus"]). Allgemein führen die Schalenräume zu Faserbündel über S^1 mit Faser F (vgl. Hempel 1976, 121-125).

geschlossen wird. Beides sind zweidimensionale Aufgaben. Die Lösung der ersten Aufgabe, die durch konkrete Untersuchung der involutorischen Selbstabbildungen des Torus gefunden wird (Seifert 1931, 39-43), lautet:

> „Satz 2: Identifiziert man auf einem von den Ringflächen R und R_Σ berandeten Schalenring $\overline{\Sigma}$ die Flächenstücke, die vermöge einer stetigen involutorischen Selbstabbildung von R einander zugeordnet sind, so können drei von R_Σ berandete Räume entstehen: Σ_1 (Vollring), Σ_2 (Hohlzylinder mit identifizierten Randflächen), Σ_3 (topologisches Produkt aus Kreis und Möbiusband). Man erhält 1. Σ_1, 2. Σ_2, 3. Σ_3, je nach dem die Selbstabbildung 1. fixpunkthaltig, 2. fixpunktlos von zweiter Art, 3. fixpunktlos von erster Art ist." (Seifert 1931, 43f) [56]

Der Rand des Raumes $\overline{\Sigma}$ ist ein Torus R_Σ, der durch Einkleben eines Volltorus P geschlossen werden kann. Hierzu ist es hinreichend festzulegen, auf welche doppeltpunktfreie nicht-nullhomologe Kurve m_Σ der Meridian m_P von P abzubilden ist. Eine derartige Kurve m_Σ ist aber - aufgefaßt als 1-Zykel - auf R_Σ stets homolog e^pf^q, wobei e und f Erzeugende von $H_1(R_\Sigma)$ sein sollen und p sowie q teilerfremde positive ganze Zahlen. Folglich sind die durch Schließung entstehenden Mannigfaltigkeiten durch die Zahlen p und q charakterisiert. Es ergeben sich somit drei Möglichkeiten je nachdem, ob man von Σ_1, Σ_2 oder Σ_3 ausgeht: $(\Sigma_1;p,q)$ was nichts anderes als die Linsenräume L(p,q) ist[57]; $(\Sigma_2;p,q)$ was zu den Prismaräumen führt, sowie $(\Sigma_3;p,q)$ was - wie sich herausstellt - nur die beiden echt unterschiedlichen Räume $(\Sigma_3;\ 0,1)$ - Produkt Kreis mit projektiver Ebene - und $(\Sigma_3;\ 1,0)$ - Analogon der Kleinschen Flasche - liefert (Seifert 1931, 48f).

Im weiteren werden die Räume $(\Sigma_1;p,q)$ und $(\Sigma_2;p,q)$ untersucht und u.a. Homöomorphiebedingungen für die ersteren hergeleitet (vgl. 5.3), wobei die Fundamentalgruppe eine zentrale Rolle spielt. Eine analoge Betrachtung liefert im Falle der Prismaräume folgendes Resultat (vgl. Seifert 1931, 47):

$\pi_1(\Sigma_1;p,q) \cong \langle A,C \mid A^pC^{2q} = ACAC^{-1} = 1\rangle$

$\pi_1(\Sigma_2;1,0) \cong Z$ (es ist $(\Sigma_2;1,0) \cong S^1 \times S^2$)

$\pi_1(\Sigma_2;0,1) \cong Z*Z$ [* ist das freie Produkt] (es ist $(\Sigma_2;0,1) \cong P_3R \# P_3R$)

Durch Betrachtung der Faktorgruppe von $\pi_1(\Sigma_2;p,q)$ nach dem Zentrum[58] weist Seifert dann nach, daß die Räume $(\Sigma_2;p,q)$ für $p \neq 0$, $q \neq 0$ bei unterschiedlicher Wahl von (p,q) sämtlich nicht-homöomorph sind (Seifert 1931, 47). Man bemerkt hier einen mittlerweile selbstverständlich gewordenen Einsatz von gruppentheoretischen Hilfsmitteln.

Schließlich untersucht Seifert die geometrische Gestalt der Prismaräume, wozu er diese - ähnlich wie das schon bei Threlfall-Seifert 1931 geschah - als Diskontinuitätsbereiche sphärischer Bewegungen darstellt. Dabei geht er aber über die genannte Arbeit insofern hinaus, als er den Prismaräumen Gruppenpaarungen einer Dieder- und einer zyklischen Gruppe zuordnet, während 1931 der zweite Faktor stets trivial war (das heißt, daß nur Räume $(\Sigma_2;p,1)$ betrachtet wurden). Diese allgemeineren Einsichten flossen dann in Threlfall-Seifert 1933 ein.

Als Diskontinuitätsbereich ergibt sich ein 2pq-seitiges sphärisches Prisma, das von gleichgroßen sphärischen Quadraten begrenzt wird und dessen Boden- und Deckfläche regelmäßige sphärische 2pq-Ecke sind. Deckfläche und Bodenfläche sind miteinander zu

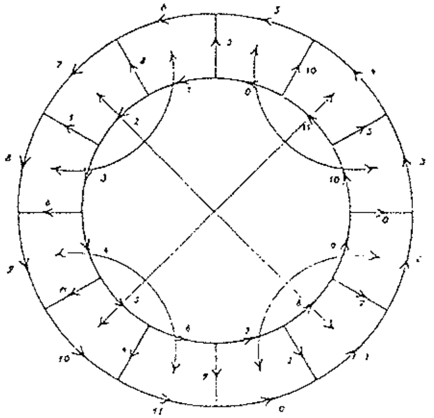
---

[56] Von erster (zweiter) Art bedeutet orientierungserhaltend (- umkehrend).

[57] Das liegt daran, daß $(\Sigma_1;\ p,q)$ durch Verheften zweier Volltori entlang der Oberfläche entsteht; es handelt sich also um eine Heegard-Zerlegung vom Geschlecht 1, folglich um Linsenräume.

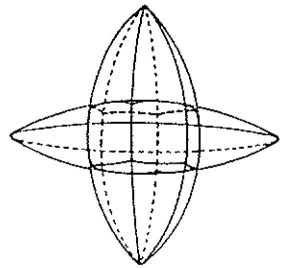
[58] Es ergibt sich die Diedergruppe der Ordnung 2p; das Zentrum ist zyklisch von der Ordnung 2q.

identifizieren gemäß einer Verschraubung um $(2\pi/2pq)x$, wobei der Faktor x bis auf Vielfache von 2pq eindeutig durch p und q festgelegt ist. Die Seitenflächen werden nach einer Vierteldrehung in einer bestimmten Abfolge miteinander identifiziert, welche im Falle p = 2, q = 3 in folgender Abbildung aus Seifert 1931, 63 dargestellt wird:



Die Prismaräume entstehen als Schnittgebilde sphärischer Spindeln, deren spitzzulaufende Enden abgeschnitten werden:[59]

[59] Im Falle p=2, q=1 erhält man einen sphärischen Würfel, nähert sich also Poincaré's ersten Beispielen (vgl. 3.2). Allerdings stimmen dessen Identifikationsvorschriften - die ja sozusagen frei erfunden waren - nicht immer mit den bei Seifert angegebenen überein. Auf den genannten Zusammenhang wird bei Threlfall-Seifert 1931, 60f aufmerksam gemacht, ohne daß aber Poincaré genannt würde. Dort heißt es:
„Der Diskontinuitätsbereich ist ein sphärischer Würfel, dessen Gegenseiten durch $\pi/2$ verschraubt einander zugeordnet sind. Der konforme Raum [d.i. S^3; K. V.] wird in 8 solche Würfel regelmäßig geteilt. Die Würfel stoßen in 16 Ecken zusammen, deren Umgebungsmannigfaltigkeiten Tetraeder sind. Die Konfiguration ist die Projektion des regelmässigen 8-Zells, der einen der 6 regelmäßigen Zellteilungen der Hypersphäre." (Threlfall-Seifert 1931, 61)
Als Bewegungsgruppe ergibt sich eine der Quaternionengruppe isomorphe Gruppe; folglich ist - die Bewegungsgruppe ist fixpunktlos - die Fundamentalgruppe des Prismaraumes (Σ_2; 1,0) isomorph zur genannten Gruppe.
Diese trat bei Poincaré als „hyperkubische" Gruppe auf und zwar als Fundamentalgruppe seines dritten Beispiels (vgl. 3.2, insbesondere Anmerkung 109). Die zugehörige Mannigfaltigkeit wird heute auch als Quaternionenraum (Weeks 1985, 229) bezeichnet; sie zeigt insbesondere, daß es (im Unterschied zum zweidimensionalen Fall) geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher, aber nicht zyklischer (insbesondere nicht-trivialer) Fundamentalgruppe gibt.
Einer Bemerkung in Threlfall-Seifert 1931, 61 Anm. 30 zufolge, tritt (Σ_2; 1,0) auch als Raum der nichtorientierbaren Linienelemente der reellen projektiven Ebene auf, was B. L. van der Waerden erkannt habe (vgl. Aufgabe 124 im Anhang zu diesem Abschnitt). Einzelheiten hierzu - auch zur Frage, warum (Σ_2; 1,0) und der Raum der Linienelemente homöomorph sind - findet man bei Threlfall 1933.
Einen Prismaraum, der der Seifertschen Beschreibung im Sinne eines Spezialfalles nahekommt, behandelt Weeks 1985, 124f unter der Bezeichnung „hexagonal threetorus".



(Threlfall-Seifert 1931, 60)

Sieht man einmal vom Satz von Seifert-van Kampen ab, der zu einem der wichtigsten Werkzeuge der algebraischen Topologie werden sollte, so blieb Seiferts Arbeit weitgehend auf konkrete Untersuchungen beschränkt und stand insofern in der von Poincaré begründeten Tradition. Das deutete ihr Autor ja schon durch die Ausdrucksweise von der „Beispielsammlung" (Seifert 1931, 26) an. Ein Fortschritt in Hinblick auf das allgemeine Klassifikationsproblem wurde insofern erzielt, als die Verhältnisse in bestimmten Klassen von Beispielen (Linsen-, Prismaräume) teilweise oder ganz geklärt werden.

Im darauffolgenden Jahr (1932) sollte es H. Seifert gelingen, einen bedeutenden Fortschritt bezüglich des Klassifikationsproblems zu erreichen, indem er dieses für eine ganze Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten löste. Es sind dies die (im Sinne Seiferts) faserbaren Räume mit trivialer Homologie.[60] Diese Theorie soll im folgenden kurz behandelt werden.

Der von Seifert 1932 verfolgte Ansatz ist vollkommen neuartig; er arbeitet - was auch der Autor hervorhebt - rein kontinuumstopologisch (Seifert 1932, 148). Seine Ursprünge lagen - wie bereits oben bemerkt und auch im weiteren noch deutlich werden wird - in den mit W. Threlfall gemeinsam durchgeführten Untersuchungen zu Diskontinuitätsbereichen von Bewegungsgruppen der 3-Sphäre. (Dies wird in den Ausführungen zur Faserung der S^3 besonders deutlich; vgl. Seifert 1932, 159-161.) Insbesondere führte Seifert den Begriff der „Faserung", der fasertreuen Abbildung und des gefaserten Raumes ein und erkannte die Wirksamkeit dieser Hilfsmittel. Dennoch hat sich die heute gängige Faserungstheorie unabhängig von Seiferts Arbeiten entwickelt[61], vermutlich, weil dessen Faserungen hauptsächlich auf die konkrete Untersuchung von speziellen 3-Mannigfaltigkeiten zugeschnitten waren.

[60] Im folgenden werden diese im Anschluß an Seifert kurz faserbare Räume genannt, da eine Verwechselungsgefahr mit dem modernen Begriff hier nicht gegeben ist, einfach weil letzterer gar nicht auftritt. Seifert gelingt es also, die gefaserten Homologiesphären (bei ihm: Poincarésche Räume) zu klassifizieren.

[61] Zur Entwicklung der Theorie der Faserungen vgl. man Dieudonné 1989, Teil 3 Kap. III oder Hirsch 1985, 680-682. Eine knappe moderne Darstellung der Faserungen im Sinne Seiferts gibt Hempel 1976, Kap. 12; eine ausführliche Orlik 1972.
Seiferts Ansatz unterscheidet sich formal vom modernen insofern er Ausnahmefasern zuläßt; seine Faserungen sind speziell, insofern er nur Volltori betrachtet. Weiter spielt bei ihm der Basisraum eine andere Rolle, da dieser (ohne daß Seifert das so ausdrückt; vgl. Anm. 65) als Quotientenraum konstruiert wird; die lokal triviale Struktur des Totalraumes kommt bei Seifert nicht explizit vor. Als Standardwerk für die frühe Theorie der Faserungen im heutigen Sinne sei auf Steenrod 1951 verwiesen.

Anschaulich gesprochen besteht ein Seifert-gefaserter Raum aus lauter disjunkten 1-Sphären, den Fasern, so daß jede Faser eine abgeschlossene Fasernumgebung besitzt, welche einem verdrehten Torus fasernreu homöomorph ist. Stellt man sich S^3 durch S^1 gefasert vor (vgl. 3. unten), so erhält man hieraus jeden geschlossenen gefaserten Raum, indem man endlich viele gewöhnliche Volltori ausbohrt und durch verdrehte ersetzt.
Eine 3-Mannigfaltigkeit[62] M heißt nach Seifert gefasert, wenn gilt:

1. Zu jedem $x \in M$ gibt es genau eine einfache Kurve, Faser (von x) genannt, auf der x liegt;
2. Zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung U und ein Homöomorphismus $U \to V \supset R^3$, der die in U gelegenen Fasern auf Geradenstücke eines Parallelenbüschels in V abbildet.

Um diese Begriffsbildung, deren Herkunft aus der Betrachtung von Orbiträumen von auf einer Mannigfaltigkeit operierenden Abbildungen offenkundig ist, für die Untersuchung von 3-Mannigfaltigkeiten wirklich effizient zu machen, ist es erforderlich, das globale Zusammenspiel der Fasern zu regeln. Das geschieht im Begriff des gefaserten Raumes: Eine gefaserte Mannigfaltigkeit heißt gefaserter Raum, wenn 1. alle Fasern geschlossene Kurven sind, und 2. es zu jeder Faser H eine Umgebung U_H gibt[63], die sich fasernreu auf einen gefaserten Volltorus so abbilden läßt, daß H auf dessen Seele abgebildet wird.

Fasernreu bedeutet, daß die Abbildung topologisch ist und Fasern Fasern zuordnet. Der gefaserte Volltorus entsteht aus einem (ausgefüllten) Zylinder, indem man Boden- und Deckfläche nach Verschraubung um $2\pi n/m$ miteinander identifiziert (es genügt, n und m ganzzahlig und teilerfremd mit $m > 0$ und $0 \leq n \leq m/2$ zu wählen) - eine Konstruktion, die uns ähnlich schon bei J. W. Alexander begegnet ist (vgl. 5.1.1). Sie führt dazu, daß diejenigen geschlossenen Kurven, welche bei einem gewöhnlichen Volltorus die Parallelen bilden würden, im gefaserten Volltorus verknotet sind. Die einzige nicht-verknotete Kurve dieser Art ist die Torusseele, die der Ausnahmefaser entspricht.

Dann heißen (m,n) die charakteristischen Zahlen des Volltorus (Seifert 1932, 150f), weil sie diesen eindeutig festlegen.[64] Von besonderer Bedeutung ist der Begriff der Zerlegungsfläche f (heute: Seifert-Fläche) eines gefaserten Raumes F, der nun von Seifert eingeführt wird:

Diese erhält man, indem man jeder Faser H eines gefaserten Raumes einen Punkt zuordnet und die so erhaltene Menge topologisiert, indem man die Bilder der Umgebungen des gefaserten Raumes zu Umgebungen erklärt. Es stellt sich dann heraus (Seifert 1932, 155):[65]

[62] Seifert ist nebenbei bemerkt sehr sorgfältig, was die Verwendung der mengentheoretischen Topologie anbelangt. Topologische Räume definiert er nach Hausdorff über Umgebungen; seine Mannigfaltigkeitsdefinition ist die moderne (Seifert leitet diese auf Kneser 1926 zurück), wobei allerdings der Zusammenhang zu den definierenden Eigenschaften gerechnet wird. (Seifert 1932, 149). Werden neue Räume konstruiert - z.B. der Basisraum durch Quotientenbildung - so wird das Problem der Topologisierung desselben ausdrücklich erwähnt (Seifert 1932, 155).

[63] U_H ist eine „H enthaltende Teilmenge von Fasern" (Seifert 1932, 150), über deren Topologie wir nichts weiter erfahren; vermutlich soll U_H als Teilraum der Mannigfaltigkeit betrachtet werden.

[64] Diese Zahlenpaare charakterisieren auch die durch das Verdrehen des Zylinders entstandenen Torusknoten (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 179).

[65] Ist F der gefaserte Raum, so ergibt sich die Zerlegungsfläche f, indem man zum Quotientenraum F/~ übergeht mit $x \sim y$ $(x,y \in F)$ dann und nur dann, wenn es eine Faser H gibt mit $x \in H$ und $y \in H$. Die

„1. Die Umgebungen von f erfüllen die Hausdorffschen Umgebungsaxiome;
2. Es gibt zu jedem Punkt auf f eine Umgebung, die sich auf das Innere eines euklidischen Vollkreises topologisch abbilden läßt;
3. Ist jedem Punkt von f eine beliebige Umgebung zugeordnet, so genügen abzählbar viele, ganz f zu überdecken. Mit F ist auch f eine offene oder geschlossene Mannigfaltigkeit.
4. f ist zusammenhängend."

Es erweist sich, daß die Zerlegungsfläche in hohem Maße charakteristisch ist für den zugehörigen gefaserten Raum. Da die Zerlegungsfläche eine Fläche ist, kann man auf sie die bekannten Ergebnisse der Flächentopologie anwenden. Folglich hat man dreidimensionale Probleme auf zweidimensionale lösbare[66] reduziert: Der Archimedische Punkt ist gefunden. Ist F geschlossen, so ist f geschlossen. Folglich ist dann f entweder eine Sphäre mit g Henkeln (Geschlecht g) oder eine mit k Kreuzhauben (Kreuzhaubenzahl k).
Man hat eine surjektive Abbildung $p: F \to f$ mit $p(H) = h$ für jede Faser H und den entsprechenden Punkt $h \in f$. Ist U_H eine Faserumgebung, so heißt $p(U_H)$ Zerlegungsumgebung[67] von h. Die Zerlegungsumgebungen haben eine besonders einfache geometrische Gestalt: Sie sind Kreissektoren mit dem Zentriwinkel $2\pi/\mu$ homöomorph, wobei die beiden begrenzenden Radien identifiziert sind. Es wird nun gezeigt, daß diese Zahl μ charakteristisch für die Faser H ist, d.h. daß sie nur von H, nicht aber von der speziellen Wahl der Faserumgebung abhängt (Seifert 1932, 156 - 158). Eine Faser H heißt μ-fache Ausnahmefaser, wenn das oben eingeführte $\mu > 1$ ist; ist $\mu = 1$, so liegt eine gewöhnliche Faser vor.[68] Ist M geschlossen, so kann es nur endlich viele Ausnahmefasern in M geben, da ja jede Ausnahmefaser definitionsgemäß eine Faserumgebung besitzt, in der außer ihr alle Fasern gewöhnlich sind.
Beispiele für gefaserte Räume sind:

1. Betrachtet man den Schalenraum, der aus einer Hohlkugel entsteht, indem man Randpunktpaare, welche auf demselben Radius liegen, identifiziert, so erhält man einen gefaserten Raum, nämlich $S^2 \times S^1$. Als Zerlegungsfläche kann man in diesem Falle eine im

Zerlegungsfläche ist also eine Art Orbitraum. (Man stelle sich die Fasern als Bahnen vor; man beachte, daß es gemäß 1. durch jeden Punkt von H höchstens eine derartige Faser geben kann.)

[66] Ähnliches leisten natürlich auch Dehn-Chirurgie und Heegard-Diagramme. Nur sind dort die zweidimensionalen Probleme schwierig und keineswegs allgemein gelöst. Seiferts Ansatz liefert dagegen - wie wir sehen werden - wirklich eine Lösung, aber eben nur für einen Teilbereich.

[67] Man beachte, daß U_H und $p(U_H)$ abgeschlossene Mengen sind (Seifert 1932, 156).

[68] In moderner Terminologie (Hempel 1976, 115f) ist eine Seifert-gefaserte Mannigfaltigkeit dadurch charakterisiert, daß es zu jeder Faser H eine abgeschlossene Umgebung U_H gibt, welche ein Volltorus ist, nebst einer Überlagerung $\pi: E^2 \times S^1 \to U_H$ mit den Eigenschaften
1. π bildet jedes $\{x\} \times S^1$ mit $x \in E^2$ auf eine Faser ab;
2. $\pi^{-1}(H)$ ist für jede Faser H zusammenhängend;
3 Die Decktransformationsgruppe wird von den Abbildungen $t_{\mu,m}$ erzeugt $(m,\mu \in Z$ relativ prim), wobei die Abbildung $t_{\mu,m}$ definiert ist als
$$t_{\mu,m}(re^{i\Theta}, e^{i\Phi}) = (re^{i(\Theta+2m\pi/\mu)}, e^{i(\Phi+2\pi/\mu)})$$
Ist $|\mu| = 1$, so ist π eine Einbettung und es liegt eine gewöhnliche Faser vor.
Eine μ-fache Ausnahmefaser ist μ-mal durchlaufen einer gewöhnlichen Faser homolog. Ist H eine μ-fache Ausnahmefaser, so schneiden die gewöhnlichen Fasern in ihrer Umgebung den Meridiankreis $\pi(E^2 \times \{0\})$ μ-mal und winden sich m-mal um H. Der Prototyp einer Ausnahmefaser ist also die Seele eines „verdrehten", d.h. bei Seifert eines gefaserten Volltorus.

Raum liegende S^2 nehmen. Die charakteristischen Zahlen sind hier $m = 1$ und $n = 0$ (Seifert 1932, 154f). Man beachte, daß $S^2 \times S^1$ dennoch keine Mannigfaltigkeit mit einer sphärischen Geometrie ist: Das liegt - wie sich noch herausstellen wird - daran, daß die Fundamentalgruppe von $S^2 \times S^1$ unendlich zyklisch ist.

2. Ist f eine Fläche, so ist $f \times S^1$ ein gefaserter Raum. Folglich kann jede Fläche als Zerlegungsfläche auftreten. (Seifert 1932, 156)
3. Auf S^3 wird eine Faserung (durch Bahnen bestimmter sphärischer Bewegungen - siehe oben) folgendermaßen analytisch gegeben (Seifert 1932,159):
   $x_1' = x_1 \cos(mt) + x_2 \sin(mt)$
   $x_2' = -x_1 \sin(mt) + x_2 \cos(mt)$
   $x_3' = x_3 \cos(nt) + x_4 \sin(nt)$
   $x_4' = -x_3 \sin(nt) + x_4 \cos(nt)$
   (m,n natürliche teilerfremde Zahlen, t durchläuft das Intervall 0 bis 2π). Die Zerlegungsfläche ist auch hier eine S^2, die sich aber nicht in S^3 einbetten läßt. Die Abbildung π: $S^3 \rightarrow S^2$ des gefaserten Raumes auf die Zerlegungsfläche ist gerade die heute als Hopf-Faserung bezeichnete Abbildung (Seifert 1932, 161 Anm. 12).
4. Der gefaserte Volltorus liefert - falls er wirklich „verdreht" ist, also $m > 1$ - ebenfalls ein Beispiel dafür, daß die Zerlegungsfläche nicht in den Raum selbst einbettbar ist. Diesen Punkt hebt Seifert ausdrücklich hervor (Seifert 1932, 155).

Die Zerlegungsfläche eines gefaserten Raumes ist nach einem Satz von Radó (vgl. Radó 1925), den Seifert nennt (Seifert 1932, 155 Anm. 9), immer triangulierbar. Aber auch gefaserte Räume besitzen diese Eigenschaft, wie Seifert im Paragraphen 4 seiner Arbeit zeigt.[69] Folglich lassen sich diese rein kontinuumstopologisch definierten Räume auch kombinatorisch-topologisch behandeln (Seifert 1932, 162).

Um gefaserte Räume zu vereinfachen, entwickelt Seifert eine Art von Chirurgie. Diese besteht darin, daß man aus einem geschlossenen gefaserten Raum die endlich vielen Ausnahmefasern ausbohrt - also das Innere einer Faserumgebung derselben jeweils entfernt - und anschließend die Mannigfaltigkeit durch Anheften gewöhnlicher Tori fasertreu wieder schließt. Um die Schließung zu charakterisieren, genügt es, in den den Aussenraum berandenden Tori jeweils eine Faser, die doppelpunktfrei, auf diesem nicht-nullhomolog und nicht der (Ausnahme-) Faser homolog sein darf, anzugeben, welche dann auf den Meridian des schließenden Volltorus abzubilden ist. Der geschilderte Schließungsprozeß läßt sich durch die charakteristischen Zahlen der fraglichen Ausnahmefaser beschreiben. Die Chirurgie ist aber unabhängig von der speziellen Auswahl der auszubohrenden Faserumgebungen; sie liefert zu jedem gefaserten F einen ebensolchen F_0 ohne Ausnahmefasern. Aus F_0

[69] Im wesentlichen geschieht das dadurch, daß man die Triangulierung vom Basisraum, das ist die Zerlegungsfläche, in den Totalraum, den gefaserten Raum, hochhebt. Dabei müssen die Verhältnisse um die sogenannten Ausnahmepunkte, das sind die Bilder der Ausnahmefasern, besonders beachtet werden. Die Hochhebung beruht darauf, daß das Urbild eines 2-Simplexes der Zerlegungsfläche - das als Zerlegungsumgebung mit höchstens einem inneren Ausnahmepunkt gewählt werden kann (Seifert 1932, 162f) - ein gefaserter Volltorus ist, der sich natürlich triangulieren läßt. Anschließend müssen die Triangulierungen der einzelnen Volltori miteinander vereinbar gemacht werden.
Seit Moise 1952 weiß man, daß sich alle 3-Mannigfaltigkeiten, also insbesondere Seifert-gefaserte, triangulieren lassen.

ergibt sich durch Ausbohren einer beliebigen Faserumgebung der sogenannte Klassenraum $\overline{F}_0$.

Ziel ist es nun, gefaserte Räume auf einfachere Formen durch Chirurgie zurückzuführen und letztere dann mit Hilfe der zugehörigen Zerlegungsfläche zu charakterisieren. Hierzu ist noch erforderlich, den Begriff der bewerteten Zerlegungsfläche einzuführen. Ein geschlossener Weg w in einer Zerlegungsfläche f induziert im gefaserten Raum eine darüber liegende Abbildung von Fasern. Geschieht diese so, daß Anfangs- und Endfaser gleich orientiert sind, erhält der Weg die Bewertung +1; sind die Orientierungen einander entgegengesetzt, so ist die Bewertung -1. Man kann feststellen, daß die Bewertung für alle Wege einer Homotopieklasse - ja sogar einer Homologieklasse (Seifert 1932, 171) - gleich ist.

Zwei gefaserte Räume F und F' sollen dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn sich ihre zugehörigen Zerlegungsflächen f und f ' homöomorph und bewertungserhaltend aufeinander abbilden lassen. Folglich gehören F und F' sicherlich verschiedenen Klassen an, wenn f und f ' nicht homöomorph sind. Zu einer Zerlegungsfläche können im allgemeinen mehrere Klassen gehören; ist aber die Zerlegungsfläche einfach-zusammenhängend, so gibt es zu ihr nur eine Klasse, da in diesem Falle nur eine Wegeklasse existiert und deren Bewertung zwingend +1 ist. Das zentrale Ergebnis lautet nun so:

> „Satz 3. Jede Klasse geschlossener gefaserter Räume bestimmt umkehrbar eindeutig einen gefaserten berandeten Raum F_0, den Klassenraum. Der Klassenraum ist der einzige gefaserte berandete Raum ohne Ausnahmefasern, der zur Zerlegungsfläche die einmal gelochte, der Klasse charakteristische bewertete Zerlegungsfläche hat. Aus F_0 erhält man alle Räume der Klasse durch Ausbohren einer endlichen Anzahl r von Fasern und Schließen aller r+1 Randringflächen mit beliebigen Verschlussringen."
>
> (Seifert 1932, 173)

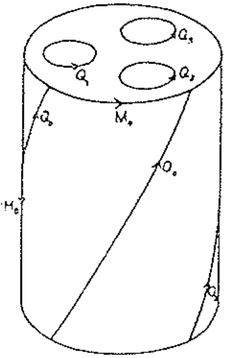
Umgekehrt gibt auch jede geschlossene Fläche nach Einführung einer Bewertung (auf den Erzeugenden der Fundamentalgruppe) Veranlassung zu einer Klasse bewerteter Flächen.

Um einen gefaserten geschlossenen Raum F zu charakterisieren, sind somit folgende Angaben erforderlich:

- O, N Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit des gefaserten Raumes;
- o, n Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit der Zerlegungsfläche;
- g, k deren Henkel- bzw. Kreuzhaubenzahl;
- b eine ganze Zahl, die vermöge einer Homologiebedingung die Schließung der aus F_0 zur Gewinnung des Klassenraumes $\overline{F}_0$ herausgenommenen Fasernumgebung festlegt und durch F nebst seiner Orientierung bestimmt ist (vgl. Seifert 1932, 181);
- α_i, β_i charakteristische Zahlen der in dem gefaserten Raum vorhandenen Ausnahmefasern.

Nun gilt: Zwei gefaserte geschlossene Räume, die in den Invarianten $(O,o,g \mid b; \alpha_1, \beta_1; \alpha_2 \beta_2; \dots ;\alpha_r,\beta_r)$ oder $(O,n,k \mid b; \alpha_1,\beta_1; \alpha_2,\beta_2; \dots ;\alpha_r,\beta_r)$ bereinstimmen, lassen sich orientierungserhaltend fasertreu aufeinander abbilden (Seifert 1932, 181). Ein ähnlicher Satz gilt auch für nichtorientierbare gefaserte geschlossene Räume (Seifert 1932, 188 und 193), wobei hier die Verhältnisse etwas komplizierter liegen, weil der Kombination Nn in Abhängigkeit von k bis zu drei Klassen entsprechen können.

Im Falle orientierbarer gefaserter geschlossener Räume läßt sich ein Diagramm V_0, ein Seifert-Diagramm, angeben, das zusammen mit dem Klassenraum $\overline{F}_0$ den Raum F eindeutig festlegt.



Dieses Diagramm stellt im wesentlichen das topologische Produkt eines r-fach gelochten Kreises - r entspricht der Anzahl der Ausnahmefasern im betrachteten gefaserten Raum - mit einer Kreislinie dar. Auf die äußere Randfläche ist ein gewöhnlicher Volltorus aufzukleben, während die inneren „Kanäle" entsprechend den charakteristischen Zahlen der ausgebohrten Ausnahmefasern zu verschließen sind. Die sogenannten Querkreise Q_i ($i=1, \ldots, r$) sind einfach geschlossene Kurven auf den die Volltori berandenden Tori, welche jede Faser der letzteren genau einmal schneiden. Anders gesagt, handelt es sich um Rückkehrschnitte auf Tori, welche allen Fasern konjugiert sind (Seifert 1932, 153).

Im nachfolgenden Paragraphen 9, den wir hier übergehen, behandelte Seifert Überlagerungen, im Paragraphen 10 leitete er, gestützt auf einen Satz aus Seifert 1931, die Fundamentalgruppe eines gelochten Fundamentalpolygons betreffend, die Fundamentalgruppen der gefaserten Räume ab.[70] Insbesondere stellt sich heraus, daß die Fundamentalgruppe der Zerlegungsfläche eine Faktorgruppe der Fundamentalgruppe des gefaserten Raumes ist; soll also letztere endlich sein, so gilt dies a fortiori auch für erstere.[71] Folglich kommen als geschlossene gefaserte Räume mit endlicher Fundamentalgruppe nur solche in Betracht, die die Sphäre oder die projektive Ebene zur Zerlegungsfläche haben. Eine genauere Analyse (Seifert 1932, 202f) führt zum Ergebnis, daß für die fraglichen gefaserten Räume endlicher Fundamentalgruppe im Falle der projektiven Ebene als Zerlegungsfläche nur ein Raum mit höchstens einer Ausnahmefaser, im Falle der Sphäre nur Räume mit höchstens

[70] Diese hat beispielweise für den Raum $(O,o;0 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r)$ [dieser Raum hat die Sphäre zur Zerlegungsfläche!] folgende Gestalt:

$$\pi_1 = \left\langle Q_0, \ldots, Q_r, H \mid Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \ldots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = Q_0 Q_1 \ldots Q_r = 1; \; Q_j H Q_j^{-1} H^{-1} = 1 \right\rangle$$

Die Q_j ($j=1, \ldots, r$) sind Querkreise, welche zu den ausgebohrten (Ausnahme-) Fasern gehören, H ist eine geeignet gewählte Faser (Seifert 1932, 200f). Eine allgemeinere moderne Darstellung findet man bei Hempel 1976, 117f.

[71] Seiferts Argument hierfür liest sich bemerkenswert modern: „Ordnet man jeder geschlossenen Kurve auf F ihr Bild auf der Zerlegungsfläche f zu, so ist damit eine homomorphe Abbildung der Fundamentalgruppe von F auf die von f hergestellt." (Seifert 1932, 201)

drei Ausnahmefasern in Betracht kommen. Treten im letzten Fall tatsächlich drei Ausnahmefasern auf, so lauten deren Vielfachheiten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

2, 2, n oder 2, 3, 3 oder 2, 3, 4 oder aber 2, 3, 5 (mit $n \in N$ und $n \geq 2$).

Die Fundamentalgruppen der zugehörigen gefaserten Räume sind dann Erweiterungen der platonischen Gruppen.[72]

Gestützt auf die Kenntnis der Fundamentalgruppe eines geschlossenen gefaserten Raumes, der die Sphäre zur Zerlegungsfläche hat, kann Seifert nun folgenden wichtigen Klassifikationssatz beweisen:[73]

> „Satz 10: Eine notwendige Bedingung für die Homöomorphie zweier gefaserter Räume F und F, die die Kugel zur Zerlegungsfläche und mindestens drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bez. $\alpha_1', \ldots, \alpha_r'$ haben, besteht darin, daß $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bis auf die Reihenfolge mit $\alpha_1', \ldots, \alpha_r'$ übereinstimmen."
>
> (Seifert 1932, 204)

Im nachfolgenden Paragraphen 11 beantwortete Seifert die Poincaré-Vermutung (ohne diese ausdrücklich so zu nennen) für geschlossene gefaserte Räume, indem er nämlich klärt, welche derartigen Räume eine Fundamentalgruppe besitzen, die trivial ist. Da die Fundamentalgruppe der Zerlegungsfläche dann Quotient einer trivialen Gruppe ist, muß auch diese trivial sein. Somit ist die Zerlegungsfläche eine 2-Sphäre und F läßt sich charakterisieren als[74] $(O,o,0 \mid b; \alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_r, \beta_r)$.

Wie oben bereits ausgeführt, hat ein solcher Raum nur dann eine endliche Fundamentalgruppe, wenn $r \leq 3$ ist. Dabei wurde der Fall $r = 3$ bereits geklärt, indem sich hier die Vielfachheiten explizit angeben ließen (siehe oben). Als Fundamentalgruppen der gefaserten Räume ergaben sich Erweiterungen der platonischen Gruppen; also sind die zugehörigen Mannigfaltigkeiten sicher nicht einfach - zusammenhängend. Es stellt sich weiter heraus, daß sich für $r = 1$ und 2 die Faserungen der Hypersphäre S^3 ergeben, welche oben angegeben wurden,[75] während $r = 0$ die von Ausnahmefasern freie Faserung der S^3 durch Kreise liefert. In allen drei Fällen liegt also die Hypersphäre vor. Folglich ist diese die einzige einfach-zusammenhängende gefaserte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit.

[72] Eine genauere Diskussion dieses gruppentheoretischen Aspektes findet sich in Threlfall-Seifert 1933, 572, wo im weiteren auch die entsprechenden Räume noch expliziter gekennzeichnet werden im Rahmen der Theorie der Diskontinuitätsbereiche. Dort wird auch gezeigt, daß sich im Falle zweier oder weniger Ausnahmefasern (und natürlich der Sphäre der Zerlegungsfläche) ein Linsenraum oder der Schalenraum $S^1 \times S^2$ (siehe oben) ergibt. Letzterer kann auch als Linsenraum L(0,1) angesehen werden, was Seifert aber nicht tut.

[73] Eine entscheidende Rolle im Beweis dieses Resultates spielt die Interpretation des Quotienten der Fundamentalgruppe nach dem von H erzeugten Normalteiler - der im übrigen für $r = 3$ gerade das Zentrum dieser Gruppe ist - als Polygonnetzgruppe (vgl. Seifert 1932, 202 und 204), das heißt als eine Gruppe, die aus den Decktransformationen einer (nicht notwendig regelmäßigen) Parkettierung der 2-Sphäre, der euklidischen oder der hyperbolischen Ebene besteht.

[74] Man beachte, daß aufgrund früherer Überlegungen ein gefaserter Raum, der die Sphäre zur Zerlegungsfläche hat, notwendig orientierbar sein muß.

[75] Für $r = 1$ ergibt sich $m = 1$, $n = \alpha_1$; für $r = 2$ liegen die Verhältnisse schwieriger (vgl. Seifert 1932, 207 - 209). Man findet aber für $m \neq 1$, $n \neq 1$ immer Torusknoten als gewöhnliche Fasern; insbesondere für $m = 2$, $n = 3$ eine Kleeblattschlinge. (Seifert 1932, 206).

Diese Fragestellung wird im nächsten Paragraphen verallgemeinert: Welches sind die geschlossenen gefaserten Räume, deren erste Homologiegruppe (und damit, da - wie sich herausstellt - Orientierbarkeit stets gegeben ist - auch zweite) trivial ist? Analog zum Falle der Fundamentalgruppe muß auch hier die erste Homologiegruppe[76] der Zerlegungsfläche verschwinden, also letztere eine 2-Sphäre sein. Räume mit verschwindender Homologie nennt Seifert im Anschluß an Dehn (vgl. 4.3) Poincarésche Räume, wenn sie nicht der Hypersphäre homöomorph sind. Wir sprachen von Homologiesphären.

Der gesuchte Poincarésche Raum M stellt sich also als gefaserter Raum in der Form $(O,o,0 \mid b; \alpha_1,\beta_1; \alpha_2,\beta_2; \ldots ;\alpha_r,\beta_r)$ dar; somit kennt man (vgl. Anmerkung 70 oben) dessen Fundamentalgruppe und damit (durch abelsch machen) dessen erste Homologiegruppe:

$$H_1(M) = \langle Q_0,\ldots,Q_r,H \mid Q_0H = Q_1^{\alpha_1}H^{\beta_1} = \ldots = Q_r^{\alpha_r}H^{\beta_r} = Q_0Q_1\ldots Q_r = 1 \mid$$

$$\text{plus Vertauschungsrelationen für alle Erzeugenden}\rangle$$

Diese Gruppe soll trivial sein. Eine genauere Analyse liefert dann folgendes Ergebnis (Seifert 1932, 209):

> „Satz 12: In einem gefaserten Poincaréschen Raum gibt es mindestens drei Ausnahmefasern. Ihre Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sind paarweise relativ prim. Sind umgekehrt $(\alpha_1,\ldots, \alpha_r)$ $(r \geq 3)$ paarweise relativ prime Zahlen, ≥ 2, so gibt es genau einen gefaserten Poincaréschen Raum, der r Ausnahmefasern dieser Vielfachheiten hat. Zwei gefaserte Poincarésche Räume sind nur dann homöomorph, wenn sie sich fasertreu aufeinander abbilden lassen; mit anderen Worten: wenn ein Poincaréscher Raum überhaupt faserbar ist, so nur auf eine Weise. Der einzige gefaserte Poincarésche Raum mit endlicher Fundamentalgruppe ist der Dodekaederraum."[77]

Zum Abschluß der Poincarésche Räume betreffenden Überlegungen zeigt Seifert noch, daß sich ein solcher Raum dann und nur dann durch Dehn-Chirurgie aus einem Torusknoten gewinnen läßt, wenn der Raum faserbar ist, genau drei Ausnahmefasern besitzt, deren Vielfachheiten m_1, m_2, m_3 paarweise relativ prim sind und den Bedingungen

1. $m_1 < m_2 < m_3$,
2. $m_3 = |qm_1m_2 - 1|$ mit $q \in Z$

[76] Seifert spricht einfach von der Homologiegruppe.

[77] Es ist bemerkenswert, welche herausragende Rolle diese 3-Mannigfaltigkeit spielt. Nicht zu unrecht überschreibt D. Rolfsen einen Abschnitt seines Buches mit „The ubiquitous Poincaré homology sphere" (Rolfsen 1976, 308).
Zum Beweis der beiden letzten Behauptungen im Text beachte man, daß die Faserung eines Poincaréschen Raumes durch Angabe der Anzahl und der charakteristischen Zahlen der Ausnahmefasern bereits festgelegt ist, und daß 2,3,5 das einzige Tripel paarweise relativ primer Zahlen ist, das bei einem gefaserten Poincaréschen Raum auftreten kann, wenn dessen Fundamentalgruppe endlich sein soll. Letzteres ergibt sich aber als notwendiges Kriterium für die Endlichkeit der Fundamentalgruppe eines gefaserten Poincaréschen Raumes (Seifert 1932, 208).
Der Dodekaederraum hat die Invarianten $(O,o,0 \mid -1; 5,1; 2,1; 3,1)$; seine Fundamentalgruppe sieht also so aus: $\langle Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, H \mid Q_0H^{-1} = Q_1^5H = Q_2^2H = Q_3^3H = Q_0Q_1Q_2Q_3 = 1\rangle$
Formt man die Relationen durch Elimination von H um, so ergibt sich schließlich die bekannte Präsentierung der binären Ikosaedergruppe (vgl. auch Aufgabe 84 im Anhang zu diesem Abschnitt): $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \mid Q_1^5 = Q_2^2 = Q_3^3 = Q_1Q_2Q_3\rangle$
Es stellt sich im übrigen heraus (vgl. Hempel 1976, 115), daß die im Sinne Seiferts faserbaren Räume bis auf wenige Ausnahmen zu denjenigen 3-Mannigfaltigkeiten gehören, die durch ihr Fundamentalgruppensystem bezüglich ihres Homöomorphietyps festgelegt sind. Vgl. hierzu auch H. Seifert selbst: „Es zeigt sich, daß zwei faserbare Poincaré'sche Räume homöomorph sind, wenn sie dieselbe Fundamentalgruppe haben." (Seifert 1932b, 197).

genügen. Der Poincarésche Raum läßt sich dann nur aus einem einzigen Torusknoten durch Dehn-Chirurgie gewinnen. Folglich sind der Dehnsche Kleeblattschlingenraum und der gefaserte Dodekaederraum $(O,o,0 \mid -1; 5,1; 2,1; 3,1)$ homöomorph.[78]

Natürlich liegt eine Frage nahe: Sind vielleicht gar alle 3-Mannigfaltigkeiten faserbar? Daß dem so nicht ist, läßt schon der enge Zusammenhang zu den sphärischen Diskontinuitätsbereichen vermuten, welche ja auch eine engere Begriffsbildung als die Menge aller 3-Mannigfaltigkeiten darstellen.[79] Mit Hilfe eines algebraischen Kriteriums läßt sich hier - wie so oft, wenn es um Nichtexistenz geht - zeigen, daß es nicht-faserbare 3-Mannigfaltigkeiten gibt. Nimmt man in einem gefaserten Raum einen geschlossenen Weg w, dessen Anfangs-gleich-Endpunkt in einer gewöhnlichen Faser H liegt, so wird diese längs des fraglichen Weges in $\pm H$ überführt (das heißt, die Orientierung in H bleibt erhalten oder wird umgekehrt). Da $H \cong S^1$ ist, kann man H ebenfalls als geschlossenen Weg h auffassen. Für die entsprechenden Wegeklassen in der Fundamentalgruppe des gefaserten Raumes gilt also $[w]^{-1}\cdot[h]\cdot[w] = [h]^{\pm 1}$. Ist folglich der Raum faserbar, so muß es in der Fundamentalgruppe ein ausgezeichnetes Element [h] geben, das bei Konjugation mit einem beliebigen anderen Element der Fundamentalgruppe in $[h]^{\pm 1}$ übergeht. Zu klären bleibt noch die Frage, wann $[h] = 1$ ist. Es stellt sich heraus, daß nur die S^3 und die Linsenräume Faserungen zulassen, in denen dies eintreten kann. Da die Fundamentalgruppe eines Linsenraumes zyklisch ist, gibt es in dieser stets ein Element, das bei Konjugation auf sich oder auf sein Inverses abgebildet wird. Somit ist die angegebene Bedingung für alle nicht einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten notwendig (Seifert 1932, 227).

Will man die Existenz nicht-faserbarer Mannigfaltigkeiten nachweisen, kann man nach einer entsprechenden Fundamentalgruppe Ausschau halten. Hierzu benutzt Seifert die von ihm bereits 1931 (vgl. oben) betrachtete topologische (heute: zusammenhängende) Summe zweier 3-Mannigfaltigkeiten. Deren Fundamentalgruppe ist gleich dem freien Produkt der Fundamentalgruppen der Summanden, weshalb der folgende Satz das Problem erledigt:

> „Hilfssatz VIII: Das freie Produkt zweier nicht aus dem Einselement bestehender Gruppen A und B hat dann und nur dann ein vom Einselement verschiedenes Element H, das bei Transformation mit jedem Element in sich oder auch in sein Reziprokes übergeht, wenn die Gruppen A und B beide die Ordnung 2 haben."
>
> (Seifert 1932, 228)

Folglich läßt sich z.B. die topologische Summe zweier Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppen beide Ordnungen größer 2 besitzen, sicher nicht fasern. Als „einfachstes" Beispiel nennt Seifert die Summe zweier Exemplare von $S^1 \times S^2$, „die man aus einer vierfach gelochten Hypersphäre durch paarweise Zuordnung der Randkugelflächen (nach der ersten Art) erhält." (Seifert 1932, 210). Dagegen läßt sich die Summe zweier reeller projektiver Räume fasern. Andere Beispiele nicht-faserbarer Räume liefern die offenen, einfach-zusammenhängenden dreidimensionalen Räume sowie der hyperbolische Dodekaederraum.

Nach Art der Faserbarkeit kann man unterscheiden:

[78] Zur Homöomorphie dieser Mannigfaltigkeiten mit dem ursprünglichen Beispiel von Poincaré, das durch ein Heegard-Diagramm definiert war, vgl. man oben Anm. 49.

[79] Eine genauere Aussage macht der „Hauptsatz" aus Threlfall-Seifert 1933, 568; vgl. oben.

1. nicht-faserbare Mannigfaltigkeiten;
2. Mannigfaltigkeiten, die sich auf genau eine Art und Weise fasern lassen (z.B. Poincarésche Räume);
3. Mannigfaltigkeiten, die mehrere Faserungen zulassen (z. B. S^3, welche unendlich viele Faserungen tragen kann, die aber alle S^2 zur Zerlegungsfläche besitzen).

Im letzten Fall kann es sogar geschehen, daß eine Mannigfaltigkeit zwei Faserungen mit unterschiedlichen Zerlegungsflächen zuläßt. Dieses interessante Phänomen tritt beim Quaternionenraum auf, dessen Fundamentalgruppe zwei Elemente (nämlich -1 und i) enthält, die das bekannte, für gefaserte Räume charakteristische Transformationsverhalten zeigen. Die entsprechenden Zerlegungsflächen sind die 2-Sphäre und die projektive Ebene (Seifert 1932, 230f).

Die soeben ausführlich geschilderte Arbeit von Seifert sollte um 1980 herum wieder große Beachtung finden. Im Vorwort zur englischen Übersetzung von Seifert-Threlfall 1934 und Seifert 1932, die 1980 publiziert wurde, schreibt J.S. Birman:

> „In fact it could be said that Seifert anticipated the theory of geometric structures on 3-manifolds, as it is evolving at this writing."
>
> (Birman 1980, X)

Gemeint sind hiermit die Arbeiten von W. Thurston, welche große Fortschritte bezüglich der Kenntnis von 3-Mannigfaltigkeiten gebracht haben.[80] Birman nennt insgesamt fünf Entwicklungslinien, welche sich auf Seiferts große Arbeit von 1932 zurückführen lassen:

1. (wie bereits erwähnt) Untersuchung der geometrischen Struktur von 3-Mannigfaltigkeiten, insbesondere Definition von geometrischen Invarianten (vgl. unten 7);
2. Theorie der Faserbündel (bei Seifert: über Flächen);
3. Operationen von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten (bei Seifert: Untergruppen der sphärischen Bewegungsgruppe);
4. Untersuchung von Singularitäten von Mannigfaltigkeiten;
5. Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten in Seifert-gefaserte Räume und andere einfache Bestandteile.

Sie schließt mit folgender Bemerkung:

> „Seifert's paper is, in brief, a mathematical classic. We recommend it to graduate students and research mathematicians for its beauty, originality, clarity, and (...) freshness of ideas, as well as for insight into the historical foundations of mathematics."
>
> (Birman 1980, xi)

Im Zusammenhang mit der dreidimensionalen Topologie verdient schließlich noch die kurze Note „Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten" von H. Seifert Erwähnung, die wie die große Arbeit über gefaserte Räume im Jahr 1932 erschien. Dort wird folgender Satz bewiesen, den C.D. Papakyriakopoulos „a key theorem for 3-

[80] Vgl. hierzu etwa Meyerhoff 1992 oder Saldanha 1994 sowie unter historischer Perspektive (Anknüpfung an die hyperbolische Geometrie) Milnor 1982. Als Originalquellen sind zu nennen Thurston 1978 und Thurston 1982 (einen Überblick zu Thurstons Schaffen gibt Reitberger 1984). Eine sehr ausführliche Darstellung der Theorie der hyperbolischen Mannigfaltigkeiten mit historischen Hinweisen gibt Ratcliffe 1994.

manifolds" nennt, „relating an algebraic notion (the Betti number) with a geometric one (the genus)" (Papakyriakopoulos 1958, 331f):

> „In einer dreidimensionalen orientierbaren berandeten Mannigfaltigkeit R, deren Rand aus r (orientierbaren) Flächen vom Geschlecht $p_1, p_2, ..., p_r$ besteht, ist die Bettische Zahl der Dimension 1 größer oder gleich $p_1+p_2+ ...+p_r$."
>
> (Seifert 1932a, 609)

Der Beweis besteht im wesentlichen darin, zu zeigen, daß es in jeder Randfläche (den Fall, daß diese Sphären sind, kann man vorab erledigen) eine entsprechende Anzahl doppelpunktfreier geschlossener Kurven gibt, deren Homologieklassen unendliche Ordnung in der ersten Homologiegruppe von R besitzen.

Mit diesem kurzen Hinweis wollen wir das Werk von H. Seifert (und W. Threlfall) verlassen. Wie anfänglich schon bemerkt, fanden Seifert und Threlfall keine unmittelbaren Nachfolger. Das mag zum einen daran gelegen haben, daß der gewöhnliche euklidische und der sphärische Fall (letzterer durch Seiferts Theorie) abschließend beantwortet worden waren und daß im hyperbolischen Fall kaum Ansätze vorhanden waren, an die man hätte anknüpfen können (vgl. oben Anm. 47). Während die sphärischen Bewegungen auch und gerade vom geometrischen Standpunkt gut bekannt waren - was Seifert und Threlfall oft ausnutzten -, liegen die Verhältnisse bei den hyperbolischen Bewegungen sehr viel schwieriger. Andererseits ist die in Kapitel 7 eingehender dargestellte Algebraisierungstendenz zu nennen, welche im Laufe der 30er Jahre zu ersten Ansätzen einer Umorientierung in der topologischen Forschung führte, die dann vor allem in den USA und in Frankreich vollzogen wurde (man denke an Namen wie H. Cartan, S. Eilenberg, S. MacLane, N. Steenrod und natürlich an N. Bourbaki; kurz an die „Französische Revolution" [F. Hirzebruch]). Nicht zuletzt durch den Weltkrieg geriet die Topologie in Deutschland in eine isolierte Lage;[81] als diese dann wieder aufgehoben wurde durch den Gang der Weltgeschichte war die Umorientierung der Topologie außerhalb Deutschlands schon eine vollendete Tatsache und folglich das Interesse an geometrisch ausgerichteten Arbeiten zum Homöomorphieproblem (vorübergehend) stark zurückgegangen.

Versuchen wir zum Abschluß unserer ausführlichen Betrachtungen zum Werk von Seifert und Threlfall, noch einmal dessen Bedeutung zusammenzufassen, so muß zuerst einmal hervorgehoben werden, daß sich in diesem eine Synthese des kombinatorischen mit dem kontinuumstopologischen Programm anbahnt. Besonders in Seiferts großer Abhandlung von 1932 werden mengentheoretisch-topologische Probleme, etwa dasjenige der Topologisierung der Zerlegungsfläche, ausführlich behandelt. Kombinatorische Hilfsmittel werden dagegen nur noch selten herangezogen; sie haben keine grundlagentheoretische Bedeutung mehr. Auch den selbstverständlichen Einsatz algebraischer insbesondere gruppentheoretischer Mittel (auch im Rahmen der Homologietheorie) haben wir festgestellt. Insofern kann man sagen, daß die hier betrachteten Arbeiten schon weitgehend im Stile der

[81] Das wird recht deutlich in dem Bericht, welchen Seifert und Threlfall für die FIAT Reviews of German Science über die Topologie in den Jahren 1939 bis 1946 in Deutschland verfaßten. Der fragliche Artikel ist in fünf Untergruppen gegliedert, welche behandeln: A. Homöomorphieproblem, B. Knotenproblem, C. Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, D. Mengentheoretische Topologie und E. Topologisierung metrischer, konformer oder projektiver Eigenschaften (Seifert-Threlfall 1948, 239) - also neben mengentheoretisch-topologischen Fragestellungen hauptsächlich Probleme der klassisch-kombinatorischen Topologie.

modernen algebraischen Topologie verfaßt sind (vgl. 7). Was sie allerdings in die Problemtradition, welche hier behandelt wird, stellt, ist ihre leitende Fragestellung, nämlich das Homöomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten. Deshalb sind sie der vor-algebraisierten Topologie zuzurechnen, oder besser gesagt, der Theorie der Mannigfaltigkeiten und nicht der abstrakten algebraischen Topologie (vgl. 6). Seifert gelang es, bezüglich des Homöomorphieproblemes der 3-Mannigfaltigkeiten wesentliche Fortschritte zu erzielen; seine Theorie der gefaserten Räume war die erste ihrer Art, welche für eine gewisse Klasse von Mannigfaltigkeiten positive Ergebnisse lieferte, das heißt ein vollständiges System von Invarianten angeben konnte, so, daß die Übereinstimmung in diesen Invarianten die Homöomorphie der Mannigfaltigkeiten garantiert. Dabei war der Einbezug von Kenntnissen aus anderen Gebieten der Mathematik, vor allem aus der Geometrie, wichtig. Deshalb markieren die Arbeiten von Seifert und Threlfall eine neue, die disziplinäre Entwicklung der Topologie kennzeichnende Stufe (vgl. 8). Weiter fällt auf, wie konsequent Seiferts Theorie aus ihren Ursprüngen in der dreidimensionalen sphärischen Geometrie hervorgegangen ist; sie bestätigt die These (vgl. 8), daß sogenannte Beispiele beim mathematischen Fortschritt eine ganz entscheidende Rolle spielen können: Die allgemeine Theorie wird durch Abstraktion aus dem konkreten Beispielmaterial gewonnen, so etwa könnte man diese Einsicht formulieren.

Alles in allem scheint es mir nicht übertrieben, die Beiträge von Seifert und Threlfall einen Meilenstein in der Geschichte der dreidimensionalen Topologie zu nennen, was im Nachhinein noch einmal ihre ausführliche Berücksichtigung rechtfertigen mag.

Anhang: **Drei Aufgaben aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**

(Vorbemerkung: Die angegebenen Seitenzahlen beziehen sich auf den separat paginierten Teil des Jahresberichtes der Deutschen Mathematikervereinigung, der mit Aufgaben und Lösungen überschrieben wurde.)

> „84. Die Ordnung der Gruppe zu ermitteln, die von den drei Elementen A, B, C mit den wesentlichen Relationen $A^5 = B^2 = C^3 = ABC$ erzeugt wird.
>
> Dresden W. Threlfall."
>
> (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), 86)

Die fragliche Gruppe ist die binäre Ikosaedergruppe; Lösungen reichten Threlfall, Seifert, Rohrbach und van der Waerden ein (vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 41 (1932), 6-9).

> „124. Die Menge aller nichtorientierbaren Linienelemente (Inzidenzen Punkt-Gerade) der reellen projektiven Ebene ist eine dreidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit M. Was ist ihre Fundamentalgruppe?
>
> Leipzig B.L. v.d. Waerden"
>
> (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 41 (1932), 35).

Es handelt sich bei dieser Mannigfaltigkeit um den Quaternionenraum (vgl. Threlfall-Seifert 1931, 61 Anm. 30), folglich ist die fragliche Fundamentalgruppe die Quaternionengruppe (d.h. die multiplikative Gruppe der Einheiten im Quaternionenring). Lösungen von van der Waerden, Kneser, van Kampen und Threlfall finden sich im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 42 (1933), 112-117.

> „154. Hat eine dreidimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit eine Primzahl der Form 4x+3 zum einzigen Torsionskoeffizienten der Dimension 1, so ist sie asymmetrisch, d.h. sie läßt sich nicht mit Umkehrung der Orientierung topologisch auf sich abbilden."
>
> Dresden H. Seifert"
>
> (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 43 (1934), 2)

Ein Beweis von E.R. van Kampen findet sich im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 44 (1934), 56f. Zur Vorgeschichte dieses Problems vgl. man Seifert-Threlfall 1935, 326 Anm. 48. Die Aufgabe ist im übrigen identisch mit der Aufgabe 4 auf Seite 280 bei Seifert-Threlfall 1934.

5.3 Die Klassifikation der Linsenräume

Sieht man von der Sphäre und vom projektiven reellen Raum ab, so stellen die Linsenräume[82] die systematisch gesehen einfachsten, wenn auch historisch nicht ersten, geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten dar: Zu ihrem Aufbau muß man nur zwei „Seitenflächen" identifizieren, ihre Heegard-Diagramme liegen folglich auf dem Torus. Oder noch anders gesagt: Für einen kombinatorischen Aufbau der Linsenräume braucht man in jeder Dimension nur eine Zelle. Die Klassifikation der Linsenräume nach Homöomorphie wurde in der ersten Hälfte der 30er Jahre zu einem wichtigen Ziel topologischer Forschung, das mehrere Autoren angegingen. Dabei wurden vorhandene Invarianten verfeinert und weiterentwickelt; neue Invarianten entstanden. Auch hier zeigt sich wieder die große Bedeutung, welche interessante Beispiele als Ausgangspunkt und als Prüfsteine der Theorie spielen.

Alexander hatte 1919 durch komplizierte Homologiebetrachtungen gezeigt (vgl. 5.1.1), daß L(5,1) und L(5,2) nicht homöomorph sind. Dieses Argument wurde dann später von Alexander, Seifert u.a. durch Verwendung der Eigenverschlingungszahlen vereinfacht und dabei der abstrakte Kern der Argumentation herausgearbeitet. Es ergab sich folgende Einsicht:

> „Der Wertevorrat möglicher Eigenverschlingungszahlen von 1-Ketten einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist also eine topologische Invariante, die unter Umständen noch da Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden gestattet, wo das stärkste uns bisher bekannte Unterscheidungsmerkmal, die Fundamentalgruppe, versagt."
>
> (Seifert-Threlfall 1934, 279)

[82] Zur Definition der Linsenräume vgl. man 4.2 (ursprüngliche Form bei H. Tietze), 5.1.1 (Alexanders Heegard-Diagramm) und 5.2 (heute gängige Darstellung).

Allerdings stellte sich heraus, daß es auf die geschilderte Art und Weise schon nicht mehr möglich ist, zu entscheiden, ob L(7,1) und L(7,2) homöomorph sind (siehe unten).

Das Homöomorphieproblem der Linsenräume spielte eine gewisse Rolle in den Arbeiten von H. Seifert und W. Threlfall. Den Endpunkt[83] ihrer Bemühungen bildete der Satz:

> „Eine hinreichende Bedingung für die Homöomorphie zweier Linsenräume (p, q) und (p, q') ist das Bestehen der Kongruenz $qq' \equiv \pm 1 \bmod p$ und eine notwendige Bedingung die Lösbarkeit der Kongruenz $q' \equiv \pm qx^2 \bmod p$."
>
> (Threlfall-Seifert 1933, 551)

Die erste Bedingung wurde von den Autoren im Rahmen ihrer Theorie der Diskontinuitätsbereiche gewonnen. Dazu wiederum war es erforderlich, zu klären, (vgl. 5.2), wann zwei Gruppen sphärischer Bewegungen, welche zwei Linsenräume liefern, konjugierte Untergruppen in der Gruppe aller sphärischen Bewegungen sind („metrisch ähnlich sind").[84]

Die erstgenannte Bedingung zeigt beispielsweise, daß L(7,2) und L(7,3) homöomorph sind (wegen $2 \cdot 3 \equiv -1 \bmod 7$), sie erlaubt aber keine Aussage über das Verhältnis der Räume L(p, 1) und L(p, 2). Für p = 5 liefert - wie bereits erwähnt - das notwendige Kriterium eine Entscheidung: L(5,1) und L(5,2) sind nicht homöomorph. Dieses versagt aber schon bei L(7,1) und L(7,2), weil die Kongruenz $1 \equiv 2x^2 \bmod 7$ die Lösung x = 2 besitzt.

Den hiermit erreichten Stand der Dinge kommentierten Seifert und Threlfall in ihrem „Lehrbuch" folgendermaßen:

> „Es ist bezeichnend für die Schwierigkeit der dreidimensionalen Topologie, daß schon für diese einfachen Linsenräume das Homöomorphieproblem nicht gelöst ist,..."
>
> (Seifert-Threlfall 1934, 210)

Im Jahre 1936 gelang es dann K. Reidemeister, das Klassifikationsproblem der Linsenräume zu lösen, indem er zeigte, daß die Bedingung $qq' \equiv \pm 1 \bmod p$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für Homöomorphie ist. Reidemeisters Beweis ist ganz kombinatorisch gehalten; er verwendet einerseits die Überlagerungstheorie, andererseits die (modern gesprochen) Operation der Fundamentalgruppe - aufgefaßt als Decktransformationsgruppe - auf dem Z-Modul der Ketten der Überlagerung (bei Reidemeister heißt er „Homotopiering" [Reidemeister 1936, 104]).[85] Gestützt auf diese Überlegungen gelang es

[83] Weitere Stellen, wo Aspekte des Homöomorphieproblems für Linsenräume angesprochen werden, sind: Threlfall-Seifert 1931, 57-59 (Darstellung der Linsenräume in der heute üblichen Form), Seifert 1931, 57f (hinreichende Bedingung für Homöomorphie) und Seifert 1933, 824f (notwendige Bedingung für Homöomorphie in Gestalt der Eigenverschlingungszahlen).

[84] Eine etwas anders geartete, elementar gehaltene Herleitung der fraglichen Bedingung findet man in Seifert-Threlfall 1934, 215.
Einer Anmerkung in Seifert 1931, 57 Anm. 18 zufolge hatte H. Kneser einen Beweis für die hinreichende Bedingung für Homöomorphie ohne Verwendung von Diskontinuitätsbereichen gefunden, diesen aber nicht publiziert. Einen Beweis der fraglichen Bedingung, der nur Methoden der kombinatorischen Topologie verwendet, hat dann Goeritz 1932 erbracht.

[85] Eine knappe Charakterisierung der Reidemeisterschen Idee in moderner Sprache gibt J. Milnor als Einleitung zu seiner Arbeit „Whitehead Torsion", die als wichtiger Beitrag zu diesem Themenkreis gilt:
„In 1935, Reidemeister, Franz and de Rham introduced the concept of „torsion" for certain finite simplicial complexes. For example let X be a finite complex whose fundamental group $\pi_1 X$ is cyclic of order m. We can identify $\pi_1 X$ with the group of covering transformations of the universal covering complex $\hat{X}$.

Reidemeister dann, eine Bedingung dafür herzuleiten, wann zwei Linsenräume kombinatorisch äquivalent sind. Somit erhält man eine Lösung des topologischen Homöomorphieproblems, vorausgesetzt, die Hauptvermutung gilt für 3-Mannigfaltigkeiten. Die letztgenannte Schwierigkeit wurde allerdings von K. Reidemeister nicht angesprochen.

Auffallend an diesem Beweis, dessen komplizierte Einzelheiten wir hier übergangen haben, ist der relativ große Aufwand an „algebraischer Maschinerie", den er erfordert (Operation einer Gruppe auf einem Modul, Gruppenring,...). Dagegen spielen geometrische Ideen nur noch eine untergeordnete Rolle.

Die Untersuchungen von Reidemeister blieben weitgehend auf den dreidimensionalen Fall, insbesondere auf die Linsenräume beschränkt.[86] Sie wurden von W. Franz auf allgemeinere Situationen übertragen (Franz 1935), weshalb man heute auch von der Reidemeister-Franz-Torsion spricht. Bemerkenswert dabei ist, daß ein zentrales Ergebnis von W. Franz ein Satz ist, den man der Zahlentheorie zuzuordnen hat (Franz 1935, 251-254; vgl. Cohen 1973, 97). - wieder ein Hinweis darauf, daß der Fortschritt in der Mathematik oft in der Integration vorher unzusammenhängender Teilgebiete liegt (vgl. 8). Ähnliche Überlegungen wie W. Franz hat später auch G. de Rham angestellt (Rham 1939-40).

Genau genommen tritt die Reidemeister-Franz-Torsion, ihrem Wesen nach eine bis auf Multiplikation mit einer Einheitswurzel bestimmte ganze Zahl, explizit erst in Reidemeister 1935 auf. In der vorher geschriebenen, aber erst später gedruckten Klassifikation der Linsenräume (Reidemeister 1936) kommt sie explizit noch nicht vor. Es gilt aber:

> „Ferner sei hervorgehoben, daß die kürzlich angegebene Klassifikation der Linsenräume sich durch einfache Umformung der a. a. O. angestellten Überlegungen auf die Invarianz von A zurückführen läßt."
>
> (Reidemeister 1935, 173)

Die Reidemeister-Franz-Torsion spielte in etwas verallgemeinerter Form in der Konstruktion eines Gegenbeispieles zur Hauptvermutung in höheren Dimensionen, die J. Milnor 1961 angab (welche übrigens die Linsenräume L(7,1) und L(7,2) verwendete), eine wichtige Rolle (Milnor 1961).

Bemerkenswerterweise läßt sich diese Invariante nicht unmittelbar aus der Fundamentalgruppe ablesen; sie ist aber doch direkt von jener abhängig. Insofern widerlegt auch sie nicht Poincaré's Verdacht - wenn man dies so ausdrücken darf -, daß die Fundamentalgruppe im Falle geschlossener orientierbarer 3-Mannigfaltigkeiten alle topologisch wesentlichen Informationen enthalten könnte.

If $\pi_1 X$ operates trivially on the rational homology $H_*(\hat{X}; Q)$ then the torsion of X is defined as a certain collection of elements in the algebraic number field $Q[\exp(2\pi i/m)]$. This torsion is a kind of determinant which describes the way in which the simplexes of $\hat{X}$ are fitted together with respect to the action of $\pi_1 X$." (Milnor 1966, 358)
Eine ausführliche lehrbuchhafte Darstellung findet sich in Cohen 1973; eine kurze Darstellung in moderner Sprache gibt Dieudonné 1989, 242-246.

[86] Das liegt im wesentlichen daran, daß die Reidemeister-Franz-Torsion eine kombinatorische Invariante bei diesen Autoren ist, welche nur bei Änderungen im Bereich der 1- und 2-Zellen, der Kanten und Flächen also, unverändert bleibt. Bei Linsenräumen genügen aber solche Änderungen, da man hier immer nur mit einer 0- und einer 3-Zelle auskommt. Genauer gilt: „Nun kann man aber zwei Homotopiekettenringe über derselben Mannigfaltigkeit, welche beide nur je eine null- und dreidimensionale Basiskette enthalten, allein durch Erweiterungen erster und zweiter Stufe ineinander überführen" (Reidemeister 1935, 173).

Erwähnt sei abschließend noch, daß de Rham 1931 die Konstruktion der Linsenräume auf höhere Dimensionen verallgemeinert hat und daß die Betrachtung von Torsionen später von J.H.C. Whitehead wieder aufgegriffen wurde, was dann zur sogenannten Whitehead-Torsion führte.[87] Letzterer war es auch, der 1941 eine Klassifikation der Linsenräume bezüglich Homotopieäquivalenz[88] vorlegte: $L(p,q)$ und $L(p,q')$ sind dann und nur dann homotopieäquivalent, wenn $qq' \equiv x^2 \mod p$ für eine natürliche Zahl x (Whitehead 1941, 1230-1233) gilt. Die von Seifert-Threlfall entdeckte notwendige Homöomorphiebedingung charakterisiert also in Wirklichkeit die Homotopieäquivalenz, was insbesondere ihre Notwendigkeit erklärt. Mit Whiteheads Beobachtung war auch die gelegentlich als Hurewicz-Vermutung bezeichnete Frage, ob zwei homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten immer auch homöomorph seien (vgl. 5.4), geklärt.

S. Eilenberg widmete in seiner Übersicht zu Problemen der Topologie (Eilenberg 1949) den Linsenräumen einen Abschnitt. Dabei machte er darauf aufmerksam, daß K. Reidemeisters Klassifikation eine kombinatorische sei und fragte nach deren topologischer Geltung, insbesondere „Is the Reidemeister notion of „torsion" a topological invariant?" (Eilenberg 1949, 247). Diese Probleme wurden mit den schon mehrfach erwähnten Arbeiten von E.E.Moise zur Hauptvermutung und zur Triangulierbarkeit in der Dimension 3 erledigt. Darüber hinaus gelang es 1954 E. Brody, einem Schüler von R.H. Fox, in seiner Dissertation eine topologische Klassifikation der Linsenräume unabhängig von den Ergebnissen Reidemeisters vorzulegen (vgl. Massey 1955, 352).

Die Linsenräume bilden bis heute eine wichtige Klasse von Beispielen geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten: „These spaces are fascinating in their own right and will supply examples on which to make the preceding theory concrete", urteilt Cohen in seinem Buch über den einfachen Homotopietyp (Cohen 1973, 85).

Systematisch (vom Standpunkt der Heegard-Diagramme gesehen) sind nächst den Linsenräumen diejenigen geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten am einfachsten, die Heegard-Diagramme auf der Brezelfläche, also vom Geschlecht zwei, besitzen (wobei sich natürlich das Geschlecht nicht verringern lassen darf). Ansätze zu deren systematischer Untersuchung, die allerdings bis heute nicht zu abschließenden, dem Fall des Geschlechts eins vergleichbaren Resultaten geführt haben, finden sich ebenfalls Mitte der 30er Jahre. Das entsprechende Stichwort lautet: Untersuchung von Systemen geschlossener Kurven auf Flächen vom Geschlecht zwei. Diese war bereits von Poincaré im 5. Komplement im Zusammenhang mit dem Dodekaederraum angegangen worden (vgl. 3.4 oben) und wurde nun von Reidemeister und von Goeritz wiederaufgenommen (vgl. Goeritz 1933 und Reidemeister 1933). Allerdings gelang es nicht, wesentliche Fortschritte - also insbesondere die Klassifikation der Heegard-Diagramme vom Geschlecht zwei - zu erzielen. Es zeichnete sich aber eine neue Dimension in diesen Untersuchungen insofern ab, als die später (1938) von Dehn eingeführte Abbildungsklassengruppe im Spezialfall in den Blick geriet. Reidemeister schrieb hierzu: „Alle diese Fragen hängen aufs engste mit der Automorphismengruppe der Wegegruppe einer Fläche vom Geschlecht 2 zusammen,..." (Reidemeister

[87] Zu diesen beiden Themenkreisen vgl. man Dieudonné 1989, 242 und 372-384. Als einschlägige Arbeit zum Thema „Whitehead-Torsion" gilt die bereits zitierte Arbeit Milnor 1966.

[88] Dieser Begriff geht auf W. Hurewicz (Hurewicz 1936, 125) zurück; vgl. 5.4. Im übrigen korrigierte Whitehead hier ein falsches Ergebnis, das er zwei Jahre zuvor publiziert hatte (Whitehead 1939a, 83) und das lautete: Zwei Linsenräume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie kombinatorisch äquivalent sind, also - da die Hauptvermutung in dieser Dimension gilt - wenn sie homöomorph sind.

1933, 194), um dann Dehn, Baer und Goeritz zu erwähnen. Die Untersuchung der Abbildungsklassengruppe wurde von Dehn in einem Vortrag zu Breslau 1922 angeregt (vgl. Dehn 1987, 234-252), geht aber im Spezialfall des Torus - hier ist die Abbildungsklassengruppe gerade $SL(2,\mathbb{Z})$ - bereits auf die Beschäftigung mit elliptischen Funktionen im 19. Jahrhundert zurück (vgl. Stillwell 1993, 206); sie spielte im Werk von J. Nielsen und in dem von R. Baer eine wichtige Rolle. Die topologische Bedeutung dieser Gruppe liegt darin, daß sie aufgefaßt als Gruppe der Isotopieklassen der Diffeomorphismen einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht g in sich, einen Überblick gibt zu den Möglichkeiten, zwei derartige Flächen miteinander zu identifizieren. Andererseits hängt diese Gruppe eng mit den Automorphismen der Fundamentalgruppe zusammen: Sie ist deren Faktorgruppe nach dem Normalteiler der inneren Automorphismen. Somit hat diese Gruppe auch interessante algebraische Aspekte.

Insofern stellte diese Gruppe ein bemerkenswertes Beispiel für einen Prozeß dar, den man als sukzessive Anreicherung des Gehaltes bezeichnen könnte. Sie entstammt ursprünglich dem topologischen Kontext (Identifikation von Henkelflächen), erweist sich dann als enge Verwandte der Fundamentalgruppe (Festlegung der Homöomorphismen durch Kurvensysteme), um schließlich eine rein algebraische Chrakterisierung (Automorphismen der Fundamentalgruppe) zu erfahren.

Zusammenfassend zu diesem Abschnitt über die Linsenräume können wir festhalten, daß diese Objekte von großer Konstanz in der Geschichte der dreidimensionalen Topologie gewesen sind. In Andeutungen reichen sie bis auf Dyck und Heegard zurück, wurden dann systematisch von Tietze behandelt, lieferten Alexander sein Gegenbeispiel und erfuhren in den 30er Jahren eine vollständige Klassifikation, gewissermaßen das lokale Pendant der ursprünglich erstrebten allgemeinen Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten. Aber auch in den 60er fanden sie noch Verwendung bei Milnors Gegenbeispiel zur Hauptvermutung. Kurz: Die Linsenräume gehören zum festen Beispielbestand der dreidimensionalen Topologie, deren Reichtum noch keineswegs erschöpft sein muß.

5.4 Versuche mit der Poincaré-Vermutung

Nach 1930 tauchten zum ersten Mal Arbeiten auf, bei denen die Poincaré-Vermutung eine zentrale Rolle spielte. Vorher - so haben wir gesehen - wurde diese bestenfalls als Spezialfall des allgemeinen Homöomorphieproblems gesehen und als solcher behandelt. In den 30er Jahren wurde die Bezeichnung „Poincaré-Vermutung" zu einem stehenden Begriff in der Topologie - durchaus ein Hinweis auf die große Bedeutung, die man nun diesem Problem beizumessen begann.[89]

[89] Als frühe Belegstellen zur Poincaré-Vermutung seien hier zwei Zitate - eines aus Kerekjártós Buch zur Flächentopologie (1923) und eines aus Knesers Abhandlung (1925) - angeführt:
„Eine Vermutung von Poincaré besagt die Umkehrung davon: jede geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit der Identität als Fundamentalgruppe ist der vierdimensionalen Kugeloberfläche homöomorph." (Kerekjártó 1923, 12)
Man beachte, daß hier - historisch nicht ganz zutreffend - von Vermutung die Rede ist (vgl. 3.4).

Die beiden Abhandlungen, welche hier gemeint sind, sind „Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes" (1931) von Felix Frankl (ein in Moskau arbeitender Schüler von L. Vietoris übrigens) und „Certain theorems about three-dimensional manifolds (I)" von John Constantine Henry Whitehead (1934).

Dabei ist Frankls Beitrag unter anderem deshalb bemerkenswert, weil er verschiedene Ansätze zur Lösung des „Poincaréschen Problems" (wie er - eigentlich zutreffend historisch gesehen - die Poincaré-Vermutung nennt) diskutierte und zeigte, warum der jeweilige Weg nicht gangbar ist. Hierzu ging er - ganz ähnlich wie zuvor Poincaré (vgl. 3.2) - davon aus, daß die geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, die es zu untersuchen gilt, durch Randidentifikationen aus einem „Raumelement" entsteht. Auf diese Weise erhält man aus einem kombinatorischen Aufbau des Raumelementes (Ecken, Kanten, Flächen, eine 3-Zelle) einen der Mannigfaltigkeit. Das Bild des Randes dieses Raumelementes (also Ecken, Kanten und Flächen) ist dann ein zweidimensionaler Unterkomplex in der entstehenden 3-Mannigfaltigkeit, von dem gesagt wird, daß er diese „darstelle" (Frankl 1931, 357).

Der erste, von Frankl diskutierte Zugang zum Poincaréschen Problem [„..., ob jede geschlossene einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit der dreidimensionalen Sphäre homöomorph ist." (Frankl 1931, 358)], stützt sich auf die Betrachtung speziell gearteter Kanten des Komplexes: Es geht um solche Kanten, die nur im Rand einer einzigen zweidimensionalen Zelle auftreten, weshalb wir sie einfache Kanten[90] nennen wollen.

Angenommen, es gelte nun die Aussage „jeder einfach zusammenhängende zweidimensionale Komplex, der eine 3-Mannigfaltigkeit darstellt, enthält einfache Kanten", so ließe sich die Poincaré-Vermutung folgendermaßen beweisen:[91] Man nehme aus einem derartigen Komplex eine einfache Kante nebst derjenigen offenen Zweizelle weg, in deren

„Eine der wichtigsten und nächstliegenden Fragen ist noch unbeantwortet, nämlich die Frage, ob der sphärische Raum die einzige geschlossene einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist,..." (Kneser 1925, 128)

(Dagegen sprach Kneser 1928 dann von einer „bekannten Vermutung" (Kneser 1929, 257).).

Schon H. Tietze (vgl. Tietze 1908, 112 Anm. 2) und M. Dehn (vgl. Dehn 1910, 139) hatten auf diese „unentschiedene Frage" (Tietze) bzw. auf dieses „wichtige Problem" (M. Dehn) hingewiesen; in seinem Topologiebuch von 1922 erwähnte O. Veblen diese von Poincaré aufgeworfene Frage - allerdings ohne deren Urheber zu nennen - als noch offenes Problem und wies auf dessen Relevanz für die Überlagerungstheorie hin (Veblen 1931, 155).

Auf entsprechende Stellen im „Lehrbuch der Topologie" wurde schon weiter oben (vgl. 5.2 Anmerkung 28) eingegangen; bemerkenswert ist aber auch noch die folgende Aussage dieser Autoren, die besonders klar macht, in welcher Richtung sie die Lösung des Problemes vermuteten: „In drei Dimensionen ist wahrscheinlich die 3-Sphäre der einzige homogene endliche Komplex (Poincarésche Vermutung)" (Seifert-Threlfall 1934, 157). Wie der Kontext zeigt, ist hier zusätzlich „einfach-zusammenhängend" vorauszusetzen. Auch P. S. Alexandroff und H. Hopf heben in der Einleitung zu ihrem gemeinsamen Buch das Klassifikationsproblem hervor und betonen: „Schon Poincaré hat es in Angriff genommen, aber bis heute ist nicht einmal die Richtigkeit der folgenden Poincaréschen Vermutung entschieden:..." (Alexandroff-Hopf 1935, 16)

90 Bei Frankl heißen sie schlicht „Kanten" (Frankl 1931, 359).

91 Aus einem derartigen Komplex ergibt sich stets eine dreidimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit (vgl. Frankl 1931, 357f).

Rand die fragliche Kante liegt. Es ergibt sich erneut ein Komplex,[92] welcher dieselbe Mannigfaltigkeit erzeugt wie der ursprüngliche. Dieser ist - so unterstellt der Verfasser (das Wegnehmen einer zu einer freien Kante gehörigen 2-Zelle ändert den Homotopietyp der Mannigfaltigkeit nicht, da dieser Vorgang eine starke Deformationsretraktion festlegt) - wieder einfach-zusammenhängend, weshalb er nach der Generalhypothese ebenfalls eine einfache Kante enthalten muß. Diese entferne man wieder nebst dem Inneren der 2-Zelle, in deren Rand sie liegt, und so weiter. Schließlich landet man bei einem einfach-zusammenhängenden eindimensionalen Komplex, den man durch Weglassen von Endstrecken - also solchen mit einem freien Endpunkt - letztlich auf einen Punkt reduzieren kann. Da dieser ebenfalls die fragliche Mannigfaltigkeit darstellen soll und die 3-Sphäre die einzige 3-Mannigfaltigkeit ist, welche durch einen Punkt darstellbar ist, würde folgen, daß diese die einzige einfach-zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist.[93]

Um diesen Ansatz zu widerlegen, genügt es, zu zeigen, daß es einen zweidimensionalen einfach-zusammenhängenden Komplex gibt, welcher keine einfache Kante enthält.

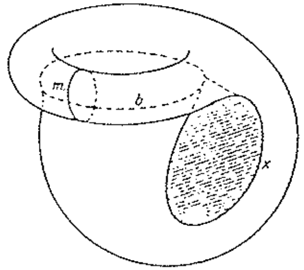
Dieser wird folgendermaßen konstruiert (Frankl 1931, 361f): Man nehme einen Torus, aus dem man eine topologische Kreisscheibe, berandet durch die topologische Kreislinie k, herausgenommen hat („gelochter Torus"). Auf dem Torus werde ein Meridian m und eine Parallele b gewählt, welche zu k disjunkt liegen. Weiter nehme man einen Zylinder, der durch die topologischen Kreislinien k' und b' berandet werde. Nun identifiziere man b mit b', k mit k', verhefte also, anders gesagt, den gelochten Torus und den Zylinder entlang dieser Linien. Das entstehende Gebilde ist natürlich keine Mannigfaltigkeit, wohl aber ein Komplex. In diesem gibt es bis auf Homotopie nur noch zwei nicht-nullhomotope geschlossene Kurven: den Meridian m von oben und eine einfache Kurve x, welche den Zylindermantel durchläuft, um anschließend die beiden Randpunkte des Zylinders, welche Anfangs- und Endpunkt von x sind, auf dem Torus miteinander zu verbinden.

Nun spanne man in m und x jeweils ein Elementarflächenstück ein, wodurch auch diese Kurven (und damit alle ihnen homotope) nullhomotop werden. Folglich erhält man einen einfach-zusammenhängenden Komplex, der keine einfachen Kanten aufweist.

92 Dabei kann es aber vorkommen, daß zur Erhaltung der 3-Mannigfaltigkeit auch nicht im Rand von Flächen gelegene Kanten oder Punkte (sozusagen „freie Kanten bzw. Punkte") identifiziert werden müssen. Anders gesagt ist nicht mehr notwendig die Homogenität der Oberfläche eines Raumelements gegeben.

93 Diese Vorgehensweise ist für triangulierte geschlossene Flächen wohlbekannt, entspricht sie doch der Art und Weise, wie A. L. Cauchy den Eulerschen Polyedersatz bewiesen hat (vgl. Lakatos 1977, 7f).

Heute spricht man von „elementaren (simplizialen) Kollabierungen" (Cohen 1973, 3 oder Rourke-Sanderson 1982, 39); kann man einen simplizialen Komplex K durch endlich viele elementare Kollabierungen in einen Komplex L überführen, so besitzen K und L denselben einfachen Homotopietyp (J. H. C. Whitehead, auf den diese Theorie zurückgeht (vgl. Whitehead 1939) sprach ursprünglich davon, daß K und L denselben „Kern" besäßen). Hieraus folgt insbesondere, daß K und L auch vom selben Homotopietyp sind. Die Umkehrung dieser Überlegung gilt nur dann, wenn ein bestimmtes Hindernis in der Whitehead-Gruppe $Wh(\pi_1(K))$ verschwindet (vgl. Rourke-Sanderson 1982, 107). Der Zusammenhang mit dem Schälprozeß, der einen Spezialfall des einfachen Homotopietyps darstellt, wird in Rourke-Sanderson 1982, 40f diskutiert.



Das soeben konstruierte Beispiel diente Frankl auch dazu, seinen zweiten Satz zu beweisen. Dieser beschäftigte sich mit Heegard-Diagrammen und der Frage, inwieweit man das Kurvensystem, das die Anheftung im Falle einer einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit regelt, in eine näher zu charakterisierende kanonische Lage bringen kann (Frankl 1931, 358f). Gelänge dieses, so würde dies einen Beweis der Poincaré-Vermutung liefern.[94] Hier knüpfte Frankl an Überlegungen Poincaré's am Ende des 5. Komplements an (Poincaré VI, 498).

Der genannte Satz läßt sich auch gruppentheoretisch interpretieren; er macht dann eine Aussage über die Nichtexistenz eines bestimmten Automorphismus in der Fundamentalgruppe orientierbarer Flächen. Die Frage nach solchen Automorphismen wurde - wie bereits (vgl. 5.3) erwähnt - etwas später von M. Dehn wieder aufgegriffen im Zusammenhang mit der von ihm eingeführten Abbildungsklassengrupe (Dehn 1939); frühere Arbeiten hierzu stammen von J. Nielsen und R. Baer (Baer 1927, 1928 und 1928a). Allerdings haben sich diese Gruppen bis heute einer vollständigen Klärung entzogen: Die algebraischen Probleme sind hier bislang nicht einfacher zu bewältigen als die topologischen, die man in sie übersetzt.

Schließlich wurde das oben geschilderte Beispiel von Frankl noch zum Beweis des folgenden Satzes herangezogen, der zeigt, daß der entsprechende „Weg zur Lösung des Homöomorphieproblems des dreidimensionalen Elements ungangbar ist" (Frankl 1931, 360):

> „Man kann eine simpliziale Zerlegung des E^3 angeben, so daß für kein einziges Tetraeder T der Zerlegung der Komplex $E^3 \setminus T$ mit einem dreidimensionalen Element homöomorph ist."
>
> (Frankl 1931, 361)

Insgesamt ist Frankls Artikel ein interessantes Dokument für die Beschäftigung mit der Poincaré-Vermutung - und dazu noch das erste publizierte seiner Art. „In dieser Note stelle ich einige merkwürdige Tatsachen aus der Topologie des dreidimensionalen Raumes zusammen, auf die ich bei mißglückten Versuchen, das Homöomorphieproblem der dreidimensionalen Sphäre zu lösen, gestoßen bin, und welche die große Schwierigkeit dieses Problems erklären." (Frankl 1931, 357). Bemerkenswert ist auch die Idee, die Poincaré-Vermutung in ein äquivalentes gruppentheoretisches Problem zu übersetzen, ein Ansatz, der auch heute noch aktuell ist (vgl. Chandler-Magnus 1982, 178), wobei durchaus ähnliche Überlegungen wie bei Frankl auftreten.[95]

[94] Dies ist allerdings nur modulo Dehnsches Lemma richtig, von dem Frankl bemerkte, daß es bis dahin unbewiesen geblieben sei (Frankl 1931, 359 Anm. 9).
Zum Beweis des Satzes ist es natürlich erforderlich, den oben eingeführten Komplex zu einer Heegard-Zerlegung der durch ihn dargestellten Mannigfaltigkeit zu modifizieren (vgl. Frankl 1931, 359). Im übrigen gilt Frankls Satz erst für Heegard-Zerlegungen vom Geschlecht größer/gleich 3.

Die andere Grundidee Frankls, welche man als kontrollierte Vereinfachung eines simplizialen Komplexes bezeichnen könnte, tauchte schon etwas früher bei den Grundlegungsversuchen von J. W. Alexander und M. H. A. Newman für eine kombinatorisch aufgebaute Topologie auf (vgl. Alexander 1930) - wenn auch mit anderer Zielsetzung. Sie wurde Ende der 1950er Jahre wieder aufgegriffen von B. J. Sanderson (in Sanderson 1957) und von M. E. Rudin (in Rudin 1958) und ging in modifizierter Weise in J. H. C. Whiteheads Theorie des einfachen Homotopietyps ein. Letztere wurde ursprünglich von Whitehead für simpliziale Komplexe entworfen (Whitehead 1939); wirklich erfolgreich wurde sie aber erst nach der Einführung (1949) der CW-Komplexe durch Whitehead, da in diesen die Verhältnisse wesentlich übersichtlicher sind (insbesondere kommt man mit wesentlich weniger Bausteinen aus). Vgl. Cohen 1973, 2-4.

Im Jahre 1934 veröffentlichte der schon erwähnte J.H.C. Whitehead seine Arbeit „Certain theorems about three-dimensional manifolds (I)", die einen fehlerhaften Beweis der Poincaré-Vermutung enthielt.[96]

[95] Frankls Arbeit wird heute noch gelegentlich genannt (so z.B. bei Bing 1964, 108, Stillwell 1993, 245 und Dehn 1987, 281), weil das zuletzt genannte Beispiel das erste Beispiel einer Triangulierung der dreidimensionalen Kugel darstellt, welche „unshellable" [etwa: nicht schälbar] ist, Erwähnung findet Frankls Gegenbeispiel auch bei Kampen 1941, 312 Anm. 2 und bei Sanderson 1957, 917.
Die moderne Definition von „shellable" lautet so:
„A triangulation of a fake cube can be shelled if the 3-simplexes of the triangulation can be ordered s_1, s_2, ..., s_n such that for each $k \leq n$ $s_k + s_{k+1} + ... + s_n$ is a fake cube." (Bing 1964, 107).
[Ein „fake cube" ist ein triangulierter Würfel, aus dem ein inneres 3-Simplex herausgenommen wurde.]
Die Bedeutung dieses Begriffes für den hier interessierenden Zusammenhang liegt u.a. in dem folgenden von Sanderson 1957 bewiesenen Satz:
„A necessary and sufficient condition for a 3-manifold M to be a 3-sphere is that it have a cellular decomposition into a finite number of 3-cells C_i (i = 1, 2, ..., n) such that for i = 2, 3, ..., n-1 C_i is free in $Cl[M - \bigcup C_i]$." (Sanderson 1957, 921f)
Dabei heißt eine n-Zelle C frei in einer berandeten n-Mannigfaltigkeit M, wenn $C \cap \partial M$ homöomorph der (n-1)-Zelle ist. In Frankls Beispiel kann also der Schälprozeß gar nicht erst beginnen. Das heute gängigste Beispiel für eine nicht-schälbare simpliziale Zerlegung der E^3 ist das von R. H. Bing angegebene „Haus mit zwei Zimmern" (Bing 1964, 108f - vgl. auch Stillwell 1993, 245f). W. B. R. Lickorish hat eine nicht-schälbarer Triangulierung der S^3 gefunden (vgl. Stillwell 1993, 245). Im übrigen tritt beim „Schälen" die oben (vgl. Anm. 93) angesprochene Analogie zu Cauchys Beweis des Polyedersatzes ganz deutlich hervor.

[96] Es ist wohl nicht übertrieben zu sagen, daß J.H.C. Whitehead (1904-1960) zu einem der bedeutendsten Topologen unseres Jahrhunderts werden sollte. Eine Würdigung seines Schaffens gibt John Milnor in Milnor 1962. Dort heißt es zu der hier interessierenden Arbeit:
„Throughout his life, Whitehead retained a deep interest in the very difficult problems which center around the Poincaré conjecture. He published an incorrect proof of this conjecture in 1934, but discovered his mistake shortly afterwards.(...) Perhaps this experience contributed towards the extreme conscientiousness which marks his later work." (Milnor 1962, xxiii)
Im übrigen ist mir neben Whiteheads fehlerhaftem Beweis nur noch ein weiterer Fall bekannt, daß ein derartiger „Beweis" in einer Fachzeitschrift wirklich gedruckt wurde (Koseki 1958 [vgl. Bing 1964,

Whiteheads Arbeit beginnt mit einer relativ langen historisch gehaltenen Einleitung, in der u.a. Poincaré und Alexander genannt werden. Die Konklusion lautet:

> „Thus in terms of bounding relations one cannot analyse the topology of three-dimensional spaces closely enough to isolate the 3-sphere (...), while more general spaces cannot be isolated in terms of their groups. The question still remained whether or no the 3-sphere is the only closed manifold in which every circuit is deformable into a point.
> As far as combinatorial analysis situs is concerned, this question is answered in the affirmative by our Theorem 3."
>
> (Whitehead 1934, 309)

Whiteheads Beweis beruhte auf dem folgenden falschen Satz (dabei ist unter einer „fundamental region" ein Teilraum von S^3 zu verstehen, welcher lokal homöomorph ist zu der fraglichen 3-Mannigfaltigkeit):[97]

> „No continuous curve joining distinct vertices in a fundamental region for an unbounded three-dimensional manifold corresponds to a circuit which is homotopic to zero."
>
> (Whitehead 1934, 319)

Ist darüber hinaus die fragliche Mannigfaltigkeit zusätzlich noch einfach-zusammenhängend, so ergibt sich, daß der „Fundamentalbereich" ganz S^3 ist und daß diese der Mannigfaltigkeit homöomorph ist: „Any finite, unbounded three-dimensional manifold, whose group ist null, is a 3-sphere." (Whitehead 1934, 319)

Whitehead hat rasch seinen Fehler bemerkt: Die Arbeit wurde am 1. August 1934 eingereicht, die Korrektur am 8. Januar des nachfolgenden Jahres. Er mußte erkennen, daß die Konstruktion seiner „verallgemeinerten Überlagerungsabbildung", wie man diese nennen könnte, unkorrekt war. Weiter konnte er durch ein Gegenbeispiel zeigen, daß der fragliche

124f]). Der ebenfalls inkorrekte Beweis von Rourke und Rego (1986) kursierte nur als Preprint (vgl. Taubes 1987 sowie 7. unten). Einige allgemeine Andeutungen bezüglich zweier 1957 am Institute for Advanced Study in Princeton kursierender Beweise gibt Bing 1964, 124. Einen fehlgeschlagenen nicht an die Öffentlichkeit gelangten Versuch gesteht Stallings 1966 (wie vor ihm schon Frankl [siehe oben]) ein. Fama behauptet, daß es noch mehrere ähnliche Fälle gegeben haben soll, eine Behauptung, die ich bislang noch nicht verifizieren konnte. Insgesamt scheinen die Mechanismen der Kritik im Bereich der Mathematik doch sehr gut zu greifen.

Zur Rolle, welche das Werk von Whitehead im Rahmen der geometrischen Topologie spielte, vergleiche man die folgende Feststellung, die aus einer biographischen Note zu J.H.C. Whitehead aus der Feder von M.H.A.Newman und Barbara Whitehead stammt:

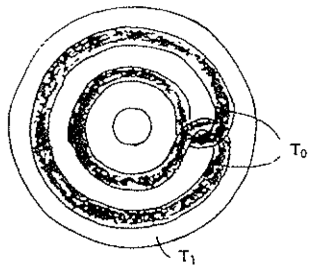
„But about 1955 there was a revival in the more geometrical kind of topology in which he had first worked. He was delighted to find that the youngest generation of topologists, to whom these brilliant new discoveries are due, had found in his work of the 1930's just the theorems they needed as a foundation for their work." (Newman-Whitehead 1962, xviii)

[97] Dieser falsche Satz verallgemeinert die Situation bei universellen Überlagerungen: Ist $\tilde{M}$ die universelle Überlagerung von M (M z. B. eine Mannigfaltigkeit) und ist P die Faser über dem Grundpunkt von M, so gilt, daß kein Weg, der zwei verschiedene Punkte dieser Faser miteinander verbindet, durch die Überlagerungsabbildung auf einen nullhomotopen Weg abgebildet wird. Das ist u.a. deshalb der Fall, weil ein solcher Weg eine Decktransformation liefert, die nicht dem neutralen Element der Fundamentalgruppe entspricht.

Da $\tilde{M}$ für zusammenhängendes M insbesondere zusammenhängend ist, folgt, daß die universelle Überlagerung eines einfach-zusammenhängenden Raumes homöomorph zu diesem sein muß.

Satz - der den oben zitierten Satz als Spezialfall impliziert - falsch ist. Damit war klar, daß sich der Satz und damit wohl Whiteheads Ansatz insgesamt nicht retten läßt.[98]

Im gleichen Jahr 1935 lieferte Whitehead aber noch ein anderes, im Zusammenhang mit der Poincaré-Vermutung interessantes Ergebnis. Er konnte nämlich zeigen, daß es eine offene einfach-zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit M gibt, deren zweite Homologiegruppe trivial ist und die keinen Rand aufweist, welche aber nicht dem R^3 homöomorph ist (Whitehead 1935).[99] Die fragliche Mannigfaltigkeit ergibt sich als unendliche Vereinigung von Volltori T_i, wobei T_0 und T_1 gemäß der nachstehenden Abbildung ineinander liegen:



Erster Schritt in der Konstruktion von Whitehead's Beispiel

Ist h: $R^3 \to R^3$ der Homöomorphismus, für den $h(T_0) = T_1$ gilt, so definiere man für i = 2,3,... die Tori T_i als $h^i(T_0)$ und nehme für M die unendliche Vereinigung aller dieser T_i. Der entstehende Raum ist einfach-zusammenhängend, da jeder geschlossene Weg infolge seiner Kompaktheit ganz in einem Volltorus $T_n \subset T_{n+1}$ liegen muß und deshalb in T_{n+1} nullhomotop ist.[100]

Die Poincaré-Vermutung spielte schließlich auch in W. Hurewicz' Artikelserie (Hurewicz 1935 und 1935a, Hurewicz 1936 und 1936a), welche durch die Einführung der höheren Homotopiegruppen sowie durch wichtige Sätze über diese (insbesondere der Hurewicz-Isomorphismus ist hier zu nennen) bekannt geblieben ist, eine gewisse Rolle.

[98] Es stellt sich heraus, daß die Whiteheadsche Konstruktion zu einer Abbildung zwischen Fundamentalbereich und Mannigfaltigkeit führt, welche mit Ausnahme bestimmter Verzweigungskurven 1-1 ist (vgl. Whitehead 1935).

[99] Man kann sogar darüber hinaus beweisen, daß die entstehende 3-Mannigfaltigkeit zusammenziehbar ist (Hempel 1976, 156f). Da sich S^3 aus R^3 durch Einpunktkompaktifizierung ergibt, könnte man hoffen, aus der Whitehead-Mannigfaltigkeit durch denselben Prozeß ein Gegenbeispiel zur Poincaré-Vermutung zu gewinnen. Es stellt sich aber heraus, daß die Einpunktkompaktifizierung in diesem Falle keine Mannigfaltigkeit liefert (Hempel 1976, 157).

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich folgende Charakterisierung der S^3 von Bing (Bing 1958): Es sei M eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, daß jede einfach geschlossene Kurve in M schon in einer 3-Zelle in M liegt. Dann ist M homöomorph S^3 (vgl. Hempel 1976, 157f oder Haken 1968, 64f).

[100] Genauere Ausführungen findet man bei Haken 1968, 63-65.

„Es sei noch auf die Beziehungen zu der Poincaréschen Vermutung hingewiesen, nach der unter den n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten M_n die Sphäre S_n charakterisiert sei durch das Verschwinden der Fundamentalgruppe und der Homologiegruppen bis auf die n-te."

(Hurewicz 1935a, 523)

Was Hurewicz hier formuliert - und zwar korrekt -, ist nicht nur die klassische aufs Dreidimensionelle beschränkte ursprüngliche Frage Poincaré's, sondern auch schon deren Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen (vgl. 7). Er bietet dann zwei der Poincaré-Vermutung äquivalente Aussagen an:

„1.Eine M_n, in der jede echte abgeschlossene Menge zusammenziehbar ist, ist mit S_n homöomorph.

2.Lässt sich S_n auf M_n stetig mit dem Grad 1 abbilden, so ist M_n mit der S_n homöomorph."

(Hurewicz 1935a, 523)

Diese Ergebnisse werden in dem Referat der Hurewiczschen Arbeiten von 1935, welches E. Pannwitz - eine Schülerin von M. Dehn - für das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" verfaßte, ausdrücklich erwähnt (sogar wörtlich zitiert, ein Zeichen dafür, daß man der Poincaré-Vermutung allmählich große Bedeutung beimaß - vgl. Pannwitz 1935).

Auch die schon in 5.3 angesprochene sogenannte Hurewicz-Vermutung (vgl. Smale 1963, 132), welche eigentlich eine Frage war, wurde von ihrem Urheber im Zusammenhang mit der Poincaréschen aufgeworfen:

„Es erhebt sich die Frage: Unter welchen Voraussetzungen lässt sich aus der Gleichheit des Homotopietypen die Uebereinstimmung der topologischen Typen folgern. Beispielsweise: Sind zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten vom gleichen Homotopietypus immer homöomorph? Aus der positiven Beantwortung der letzten Frage würde sich sofort die Richtigkeit der Poincaréschen Vermutung ergeben, denn nach dem obigen hat eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe und Homologiegruppe bis auf die letzte leer sind, den Homotopietypus der n-Sphäre."

(Hurewicz 1936, 125f)

Die von Hurewicz hier angedeutete Chance zur Lösung der Poincaré-Vermutung wurde von J. H. C. Whitehead fünf Jahre später zunichte gemacht (vgl. 5.3). Es ist aber charakteristisch für die zentrale Stellung, welche die Poincaré-Vermutung damals schon einnahm, daß Hurewicz hier darüber nachdenkt, was seine Ergebnisse zur Bewältigung eben jener Schwierigkeiten bringen könnten.

Schließlich sei noch die Dissertation „Über die topologische Struktur der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, insbesondere der Sphäre" erwähnt, die E. Schottland 1934 der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät der Universität Heidelberg vorlegte. Betreut wurde diese von A. Rosenthal.[101] In dieser Arbeit, auf deren Details hier nicht näher eingegangen werden soll, versucht der Verfasser, eine Charakterisierung des Begriffes 3-Mannigfaltigkeit zu finden, die nicht die übliche Begrifflichkeit verwendet.[102] Dies gelingt

[101] Rosenthal spielt ansonsten keine Rolle in der Geschichte der Topologie, allerdings muß auf Rosenthal 1924 verwiesen werden. Daß dieser Mathematiker ein größeres Interesse für topologische Fragen hatte, belegt neben der Schottlandschen Dissertation noch die Dissertation von I. Gawehn (Gawehn 1927), welche ebenfalls bei Rosenthal entstand.

[102] Vorbild ist ihm dabei das analoge Resultat für 2-Mannigfaltigkeiten, das von Gawehn gewonnen wurde: „Dafür, daß ein topologischer Raum F eine geschlossene oder offene unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

nicht, wohl aber gibt Schottland eine reichlich umständliche Charakterisierung der 3-Sphäre, welche auch Homotopie- und Homologieeigenschaften verwendet (Schottland 1934, 25f). Im Zuge seiner Untersuchungen konstruierte er zahlreiche Beispiele (z.B. die zusammenhängende Summe von n projektiven Räumen, Colimesbildungen usw.) und streift mehrmals die Poincaré-Vermutung (Schottland 1934, 17 und 63), die er nun „ein bekanntes Poincaré'sches Problem" nennt.

Dies mag als ein letzter Beleg für die oben geäußerte Meinung dienen, daß die Poincaré-Vermutung mit Beginn der 1930er Jahre begann, die herausragende Stellung zu erlangen, die ihr bis heute eignet. Es wäre interessant, würde aber den hier vorgegebenen Rahmen sprengen, nach weiteren Stellen zu suchen, die eine zunehmende Breitenwirkung (etwa in Dissertationen) der Poincaré-Vermutung im beschriebenen Zeitraum beweisen.

Die Bedeutung, welche die Poincaré-Vermutung in den 30er Jahren erlangte, manifestierte sich somit nicht nur in der Tatsache, daß diese Bezeichnung zu einem stehenden Begriff der Topologen wurde und daß diesem Problem eigens und ausdrücklich Arbeiten gewidmet wurden, sondern auch in der Vielfalt vorgeschlagener (und teilweise auch verworfener) Lösungsansätze (z.B. gruppentheoretisch, geometrisch-kombinatorisch, Überlagerungstheorie) und der Vermutung äquivalenter Formulierungen. So gewann die Poincaré-Vermutung allmählich die Stellung eines Zentralproblems mit zahlreichen Bezügen, dessen Lösung als dringendes Desiderat erschien, da sie „größten Gewinn" für die Wissenschaft verhieß. Damit erfüllte sie eines der Kriterien, welche D. Hilbert in seinem berühmten Vortrag von 1900 für den Wert eines mathematischen Problems genannt hatte. Weiter forderte er von diesem „Klarheit und leichte Faßlichkeit" (zwei Aspekte, die man der Poincaré-Vermutung gewiß zugestehen wird), um dann auszuführen:

"Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten - uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung."

(Hilbert 1979, 23 f)

Es ist wohl unstrittig, daß die Poincaré-Vermutung alle diese Kriterien bis auf den heutigen Tag erfüllt. Wichtig ist aber festzuhalten, daß gerade der Beziehungsreichtum der Vermutung nicht von vorneherein feststand, sondern daß sich dieser erst im Laufe der Anstrengungen zeigte, ja, man könnte sogar, daß dieser erst durch den Gang der Wissenschaft erzeugt wurde. Dies unterstreicht den Charakter von Leitmotiven, der „guten" Problemen zukommt, indem sie der Forschung eine Orientierung geben. Man vergleiche hierzu 8.

1. Kompaktheit im Kleinen. 2. Zweites Abzählbarkeitsaxiom. 3. Daß zu jedem Punkt p von F eine Umgebung U(P) derart gehört, daß jede in F eingebettete Jordankurve J, die Untermenge von U(P) ist, genau 2 Komplemente besitzt, die J zur gemeinsamen Grenze haben. 4. Daß in jeder Umgebung U(P) eines Punktes P von F eine in F eingebettete Jordankurve J(P) existiert, die P nicht als Element enthält und deren P besitzendes Komplement Untermenge von U(P) ist." (Schottland 1934, 2) Das Berandungsverhalten von Jordan-Kurven in bestimmten 3-Mannigfaltigkeiten hatte bereits Hopf 1926 untersucht.

6 Die Algebraisierung der Topologie

Wenn im folgenden der kombinatorischen Auffassung die algebraisierte (jeweils bezogen auf die Topologie) gegenübergestellt wird, so darf man dies nicht als direkten, sozusagen kontradiktorischen Gegensatz sehen. Dem kombinatorischen Ansatz ging es ja hauptsächlich um einen Aufbau der Theorie der Mannigfaltigkeiten, welcher ohne Bezug (oder mit möglichst wenig Bezug) auf kontinuumstopologischen Vorstellungen (etwa in der Definition von „Mannigfaltigkeit")auskommen und eine „Arithmetisierung" der Invarianten ermöglichen sollte. Dagegen forderte die Algebraisierung zuerst einmal den verstärkten Einsatz algebraischer Hilfsmittel sowie ein eigenständiges Interesse für letztere. A limine sind diese beiden Haltungen keineswegs vollkommen inkompatibel.[1] Dennoch hat sich „kombinatorische Topologie" als Bezeichnung für die ältere Theorie der Mannigfaltigkeiten eingebürgert, während „algebraische Topologie" ihre moderne, wesentlich umfassendere Nachfolgerin meint. Diese Namensgebung resultierte wohl hauptsächlich aus der Tatsache, daß die Durchsetzung der algebraischen Sichtweise zeitlich in etwa mit dem Zurücktreten der kombinatorischen zusammefiel (Anfang/Mitte der 30er Jahre).

In der zweiten Hälfte der 20er Jahre unseres Jahrhunderts begannen sich Auffassung und Methode der bis dahin meist kombinatorisch genannten Topologie zu verändern. Dieser Prozeß wird oft als „Algebraisierung"[2] bezeichnet; oberflächlich betrachtet ist sein Kennzeichen vor allem die Betrachtung von Homologiegruppen anstelle der numerischen Invarianten Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten.

Die Algebraisierung in diesem Sinne scheint in zwei voneinander unabhängigen Entwicklungslinien begonnen zu haben: Zum einen ist hier L. Vietoris zu nennen, der in Wien (1922 - 27) und später in Innsbruck arbeitete und sich 1925/26 bei L.E.J. Brouwer in

---

[1] Die Einsicht, daß die neueren Verfahren die alten nicht ohne weiteres überflüssig gemacht hatten, klang beispielsweise in der Besprechung von Feigl über die zweite Auflage des Analysis-situs-Lehrbuches von Veblen (1931) an:

„Dieses Verfahren [die Inzidenzmatrizen; K.V.] hat Verf. auch in der zweiten Auflage beibehalten, obwohl in der Zwischenzeit ein neues Verfahren, das gruppentheoretische, ausgebildet worden ist. Da die gruppentheoretische Behandlung der kombinatorischen Topologie im neuesten Schrifttum stark in den Vordergrund gestellt worden ist (vgl. die Werke von Seifert-Threlfall und Alexandroff-Hopf, ...), so wird man es vielleicht begrüßen, in dem vorliegenden Buch eine Wiedergabe der älteren Methode zur Hand zu haben." (Feigl 1931, 713)

[2] So zum Beispiel S. Mac Lane in seinem Aufsatz „Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether" (Maclane 1986). Im übrigen erinnert dieser Terminus natürlich an die „Arithmetisierung" der Analysis im 19. Jahrhundert. Die Bezeichnung „Algebraisierung" ist insofern mißverständlich, als ja spätestens mit der Einführung der Fundamentalgruppe durch Poincaré algebraische Methoden in der Topologie verwendet wurden.

Amsterdam aufhielt[3], zum andern die in Göttingen ansässige E. Noether, deren Ideen dann von H. Hopf (Göttingen [1925/26], Berlin, Princeton [1927/28]) und P. Alexandroff (Amsterdam [1925/26], Göttingen [1926], Princeton [1927/28], später Moskau) in die Topologie eingebracht wurden. Leitmotiv der Bestrebungen von Vietoris war es, eine Homologietheorie für allgemeinere topologische Räume aufzubauen: Beschränkt man sich nicht mehr auf Mannigfaltigkeiten, so müssen die Homologiegruppen ja nicht mehr endlich erzeugt sein[4], weshalb die traditionellen numerischen Invarianten ihre Bedeutung verlieren. Dabei gab Vietoris erstmals die später gängige (vgl. etwa Seifert-Threlfall 1934) simpliziale Definition der Homologiegruppen.[5]

Sein Ansatz wurde vor allem durch seinen Schüler W. Mayer fortgeführt (Mayer 1929 und 1929a) und fand seinen bis heute bekannt gebliebenen Ausdruck in der Mayer-Vietoris-Sequenz. Wichtig hierbei ist, daß Mayers Untersuchungen darauf hinauslaufen, Beziehungen zwischen mehreren Homologiegruppen in Gestalt von Homomorphismen zu betrachten, welche durch die entsprechenden Inklusionsbeziehungen induziert werden.[6]

---

3 Meine Darstellung stützt sich hier teilweise auf eine briefliche Mitteilung von Prof. Dr. Dr. L. Vietoris vom 11.3.91. Weitere Informationen zum Werdegang dieses Mathematikers findet man bei Einhorn 1983, 546-560.

4 Solche Räume können - anschaulich gesprochen -„unendlich viele Löcher" aufweisen; man denke etwa an R \ Q.

5 In dem in Anmerkung 2 genannten Brief schreibt Vietoris:

„Am Beginn dieser für meine weitere Arbeit entscheidenden Zeit [bei Brouwer, K.V.] war ich in meinen topologischen Untersuchungen zu einem Punkt gelangt, von dem ich nicht weiterwußte. Mir war klar, daß ich nur weiterkommen konnte, wenn ich die Riemann-Betti-Poincarésche Topologie der Polyeder in allgemeinere Räume übertrage. Brouwer wies mich auf die von ihm schon mit großem Erfolg verwendeten simplizialen Polyeder hin. Besonders die Art, wie er seine Vielfachheit der Zyklose in metrischen Räumen definierte, war mir Vorbild.

Indem ich den Brouwerschen (ε,δ)-Mechanismus durch den Cauchyschen (ε,n)-Mechanismus ersetzte, kam ich zu meinen Fundamentalfolgen von Zykeln und deren Homologieklassen, die P. Alexandroff später Vollzykel genannt hat, die Elemente meiner Homologiegruppen kompakter metrischer Räume. Die Bettischen Zahlen und die Torsionszahlen sind dort in der Regel nicht endlich. Daher mußte ich die Gruppen selbst betrachten.

Weil keine simpliziale Definition der ja stillschweigend bekannten Zusammenhangs- und Homologiegruppen vorhanden war, definierte ich diese in [Vietoris 1926; K.V.] zunächst in endlichen simplizialen Komplexen und dann mit Hilfe der Fundamentalfolgen in kompakten metrischen Räumen. Mein Hauptanliegen war die Ableitung einiger Sätze über diese Gruppen in topologischen Räumen. Ich beschränkte mich auf kompakte metrische Räume, weil allgemeinere Räume gewisse Schwierigkeiten machten.

Ausführlicher behandelte ich diese Themen in der Arbeit [Vietoris 1927; K.V.]."

Leider sagt L. Vietoris nichts über die Hintergründe seiner Bestrebungen; es liegt jedoch nahe, hier den Einfluß von Hans Hahn sowie hinsichtlich der simplizialen Techniken Brouwers zu vermuten. Ersterer war ja an abstrakten Räumen sehr interessiert, wobei sein Zugang über die Analysis erfolgte. Insofern wären die Motive der Vietorisschen Algebraisierung nicht in der Theorie der Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner in der traditionellen kombinatorischen Topologie zu suchen, was auch nicht erstaunt, da sich in diesem Rahmen die herkömmliche Auffassung durchaus bewährt hatte. Zu den Ausführungen von Vietoris vgl. man auch Alexandroff 1969, 118f.

6 Betrachtet man eine analoge Situation in Bezug auf die Fundamentalgruppe, so hat man eine „Seifert-van Kampen-Situation" vor sich. Wie wir gesehen haben (vgl. 3.4), wurde diese im Spezialfall der Heegard-Zerlegung einer 3-Mannigfaltigkeit schon von Poincaré verwendet, ohne daß dieser aber irgendwelche allgemeineren Bemerkungen hierzu gemacht hätte.

Anders (und modern) gesagt, kommt die wahre Stärke der Algebraisierung erst bei einer kategorialen Betrachtungsweise zur vollen Geltung. Der erste, der im Zusammenhang dessen, was wir heute als erste Homologiegruppe etwa einer Mannigfaltigkeit bezeichnen, tatsächlich explizit von „Gruppe" gesprochen hat, scheint - worauf Vanden Eynde 1992/93, 177 aufmerksam gemacht hat - der Dehn-Schüler H. Gieseking in seiner Dissertation von 1912 gewesen zu sein. Dort behandelt er nach dem Vorbild H. Tietzes (vgl. 4.2) die Fundamentalgruppe. Rechnet man in dieser abelsch - also macht man sie durch Hinzunahme entsprechender Relationen kommutativ - so erhält man die Abelsche Gruppe (einer Mannigfaltigkeit) [so Gieseking 1912, 27f]. Insbesondere gilt:

> „...; die Abelsche Gruppe einer geschlossenen zweiseitigen Fläche [vom Geschlecht p; K.V.] ist also die allgemeinste Abelsche Gruppe mit den 2p Erzeugenden $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$."
>
> (Gieseking 1912, 25)

Die Homologierelation wird allerdings von Gieseking erst im Anschluß hieran eingeführt und geometrisch - anschaulich interpretiert; sein Zugang erfolgt also über die Gruppentheorie. Die Bezeichnung „Homologiegruppe" tritt erstmals bei Vietoris 1926, 1009 auf.

Der zweite Strang der Algebraisierungsbewegung wird auf Emmy Noether zurückgeführt, wobei die maßgebliche Quelle hierfür Heinz Hopf (ähnlich auch P. Alexandroff [1969]) ist:

> „Das Zentrum, von dem der algebraische Einfluß in Göttingen ausging, war natürlich Emmy Noether. Mit Alexandroff war sie schon seit Jahren befreundet, und beider Hauptarbeitsgebiete, nämlich die abstrakten algebraischen und die abstrakten topologischen Strukturen, waren prinzipiell miteinander verwandt. Aber was wir - Alexandroff und ich - jetzt von ihr lernten, betraf, direkt und konkret, die Begründung der Homologietheorie in simplizialen Komplexen - nämlich:
>
> Es seien X^r die r-dimensionalen Kettengruppen, ∂ die durch die Randbildung bewirkten Homomorphismen $X^{r+1} \to X^r$; dann ist, wie man leicht an einem einzelnen Simplex verifiziert, $\partial\partial = 0$; das bedeutet: Das Bild ∂X^r ist in dem Kern Z^r der Abbildung ∂: $X^r \to X^{r-1}$ enthalten; die Faktorgruppe $H^r = Z^r / \partial X^{r+1}$ ist die r-te Homologiegruppe.
>
> Diese basisfreie, d.h. die Poincaréschen Inzidenzmatrizen vermeidende, Begründung der Homologietheorie war damals ganz neu (und ich weiß nicht einmal, ob der Begriff „Homologiegruppe" schon irgendwo schwarz auf weiß in der Literatur vorgekommen war)."
>
> (Hopf 1966, 185)[7]

Zur Mayer-Vietoris-Sequenz vgl. man Dieudonné 1989, 39 und 110.

Lefschetz schreibt über A. Mayers Beitrag: „This author went to the extreme of abstraction." (Lefschetz 1970, 32), wobei er vor allem dessen Aufbau der Homologietheorie meint.

7 Man vgl. hierzu Hopf 1928, 127 Anm. 2, Alexandroff-Hopf 1935, 12 Anm. 2 und Alexandroff 1969, 121, Hirsch 1982, 15 sowie Dieudonné 1984 und (korrigierend hierzu) MacLane 1986. Die folgende Charakterisierung Dieudonné's deutet eine Richtung an, in welcher man die Algebraisierung auch sehen kann:

"She [E. Noether; K.V.] was then in the process of entirely reshaping algebra in what became known a few years later, through van der Waerden's book, as "Modern Algebra", systematically giving pre-eminence to concepts over computations." (Dieudonné 1984, 5)

Unsere weiteren Betrachtungen werden allerdings zeigen, daß diese Bevorzugung der Begriffe gegenüber den Rechnungen im Problemkreis, der uns hier interessiert, gar keinen so wesentlichen Fortschritt gebracht hat.

Emmy Noether[8] hat sich selbst zu diesem Thema nie ausführlich im Druck geäußert. In einem Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen vom 27.1.1925 erwähnte sie lediglich die Betti-Zahlen und die Torsionskoeffizienten als Beispiele für die Fruchtbarkeit gruppentheoretisch-abstrakter Betrachtungen.[9] Hopf hat sich dann in Hopf 1928 diese Auffassung zunutze gemacht, um seinen früher gefundenen, aber erst später gedruckten Beweis (Hopf 1929 - vgl. auch Hirsch 1982, 15-17) für die Verallgemeinerung der Lefschetzschen Fixpunktformel (von Abbildungen zwischen n-Mannigfaltigkeiten auf solche zwischen n-dimensionalen Komplexen) zu vereinfachen. Der Vorteil, den die Algebraisierung hier brachte, war somit vor allem ein beweistechnischer.

Im Jahre 1929 hielt B.L. van der Waerden, also ein Mitglied des Kreises von Emmy Noether, der deren Auffassung im nachfolgenden Jahr durch seine berühmte „Moderne Algebra" allgemein bekannt machen sollte, auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Prag einen Vortrag über „Kombinatorische Topologie". Dabei setzte sich der Verfasser das Ziel, die Entwicklung, welche dieses Gebiet in den letzten Jahren genommen hatte - etwa seit Knesers fast ausschließlich der kombinatorischen Auffassung gewidmeten Bericht Kneser 1926 - zu dokumentieren. Schon der von van der Waerden gewählte Titel ist bemerkenswert, insofern er nicht über „algebraische Topologie" sprach, sondern den traditionellen Titel „kombinatorische Topologie" wählte - vielleicht ein Anzeichen dafür, daß die Umwälzung zu diesem Zeitpunkt keineswegs als so grundlegend empfunden wurde.

Hauptthema van der Waerdens war die Konkurrenz zwischen rein-kombinatorischer Auffassung und der sogenannten „méthode mixte", also der letztlich von L. E. J. Brouwer angeregten Verwendung simplizialer Methoden im kontinuumstopologischen Rahmen. Dabei votierte van der Waerden deutlich zugunsten der letzteren. So heißt es beispielsweise im Zusammenhang mit der Hauptvermutung:

> „Ich glaube, man kann jetzt mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß die Schwierigkeit aller dieser Untersuchungen so groß ist und bleiben wird, daß es auf jeden Fall den Vorzug verdient, die gewünschten Invarianzeigenschaften der Homologiegruppen, der Wegegruppe usw. direkt, ohne den Umweg über den kombinatorischen Äquivalenz- und Invarianzbegriff, also nach der méthode mixte zu beweisen."
>
> (Waerden 1930, 127)[10]

Man erkennt, daß der Vortragende in damals moderner Art und Weise von Homologiegruppen sprach, die er auch als Faktorgruppen der (singulären) Zykel nach dem (singulären) Rändern einführte (Waerden 1930, 122 und 127). Die den Betti-Zahlen entsprechenden Dimensionen der freien Anteile, die van der Waerden Homologiezahlen nannte, und die Torsionskoeffizienten wurden als „gruppentheoretische Invarianten" der - im Falle von endlichen simplizialen Komplexen - endlich erzeugten abelschen Homologiegruppen eingeführt (Waerden 1930, 122f). Des weiteren wurde noch erwähnt, „daß die ganze nach der méthode mixte aufgebaute Theorie nicht nur auf Komplexe aus endlich vielen Simplices, sondern auch auf solche Gebilde anwendbar ist, die zu ihrer Triangulierung unendlich viele Simplices erfordern, wie z. B. offene Flächen oder offene Mengen im euklidischen Raum." (Waerden 1930, 129).

Man bemerkt, daß somit auch bei van der Waerden die beiden oben schon besprochenen Motive für die Algebraisierung anklangen: einfachere und übersichtlichere Formulierung der Theorie und Beweise sowie Verallgemeinerbarkeit auf den nicht endlich erzeugten Fall. Beide Aspekte traten jedoch bei ihm hinter den als wesentlich fundamentaler empfundenen Gegensatz von rein-kombinatorischer und gemischter Methode zurück.

An dieser Stelle sei noch kurz erwähnt, welche Fragen der Vortragende sonst noch ansprach. Da ist zum einen das Problem der Definition des Begriffes „Mannigfaltigkeit", für die er fünf Möglichkeiten anbot (Waerden 1930, 124f; vgl. auch Lefschetz 1942, 381f), zum anderen der Fragenkomplex Dualitätssätze (Waerden 1930, 124f und 131). Schließlich fand auch die „feinere Theorie der Mannigfaltigkeiten" (Waerden 1930, 129), welche Schnitt(punkts)zahlen, Verschlingungszahlen und Fixpunktzahlen sowie den Abbildungsgrad umfaßt, Erwähnung.

Bemerkenswert ist in unserem Zusammenhang besonders die Passage, mit der van der Waerden seine Ausführungen schloß:

> „Von den berühmten Problemen einer Art, die ich Homöomorphieprobleme nennen möchte: dem Problem der Charakterisierung der n-dimensionalen bzw. dreidimensionalen Sphäre, durch ihre Fundamentalgruppen, dem Problem der Triangulation der topologischen Mannigfaltigkeiten und dergleichen, ist man außer im zweidimensionalen Fall noch genau so weit entfernt als zur Zeit, wo diese Probleme gestellt wurden. In der Entwicklung der Topologie hat man immer mehr diese schwierigen Probleme zu umgehen gelernt; lösen wird man sie wohl nur durch ganz neue Methoden können."
>
> (Waerden 1930, 133)

Die erste gedruckte Erwähnung des Wortes „Homologiegrupp" ist - wie bereits erwähnt -Victoris 1926, 1009; Hopf selbst verweist an der im Text zitierten Stelle auf Hopf 1928.

8 E. Noether hat sich Weihnachten 1925 etwa einen Monat lang bei Brouwer in Blaricum aufgehalten (vgl. Alexandroff 1969, 120). Obwohl E. Noether hauptsächlich an der Algebra arbeitete, interessierte sie sich doch sehr für topologische Arbeiten, insbesondere von P. Alexandroff und H. Hopf (briefliche Mitteilung von Prof. Dr. B. L. van der Waerden vom 2.9.93)

9 Wörtlich heißt es im Protokoll dieser Sitzung (Noether 1926, 104):
„E. Noether: Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie. Die Elementarteilertheorie gibt bekanntlich für Moduln aus ganzzahligen Linearformen eine Normalbasis von der Form ($e_1y_1, e_2y_2, \ldots, e_ry_r$) wo jedes e durch das folgende teilbar ist; die e sind dadurch bis aufs Vorzeichen eindeutig festgelegt. Da jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden dem Restklassensystem nach einem solchen Modul isomorph ist, ist dadurch der Zerlegungssatz dieser Gruppen als direkte Summe größter zyklischer mitbewiesen. Es wird nun umgekehrt der Zerlegungssatz rein gruppentheoretisch direkt gewonnen, in Verallgemeinerung des für endliche Gruppen üblichen Beweises, und daraus durch Übergang vom Restklassensystem zum Modul selbst die Elementarteilertheorie abgeleitet. Der Gruppensatz erweist sich so als der einfachere Satz, in den Anwendungen des Gruppensatzes - z.B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie - ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich."

10 Im übrigen erwähnte van der Waerden auch einen „Beweis" der Hauptvermutung durch Furch, über den dieser in Prag vortrug. Man vergleiche hierzu das Kurzreferat des fraglichen Vortrags (Furch 1930), in dem der fragliche „Beweis" allerdings nur angekündigt und nicht ausgeführt wird. Zu einer Veröffentlichung ist es anscheinend nicht gekommen. In Kusch 1932 versuchte sich ein Schüler von Furch nochmals an der Hauptvermutung.

Auffallend ist, daß van der Waerden hier nicht etwa das allgemeine Homöomorphieproblem anspricht, sondern die viel restriktivere Poincaré-Vermutung. Verblüffend ist, daß er noch die Charakterisierung mehr als dreidimensionaler Sphären durch ihre Fundamentalgruppe erwähnt - eine Frage, die doch spätestens mit Künneths Ergebnissen (nach Steinitz' Arbeit von 1908 - vgl. 4.2) über die Invarianten von Produkten (man nehme $S^2 \times S^2$ und S^4) erledigt gewesen sein sollte. Weiter ist bemerkenswert, daß der Verfasser das Triangulationsproblem so stark in den Vordergrund stellt.[11] Die letzten Zeilen von van der Waerdens Vortrag deuten auf eine Verschiebung in der Interessenlage der Topologen hin, welche nach meiner Interpretation durch die Algebraisierung begünstigt wurde. Im Verlauf des fünften Kapitels haben wir allerdings gesehen, daß van der Waerdens Pessimismus bezüglich des Homöomorphieproblems, insbesondere bezüglich der Poincaré-Vermutung, nicht ganz berechtigt war. So gelang es vor allem H. Seifert, in dieser Frage Fortschritte zu erzielen, ohne allerdings das Problem vollständig zu lösen. Insgesamt gewinnt man so den Eindruck, daß van der Waerdens Referat eine Wende in der Geschichte der Topologie widerspiegelt (weg von der rein kombinatorischen Auffassung, hin zur algebraisch beeinflußten „métode mixte") - wie ähnlich auch etwas später Alexanders Beitrag in Zürich (vgl. 5.1.3).

Die Ausbreitung der neuen Ideen erfolgte eher zögerlich[12] und blieb vorerst weitgehend auf den deutschsprachigen Raum, insbesondere auf den Kreis um Emmy Noether, beschränkt.

Übrigens hielten sich parallel zu H. Hopf und P. Alexandroff, die wir ja schon als Protagonisten der Algebraisierung kennengelernt haben, auch W. Threllfall und H. Seifert (vgl. 5.2) in Göttingen auf, was miterklären mag, daß auch in ihrem Werk die Algebraisierung immer eine gewisse Rolle spielt.

In einer Besprechung des Topologielehrbuches der beiden letztgenannten Autoren schreibt A. W. Tucker: „The influence of the German algebraic school is reflected in a frank use of group theory." (Tucker 1935, 470). Es spielten in der Frage der Algebraisierung anscheinend auch nationale Stilbildungen eine gewisse Rolle, etwa insofern, als die amerikanische Schule (von Princeton mit J.W. Alexander, S. Lefschetz, O. Veblen u. a.) noch eine gewisse Zeit an der Verwendung von Inzidenzmatrizen etc. festhielt. Man vgl. hierzu die nachfolgend wiedergegebene briefliche Äußerung von Prof. Dr. B. L. van der Waerden (bezüglich seines Vortrages Waerden 1930):

> „Dass man das, was die Amerikaner mit Matrices formulierten, auch (und zwar allgemeiner) mit Homologiegruppen formulieren kann, war mir damals so selbstverständlich, dass ich es nur „am Rande" (wie Sie sagen) zu erwähnen brauchte."

Bezüglich der Princeton-Schule äußert sich Alexandroff auch in einem Vortrag, den er 1954 zu Ehren Poincaré's in Amsterdam hielt (Aleksandrov 1972), wo er davon spricht,

[11] Im Literaturverzeichnis erwähnt van der Waerden die Arbeit Radó 1925, in der dieser das Triangulationsproblem im zweidimensionalen Fall löste. Im Dreidimensionalen geht der Nachweis der Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten auf E.E. Moise zurück (Moise 1952); die weitestgehenden Ergebnisse im höherdimensionalen Fall (i.w. die Identifikation eines Hindernisses) stammen von R. Kirby und L. Siebenmann (vgl. Kirby-Siebenmann 1969).

[12] „Es bedurfte einiger Zeit, bis diese Ansichten zum Allgemeingut der Topologen geworden sind, zumal manche grosse Vertreter der Topologie - Lefschetz zum Beispiel - ihnen mit ziemlicher Skepsis begegneten." (Alexandroff 1969, 121)

daß Lefschetz und andere die Algebraisierung als „purely formal" betrachteten. Nach Alexandroff wurde diese skeptische Haltung durch drei Entwicklungen überwunden, welche alle die gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie voraussetzten (Aleksandrov 1972, 164f):

1. die Dualitätstheorie,
2. die Übertragung der Homologietheorie auf allgemeinere topologische Räume,
3. die Kohomologietheorie.

Bei S. Lefschetz selbst findet sich 1930 folgender Hinweis:

> „The connection with the theory of abstract groups is clear .... Indeed everything that follows in this section [combinatorial theory of complexes; K.V.] can be, and frequently is, translated in terms of the theory of groups. It is of course a mere question of a different terminology."
>
> (Lefschetz 1930, 29)

Vielleicht sollte man diese Haltung besser zurückhaltend denn ablehnend nennen. Im übrigen hat L. Vietoris selbst darauf hingewiesen (vgl. MacLane 1986, 307), daß die Möglichkeit, die Homologietheorie algebraisch zu formulieren, auch schon H. Poincaré und seinen Zeitgenossen bewußt gewesen sei (vgl. das oben zu Gieseking Gesagte). Allein - so darf man wohl ergänzen - war damals kein rechter Vorteil bei dieser Auffassung zu sehen; und das ging wohl S. Lefschetz 1930 immer noch so. Daß letzterer nicht uneinsichtig war, zeigt ja die Tatsache, daß er diesen Entwicklungen später durchaus Rechnung getragen hat (für eine Einschätzung der Geschichte der Topologie durch S. Lefschetz vgl. man Lefschetz 1970)

Weder in Lefschetz' Topologielehrbuch von 1930 noch in Veblens Neuauflage 1931 seines Lehrbuches von 1922 finden sich zur algebraisierten Auffassung Ausführungen systematischer Art.[13] Das erste Lehrbuch, sieht man einmal von der eher knappen Skizze Alexandroff 1932 ab, die sich unter Benutzung des Terminus' „algebraischer Topologie" (vgl. unten) ausdrücklich zu dieser bekannte, das den neuen Entwicklungen zumindest partiell Rechnung trug, war dasjenige von Seifert-Threlfall (1934). In den Arbeiten dieser Autoren wurde von Anfang an der gruppentheoretische Standpunkt eingenommen (vgl. etwa Threlfall-Seifert 1931, 45, wo die erste Homologiegruppe als Quotientengruppe der Fundamentalgruppe nach ihrer Kommutatoruntergruppe beschrieben wird). Aber dennoch bleibt auch bei ihnen ein gewisser Vorbehalt gegen allgemeinere Theoriebildungen spürbar, wenn es etwa heißt:

> „Daß K^n ein Komplex ist, ist insofern unwesentlich, als man singuläre Simplexe, Ketten und Homologiegruppen ebensogut in jedem beliebigen Umgebungsraume, z.B. in einer beliebigen nichtleeren Teilmenge eines Komplexes definieren kann. Aber nur für Komplexe ist diese Definition fruchtbar."
>
> (Seifert-Threlfall 1934, 92 Anm. *)[14]

[13] Vgl. hierzu das in Anmerkung 8 wiedergegebene Zitat von S. Lefschetz sowie Anmerkung 1) oben

[14] K^n ist in moderner Terminologie ein simplizialer Komplex. Die Autoren beschreiben somit die singuläre Homologie simplizialer Komplexe.

In einer Anmerkung zu dieser Anmerkung (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 318 Anm. 16) wird dann das Problem der Verallgemeinerung der Homologietheorie auf beliebige topologische Räume kurz diskutiert, wobei die Arbeiten zu dieser Problematik von Alexandroff, Cech, Lefschetz und Vietoris genannt werden. Letztere stehen eigentlich im direkten Widerspruch zur Behauptung von Seifert und Threlfall, eine allgemeine Definition sei unfruchtbar, weshalb die Vermutung naheliegt, daß die Anmerkung zur Anmerkung erst später als der eigentliche Text entstanden ist und daß diese die Aussage des Textes relativieren sollte.[15]

In der Tat steht der Standpunkt, den Seifert und Threlfall in ihrem Buch einnehmen, eher in der Tradition der „vor-algebraisierten" Topologie, insofern sie großen Wert auf die Behandlung des Klassifikationsproblemes für Mannigfaltigkeiten, insbesondere für 3-Mannigfaltigkeiten, legen. Hierzu wird wiederum die Fundamentalgruppe ausführlich behandelt, während alle abstrakteren Entwicklungen der Homologie- und Kohomologietheorie ausgeklammert bleiben.[16] Es ist gerade diese Schwerpunktsetzung, die „den Seifert-Threlfall" auch heute - 60 Jahre nach seinem Erscheinen - zu einem nützlichen und häufig frequentierten Werk machen. Auf eine kurze Formel gebracht kann man sagen, daß Seifert-Threlfall die Algebrisierung sehr wohl als Hilfsmittel anerkannten, das unter Umständen bessere Dienste als seine Vorläufer zu leisten vermochte, daß sie aber die allmählich einsetzende Umorientierung bezüglich der Zielsetzungen nicht mitmachten.

Das nächste große Topologielehrbuch der 30er Jahre, die „Topologie" (1935) von Alexandroff und Hopf, ist Fragment geblieben, da nur einer der geplanten drei Bände erschienen ist.[17] Aufgrund des ersten Bandes und der Andeutungen, die bezüglich des Inhaltes der

[15] Vgl. auch Henn-Puppe 1990, 709 Anm. 6.

[16] Das hebt auch Tucker in seiner bereits genannten Besprechung hervor:
„A particularly valuable feature of the book is the attention paid to the fundamental (Poincaré) group, covering spaces, and three-dimensional manifolds; in no other single place in the literature has so much interesting information been gathered together on these topics. The investigations of the authors themselves find place in the chapter on three-dimensional manifolds." (Tucker 1935, 469)
Und an anderer Stelle heißt es: „The textbook of Seifert and Threlfall should do much to smooth the path of the student who wants to learn the fundamentals of (combinatorial) topology. The authors have concentrated on basic concepts and methods, avoiding generalizations;..." (Tucker 1935, 469)
Das „Lehrbuch der Topologie" wurde ins Chinesische, Russische und Spanische übersetzt; eine englische Übertragung erschien dann 1980 (!). Die Wertschätzung, die diesem nach 46 Jahren ja doch erstaunlichen Unterfangen zugrunde lag, kann man Birman 1980 entnehmen. Unter vielen anderen Lobpreisungen sei hier noch J. Weeks zitiert, der im Literaturverzeichnis seines Buches Weeks 1985 zum Seifert-Threlfall schreibt:
„Don't be put off by the age of this book. The ideas it contains (...) are as interesting and relevant today as they were in 1934." (Weeks 1985, 319)

[17] Die Möglichkeit eines zweiten (nie erschienenen) Bandes wird übrigens auch von Seifert und Threlfall in ihrem Vorwort angedeutet. In diesem sollten jene Theorien, welche „des beschränkten Raumes wegen überhaupt nicht aufgenommen" (Seifert-Threlfall 1934, III) werden konnten, Berücksichtigung finden. Als Beispiele hierfür nennen die Verfasser den Alexanderschen Dualitätssatz und die Alexandroffsche Theorie der abgeschlossenen Punktmengen und Projektionsspektren. Da es bei der letzteren Theorie gerade um die Erweiterung des Homologiebegriffes auf kompakte metrische Räume allgemein ging (vgl. Dieudonné 1989, 70f), darf man diese Andeutung von Seifert und Threlfall als Hinweis darauf nehmen, daß sie die neueren Entwicklungen sehr wohl zur Kenntnis genommen und zu schätzen gelernt hatten. Das dem Alexandroffschen Ansatz (ebenso wie denen von Lefschetz und Vietoris) zugrunde liegende Problem, nämlich den Alexanderschen Dualitätssatz durch eine geeignet definierte Homologie auf beliebige

beiden folgenden Bände gemacht werden, ist jedoch klar, daß dieses Werk den neuen Ideen einen breiten Raum widmen wollte:

> „Das Interesse für Topologie in Göttingen konzentrierte sich damals [als Alexandroff und Hopf dort waren, also 1926; K. V.] vor allem in dem regen mathematischen Kreise um Emmy Noether. An sie denken wir heute in Dankbarkeit zurück. Die allgemeine mathematische Einsicht von Emmy Noether beschränkte sich nicht auf ihr spezielles Wirkungsgebiet, die Algebra, sondern übte einen lebhaften Einfluß auf jeden aus, der zu ihr in mathematische Beziehung kam. Für uns war dieser Einfluß von der größten Bedeutung, und er spiegelt sich auch in diesem Buch wieder. Die Tendenz der starken Algebraisierung der Topologie auf gruppentheoretischer Grundlage, der wir in unserer Darstellung folgen, geht durchaus auf Emmy Noether zurück. Diese Tendenz scheint heute [1935; K.V.] selbstverständlich; sie war es vor acht Jahren nicht; es bedurfte der Energie und des Temperamentes von Emmy Noether, um sie zum Allgemeingut der Topologen zu machen und sie in der Topologie, ihren Fragestellungen und ihren Methoden diejenige Rolle spielen zu lassen, die sie heute spielt."
>
> (Alexandroff-Hopf 1935, IX)

Den Terminus „algebraische Topologie" hat P. Alexandroff 1932 eingeführt und zwar mit folgender Begründung:

> „Wir ziehen diesen Ausdruck dem sonst üblichen Terminus „kombinatorische" Topologie vor, denn es handelt sich hier um eine viel weitere Anwendung der algebraischen Methoden und Grundbegriffe, als das Wort „Kombinatorik" es vermuten läß."
>
> (Alexandroff 1932, 23 Anm. 21)

Populär gemacht hat ihn schließlich S. Lefschetz, der sein 1942 erschienenes Werk - das eine Art von Weiterentwicklung seiner „Topology" von 1930 darstellte - mit „Algebraic Topology" überschrieb. Im Vorwort heißt es:

> „Its [this book; K.V.] basic topics, often referred to as „Combinatorial Topology", is in substance the theory of complexes and its applications. Many factors have contributed to a great increase in the role of algebra in this subject. For this reason it is more appropriately described as „Algebraic Topology" and this explains the title of the volume."
>
> (Lefschetz 1942, III)

Also selbst hier noch ein weitgehendes Festhalten am alten Kern der Theorie, welche ihrerseits aber im modernen (d.h. algebraischen) Gewand dargeboten wird. Wichtigster Gegenstand der Disziplin blieben für Lefschetz nach wie vor die simplizialen Komplexe, insbesondere die Mannigfaltigkeiten. Lefschetz hat also sowohl den Begriff „Topologie" in die anglosächsische Literatur wieder (nach seiner gelegentlichen Verwendung im 19. Jahrhundert; vgl. etwa Tait 1883) eingeführt (1930), als auch später die „algebraische Topologie" (1942) allgemein. Sein wohl engster Schüler, A. W. Tucker, selbst ein bedeutender Topologe, kommentiert dies so:

kompakte Teilmengen der S^n auszudehnen, wird übrigens von Seifert und Threlfall in der weiter oben bereits erwähnten Anmerkung zur Anmerkung (Seifert-Threlfall 1934, 318 Anm. 16) kurz angesprochen. Das Schicksal, unvollendet zu bleiben, hat übrigens noch andere Topologielehrbücher ereilt, so Eilenberg-Steenrod 1952 und Godement 1958; vgl. Dieudonné 1989, 35 Anm.*.

„Incidentally, Lefschetz was the one who introduced the word topology, for the title of this first book of his, published in 1930 in the Colloquium Series of the AMS. There was an earlier volume in that series, written by Veblen, called Analysis Situs. Lefschetz wanted a distinctive title and also, as he would say, a snappy title, so he decided to borrow the word Topologie form German. This was odd for Lefschetz since he was French-trained and analysis situs was Poincaré's term; but once he decided on it, he conducted a campaign to get everyone to use it. His campaign succeeded very quickly, mainly I think because of the derivative words: topologist, topologize, topological. That doesn't go so well with analysis situs!
Also Lefschetz was the one who invented the term algebraic topology, for his second Colloquium volume. The subject had been called combinatorial analysis situs, or, later, combinatorial topology."

(Tucker 1985, 342)

Ganz anders stellen sich die Dinge in den „Foundations of Algebraic Topology" dar, welche Eilenberg und Steenrod 1952 veröffentlichten. Hier spielen die Mannigfaltigkeiten nur noch eine untergeordnete Rolle gleichsam als Anwendungsbeispiel der allgemeinen Theorie, während das Schwergewicht auf der Entwicklung der abstrakten Homologie- und Kohomologietheorie liegt. Diese Tendenz fand ihre vielleicht deutlichste Ausprägung in den Gebieten homologische Algebra und Kategorientheorie, welche in und nach dem Zweiten Weltkrieg entstanden. Am Ende dieses Abschnittes findet der Leser eine Inhaltsübersicht zu den genannten Lehrbüchern, welche die geschilderte Entwicklung verdeutlichen möge.[18]

Das bislang Gesagte bezog sich überwiegend auf die Lehrbuchliteratur. Betrachtet man dagegen die Originalveröffentlichungen aus dem Bereich „kombinatorisch-algebraische Topologie", hinter denen die Lehrbücher naturgemäß zeitlich hinterher hinken, so zeigt sich mit Beginn der 30er Jahre eine beträchtliche Anzahl von Veröffentlichungen im „algebraischen Geiste" - und das mit zunehmender Tendenz. Es kann hier nicht auf die entsprechenden Einzelheiten eingegangen werden, weshalb auf Dieudonné 1989, chap. IV verwiesen sei. Daneben finden sich aber immer noch Arbeiten im „alten Stil", die sich mit dem Klassifikationsproblem beschäftigten (vgl. 5), aber diese geraten doch im Laufe der Zeit deutlich ins Hintertreffen. Zum eigentlichen Durchbruch verhalf der algebraischen Auffassung wohl erst die Entwicklung der Kohomologietheorie und der Entdeckung der Produktstruktur in deren Rahmen (durch J.W. Alexander und J. Kolmogoroff [1935, 1936]; vgl. auch Hirsch 1982, 17-20, Hopf 1966, 100 und Shields 1987 6f), ein Ereignis, das wir hier nicht weiter verfolgen wollen.

Dabei ist aber hervorzuheben, daß - wie wir ansatzweise gesehen haben - der Beitrag, den die Algebraisierung zur Lösung des klassischen Klassifikationsproblemes leistete, anfänglich gering war. So erlaubt es erst die Kohomologietheorie unter Berücksichtigung der Produktstruktur Räume zu unterscheiden, welche mit den traditionellen Mitteln der kombinatorischen Theorie ununterscheidbar sind.[19] Höher einzuschätzen sind wohl die verbesserten Möglichkeiten zur Berechnung der traditionellen Invarianten, welche die

[18] Man vergleiche hierzu auch Anmerkung 32 des 7. Kapitels, wo die Einschätzungen von H. Hopf und H. Whitney zu der hier geschilderten Entwicklung zitiert werden.

[19] Es handelt sich dabei um S^2, an die zwei S^1 angehängt werden, einerseits und um den Torus andererseits. Wer dieses Beispiel erstmals betrachtete, ist mir leider nicht bekannt.

Algebraisierung - insbesondere in Gestalt der 1941 von W. Hurewicz eingeführten (vgl. Shields 1987, 7) sehr effizienten exakten Sequenzen - mit sich brachte.

Zusammenfassend dürfen wir festhalten (wobei der vorläufige und fragmentarische Charakter unserer Betrachtungen nicht geleugnet werden soll): Die Algebraisierungsbewegung förderte einen grundlegenden Wandel im Verständnis der kombinatorischen Topologie. Sie veränderte nachhaltig die angewendeten Methoden und führte zu einer Ablösung des Klassifikationsproblems der Mannigfaltigkeiten und der Poincaré-Vermutung als seinem Nachfolger als disziplinäre Zentralprobleme. An deren Stelle trat das Streben nach möglichst allgemeinen (Homologie- und Kohomologie-)Theorien, wie es in der axiomatischen Kennzeichnung derselben durch Eilenberg und Steenrod 1952 einen gewissen Abschluß fand. Die geschilderten Veränderungen, die schließlich zu Beginn der 50er Jahre zur klaren Dominanz der abstrakten Sichtweise führten, brauchten also einen beträchtlichen Zeitraum, um sich durchzusetzen; von einer schlagartigen Umwälzung kann keine Rede sein.[20]

Wenn also S. Mac Lane seine Richtigstellung zu Dieudonné 1986 mit „Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether" überschreibt, so darf man dies nicht allzu wörtlich nehmen.

Bei der Diskussion der Algebraisierung der kombinatorischen Topologie ist noch ein weiterer Aspekt zu bedenken: Die Algebra - und das heißt hier in erster Linie die (kombinatorische) Gruppentheorie - mußte soweit entwickelt sein, daß eine Übersetzung topologischer Probleme in algebraische die Aussichten auf eine erfolgreiche Lösung derselben erhöhte.[21] Die Entwicklungen der Algebra, in Sonderheit der Gruppentheorie, auf die es hier ankommt, fanden in den 1920er Jahren statt und wurden von Forschern wie E. Artin, M. Dehn, J. Nielsen und vor allem O. Schreier (ein Freund Reidemeisters übrigens) getragen. Man vgl. hierzu Chandler-Magnus 1982.

Abschließend sei noch auf einen letzten Gesichtspunkt aufmerksam gemacht, den ich hier aber nicht ausdiskutieren möchte: Die Algebraisierung begünstigte die Verwendung kontinuumstopologischer Vorstellungen; sie erlaubte auch bezüglich der betrachteten Räume, den kombinatorischen Standpunkt zu verlassen. Das wird z.B. an der singulären Homologietheorie deutlich. In den 50er Jahren war es folglich ein wichtiges Anliegen, die Sätze des traditionellen Bestandes der Topologie ohne Zuhilfenahme von Triangulierungen zu beweisen (bezüglich des Poincaréschen Dualitätssatzes vgl. man hierzu Henn-Puppe 1990, 709 Anm. 7).

[20] In diesem Sinne äußert sich auch Hans Freudenthal: „According to a slogan of about 1930 set theory lavished beautiful methods on ugly results while combinatorical topology boasted beautiful results obtained by ugly methods. Not until the late forties did algebraic topology, as it is called now, become a broad stream." (Freudenthal 1976, 438)

[21] K. Reidemeister hat dies treffend formuliert: „Es mochte unfruchtbar erscheinen, Beziehungen nachzugehen, die zunächst nur ungelöste topologische Fragen in ungelöste gruppentheoretische Fragen zu übersetzen erlaubten. Solche Bedenken wären heute [1932; K.V.] nicht mehr gerechtfertigt. Seitdem sich Erzeugende und definierende Relationen von Untergruppen einer durch Erzeugende und Relationen erklärten Gruppe bestimmen lassen, bildet die Gruppentheorie für den Topologen ein ertragreiches Recheninstrument, mit dem sich viele bisher unzugängliche Fragen einer systematischen Untersuchung unterwerfen lassen." (Reidemeister 1932, VII)

Resümierend kann man die Entwicklung, welche wir in diesem Kapitel betrachtet haben, kurz so charakterisieren:

Ende der 20er, anfangs der 30er Jahre zeichnete sich die Einsicht ab, daß die Lösung des Homöomorphieproblems, selbst im dreidimensionalen Falle - den man als den einfachsten der ungelösten ansah - noch in weiter Ferne lag. Die entwickelten Invarianten und Methoden reichten kaum über einfachste Mannigfaltigkeiten (z.B. Linsenräume) hinaus. Damit verlor das Homöomorphieproblem bedeutend an Attraktivität. An seine Stelle trat dann Anfang der 30er Jahre im dreidimensionalen Falle die Poincaré-Vermutung, welche sich aber als ähnlich unzugänglich wie das allgemeine Homöomorphieproblem erwies. Die Theorie der Mannigfaltigkeiten schien nach gewissen Teilerfolgen (vgl. 5.2 und 5.4) Mitte/Ende der 30er Jahre an ihre Grenzen gestoßen zu sein.

Andererseits bot das etwa zeitgleich aufkommende Programm der Algebraisierung der kombinatorischen Topologie neue und aussichtsreiche Betätigungsfelder, etwa die Entwicklung allgemeiner Homologietheorien, den Aufbau der Kohomologietheorie verbunden mit verfeinerten algebraischen Mitteln (z.B. treten an die Stelle von Gruppen nun Moduln oder Ringe), die tiefergehende algebraische Analyse der sich ergebenden Strukturen (homologische Algebra) und so weiter. Dabei war der hohe Entwicklungsstand, den benachbarte und nun einbezogene Gebiete wie abstrakte Algebra und kombinatorische Gruppentheorie mittlerweile erreicht hatten, unabdingbar. Wichtig in unserem Zusammenhang ist, daß die neuerschlossenen Gebiete nur noch einen sehr vermittelten Bezug zum Homöomorphieproblem besaßen - sie wurden nicht (oder zumindest nicht mehr überwiegend) vorangetrieben in der Hoffnug, das Homöomorphieproblem seiner Lösung näherzubringen. Die ursprünglichen Hilfsmittel - so könnte man pointiert formulieren - begannen ein Eigendasein autonomer Dynamik zu führen, was - und das ist keineswegs erstaunlich - das Gesicht der Topologie nachhaltig veränderte. Nicht, daß diese ihre „Geburtsurkunde" verloren hätte, sie spielte nur keine dominante Rolle mehr und wurde hinfort nur noch bei besonderen Anlässen hervorgeholt.

Anhang: Inhaltsübersicht zu einigen wichtigen frühen Topologielehrbüchern

Veblen 1931 im wesentlichen identisch mit Veblen 1922 (mit Ausnahme der Anhänge):

Chapter I:	Linear Graphs
Chapter II:	Two-dimensional complexes and manifolds
Chapter III:	Complexes and manifolds of n dimensions
Chapter IV:	Orientable manifolds
Chapter V:	The fundamental group and certain unsolved problems
Appendix I:	The intersection numbers
Appendix II:	On matrices whose elements are integers

Lefschetz 1930:

Chapter I:	Elementary combinatorial theory of complexes
Chapter II:	Topological invariance of the homology characters
Chapter III:	Manifolds and their duality theorems
Chapter IV:	Intersection of chains on a manifold
Chapter V:	Product complexes
Chapter VI:	Transformations of manifolds, their coincidences and fixed points
Chapter VII:	Infinite complexes and their applications
Chapter VIII:	Applications to analytical and algebraic varieties.

Seifert-Threlfall 1934:

Erstes Kapitel:	Anschauungsmaterial
Zweites Kapitel:	Simplizialer Komplex
Drittes Kapitel:	Homologiegruppen
Viertes Kapitel:	Simpliziale Approximation
Fünftes Kapitel:	Eigenschaften im Punkte
Sechstes Kapitel:	Flächentopologie
Siebentes Kapitel:	Fundamentalgruppe
Achtes Kapitel:	Überlagerungskomplexe
Neuntes Kapitel:	Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten
Zehntes Kapitel:	n-dimensionale Mannigfaltigkeiten
Elftes Kapitel:	Stetige Abbildungen
Zwölftes Kapitel:	Hilfssätze aus der Gruppentheorie

Alexandroff-Hopf 1935;

Erster Teil: Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie

Erstes Kapitel:	Topologische und metrische Räume
Zweites Kapitel:	Kompakte Räume

Zweiter Teil: Topologie der Komplexe

Drittes Kapitel:	Polyeder und ihre Zellenzerlegungen
Viertes Kapitel:	Eckpunkt - und Koeffizientenbereiche
Fünftes Kapitel:	Bettische Gruppen
Sechstes Kapitel:	Zerspaltungen und Unterteilungen von Komplexen
Siebentes Kapitel:	Spezielle Fragen aus der Theorie der Komplexe

Dritter Teil: Topologische Invarianzsätze und anschließende Begriffsbildungen

Achtes Kapitel:	Simpliziale Approximation stetiger Abbildungen, stetige Zyklen
Neuntes Kapitel:	Kanonische Verschiebungen. Nochmals Invarianz der Dimensionszahl und der Bettischen Gruppen. Allgemeiner Dimensionsbegriff.

Lefschetz 1942:

Eilenberg-Steenrod 1952:

7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem vorletzten Kapitel werde ich zuerst einmal kurz die verschiedenen Ansätze zusammenstellen, denen wir in den vorangegangenen Kapiteln begegnet sind, sowie - soweit mir das möglich ist - Weiterentwicklungen derselben nennen. Da die Poincaré-Vermutung selbst nach wie vor ein ungelöstes Problem darstellt, ist eine abschließende Bewertung der Ansätze nicht möglich. Erst die Zukunft wird vielleicht zeigen, welche Idee zum Durchbruch führt und dadurch vor allen konkurrierenden ausgezeichnet sein wird.[1]

Im zweiten Teil werde ich dann kurz auf die weitere Entwicklung der Poincaré-Vermutung eingehen, um schließlich mit einigen zusammenfassenden Bemerkungen über die in der vorliegenden Arbeit untersuchte Geschichte und ihre Bedeutung für die Mathematikgeschichte zu enden, welche zum letzten Kapitel mit seinen abschließenden Gedanken überleiten.

Wie bereits mehrfach erwähnt, hat das Homöomorphieproblem im allgemeinen wie auch die Poincaré-Vermutung im besonderen zwei wesentliche Aspekte: Zum einen die Suche nach Invarianten, welche notwendige Bedingungen für die Homöomorphie von Mannigfaltigkeiten liefern, sowie die Reduktion von Mannigfaltigkeiten auf Normalformen oder auch deren Gewinnung durch ein Standardverfahren. Dies sollte idealiter dazu führen, daß die betrachteten Invarianten als für Homöomorphie hinreichend nachgewiesen werden können.[2]

Betrachten wie die Entwicklung auf der Invariantenseite, so bleibt festzuhalten, daß hier die wesentlichen Grundlagen bereits bei Poincaré gelegt wurden. Dieser hatte ja die Fundamentalgruppe eingeführt (3.2) und ihre zentrale Rolle für den Bereich der 3-Mannigfaltigkeiten erkannt. Wesentlich neue Elemente - die aber immer noch mit der Fundamentalgruppe zusammenhängen - brachten erst die Eigenverschlingungszahlen (5.1) und die Reidemeister-Franz-Torsion (5.5). Diese zeigten, daß die Fundamentalgruppe zusammen mit dem Orientierbarkeitscharakter im allgemeinen Fall nicht stark genug ist, um homöomorphe 3-Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden. Offen blieb aber das Problem der Charakterisierung der 3-Sphäre durch deren triviale Fundamentalgruppe - die Poincaré-Vermutung eben. Wie wir gesehen haben (vgl. 6) brachte die Algebraisierung im hier betrachteten Zeitraum (bis etwa 1935) keine wesentlichen neuen Erkenntnisse für 3-

[1] Einen Überblick zum aktuellen Stand im Bereich der 3-Mannigfaltigkeiten gibt Two-Dimensional Homotopy 1993, 251-273

[2] Im Falle der geschlossenen Flächen werden diese Aspekte im zweiten Kapitel erläutert. Als Invarianten kommen hier Orientierbarkeitscharakter plus erste Betti-Zahl oder Euler-Charakteristik in Betracht, als Normalform das Fundamentalpolygon.

Mannigfaltigkeiten. Kurz: Auf der Seite der Invarianten war Poincaré's Arbeit fast erschöpfend. Diese Einsicht ist es wohl auch, die Einschätzungen wie derjenigen von Lefschetz (vgl. 3 Anm. 1) zugrunde liegt.

Anders liegen die Dinge auf Seiten der Suche nach Normalformen. Hier finden wir zwar auch in Poincaré's Werk vielfältige Ansätze (Randidentifikation bei berandeten 3-Mannigfaltigkeiten [z. B. Schalenräume], Überlagerungen, Zellen- und Skelettaufbau, Heegard-Diagramm), aber systematische Überlegungen hierzu fehlen weitgehend. Der Ausgangspunkt zu diesen ist klarerweise: Kann man alle 3-Mannigfaltigkeiten (eventuell mit gewissen Zusatzeigenschaften[3] auf die betrachtete Art und Weise erhalten? Wir wollen im folgenden noch einmal die verschiedenen Möglichkeiten passieren lassen.

Poincaré's allererster Ansatz zur Gewinnung von 3-Mannigfaltigkeiten war der der Rand-identifikation bei Polyedern (z.B. Würfel, Oktaeder). Dies steht in strikter Analogie zum zweidimensionalen Fall (z. B. Fundamentalbereiche automorpher Funktionen), scheint aber im dreidimensionalen mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft zu sein. Zwar läßt sich leicht zeigen, daß man auf diese Art und Weise jede 3-Mannigfaltigkeit [4] erhalten kann, aber schon die Frage, welche Polyeder es gibt, ist weitgehend offen, geschweige denn jene nach den verschiedenen Identifikationsmöglichkeiten. Soweit ich sehe, wurde dieser Ansatz im allgemeiner Form nie weitergeführt; einen Sonderfall stellen allerdings die weiter unten betrachteten Diskontinuitätsbereiche dar. In der Tradition dieses Ansatzes stehen natürlich auch alle Verfahren zum Aufbau oder zur Zerlegung von Mannigfaltigkeiten aus/in einfachere Bestandteile, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen werden.

Die grundlegenden Ideen der Überlagerungstheorie waren von der Funktionstheorie, insbesondere von den Riemannschen Flächen her, bekannt. Wir haben jedoch gesehen, daß es erhebliche Zeit brauchte, bis diese in eine rein topologische Theorie - ohne Beschränkung auf eine bestimmte Dimension - umgearbeitet worden ist. Dieser Stand der Dinge wurde bei Seifert-Threlfall 1934, 8. Kapitel erreicht, wobei vor allem H. Hopf (Hopf 1926) und K. Reidemeister (Reidemeister 1928 und 1932) wichtige Vorarbeiten geleistet hatten. Im Zusammenhang mit 3-Mannigfaltigkeiten tauchten Überlagerungen (wenn auch nicht immer in exakt unserem heutigen Sinne) schon bei Heegard und Poincaré auf. Unter systematischer Perspektive machte erst J. W. Alexander auf sie aufmerksam: Jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit läßt sich als verzweigte Überlagerung der 3-Sphäre darstellen.[5] Die Verzweigungskurven können dabei im Prinzip beliebig verknotet sein oder auch Verkettungen von Knoten,[6] was die Angelegenheit relativ schwierig macht.[7] Fortschritte in dieser Richtung sind also substantiell von solchen in der

[3] In der Regel sind dies: geschlossen und orientierbar.

[4] Unter Einschluß der berandeten und nicht orientierbaren, vgl. Seifert - Threlfall 1934, 221 oder Seifert 131, 127.

[5] Vgl. Alexander 1919a, 310, wo dieser Satz allgemein für n-Mannigfaltigkeiten formuliert, aber nur für 3-Mannigfaltigkeiten bewiesen wird. Alexander ist später in seinem Übersichtsvortrag hierauf zurückgekommen (Alexander 1932, 257).

[6] Es gilt, daß die Verkettungen zahm sind und daß der Verzweigungsindex immer kleiner/gleich zwei ist - vgl. Fox 1962, 213, der die letztere Einsicht J. W. Alexander zuschreibt (vgl. Alexander 1919 a, 372). Neuere Ergebnisse zu diesem Themenkreis enthält Hilden 1974.

[7] Vgl. Alexanders Urteil: „What makes this mode of representation so complicated is the fact that the branch curves can be arbitrarily knotted and inter-linking." (Alexander 1932, 256).

Knotentheorie abhängig. Darüber hinaus sind die Zusammenhänge zwischen überlagernder Mannigfaltigkeit und Knoten in der 3-Sphäre nicht eindeutig: So läßt sich beispielsweise der Dodekaederraum aus drei verschiedenen Knoten gewinnen (vgl. Seifert-Threlfall 1934, 322 Anm. 33). R. H. Fox hat auf die oben geschilderte Idee Alexanders 1962 wieder aufmerksam gemacht, wobei er darauf hinwies, daß man so vielleicht ein Gegenbeispiel zur Poincaré-Vermutung konstruieren könne (Fox 1962, 213)[8], was allerdings bis heute nicht gelungen ist.

Die von Poincaré initiierten Methoden der kombinatorischen Topologie - also konkret der Zellenaufbau von Mannigfaltigkeiten - hat in seinen vielfältigen Weiterentwicklungen (u.a. simpliziale und semilineare Techniken, CW-Komplexe) eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten gespielt. Allerdings bleiben diese immer Mittel zum Zweck in dem Sinne, daß sie Rückschlüsse auf andere Möglichkeiten der Darstellung zulassen (etwa Existenz einer Heegard-Zerlegung). Einen direkten Zugang zum Homöomorphieproblem scheinen sie nicht zu liefern.[9] Einschränkend muß hier allerdings auf die an Frankl anknüpfenden Untersuchungen über Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften verwiesen werden (vgl. 5.5), sowie auf die auf J. H. C. Whitehead zurückgehende Theorie des einfachen Homotopietyps, welche sich allerdings ihrerseits als sehr schwierig herausgestellt hat (vgl. Cohen 1973).

Einer der fruchtbarsten und am meisten bearbeiteten Ansätze im Bereich der 3-Mannigfaltigkeiten ist die bei W. Dyck 1884 anklingende auf P. Heegard zurückgehende Darstellung vermöge der nach ihm benannten Diagramme (vgl. 4.1). Diese bei ihrem Entdecker doch reichlich vage bleibende Methode wurde von Poincaré mit großem Erfolg zur Konstruktion des Dodekaederraumes eingesetzt (vgl. 3.4). Mit Hilfe einer simplizialen Zerlegung der fraglichen 3-Mannigfaltigkeit[10] zeigt man, daß jede geschlossene orientierbare[11] 3-Mannigfaltigkeit durch ein Heegard-Diagramm gewonnen werden kann, wie schon M. Dehn 1910 bemerkte (vgl. 4.3). Damit ist der Aufbau von 3-Mannigfaltigkeiten im wesentlichen auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt: Auf einer geschlossenen Fläche des Geschlechts g sind alle Systeme von doppelpunktfreien disjunkten g-elementigen 1-Zykeln anzugeben, die diese zu einer Sphäre mit 2g Löchern aufschneiden. Äquivalent hierzu ist die Aufzählung aller Homöomorphismen der Fläche vom Geschlecht g. Dieses Problem wurde erstmals von H. Poincaré im 5. Komplement systematisch angegangen (vgl. 3.4)[12], der auch eine seiner Vermutung äquivalente Aussage in der Sprache der Heegard-Diagramme formulierte (PoincaréVI, 498); wichtige spätere Arbeiten hierzu waren in unserem Betrachtungszeitraum Reidemeister 1933 Singer 1933. Selbst

[8] Eine aktuellere Würdigung dieses Ansatzes, der insgesamt gesehen wohl eher als „Außenseiter" bezeichnet werden darf, gibt Hempel 1976, 155.

[9] Vgl. auch die Diskussion, welche R. H. Bing in Bing 1964, 113-115 gibt und wo er u. a. folgenden Satz beweist: „If M_1, M_2 are two (possibly topologically different) compact 3-manifolds, then there are triangulation T_1, T_2 of M_1, M_2 respectively such that T_1, T_2 have precisely the same number of simplexes in each dimension." (Bing 1964, 114).

[10] Die Existenz einer derartigen Zerlegung wurde erst durch Moises Ergebnis garantiert, daß jede 3-Mannigfaltigkeit triangulierbar ist (Moise 1952); bis dahin war das Vorhandensein einer Triangulierung eine zusätzliche Voraussetzung - es sei denn, man legte einen kombinatorischen Mannigfaltigkeitsbegriff von vorne herein zugrunde.

[11] Der nichtorientierbare Fall läßt sich auch mit einbeziehen, vgl. etwa Seifert - Threlfall 1934, 220f.

[12] Eine moderne Darstellung und Würdigung der Ergebnisse Poincré's gibt Calugareanu 1966.

wenn diese Probleme gelöst wären - wovon man noch weit entfernt ist - wäre weiterhin zu entscheiden, wann zwei Heegard-Diagramme dieselbe Mannigfaltigkeit liefern[13]. Eine effektive Klassifikation ist meines Wissens bislang nur für die Heegard-Diagramme auf dem Torus gelungen (Seifert, Goeritz [vgl. 5.3], Reidemeister [vgl. 5.5]). Schon für Heegard-Diagramme auf der Brezelfläche sind nur Teilergebnisse (Goeritz 1933, Engman 1970), aber keine vollständige Lösung bekannt; insbesondere weiß man nicht, ob jede einfach-zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit, die aus einem Heegard-Diagramm auf einer Brezelfläche hervorgeht, homöomorph zur 3-Sphäre ist (Bing 1964, 100). Allerdings kann man mit Hilfe eines von J. Birman und H. W. Hilden 1973 angegebenen Algorithmus entscheiden, ob eine vorgegebene Heegard-Zerlegung vom Geschlecht zwei die 3-Sphäre darstellt oder nicht (vgl. Hempel 1976, 164). Dennoch bildet Heegards Methode einen Gegenstand intensiver Forschung, wenn auch Hempels Urteil[14] über sie eher skeptisch ausfällt:

> „The subject of this chapter is the earliest of these methods to receive attention. It has a simple description and has visual geometric appeal. However, it has proved to be less usefull than other methods.... "
>
> (Hempel 1976, 14)[15]

Ein weiterer Ansatz zur systematischen Gewinnung von 3-Mannigfaltigkeiten ist die von Dehn (vgl. 4.3) entdeckte Chirurgie auf der Basis von Knoten oder von Verkettungen von Knoten. Auch hier trifft zu, daß sich jede orientierbare geschlossene 3-Mannigfaltigkeit auf die ausgesprochene Art und Weise gewinnen läßt.[16] Aber auch ohne dieses relativ spät erzielte Resultat, das zeigt, daß man die Dehn-Chirurgie allgemein benutzen kann, um das Homöomorphieproblem in Angriff zu nehmen, war diese Methode von großem Interesse, um konkrete Beispiele - insbesondere von Poincaréschen Räumen (Homöologiesphären) - zu konstruieren.[17] Dennoch finden sich in dem von uns betrachteten Zeitraum nur wenige Beiträge zu diesem Themenkomplex. Eine Ausnahme hiervon ist Seifert 1934, wo u. a. bewiesen wird, daß alle nicht-trivialen Torusknoten vermöge nicht-trivialer Dehn-Chirurgie zu nicht einfach-zusammenhängenden 3-Mannigfaltigkeiten führen. Folglich kann man so kein Gegenbeispiel zur Poincaré-Vermutung erhalten. Knoten, für die die Seifertsche Aussage gilt, heißen heute Knoten mit der Eigenschaft P. Untersuchungen aus den 1970er Jahren haben gezeigt, daß große Klassen von Knoten (z.B. Kabelknoten,

[13] Ein Entscheidungsalgorithmus für Heegard-Diagramme der 3-Sphäre ist heute bekannt, vgl. Rubinstein 1991.

[14] Papakyriakopoulus geht in seinem Übersichtsvortrag (Papakyriakopoulos 1958) nicht auf Heegard-Diagramme ein.

[15] Ähnlich äußert sich auch R. Meyerhoff: „The Heegard gluing approach gives us more of a feel for 3-manifolds, but the recognition problem still seems hopeless." (Meyerhoff 1992, 45).

[16] Genauer gesagt gilt: „Every closed, orientable, connected 3-manifold may be ob-tained by surgery on a link in S^3. Moreover, one may always find such a surgery presentation in which the surgery coefficients are ± 1 and the individual components of the link are unknotted." (Rolfsen 1976, 273). Das Ergebnis selbst stammt von A. D. Wallace (1960) und wurde von W. B. R. Lickorish (1962) auf andere Art und Weise elementar bewiesen.

[17] Vgl. etwa die Darstellung bei Seifert - Threlfall 1934, 224-227.

Doppelknoten) die Eigenschaft P besitzen.[18] Auch ist es gelungen, alle aus Torusknoten entstehende Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren (Moser 1971).

Natürlich ist hier - wie schon oben bei der Überlagerungstheorie - auch auf die Schwierigkeiten hinzuweisen, welche die Knotentheorie selbst, hauptsächlich hinsichtlich der Aufzählung aller verschiedenen Knotenarten bietet. Zum Schluß unserer Betrachtungen zur Dehn-Chirurgie sei das Urteil von R. Meyerhoff zitiert:

> „We are faced now with the usual difficulties. When are two such manifolds the same? When are they homeomorphic to the 3-sphere? These questions are hard.
> Dehn surgery and Heegard gluing approach have a similar visual appeal, but the Dehn surgery approach is superior because the complicatedness of the construction is spread more evenly between 3-dimensional problems (what the knot or link is) and 2-dimensional problems (the gluing). In the Heegard gluing approach, all of the complicatedness resides in the homeomorphism identifying the boundaries of the solid n-holed tori."
>
> (Meyerhoff 1992, 16f)[19]

Schließlich haben wir noch die Zugangweise von H. Seifert und W. Threlfall kennengelernt (vgl. 5.2), welche 3-Mannigfaltigkeiten als Orbiträume von Bewegungsgruppen der 3-Sphäre oder des dreidimensionalen euklidischen bzw. hyperbolischen Raumes gewann. Die entstehenden Gebilden sind dann lokal sphärisch, euklidisch bzw. hyperbolisch, d. h. sie sind lokal isometrisch zum entsprechenden Raum.[20] Weitgehend offen blieb die Frage, welche Mannigfaltigkeiten man auf diese Art und Weise erhalten kann - im Idealfalle würde man gerne sagen: alle orientierbaren geschlossenen. Mit seiner Theorie der gefaserten Räume gelang es Seifert, den sphärischen Fall erschöpfend zu behandeln und insbesondere die Poincaré-Vermutung für die in seinem Sinne faserbaren Räume zu bestätigen. Vor allem aber der hyperbolische Fall blieb - sieht man einmal von der Konstruktion des hyperbolischen Dodekaederraumes ab (Weber-Seifert 1933, 242f) - so gut wie unbehandelt. Insbesondere bemerkte H. Seifert, daß sich alle hyperbolischen Mannigfaltigkeiten nicht fasern lassen, also in der Theorie der faserbaren Räume nicht zu betrachten sind.

Geradezu verblüffend auf diesem Hintergrund ist es, daß W. Thurston plausibel machen konnte, daß eine typische 3-Mannigfaltigkeit entweder topologisch einfach ist oder eine hyperbolische Struktur zuläßt.[21] Die hieran anknüpfenden Arbeiten Thurstons brachten viel beachtete Fortschritte im Bereich der 3-Mannigfaltigkeiten, ohne allerdings (bis jetzt)

[18] Vgl. Rolfsen 1976, 283. Bing gibt in seinem Vortrag von 1964 folgende Einschätzung bezüglich der Möglichkeit durch Dehn-Chirurgie ein Gegenbeispiel zur Poincaré-Vermutung zu konstruieren: „Two difficulties serve as blocks to this approach. First the algebra is fierce and it seems only by chance that we can show a group to be trivial. Second, even if the algebra succeeds, we still need to show that the resulting space is topologically different from S^3." (Bing 1964, 103).

[19] Papakyriakopoulos, der anscheinend eher ein Anhänger der auf Kneser und Dehn zurückreichenden Idee, 3-Mannigfaltigkeiten durch geometrische Zerlegung zu untersuchen (vgl. unten), war, erwähnt auch die Dehn-Chirurgie nicht in Papakyriakopoulos 1958.

[20] Diese Tatsache wird - soweit ich sehe - allerdings bei Seifert und Threlfall nicht explizit formuliert.

[21] Auf der Folie des zweidimensionalen Falles ist das allerdings nicht so erstaunlich, denn alle geschlossenen Flächen lassen mit Ausnahme der 2-Sphäre und des Torus eine hyperbolische Struktur zu (vgl. Meyerhoff 1992, 47). Ein definitiver Beweis von Thurstons „Geometrisierungstheorem", aus dem die erwähnte Tatsache folgen würde, steht aber immer noch aus.

zu einem abschließenden Ergebnis - insbesondere zum Beweis oder zur Widerlegung der Poincaré-Vermutung - geführt zu haben.[22]

Die Einbettung der topologischen Fragestellung „Homöomorphieproblem" in einen geometrischen Kontext erlaubt es auch, neue Invarianten einzuführen. Hier ist vor allem das Volumen zu nennen, welches zu einer feineren Unterscheidung führt als die bislang bekannten algebraisch-topologischen Invarianten (vgl. Meyerhoff 1992, 58-51 oder Milnor 1982, 17-22). Wichtig dabei ist, daß das Volumen mit Hilfsmitteln der klassischen hyperbolischen Geometrie, nämlich im wesentlichen mit der schon bei Lobatschewski zu findenden hyperbolischen Volumenfunktion, gewonnen wird, also die Verwendung der Geometrie unvermeidlich voraussetzt. Weiter wird das fundamentale Ergebnis von D. Mostow benutzt, daß die hyperbolische Struktur einer geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit (im Falle, daß es überhaupt eine gibt) bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist (vgl. Meyerhoff 1992, 48). Man kann diesen Ansatz in einer Entwicklungslinie mit den Seifertschen Faserinvarianten stellen, insofern in beiden Fällen der Rahmen der traditionellen Topologie in Richtung Geometrie überschritten wird, wobei man zugegebenermaßen darüber streiten kann, wieviel Geometrie Seifert wirklich verwandte.

Ein letzter Ansatz, der in unseren Betrachtungen bisher nur sporadisch Erwähnung fand, beruht auf der Grundidee, 3-Mannigfaltigkeiten durch Zerlegen durch Flächen (ohne Selbstdurchdringung) zu untersuchen. Diese steht in strikter Analogie zum zweidimensionalen Fall, wo ja das Aufschneiden der Flächen vermöge von doppelpunktfreien Kurven zum Ziel führt. Der genannte Zugang ist im Dreidimensionalen vor allem mit dem Namen Hellmuth Knesers verbunden, der in seinem DMV-Vortrag 1928 (Kneser 1929) einige Ideen in dieser Richtung entwickelte. Hierher gehört zum einen das Dehnsche Lemma (vgl. 4.3), aber auch der „Sphärensatz" und der „Schleifensatz". Ersterer ist bei H. Kneser zu finden,[23] sein Beweis beruht aber auf dem Dehnschen Lemma. Der Sphärensatz wurde in Spezialfällen 1956 von C. D. Papakyriakopoulos, 1957 von J. Milnor und in allgemeiner Form dann im Dezember dieses Jahres von J. H. C. Whitehead bewiesen.[24] Der Schleifensatz dagegen tritt bei H. Kneser nur implizit auf,[25] eine eigenständige Formulierung findet sich erst bei J. H. C. Whitehead 1939. In der allgemeinsten Form, welche 1957 von C. D. Papakyriakopoulos bewiesen wurde, besagt dieses Theorem:

> „Let M be a 3-manifold which may or may not be compact, with boundary N formed by a number (>0, ≤ ∞) of surfaces closed or not. Let L be a loop belonging to an open set U of an orientable component N' of N, such that L ≅ 0 in M and ≅ 0 on N. Then there exists a simple loop L_0 in U, such that L_0 ≅ in M and ≅ 0 on N."
>
> (Papakyriakopoulos 1958, 320)

22 Einen Überblick zum Stand der Dinge geben Meyerhoff 1992, Ratcliffe 1994 und Saldanha 1994.

23 Dort lautet er: „Ist die Wegegruppe [= Fundamentalgruppe; K. V.] einer zusammenhängenden M^3 das freie Produkt zweier Gruppen A und B, so wird M^3 durch eine S^2 in zwei Teile zerlegt, deren Wegegruppen den Gruppen A und B isomorph sind." (Kneser 1929, 257). Der Sphärensatz hängt eng mit der Poincaré-Vermutung zusammen, insofern er - Geltung der Poincaré-Vermutung vorausgesetzt - eine notwendige und dann auch hinreichende Bedingung für die Irreduzibilität einer 3-Mannigfaltigkeit liefert. Dabei bedeutet irreduzibel, daß jede in die Mannigfaltigkeit eingebettete 2-Sphäre Rand einer 3-Kugel ist (vgl. Kneser 1929, 252).

24 Das Sphärentheorem wird heute in der p.-l.-Kategorie formuliert und bewiesen.
„Let M be on orientable 3-manifold, compact or not, with boundary which may be empty, such that $\pi_2(M) \neq 0$ Then there exists a 2-sphere S semilinearly inbedded in M, such that $S \neq 0$ in M." (Papakyriakopoulos 1958, 319).

25 Nämlich im sogenannten Hilfssatz (Kneser 1929, 248).

Sowohl der Sphärensatz als auch der Schleifensatz erlauben es also, geometrische Gebilde mit einer bestimmten Eigenschaft durch einfachere geometrische Gebilde mit derselben Eigenschaft zu ersetzen. Ähnliches gilt auch für das Dehnsche Lemma, wobei sich die Einfachheit in allen drei Fällen durch die Abwesenheit von Singularitäten ausdrückt. Anders gesagt gestatten alle drei Sätze eine Desingularisierung. Die hier geschilderten Ergebnisse brachten zusammen mit dem weiter unten zu schildernden Beweis der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung einen beachtlichen Aufschwung der „geometrischen Topologie", wie man nun die Beschäftigung mit dem Homöomorphieproblem und verwandten Fragestellungen nannte. Man fand zahlreiche Anwendungen dieser Sätze, welche in Richtung auf eine Lösung der Poincaré-Vermutung oder anderer Teilprobleme des Homoömorphieproblems deuteten.[26]

In die soeben geschilderte Entwicklungslinie gehören auch die Ergebnisse (W. Haken, F. Waldhausen, H. Zieschang) über sogenannte große Mannigfaltigkeiten.[27] Zusammenfassend zu dem geschilderten Zugang sei hier J. Hempel mit seinem Urteil zitiert:

> „Incompressible surfaces have turned out to be highly representative of the manifolds containing them. Combined with the tools provided by the loop and sphere theorems an analysis of the incompressible surfaces in a 3-manifold has proved to be the most effective approach to understanding the structure of the manifold. The most dramatic evidence of this is given in Chapter 13

26 Eine Übersicht gibt Papakyriakopoulos 1958, 327-330, wobei dieser die wichitge Rolle der Poincaré-Vermutung hervorhebt:
„We would like to emphasize the importance of Poincaré conjecture for the classification problem of orientable closed 3-manifolds. This is obvious from Nos. 14-16, where the central rôle of this conjecture can be recognized." Papakyriakopoulos 1958, 330).
Neben den bei „Papa" genannten Resultaten wäre vor allem noch auf die folgende Charakterisierung der 3-Sphäre hinweisen, welche R.H. Bing 1958 ganz im geometrischen Geiste erhielt:„A compact, connected 3-manifold M is topologically S^3 if each tame simple closed curve in M lies in a topological cube in M." (Bing 1964, 121).
An dieser Stelle findet man auch noch andere Kennzeichnungen der 3-Sphäre.

27 Eine 3-Mannigfaltigkeit (ungleich der Kugel) heißt groß, wenn sie eine inkompressible Fläche enthält. Dabei ist eine Fläche F inkompressibel in einer 3-Mannigfaltigkeit M, falls eine der beiden nachfolgenden Bedingungen erfüllt ist:
1. Es gibt eine nicht-nullhomotope einfach geschlossene Kurve k in Int(F) und eine Kreisscheibe D in M mit $\mathrm{Int}(D) \subset \mathrm{Int}(M)$, so daß $D \cap F = \partial D = k$ gilt.
2. Es gibt eine Vollkugel E in M mit $E \cap F = \partial E$ (vgl. Waldhausen 1968, 58).
Dieser Ansatz geht auf W. Haken zurück (Haken 1962) und wurde besonders von F. Waldhausen ausgebaut, weshalb z. B. J. Milnor von der Haken-Waldhausen-Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten spricht (Milnor 1982, 14). Einen Überblick hierzu gibt Haken 1968.

where these ideas are used to show that a large class of 3-manifolds are completely determined by their fundamental group system."

(Hempel 1976, VIII)[28]

Zum Abschluß dieser Auflistung sei noch die Summenbildung erwähnt, die wir bereits bei Kneser 1929 antrafen. Diese spielt auch heute noch eine wichtige Rolle in der Untersuchung von 3-Mannigfaltigkeiten,[29] erlaubt sie es doch, aus einfacheren Bestandteilen kompliziertere zusammenzufügen. Ein weitreichendes Resultat im Rahmen der Summenbildung stammt von J. Milnor: Zwei orientierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 heißen nach Milnor kongruent, wenn es orientierte, einfach-zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten S_1 und S_2 gibt (sogenannte Homotopiesphären, die im Falle einer positiven Beantwortung der Poincaré-Vermutung auch topologische 3-Sphären sind), so daß es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus zwischen $M_1 \# S_1$ und $M_2 \# S_2$ gibt (# bedeutet die zusammenhängende Summe).

Eine orientierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist zerlegbar, wenn M kongruent einer zusammenhängenden Summe $M_1 \# M_2$ ist, wobei weder M_1 noch M_2 eine Homotopiesphäre sein darf. Gibt es keine solche Summendarstellung, so heißt M unzerlegbar. Der Satz von Milnor besagt nun (vgl. Papakyriakopoulos 1958, 327):

1. Jede orientierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, die keine Homotophiesphäre ist, ist orientierungserhaltend homöomorph einer zusammenhängenden Summe unzerlegbarer 3-Mannigfaltigkeiten. Diese Summe ist bis auf die Reihenfolge und Kongruenz der Summanden eindeutig bestimmt.[30]
2. Jede unzerlegbare 3-Mannigfaltigkeit ist entweder kongruent zum orientierten Produkt $S^1 \times S^2$ oder ist asphärisch[31] oder besitzt eine nicht-triviale endliche Fundamentalgruppe.

Dieses Ergebnis, das der Autor erst 1962 veröffentlichte (Milnor 1962a), liefert also eine Art von Klassifikation der orientierten geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten modulo Poincaré-Vermutung, wobei allerdings nicht übersehen werden darf, daß keineswegs klar ist, welche Mannigfaltigkeiten gemäß 2. auftreten können. Bemerkenswert ist die herausgehobene Rolle, welche geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppen spielen - ein Phänomen, das schon die Aufmerksamkeit von M. Dehn (vgl. 4.3) und H. Seifert (vgl. 5.2) auf sich gezogen hatte.

Zusammenfassend zu den geschilderten Zugangsweisen darf man festhalten, daß sie sich weitgehend in dem Rahmen bewegen, der um 1935 abgesteckt war. Die Grundideen

28 Man vgl. aber die eher skeptische Einschätzung, welche (allerdings fast 20 Jahre vorher) C. D. Papakyriakopoulos gab aufgrund seiner eigenen Beweisversuche für die Poincaré-Vermutung (Papakyriakopoulos 1958, 325).

29 Vgl. etwa Hempel 1976, Chap. 3.

30 Zweidimensional entspricht dem der Satz, daß jede orientierte geschlossene Fläche orientierungserhaltend homöomorph (es gilt sogar diffeomorph) einer zusammenhängenden Summe von Tori ist (vgl. etwa Gramain 1971, 86).

31 Ein zusammenhängender topologischer Raum heißt asphärisch, wenn seine höheren Homotopiegruppen sämtlich trivial sind. Anders gesagt ist seine Fundamentalgruppe die einzige nicht triviale Homotopiegruppe. Diese Begriffsbildung geht (für wegweise zusammenhängende Räume) auf Hurewicz 1936a, 215 zurück. Es ist dies die erste Stelle in unseren Betrachtungen, an der höhere Homotopiegruppen eine Rolle spielen.

wurzeln alle in der in dieser Arbeit betrachteten Periode, womit natürlich in keiner Weise geleugnet werden soll, daß entscheidende - wenn auch immer noch nicht zum Ziel führende - Fortschritte errungen werden konnten. Im weiteren soll deshalb kurz die Entwicklung, welche das Homöomorphieproblem und insbesondere die Poincaré-Vermutung genommen hat, dargestellt werden.

Wie bereits bemerkt (vgl. 6) setzte nach 1935 eine Umorientierung der topologischen Forschung in Richtung auf abstraktere algebraische Untersuchungen ein, was ein gewisses Nachlassen des Interesses für das Homöomorphieproblem und die Poincaré-Vermutung mit sich brachte.[32] 1943 gelang es C. D. Papakyriakopoulos, die Hauptvermutung für

32 Man vgl. auch die Darstellung, welche M. H. A. Newman ein Newman 1962 von der Entwicklung der geometrischen Topologie gibt, sowie die folgende kritische Beurteilung der Situation, die H. Hopf 1958 vom Zustand der Topologie lieferte:
„Die großen Erfolge dieser Entwicklung [gemeint ist die Algebraisierung; K. V.] bringen aber, wie mir scheint, auch eine gewisse Gefahr mit sich, nämlich die Gefahr einer Störung des mathematischen Gleichgewichtes, indem eine Tendenz entsteht, den geometrischen Inhalt der topologischen Probleme und Situationen ganz zu vernachlässigen; diese Vernachlässigung aber würde eine Verarmung der Mathematik bedeuten." (Hopf 1960, LXIII)
Eine Entwicklungslinie, vielleicht sogar die wichtigste, welche eine Rückkehr zu geometrischen Fragen förderte, war die von Thom durch seine Kobordismustheorie entscheidend geförderte Differentialtopologie:
„Gerade im Hinblick auf diese Gefahr finde ich, daß Thoms Leistungen etwas außerordentlich Ermutigendes und Erfreuliches an sich haben: auch Thom beherrscht und benutzt natürlich die modernen algebraischen Methoden und sieht die algebraische Seiten seiner Probleme, aber seine grundlegenden Ideen, von deren großartiger Einfachheit ich vorhin gesprochen habe, sind von durchaus geometrisch-anschaulicher Natur." (Hopf 1960, LXIII f)
Ähnlich wie H. Hopf äußerte sich auch H. Whitney, als er vier Jahre später die Laudatio auf den Fields-Medaillenträger John Milnor hielt, der neben R. Thom als wichtiger Vertreter der Differentialtopologie gelten kann:
„To aid in understanding the significance of Milnor's work, I will first say a few words about the recent history of algebraic topology. In the early thirties, the subject seemed to have reached a certain level of completeness in its basic methods and results; the famous textbooks of Lefschetz, of Seifert and Threlfall, and of Alexandroff and Hopf, gave a very good picture of the field. The term „algebraic" had not yet been applied. Then in 1935, the sudden explosion of „cohomology theory", with its various kinds of applications, provided a great impetus to research. In developing these applications to new heights, various algebraic problems arose; one could often write out a formula which described a situation, but could not understand the geometric meaning of the formula. In the forties powerful and general algebraic machinery came into being; this enabled problems, which had before seemed hopelessly complex, to be answered in relatively simple algebraic terms. The subject of „algebraic topology" was in full swing.
The new algebraic method now began to grow by themselves; new concepts, such as exact sequences, sheaves, homological algebra, spread out not only through topology but through neighboring domains of algebra and analysis, where they have had extraordinary success. As pointed out by H. Hopf, in presenting the work of the Fields Medalist R. Thom at the last Congress at Edingburgh, the geometric point of view tended to be swamped in the algebraic machinery. Papers in algebraic topology had commonly the appearance of being pure algebra. Then in the mid fifties, some great discoveries of a more geometric nature took place, which brought on a resurgence of the geometric point of view. The definiton of cobordism and its basic properties and applications by Thom in 1954 was one such discovery; for this he was awarded a Fields Medal in 1958, as mentioned above. In 1956, the mathematical world was astounded by Milnor's proof that the 7-dimensional sphere S^7 was capable of serveral differential structures. This at first might

zweidimensionale Komplexe zu bestätigen und diese zu klassifizieren; 1952 konnte E. E. Moise, wie bereits mehrfach erwähnt, die Triangulierbarkeit für 3-Mannigfaltigkeiten zeigen und für diese die Hauptvermutung verifizieren.[33] Damit war in diesem speziellen Fall - allgemein gilt die Hauptvermutung ja nicht, wie Milnor und andere gezeigt haben (vgl. 4.2) - die Gleichwertigkeit kombinatorischer und topologischer Methoden gezeigt, die Arbeit in der semilinearen Kategorie wurde fortan üblich. Der Nachweis der Unlösbarkeit des Wortproblems der kombinatorischen Gruppentheorie 1955 durch S. P. Novikov und P. Boone und der hierauf basierende Beweis der algorithmischen Unlösbarkeit des Klassifikationsproblems durch A. A. Markov 1958 berühren das Feld der dreidimensionalen Topologie nicht[34], waren aber ansonsten von grundlegender Bedeutung. Im Laufe der 50er Jahre bürgerte sich die Bezeichnung „geometrische Topologie" ein für das Studium von Mannigfaltigkeiten, insbesondere des Homöomorphieproblems und der Poincaré-Vermutung.[35] Einen erheblichen Aufschwung erlebte dieses Gebiet nach den Beweisen von C. D. Papakyriakopoulos (1957) für den Schleifensatz („loop theorem"), den Sphärensatz („sphere theorem") und das Dehnsche Lemma (s. oben). Insbesondere schien

have seemed like an isolated fact; but through Milnor and others it has led to a vast field of work, which has now acquired a name: differential topology." (Whitney 1963, XLVIII)

33 Moise 1952, eine knappe Darstellung der Beweisidee gibt Bing 1964, 93 f.

34 Der Grund hierfür ist, daß nicht alle Gruppen als Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit realisiert werden können; vgl. etwa Stallings 1962. Da andererseits in vier- und mehr Dimensionen jede endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit auftreten kann, würde die Klassifikation der Mannigfaltigkeiten eine Lösung des Wortproblems liefern. Das ist - kurz gesagt - die Idee hinter Markovs Beweis. Man vergleiche Stillwell 1993, Kap. 9.

35 So schreibt E.E. Moise in der Vorrede seines hauptsächlich der dreidimensionalen Topologie gewidmeten Buches „Geometric Topology in Dimensions 2 and 3":
„Geometric topology may roughly be described as the branch of the topology of manifolds which deals with questions of the existence of homeomorphisms. Only in fairly recent years has this sort of topology achieved a sufficiently high development to be given a name, but its beginnings are easy to identify. The first classic result was the Schönflies theorem (1910), which asserts that every 1-sphere in the plane is the boundary of a 2-cell." (Moise 1977, V)
Die algebraische Topologie steht der geometrischen zur Seite, wird aber von dieser unterschieden. Ihre Aufgabe ist es ja eher, die Nichtexistenz von Homöomorphismen vermöge von Invarianten nachzuweisen. Aber die Grenzen sind hier fließend. Man könnte auch daran denken, die geometrische Topologie durch die in der Regel in ihrem Bereich angewandte Methode, die semilineare nämlich, zu charakterisieren.
Zu der soeben angeschnittenen terminologischen Trage schreibt P.J. Hilton:
„One may regard geometric topology as historically the precursor of algebraic topology since it was in the attempt to solve geometric problems that the algebraic methods characteristic of algebraic topology arose. It is true that in the early days of geometric topology the pioneers developed highly articulated combinatorical techniques to tackle the basic classification problem, but the failure to prove the Hauptvermutung, ..., led the topologists of the early 1930's to seek more algebraic methods and turn their main attention to the homology groups of polyhedra (following Poincaré) and developments of these constructs.
Nowadays, as a matter of terminology, one includes combinatorical methods under the general head of geometric topology, but one certainly also includes other methods and ideas, for example, the study of topological manifolds. It is an undoubted fact that geometric topology is once again today an extremely active area of research." (Hilton 1968, 3 f).
Man vergleiche hierzu auch Newman 1962; zum Verhältnis kombinatorische versus algebraische Topologie auch Kapitel 6 oben.

mit diesen Ergebnissen eine Lösung der Poincaré-Vermutung näher gerückt zu sein.[36] In dieser Zeit entstanden auch andere wichtige Arbeiten zum Homöomorphieproblem bzw. zur Poincaré-Vermutung wie Bing 1958, Haken 1962 und Sanderson 1957.

In den 50er Jahren begann man sich mit den klassischen geometrisch-topologischen Fragen analogen Problemen in Dimensionen größer drei zu beschäftigen.[37] Besonderes Aufsehen erregte J. Milnor, als er 1956 die Existenz exotischer Differenzierbarkeitsstrukturen auf der 7-Sphären nachweisen konnte. Damit war im Rahmen der sich stürmisch entwickelnden Differentialtopologie[38] ein erstes Ergebnis substantieller Art bewiesen, das keine niederdimensionale Entsprechung besaß. Der Aufbruch in höhere Dimensionen hatte begonnen![39] Aus Resultaten, welche S. Donaldson 1982 bewies, folgt

36 „ ..., in 1957 Papkyriakoupolos proved the celebrated Dehn lemma, which had remained unproved for many decades and thus rewakened interest in the Poincaré conjecture." (Hilton 1968, 5). Insbesondere hat sich Papakyriakouplos selbst intensiv um diese Vermutung bemüht; vgl. Papkyriakoupolos 1958, 325 und Papkyriakoupolos 1962 sowie 1963.

37 „Sans doute le premier résultat spécifique à la dimension 4 est la remarque de Pontriagine (1949) (indépendamment due aussi à Milnor (1956) s'appuyant sur Whitehead (1949)) comme quoi deux variétés fermées, orientées, simplement connexes ont même type d'homotopie orienté si et seulement si elles ont des formes quadratiques d'intersection isomorphes (plus tard, Wall (1964) montrera même que dans ce cas les deux variétés sont h-cobordantes)." (Guillou-Marin 1986, XVI)

38 Ein interessantes Dokument zur Stellung der Differentialtopologie im Gesamt der Topologie ist S. Smales Übersichtsvortrag „A survey of some recent developments in differential topology", der 1961 gehalten, aber erst 1963 gedruckt wurde. Darin wird die durch Smales Beweis der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung erstarkte Stellung der Differentialtopologie sehr deutlich:
„Certainly, the problems of combinatorial manifolds and the relationships between combinatorial and differentiable manifolds are legitimate problems in their own right. An example is the question of existence and uniqueness of differentiable structures on a combinatorial manifold. However we don't believe such problems are the goal of differential topology itself. This view seems justified by the fact that today one can substantially develop differential topology most simply without any reference to the combinatorial manifolds." (Smale 1963, 132).
Der Beginn der Differentialtopologie im engeren Sinne - wir sahen ja, daß durchaus schon bei H. Poincaré Überlegungen und Ansätze in dieser Richtung zu finden sind - wird i. a. mit R. Thoms Arbeiten identifiziert. Man vergleiche etwa Gleason 1964, 456:
„It is hard to date its origin, but differential topology can be said to have begun with the work of Thom in the early 1950's."
Die Tendenz, die man z. B. in Smales erwähnten Übersichtsartikel finden kann, wonach die ältere (=Poincarésche) Topologie insgesamt Differentialtopologie gewesen sei („Thus differential topology is just topology as Poincaré originally understood it." [Smale 1963, 131]), scheint mir doch überzogen.
Hieraus gewann er dann den Satz (Milnor 1962, XXVI):

39 Das erste Ergebnis geometrischer Art, das zeigte, daß es in höheren Dimensionen Überraschungen geben kann, dürfte die Aufzählung der regulären Polytope gewesen sein (vgl. Schlegel 1886, 133f):
Während es im dreidimensionalen Raum fünf reguläre Polyeder gibt, sind es im vierdimensionalen sechs und höherdimensional nur noch drei.
J. H. C. Whitehead hat in seiner wohl bekanntesten Arbeit „Simplicial spaces, nuclei and m-groups" (1939) folgendes Resultat bewiesen, das später im Beweis der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung durch J. Stallings eine wichtige Rolle spielen sollte und das deutlich macht, daß gewisse Eigenschaften erst in genügend großen Dimensionen gegeben sind (vgl. Milnor 1962, XXVI):
„Let K, L be simply connected complexes of dimension $\leq n$ in the Euclidean space R^p with $p \geq 2n+5$. If K and L have the same homotopy type, then any regular neighborhood U (K, R^p) is combinatorially equivalent to any regular neighborhood U (L, R^p)."

unter Verwendung von Arbeiten M. Freedman sogar, daß es exotische 4-Räume gibt, das heißt differenzierbare Mannigfaltigkeiten, welche zwar dem gewöhnlichen R^4 homöomorph, nicht aber differmorph sind (vgl. Atiyah 1987).

Dieser Aufbruch wurde mit dem Beweis der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung im Jahre 1960 manifest. Es scheint so - jedenfalls konnte ich keine Stelle finden, welche das Gegenteil belegen würde -, daß diese Verallgemeinerung gewissermaßen zeitgleich mit ihrem Beweis Allgemeingut wurde. Sie besagt: „Eine n-dimensionale geschlossene einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit M ($n \geq 5$), deren Homologiegruppen mit denen der n-Sphäre übereinstimmen, ist dieser homöomorph."[40] Diese Verallgemeinerung liegt auf der Hand, hat man sich erstmals klargemacht, daß für vier- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten die Fundamentalgruppe (zusammen mit dem Orientierbarkeitscharakter) das Aussehen der Homologiegruppen nicht mehr vollständig bestimmt.

Den ersten Beweis der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung erbrachte im Falle $n \geq 6$ S. Smale unter der Voraussetzung, daß M eine differenzierbare Struktur trägt (Smale 1960). Er verwandte hierbei die auf R. Thom zurückgehende Theorie des h-Kobordismus sowie den Henkelaufbau von Mannigfaltigkeiten.[41] Kurze Zeit nach Smale[42] veröffentlichte J. Stallings einen Beweis im kombinatorischen (semilinearen) Stil (Stallings 1960). Weitere mehr oder weniger unterschiedliche Varianten wurden von Zeeman 1961 und Wallace 1961 bewiesen. Auf die Details kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden; festzuhalten bleibt, daß seit jener Zeit folgender Satz bewiesen ist: „If M^n ($n \geq 5$) is a compact combinatorial n-manifold that has the same connectedness properties as S^n, then M^n is topologically equivalent to S^n." (Bing 1964, 125, wo man auch eine knappe Beweisskizze findet). Die Bedingung, daß M^n eine kombinatorische Mannigfaltigkeit zu sein habe, wurde von M. H. A. Newman (in Newman 1966) durch die schwächere,

Hieraus gewann er dann den Satz (Milnor 1962, XXVI):
„Let M be a compact contractible formal manifold of dimension n, which possesses a compatible differentiable structure. Then the product of M with a k-simplex is combinatorially equivalent to an (n+k)-simplex, for $k \geq n+5$."
Die Tatsache, daß es dennoch verblüffend wirkt, daß man die verallgemeinerte Poincaré-Vermutung beweisen kann, nicht aber die ursprüngliche, klingt auch bei S. Smale an:
„The surprising thing is, however, that without resolving this problem, the author showed that in many cases, the known numerical and algebraic invariants were sufficient to characterize the diffeomorphism class of a manifold." (Smale 1963, 133)

40 Unter Verwendung der Poincaré-Dualität läßt sich diese Bedingung noch abschwächen. Alternative Formulierungen der Voraussetzung: Es gibt eine stetige Abbildung $f: M \to S^n$, welche Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert; jede stetige Abbildung $g: S^k \to M$ ist nullhomotop für $k \leq n$ (es genügt $k \leq p/2$).

41 Eine Übersicht, wie vorgegangen wird, gibt Smale 1990, 46. Hier verwendet S. Smale allerdings die Morse-Theorie, welche in seinem ursprünglichen Beweis keine Rolle spielte. Wie wir gesehen haben, gibt es schon bei H. Poincaré Überlegungen in diese Richtung (vgl. 3.4).

42 Eine eingehende Schilderung des Ablaufes seiner Entdeckung sowie der Entstehung der anderen Beweise der Poincaré-Vermutung in höheren Dimensionen gibt Smale selbst in Smale 1990. Im übrigen wird Smales Reklamation der Priorität von folgender Äußerung E. C. Zeemans gestützt, die dieser in einem Übersichtsvortrag zur verallgemeinerten Poincaré-Vermutung bereits 1961 tat: „Of course, the first person to conceive of a proof of the Poincaré conjecture (for $n \geq 5$) was Smale." (Zeeman 1961, 199). Man vgl. auch das Zitat von J. R. Stallings bei Smale 1990, 47.

Poincaré's Intentionen wohl eher gerecht werdende, M^n sei eine topologische Mannigfaltigkeit, ersetzt.[43]

Der Beweis der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung brachte auch einen Aufschwung für die Bemühungen um die Lösung des klassischen Falles $n = 3$ sowie des ebenfalls noch offenen Falles $n = 4$ mit sich.[44] Es war allerdings von vorne herein klar, daß die Methoden, die zur Lösung in den Dimensionen $n \geq 5$ geführt hatten, in niedrigeren Dimensionen nur bedingt oder auch gar nicht einzusetzen sind.[45] Dennoch gab es, wie wir weiter oben gesehen haben, eine ganze Reihe von Fortschritten und Teilergebnissen.

Eine wichtige Entwicklungslinie, die wir hier nur streifen können, besteht in der Reduktion der Poincaré-Vermutung auf rein algebraische Probleme im Rahmen der kombinatorischen Gruppentheorie. Aus der Vielzahl der Arbeiten seien hier nur Papakyriakopoulos 1962 und 1963 sowie Stallings 1966 genannt (vgl. auch Hempel 1976, 158-162 und Chandler-Magnus 1982, 178).

Eine wissenschaftliche Sensation stellte die 1982 von M. H. Freedman vorgelegte vollständige Klassifikation der geschlossenen einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten dar[46], welche insbesondere die (verallgemeinerte) Poincaré-Vermutung für diese Dimension bestätigte.

Aufsehen erregte 1986 ein angeblicher Beweis der dreidimensionalen Poincaré-Vermutung durch C. Rourke und E. Rêgo, der sich allerdings als nicht stichhaltig erwies.[47] Auf die Arbeiten von W. Thurston und anderen, welche wichtige Fortschritte, wenn auch noch keine definitive Lösung der klassischen Poincaré-Vermutung gebracht haben, wurde weiter oben schon eingegangen. Schließlich sei noch auf die neuesten Entwicklungen im Bereich der Knoteninvarianten („Jones-Polynome" und dergleichen) verwiesen, welche auch Perspektiven für die dreidimensionale Topologie eröffnen, wobei sich überraschende und interessante Verbindungen zur theoretischen Physik ergaben (vor allem in den Arbeiten von Witten).

1992 veröffentlichte V. Poénaru eine Arbeit zur Poincaré-Vermutung, welche wichtige neue Teilergebnisse enthielt (Poénaru 1992).

Damit sind wir am Ende der langen Geschichte des Homöomorphieproblems und der Poincaré-Vermutung angelangt. Einige zusammenfassende Betrachtungen sind somit angebracht.

Es ist sicher nicht übertrieben, zu sagen, daß das Homöomorphieproblem bei H. Poincaré die zentrale Fragestellung der Topologie war. Dies einerseits aus innermathematischen Interessen (ein Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten würde wichtige Informationen liefern z. B. für die Theorie der automorphen Funktionen, für die algebraische Geometrie usw.), andererseits aber auch aus einem erkenntnistheoretischen

43 Vgl. Milnor 1987, 13.

44 Zu ersteren vergleiche man die weiter oben in diesem Kapitel besprochenen Lösungsansätze.

45 „I should emphasize that the stories in dimensions 3,4 and $n \geq 5$ are totally different, with the low-dimensional cases being much more subtle and intricate." (Atiyah 1987, 3)

46 Freedman 1982; eine knappe Übersicht gibt Milnor 1987.

47 Dieser „Beweis" wurde in drei Preprints der Universität Warwick veröffentlicht („A characterization of Homotopy 3-Spheres I and II, Characterizations of S^3") sowie in einer kurzen Notiz in „Nature" (Stewart 1986) und in einem längeren populärwissenschaftlich gehaltenen Artikel im „New Scientist" (Rourke-Stewart 1986). Die Geschichte des Scheiterns dieses Ansatzes erzählt Taubes 1987.

Interesse: Die Topologie als kalkulatorische Erfassung räumlicher Verhältnisse sollte auch dann noch weiterhelfen, wo uns die Anschauung im Stich läßt! Zu diesem Zweck führte Poincaré neue Hilfsmittel ein, prägte neuartige Begriffe und schuf wirkungsvolle Methoden. Durch die ungeheure Vielfalt an Ideen, die sich in Poincaré's topologischem Werk finden, gelang es diesem, den Rahmen für die weitere Forschung auf Jahrzehnte hinaus abzustecken. In Gestalt der Poincaré-Vermutung hinterließ er dieser eine Art von Prüfstein[48], dessen mathematische Bedeutungsträchtigkeit sich erst nach und nach herausstellte. Daneben - und das wird meiner Ansicht nach in der eher an allgemeinen Prinzipien orientierten Historiographie der Mathematik gerne übersehen - bevölkerte er die von ihm neuentdeckte Welt mit zahlreichen hochinteressanten Beispielen, aus denen seine Homologiesphäre - der spätere Dodekaederraum - als geradezu singuläres Ereignis herausragt. Die allgemeine Theorie muß sich an den Beispielen bewähren; sie ist kein Selbstzweck sondern Mittel zum Zweck. Insbesondere zeigten diese Beispiele schnell, wie kompliziert die Dinge im Falle der 3-Mannigfaltigkeiten liegen.

Die an Poincaré anschließende Phase, welche sich durch die Namen M. Dehn, P. Heegard, E. Steinitz und H. Tietze kennzeichnen läßt, bringt vor allem eine Präzisierung und damit aber auch Verengung des begrifflichen Rahmens und der zulässigen Methoden. Der Rückzug auf den als sicher erachteten Boden der kombinatorischen Topologie bescherte der Topologie einige fundamentale Probleme (Triangulierbarkeit, Hauptvermutung) als Ausdruck des spannungsvollen Verhältnisses zwischen allgemein (kontinuums-) topologischer Fragestellung und speziellen (diskret-) kombinatorischem Ansatz. Eine Reduktion der ersteren Sichtweise zugunsten der letzteren, wie sie Dehn und Heegard in ihrem Verdikt einer Analysis situs als einem durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichneten Teils der Kombinatorik zu fixieren suchten, blieb Episode[49]. Das Homöomorphieproblem rückte neben diesen Anstrengungen um begriffliche und methodische Strenge etwas in den Hintergrund; seine Stellung als die eigentliche Aufgabe der Topologie ist jedoch unangefochten. Zwei allgemeine Verfahren, mit deren Hilfe auch heute noch im Bereich der 3-Mannigfaligkeiten gearbeitet wird, die Heegard-Diagramme und die Dehn-Chirurgie, entstehen in dieser Phase. Während es frühzeitig klar war, daß man jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit durch Heegard-Chirurgie gewinnen kann, konnte eine entsprechende Aussage für die auf Dehn zurückgehende Methode erst in den 60er Jahren bewiesen werden. Es blieb H. Poincaré vorbehalten, mit seiner Homologiesphäre die Leistungsfähigkeit des Heegardschen Verfahrens, das schon von W. Dyck antizipiert worden war, zu zeigen. In Gestalt der Linsenräume (auch diese Bezeichnung ist

48 Bezüglich des Standes, den das Homöomorphieproblem mit Alexander 1919 erreicht hatte, schreibt S. Lefschetz in einem Artikel zur Geschichte der Topologie aus dem Jahre 1970:
„There the question has rested, except that nowadays one expects much more, namely identity of all homotopy groups in addition to the identity of the homology groups. In fact whenever a new topological character is discovered one asks if it suffices to distinguish two given complexes. No such character has been discovered at the present time." (Lefschetz 1970, 33)

49 So schreibt z. B. F. Levi: „Der Aufbau [der Flächentopologie; K. V.] erfolgte - und daran wird sich nichts ändern - rein kombinatorisch ohne irgend eine Frage, was die hier benutzten Elemente etwa einzeln bedeuten sollen. Das Ziel der Untersuchung ist aber nicht ein Kombinationsspiel, sondern eine Methode zur Erforschung gewisser geometrischer Eigenschaften, die sich auf die Gesamtgestalt der geometrischen Gebilde beziehen (...). Diesem Ziel der Untersuchung muß die Auswahl der Hilfsmittel entsprechen." (Levi 1929, 59).

späteren Ursprungs) steuerte H. Tietze eine ganze Klasse von Beispielen bei, die in der Folge immer wieder eine wichtige Rolle spielen sollte - nicht zuletzt deshalb, weil die Linsenräume systematisch gesehen nach der 3-Sphäre die einfachsten orientierbaren geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten sind. die bei Poincaré behandelten Beispiele dagegen sind vom systematischen Standpunkt komplizierter, was sich aus seinen Ansatz erklärt.

Die bislang geschilderten Phasen gehen etwa 1910 zu Ende. Wir können sie so charakterisieren: Einer sehr weitgesteckten Aufgabenstellung („löse das Homöomorphieproblem für 3-Mannigfaltigkeiten", "beweise die Poincaré-Vermutung") stand am Ende ein recht eng gesteckter methodischer Rahmen - der kombinatorische nämlich - gegenüber, dessen Leistungsfähigkeit zu erweisen war. Dies geschah einerseits durch die Behandlung des reichlich vorhandenen Beispielmaterials, andererseits durch die Suche nach allgemeinen Aufbauprinzipien. Bis etwa 1910 wurden auch die wichtigsten Erkenntnisse erlangt, welche zeigten, daß die Welt der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten sich wesentlich von derjenigen der Flächen unterscheidet. Hier ist zunächst einmal Dycks Einsicht (1884) zu nennen, daß man die 3-Sphäre durch Randidentifikation aus zwei Volltori bekommen kann - meines Erachtens die erste tiefliegende Einsicht in das Wesen von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten überhaupt. Heegard und Poincaré haben diesen Ansatz ohne bewußte Anknüpfung an Dyck dann weiterentwickelt zur Methode der Heegard-Zerlegungen und -diagramme. Auf Dyck (1890) geht auch die Erkenntnis zurück, daß die Euler-Charakteristik (also die bis dahin gängigste topologische Invariante) im Falle von 3-Mannigfaltigkeiten nicht mehr ausreicht, um Homöomorphieklassen festzulegen. Diese wurde dann von Poincaré dahingehend vertieft, daß auch die Betrachtung der Homologie nicht hinreicht, um 3-Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren und daß folglich stärkere Invarianten herangezogen werden müssen. In Gestalt der Fundamentalgruppe hat er eine solche bereitgestellt.

Schließlich erkannte Dyck auch, daß die Möglichkeit, Volltori im dreidimensionalen Raum verknoten zu können, wichtige Konsequenzen für 3-Mannigfaltigkeiten besitzt. Diese Möglichkeit, die kein Analogon für Flächen kennt, wurde dann von Dehn systematisch untersucht und angewandt.

Bei der Suche nach allgemeinen Aufbauprinzipien setzten die weiteren Bemühungen ein. Auf der allgemeinen methodologischen Ebene führten diese schließlich zu den hauptsächlich von L. E. J. Brouwer, J. W. Alexander und M. H. A. Newman bereitgestellten simplizialen Methoden, deren Ergänzungsbedürftigkeit (z.B. um die Invarianz der Betti-Zahlen nachweisen zu können) sich allerdings frühzeitig herausstellte.

Dennoch lieferten sie einen relativ abgeschlossenen Rahmen, auf denen sich dann die lehrbuchhaften Darstellungen mehr oder minder stützen konnten (Lefschetz 1930, Veblen 1931, Seifert-Threlfall 1934). Parallel hierzu entwickelte sich aber auch die allgemeine mengentheoretische Topologie v. a. durch den Beitrag F. Hausdorffs weiter, so daß bald schon ein leistungsfähiger kontinuumstopologischer Begriffsrahmen zur Verfügung stand. Dies gilt insbesondere für den Mannigfaltigkeitsbegriff, der in seiner allgemeinen nichtkombinatorischen Form im Falle zweier Dimensionen von T. Radó im Anschluß an H. Weyl präzisiert wurde. Insofern blieb das charakteristische Spannungsverhältnis von allgemeiner Fragestellung und spezieller Methode stets erhalten. Was das Homöomorphieproblem anbelangt, so konnte J.W. Alexander 1919 zeigen, daß die von H. Poincaré angegebenen Invarianten nicht ausreichen, um den Homöomorphietyp einer geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit zu charakterisieren. Neue Invarianten wurden gesucht und gefunden (Eigenverschlingungszahlen, Reidemeister - Franz - Torsion, Seiferts Faserinvarianten). Allmählich schälte sich die Poincaré-Vermutung als besonders wichtiges Problem im Umfeld des Homöomorphieproblems heraus, was einerseits seinen Ausdruck in der terminologischen Fixierung (bei Seifert-Threlfall u.a.), andererseits in ersten Arbeiten gezielt zu dieser Fragestellung (F. Frankl, J. H. C. Whitehead) seinen Ausdruck fand. Weiter gelang es in dieser Phase, die Beispielvielfalt lokal zu ordnen, indem das Homöomorphieproblem der Linsenräume (H. Seifert, K. Reidemeister) und der verschiedenen Formen des Dodekaederraumes (H. Seifert, W. Threlfall, C. Weber) geklärt werden konnte. Neue Ansätze brachte die in der Tradition des klassischen Raumformenproblems stehende Theorie der Diskontinuitätsbereiche nach Seifert-Threlfall und insbesondere die Theorie der gefaserten Räume von H. Seifert. Letztere konnte das Homöomorphieproblem für die Klasse der faserbaren Räume lösen und damit den aus dem 19. Jahrhundert bekannten zweidimensionalen Fall (die Klassifikation der geschlossenen Flächen) um eine neue beispielhafte Lösung ergänzen. Zukunftweisend sollte die von Seifert und Threlfall vollzogene Einbeziehung geometrischer Überlegungen sein. Andere wichtige Ansätze, die unter der Überschrift Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten gefaßt werden können, wurden von H. Kneser skizziert. Eine systematische Untersuchung der verschiedenen bekannten Erzeugungsverfahren von 3-Mannigfaltigkeiten zusammen mit dem Versuch, deren Tragweite zu bestimmen, legte H. Seifert 1931 in seiner Dresdner Dissertation vor. Zusammenfassend kann man diese Phase, die sich von 1919 bis etwa 1935 erstreckte, als die der Konsolidierung und schließlich Subsumption (siehe unten) charakterisieren, während die erste vorangehende eine proliferierende (Poincaré) und die zweite eine kodifizierende (Dehn-Heegard, Steinitz, Tietze) darstellte (vgl. 8).

Allerdings setzte in dieser dritten Phase bereits jene Entwicklung, von uns als Algebraisierung gefaßt, ein, welche zu einer Verschiebung des Schwerpunktes der topologischen Forschung in den 40er und 50er Jahren führen sollte. Diese lenkte die Aufmerksamkeit auf allgemeinen Fragestellungen weg von den konkreten Mannigfaltigkeiten und war oft verbunden mit dem Bestreben, den traditionellen kombinatorischen Rahmen zugunsten eines allgemeineren zu überwinden. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Homologietheorie. Im Gefolge verlor das Homöomorphieproblem seine zentrale Stellung für die nun meist algebraisch genannte Topologie. Neben algebraischer und mengentheoretischer Topologie formierte sich in den 50er Jahren allmählich die geometrische Topologie als Fortführung der Bemühungen um das Homöomorphieproblem, wobei bezeichnenderweise die traditionellen Methoden der kombinatorischen Topologie - wenn natürlich auch modifiziert z. B. zu semilinearen - weiterverwendet wurden. Für den dreidimensionalen Fall zeigte E. E. Moise 1952, daß kombinatorische und kontinuumstopologische Methoden gleichberechtigt sind, indem er für diesen Bereich die Hauptvermutung und die Triangulierbarkeit verifizierte. Für höhere Dimensionen (größer vier) ist das nachweislich nicht mehr das Fall (J. Milnor, 1961). Der Unterschied zwischen dem dreidimensionalen und dem höherdimensionalen Fall wird auch durch A. A. Markovs Ergebnis (1958), die algorithmische Unlösbarkeit des Klassifikationsproblemes betreffend (in vier- und höherdimensionalen Fall), unterstrichen. In Gestalt der Differentialtopologie erwuchs der traditionell-geometrischen Topologie in den 50er Jahren eine Konkurrentin, welche wesentliche Aufschlüsse zu dem beide Richtungen interessierenden Fragenkreis bringen sollte.

Greifbar wird dies in den Beweisen der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung aus den Jahren 1960 und 1961, welche teilweise differentialtopologisch (Smale, Wallace), teilweise kombinatorisch (Stallings, Zieman) waren. Neben dieser Duplizität der Methoden ist zweierlei hervorzuheben: einerseits der hiermit vollzogene Aufbruch in höhere Dimensionen, der sich in den 50er Jahren abzuzeichnen begann, andererseits die Herauslösung der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung aus dem Homöomorphieproblem als eine von diesem weitgehend unabhängig zu behandelnde Fragestellung. Ein ähnlicher Vorgang fand für den dreidimensionalen Fall schon Anfang der 30er Jahre statt (vgl. 5.4). Bis dahin war man davon ausgegangen, daß die Klärung des Homöomorphieproblems oder auch der Poincaré-Vermutung im dreidimensionalen Fall einfacher sein sollte als im höherdimensionalen. Hierin steckte nicht zuletzt rekursives Denken: Führe den dreidimensionalen Fall auf den zweidimensionalen, welcher bereits gelöst ist (ganz deutlich bei H. Seiferts Zerlegungsfläche), zurück; ist der dreidimensionale gelöst, so verfahre analog mit dem vierdimensionalen, usw. Die bei der Lösung der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung eingesetzten Methoden zielen nicht mehr auf die Rückführung auf niedere Dimensionen ab sondern auf eine Arbeit direkt an den betrachteten Mannigfaltigkeiten. Dies stellt methodologisch ein neues Element dar, obwohl die Grundzüge der Methoden (z. B. Ansetzen/Wegnehmen von Henkeln) längst bekannt waren. Als Motive für die Herauslösung der Poincaré-Vermutung aus dem Kontext des Homöomorphieproblems sind einerseits die Erkenntnis, daß das allgemeine Homöomorphieproblem weitere Invarianten erfordert bis hin zu dessen (algorithmischer) Unlösbarkeit in höheren Dimensionen zu nennen, andererseits die große systematische Bedeutung, welche einer topologischen Charakterisierung der Sphäre in allen Dimensionen zukommt.

Die Entwicklung, den der hier betrachtete Problemkreis nach 1960 genommen hat, scheint durch Kontinuität gekennzeichnet zu sein. Brüche und Innovationen vergleichbar den oben geschilderten sind kaum zu finden. Das soll natürlich nicht heißen, daß die Dinge einfacher geworden wären. Eher das Gegenteil ist der Fall. Als wesentliches neues Element ist aber die „Rückkehr der Geometrie" im Werk von W. Thurston und anderen hervorzuheben. Für eine abschließende Beurteilung dieser Entwicklung scheint es aber heute noch zu früh zu sein.

Versucht man zusammenfassend in der geschilderten Entwicklung Übergänge zu bezeichnen, so findet man deren mehrere. Zum einen ist hier die Entwicklung von Poincaré zu seinen direkten Nachfolgern zu nennen, welche das kombinatorische Element, das auch bei Poincaré vorhanden, wenn auch nicht dominant gewesen ist, in den Vordergrund stellten. Dabei wurden bei Dehn-Heegard und Steinitz Einflüsse der von Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie" entwickelten neuen Auffassung von Axiomatik deutlich. Dennoch konnte sich das kombinatorische Programm im engen Sinne, das die Topologie in eine mit undefinierten Grundbausteinen arbeitende Kombinatorik auflösen wollte, nicht lange halten. Stattdessen setzte sich eine Mischform, die in Anlehnung an Chasles „méthode mixte" genannt wurde, durch: Die kombinatorische Topologie, deren Grundbegriffe (etwa Zahlen, Simplizes,...) fortan geometrisch interpretiert wurden, tritt in den Dienst der Kontinuumstopologie. Letztere formuliert die Fragen, welche mit den Mitteln der ersteren beantwortet werden sollen. Eine Schlüsselrolle für diesen Übergang kommt der Methode der simplizialen Apoproximation zu, die von L. E. J. Bronwer entwickelt und von J. W. Alexander aufgegriffen wurde. Es gelang mit ihrer Hilfe, einige wichtige Probleme der Kontinuumtopologie, wie etwa das Invarianzproblem der Betti-

Zahlen, zu klären. Andererseits zeigte sich aber, daß die beiden Grundprobleme, welche mit Hauptvermutung und Triangulierbarkeit beschrieben werden, für Dimensionen größer zwei allen Beweisversuchen trotzten. Ohne diese war aber die Geltung vieler Ergebnisse auf den Rahmen der kombinatorischen Topologie beschränkt. Dennoch blieb der kombinatorische Ansatz - und bleibt noch immer - gerade in der dreidimensionalen Topologie für die Untersuchung von Mannigfaltigkeiten, insbesondere für das Homöomorphieproblem und die Poincaré-Vermutung, von größter Bedeutung. Dieser Teilbereich der Topologie, die Theorie der Mannigfaltigkeiten, der ursprünglich (bei Poincaré etwa) eine beherrschende Stellung im Gesamt der Topologie überhaupt inne hatte, wurde beginnend mit den 30er Jahren zurückgedrängt zugunsten anderer Gebiete. Darüber hinaus geriet er methodologisch gesehen durch das Festhalten an den kombinatorischen Methoden in Verzug gegenüber der restlichen Topologie, die sich in Richtung algebraische Topologie zu entwickeln begann. Die Tendenz zu großer Abstraktheit und Allgemeinheit - zu einer, wenn man so will, strukturalistischen Auffassung - zeigte sich ja in diesem Zeitraum auch in anderen Teildisziplinen der Mathematik, insbesondere in der Algebra. Im Bereich der Topologie der Mannigfaltigkeiten traf sie mit dem Wunsch nach Überwindung des kombinatorischen Ansatzes zusammen, was dann in den 50er Jahren zur Ausarbeitung der nicht-kombinatorischen algebraischen Topologie (etwa Homologie- und Homotopietheorie) führte. Die weiterhin mit - natürlich stark modifizierten - kombinatorischen Mitteln arbeitende Topologie der Mannigfaltigkeiten wird jetzt terminologisch als geometrische Topologie gefaßt. Hinsichtlich der beiden betrachteten Probleme Hauptvermutung und Triangulierbarkeit werden in dreidimensionalen Fall positive Lösungen erzielt. Deshalb darf man in diesem Bereich von einer Gleichwertigkeit des konkret-kombinatorischen und des abstrakt-algebraischen Ansatzes reden, was es erlaubt, die Vorteile beider zu nutzen. Dennoch widersetzten sich das dreidimensionale Homöomorphieproblem aber auch die Poincaré-Vermutung in ihrer ursprünglichen Form bislang erfolgreich einer Klärung.

Die Poincaré-Vermutung ist mittlerweile zu einem jener berühmten Probleme geworden, deren Lösungen Ruhm verheißen (vergleichbar der Riemannschen und der Fermatschen Vermutung - letztere mittlerweile vielleicht Satz zu nennen). So wurden denn wichtige Fortschritte im Bereich der Poincaré-Vermutung oft mit der Fields-Medaille belohnt: S. Smale 1966, M. Freedman 1986, W. Thurston 1990. (Im weiteren Umfeld wären auch noch R. Thom 1958 und J. Milnor 1962 zu nennen.) Das deutet auf die wichtige Rolle hin, welche Vermutung in der disziplinären Matrix der Mathematik spielen. Sie sind gleichsam Kristallisationskerne, an die sich die mathematische Forschung anlagert. Das erklärt auch, warum "gute" Vermutungen - man denke nur an Hilberts Problemkatalog von 1900 - so wichtig für das Fortschreiten der Mathematik sind. Ein Kennzeichen „guter" Vermutungen ist es, daß sie die Balance halten zwischen aussichtsloser Schwierigkeit einerseits und uninteressanter Einfachheit andererseits. Ein weiteres Charakteristikum ist ihr Beziehungsreichtum, der sich oft dahingehend ausdrückt, daß Sätze modulo der fraglichen Vermutung bewiesen werden. Ich hoffe, die vorangehenden Betrachtungen haben deutlich gemacht, daß die Poincaré-Vermutung mit Fug und Recht Anspruch erheben darf, solch eine „gute" Vermutung zu sein.[50] Die Wichtigkeit von Problemen für das Fortschreiten der

Mathematik hat D. Hilbert in seinem berühmten Vortrag von 1900 geradezu emphatisch hervorgehoben:

> „Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebensfähig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbständigen Entwicklung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so betrachtet die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont."
>
> (Hilbert 1989, 23)

Aus der Sicht unserer Betrachtungen ist dem eigentlich nichts hinzuzufügen, außer vielleicht, daß es letztlich gar nicht so sehr auf die Lösung des Problems ankommt sondern auf die Bemühungen um seine Lösung. Diese bringen nämlich neue Methoden, neue Einsichten und auch neue Probleme hervor, weshalb im Extremfall das Ausgangsproblem an Interesse verlieren kann.

---

[50] Es sei hier noch einmal an die fast gleichlautenden Hilbertschen Kriterien erinnert, welche ein „gutes" mathematisches Problem, also insbesondere eine Vermutung, zu erfüllen hat (vgl. Hilbert 1900, 23-25):

- „Klarheit und leichte Faßlichkeit";
- es „sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrenung nicht spotte";
- Beziehungsreichtum.

Dem könnte man noch ein viertes Kriterium, die „Natürlichkeit", hinzufügen. Was damit gemeint ist, umschreibt treffend eine Bemerkung, welche Fama H. Poincaré zuschreibt, ohne daß ich dies hätte verifizieren können: „Il ne faut pas traiter les problèmes qu'on se pose, il faut traiter les problèmes qui se posent:" Für eine moderne Interpretation der Hilbertschen Gedanken aus der Sicht der Lakatosschen Forschungsprogramme vergleiche man Hallett 1979 (weiterführend Glas 1993).

8 Einige abschließende Gedanken zur Disziplingenese sowie zur Rolle von Beispielen in der Mathematik

In diesem abschließenden Kapitel[1] möchte ich einige Bemerkungen allgemeinerer Natur anfügen. wobei zwei Themenkreise im Vordergrund stehen werden: die Herausbildung der Topologie als eigenständige Teildisziplin der reinen Mathematik und die Rolle der Beispiele in der Entwicklung der Topologie speziell und in der Mathematik allgemein.

Die Topologie zählt ohne Zweifel zu den jüngeren Teildisziplinen der reinen Mathematik; unter den klassischen Großgebieten (Analysis, Algebra, Zahlentheorie, Geometrie, Topologie, Logik und Grundlagenforschung) ist sie wohl die jüngste überhaupt. Anders als die moderne Algebra, welche ja nicht viel früher entstanden ist als die Topologie, besitzt letztere so gut wie keine Wurzeln, welche lange in die Mathematikgeschichte zurückreichen (bei der Algebra wäre dies die Gleichungslehre). Sieht man von einigen isolierten Problemen (z.B. Rösselsprung, Königsberger Brückenproblem, Verschlingungszahlen) einmal ab, deren (wenn überhaupt) topologischer Charakter eigentlich erst in der Rückschau deutlich wurde, so bleibt als wichtiger Vorläufer topologischer Fragestellungen eigentlich nur der Eulersche Polyedersatz.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts traten hierzu noch die Knotentheorie, Kartenfärbungsprobleme, die ersten Ansätze in Richtung einer allgemeinen mengentheoretischen Topologie (Untersuchung von Singularitätenmengen, Anfänge der Maßtheorie) sowie die im Kapitel 2 ausführlich betrachteten Arbeiten zur Klassifikation der Flächen. Diese Probleme stellten sich ursprünglich in unterschiedlichen mathematischen Kontexten; es war ein langer Weg, bis sie sämtlich in der neuentstandenen Disziplin Topologie einen Platz angewiesen bekamen.

Wir wollen uns hier auf den zuletzt genannten Problemkreis konzentrieren. Im Kapitel 2 haben wir gesehen, daß das Problem der Klassifikation der Flächen seine Ursprünge im Bereich der Funktionentheorie hatte, insbesondere in dem Bestreben, aus der Gestalt Riemannscher Flächen Aufschlüsse über die zugehörigen Funktionen zu gewinnen. Die Ergründung der gestaltlichen Verhältnisse erforderte gänzlich neue Hilfsmittel, etwa Riemanns Zusammenhangstheorie. Problem nebst Hilfsmittel verselbständigten sich in der Folgezeit. Hierfür lassen sich drei Gründe anführen: Einerseits erwies sich das Problem

[1] Ähnliche Überlegungen wie hier findet man in Epple 1994, wober ich einige zentrale Ideen übernommen habe. Weiter hat gerade dieses Kapitel viel von Diskussionen mit M. Epple profitiert.

selbst als ein vielversprechendes Forschungsprogramm, so daß es für sich selbst bestehen konnte, andererseits waren die Methoden (Querschnitte, Berandung), mit denen es in Angriff genommen wurde, dem Kontext, in dem sich das Problem ursprünglich gestellt hatte, eher fremd, und schließlich fanden die neuen Ergebnisse rasch Verwendung in Bereichen, welche ursprünglich nicht intendiert waren, so z.B. in der theoretischen Physik (Helmholtz (1858) und später die englisch-schottischen Physiker, allen voran J.C.Maxwell). Erinnert sei auch an J. B. Listing, der immer wieder die Beziehungen seiner Topologie zu den Naturwissenschaften betonte. Somit ergab sich allmählich eine Herauslösung (Dekontextualisierung; vgl. Epple 1994, 1 und passim, wo von „elimination of the context" gesprochen wird) der topologischen Aspekte. Deutlich wird diese beim Übergang von Riemann, der - sieht man einmal von dem nicht publizierten Fragment über Analysis situs ab - immer nur Hilfsbetrachtungen aus der Analysis situs im Rahmen seiner funktionentheoretischen Arbeiten anstellte, zu C. Jordan und E. Betti, welche die ersten rein topologischen Abhandlungen verfaßten. Allerdings blieb bei diesen Autoren der aus heutiger Sicht leitende Gesichtspunkt, nämlich daß topologische Invarianten solche unter Homöomorphismen sind, im Hintergrund. Herausgestellt hat dies - nach wenig beachteten Vorschlägen von A.F. Möbius - erstmals wieder F. Klein in seinem Erlanger Programm (1872). Damit war ein begrifflicher Rahmen - selbstverständlich noch in recht unvollkommener Weise - gegeben, in dem sich die im Entstehen begriffene Disziplin bewegen konnte, und der Anschluß an die Geometrie, so wie sie F.Klein auffaßte, hergestellt. Hinzu kam die Erweiterung des Bereiches behandelter Gegenstände durch Ausdehnung des Mannigfaltigkeitsbegriffes auf n Dimensionen, welche als erste Riemann und Betti vornahmen.
Schlagwortartig läßt sich der Entwicklungsstand der Topologie um 1875 herum so charakterisieren:

- *Gegenstände*: (eingebettete) Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, hauptsächlich allerdings Flächen;
- *Ziel*: deren Kennzeichnung unter qualitativen Gesichtspunkten, insbesondere Klassifikation nach Homöomorphie;
- *Methoden*: Beranden, Zerschneiden, Verhalten geschlossener Kurven;
- *Ergebnis*: Klassifikation der geschlossenen orientierbaren Flächen nach Jordan;
- *Modellvorstellung*: Sphäre mit Henkeln (nur für geschlossene orientierbare Flächen) oder mit Kreuzhauben (nur für geschlossene nicht-orientierbare Flächen).

Vor allem in den Arbeiten von W. Dyck in der zweiten Hälfte der 80er Jahre wurde ein weiterer Schritt in Richtung Autonomie für die Theorie der Mannigfaltigkeiten insbesondere der Flächen vollzogen. Dyck versuchte nämlich, die Grundbegriffe wie Fläche, Mannigfaltigkeit und so weiter unabhängig von traditionellen Vorstellungen zu gewinnen. Hierzu wählte er einen kombinatorischen Aufbau derselben in Gestalt einer Art von Zellenkomplex. Ideengeschichtlich kann man hier eine Anknüpfung an die Entwicklungslinie „Polyedertheorie" feststellen, insbesondere an die Arbeiten von Möbius und Listing. Die grundlegenden Objekte werden Inzidenzstrukturen; auch die Idee der Charakteristik entstammt ursprünglich der Lehre von den Polyedern. Gerade diese stellte ja Dyck in den Vordergrund. Dessen große Arbeiten von 1888 und 1890 boten die erste einigermaßen in sich geschlossene Darstellung der Topologie (im Sinne einer Theorie der Mannigfaltigkei-

ten).[2] Hier treffen wir für solche Darstellungen typische Charakteristika an wie: Schilderung der Vorgeschichte nebst ausführlicher Sichtung der Literatur (unser Problem hat Tradition), klare Formulierung der Zielsetzung (Zentralproblem: Klassifikation der Mannigfaltigkeiten), autonome Einführung der Grundgegenstände (kombinatorischer Aufbau der Mannigfaltigkeiten), klares Methodenkonzept (Charakteristik, gewonnen aus dem kombinatorischen Aufbau; Zurückdrängen der Anschauung als erkenntnisbegründende Instanz)[3] und paradigmatisches Ergebnis (Klassifikation der geschlossenen Flächen). Mit Dyck gewann die Topologie die wichtigsten Charakteristika einer Disziplin. Allerdings: So erfolgreich Dyck im Bereich der zweidimensionalen Topologie war, so wenig erreichte er an konkreten Ergebnissen im höherdimensionalen Fall. Hier erwies sich die Charakteristik als gänzlich uninformativ und der kombinatorische Zugang als untauglich, um interessante Beispiele höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Gerade letzteres war aber unumgänglich, wollte man hier weiterkommen: Beispiele für geschlossene Flächen waren seit Alters her bekannt und die von Klein angegebene Modellvorstellung erlaubte es (ähnlich wie die kaum beachtete, von Möbius vorgeschlagene), sich einen vollständigen Überblick über (orientierbare) Flächen zu verschaffen. Ganz anders lagen die Dinge in höheren Dimensionen, wo man fast keine Beispiele kannte - es sei denn, solche aus der algebraischen Geometrie, deren Erzeugungsweise diese aber für topologische Zwecke nur schwer zugänglich machte.

Der Kreis der Mathematiker, welche zum Thema Theorie der Mannigfaltigkeiten insbesondere der Flächen bis hin zu Dyck beigetragen hatten, war recht klein: Listing, Riemann, Jordan, Betti, Tonelli; hinzukamen Autoren wie Klein, Carl Neumann und Durège, die topologische Fragen in enger Anbindung an die Funktionentheorie und meist mit der Absicht, Riemanns Ideen in leichter zugänglicher Form zu popularisieren, behandelt hatten. Schließlich sind noch W.K.Clifford und, von der algebraischen Geometrie herkommend, E.Picard zu nennen. Daneben und weitgehend separiert gab es aber auch noch eine Richtung, welche sich mit Knoten beschäftigte, mit (im deutschsprachigen Raum) Vertretern wie J.B.Listing, O. Simony, R.Hoppe und H.Dingeldey. Dieses Getrenntsein kam auch terminologisch zum Ausdruck, insofern die erste Richtung (die Theorie der Mannigfaltigkeiten) sich meist als Analysis situs, die zweite (die Knotentheoretiker) sich dagegen meist als Topologie bezeichnete.

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" kannte seit seinem zweiten Band (1869/70) eine Rubrik „Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs,...)", wobei aus moderner Sicht vielleicht die Hälfte der referierten Beiträge (vgl. auch Anmerkung 226 in Kapi-

2 In der Einleitung zu Dyck 1888 betont der Verfasser ausdrücklich, daß es ihm um „eine systematische Entwicklung derjenigen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten, welche denselben im Sinne der Analysis situs zukommen" (Dyck 1888, 437) geht. Dingeldey stellte bezeichnenderweise der Dyckschen Zugangsweise die Betrachtungen der Knotentheoretiker gegenüber, welche „mehr oder weniger empirischer Natur" (Dingeldey 1890, 16) gewesen seien.

3 Neben dieser Richtung, die Dyck als „geometrisch" klassifiziert, zog dieser auch noch die „analytische" in Betracht, welche mit Funktionen und durch Gleichungen und Ungleichungen definierten Mannigfaltigkeiten arbeite (vgl. Dyck 1888, 463). Dagegen wird die geometrische Richtung, die Dyck wohl für die eigentlich topologische gehalten hat, so charakterisiert: „Die geometrische Herleitung einer charakteristischen Zahl (...) wird an eine rein gestaltliche Herstellung der Mannigfaltigkeiten geknüpft, deren Grundzüge als für alle Dimensionen gemeinsam gleich hier vorgestellt seien." (Dyck 1888, 461) Es folgt der kombinatorische Aufbau.

tel 3) tatsächlich der Topologie zuzurechnen ist. Noch im 1909 erschienenen „Führer durch die mathematische Literatur" von Felix Müller, der ja auch am Jahrbuch wesentlich beteiligt war, wird eine ähnliche Überschrift für ein Teilgebiet der Geometrie verwendet: Stetigkeitsbetrachtungen. Als Unterrubriken hiervon kannte Müller dann „Analysis situs" mit Werken von Euler, Vandermonde, Carnot, Dyck und Poincaré (im Nachtrag werden Riemann und Dehn-Heegard ergänzt) und „Topologie und Kristallographie", worunter Namen wie Listing, Tait, Simony und andere auftauchen (übrigens gibt es hier wesentlich mehr Einträge als in der ersten Rubrik; vgl. Müller 1909, 155). Das zeigt deutlich, daß es selbst 1909 noch nicht so recht klar war, was Topologie nun denn sei.

Der wirkliche Aufbruch in höhere Dimensionen blieb Poincaré vorbehalten. Dieser betonte zwar immer wieder die Beziehungen der Topologie zu anderen Gebieten seines Schaffens (Funktionentheorie, qualitative Theorie der Differentialgleichungen, Himmelsmechanik), behandelte aber die Topologie von vorneherein - gewissermaßen in Dyckscher Manier - als eigenständiges Gebiet. Dieses sei fähig, so unterstrich Poincaré, Probleme aus den unterschiedlichsten Disziplinen erfolgreich zu behandeln, mit eigenständigen Methoden und ohne Anleihen bei diesen Gebieten machen zu müssen, darf man anfügen.

Die topologischen Arbeiten Poincaré's zeichnen sich durch eine ungeheure Fülle an Ideen aus; wie wir gesehen haben (z.B. in 3.2), greift selbst die aktuelle Forschung noch auf Gegenstände zurück, welche Poincaré eingeführt und behandelt hat - oft geschieht dies, ohne um die Vorläuferschaft Poincaré's zu wissen (Stichwort: Faserbündel über S^1). Neben dem sehr wesentlichen Beitrag Poincaré's, der darin bestand, Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten bereitgestellt zu haben, und auf den ich noch weiter unten eingehen werde, ist vor allem hervorzuheben, daß Poincaré es war, der als erster allgemeine Sätze im Rahmen der Theorie der Mannigfaltigkeiten - sozusagen Metatheoreme (Musterbeispiel: sein Dualitätssatz) - zu beweisen begann. Er untersuchte nicht mehr ausschließlich Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten und verglich nicht mehr nur Mannigfaltigkeiten bezüglich eben dieser Eigenschaften, um vielleicht einmal zu einer Klassifikation zu gelangen; Poincaré versuchte vielmehr, einen Satz (der bislang, nämlich bei Picard, nur als empirische Feststellung aufgetreten war) für alle orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu beweisen. Insbesondere in Reaktion auf Heegards Kritik brachten Poincaré's Bemühungen auch in grundlagentheoretischer Hinsicht, in Gestalt des kombinatorischen Aufbaus der Mannigfaltigkeiten und der hierauf beruhenden „Arithmetisierung" von deren Invarianten, große Fortschritte. Hatte die Topologie bei Dyck ihre Autonomie gewonnen, so wurde sie mit Poincaré theoretische Wissenschaft. Damit war ein weiteres Charakteristikum einer vollwertigen Disziplin der reinen Mathematik erreicht. Auch bei Poincaré blieb das Homöomorphieproblem zentral. Er brachte dieses ein gutes Stück voran, indem er in Gestalt der Fundamentalgruppe die (zumindest für den dreidimensionalen Fall) wichtigste Invariante einführte und ihre Effizienz als Unterscheidungsmittel nachwies. Mit der Fundamentalgruppe hielt die kombinatorische Gruppentheorie Einzug in die Topologie, oder, vielleicht richtiger gesagt, mit ihr begann die parallel verlaufende Entwicklung der beiden Gebiete. Im Rahmen seiner Auseinandersetzung mit dem Homöomorphieproblem, die im wesentlichen in einer schrittweisen Erweiterung der verwandten Invarianten und deren Prüfung als Unterscheidungsmerkmal bestand, formulierte Poincaré auch jene Frage, die später als Poincaré-Vermutung bekannt werden sollte und die schließlich das Homöomorphieproblem im dreidimensionalen Bereich als Zentralproblem zu Beginn der 30er Jahre ablösen sollte.

Poincaré's Texte zur Topologie, die in der für ihn typischen Art im Stile eines inneren Dialogs geschrieben sind, eigneten sich wegen ihrer Unzugänglichkeit, aber auch wegen mangelnder Übersichtlichkeit nur schlecht als allgemein einsetzbare Referenztexte für die neue Disziplin. Sie wurden zwar, was angesichts ihrer großen Wichtigkeit nicht erstaunt, später immer wieder erwähnt, aber ein wirkliches Zitat oder ein genaueres Eingehen findet man höchst selten.

Die Funktion eines lehrbuchhaften Referenztextes fiel sehr bald für eine ganze Periode dem Enzyklopädieartikel von Dehn und Heegard zu. Im Unterschied zu vielen anderen Artikeln in der Enzyklopädie faßte dieser nicht nur Bekanntes in systematischer Weise zusammen, sondern eröffnete nicht zuletzt durch die unter dem Einfluß der Hilbertschen Axiomatik erfolgende Radikalisierung des kombinatorischen Ansatzes zahlreiche neue Perspektiven. Wichtig ist allerdings festzuhalten, daß der von Dehn und Heegard abgesteckte Rahmen nie so strikt eingehalten wurde, daß er die topologische Forschung hätte nachhaltig hemmen können. Selbst Dehns eigener Beitrag zur Topologie des dreidimensionalen Raumes von 1910 war ja nicht nur - noch nicht einmal überwiegend - kombinatorisch ausgerichtet. Daneben war Tietzes langer und gehaltvoller Artikel (Tietze 1908) eine oft genutzte und zitierte Quelle (auch und gerade für Poincaré's Ideen.) Das erste Lehrbuch der Topologie im hier interessierenden Sinne war O. Veblens „Analysis situs" von 1922, welches 1931 neu aufgelegt wurde. Es folgten Lefschetz mit seiner „Topology" (1930) und dann Seifert-Threlfall mit ihrem „Lehrbuch der Topologie" (1934), welches ja für den Bereich der dreidimensionalen Topologie bis heute eine Standardreferenz geblieben ist. Wichtig ist, daß von Dyck und Poincaré bis hin zu Seifert und Threlfall eine Kontinuität der Zentralprobleme Homöomorphieproblem und Poincaré-Vermutung gewahrt blieb. Letztere drängte sich in den 30er Jahren als einerseits aussichtsreicheres Forschungsprogramm, das aber andererseits hinreichend wichtig ist, in den Vordergrund; „Poincaré-Vermutung" wurde damals zu einem Terminus technicus der topologischen Literatur. In dieser Zeit begann auch eine allmähliche Umorientierung in Richtung auf „Algebraisierung". Diese brachte eine stärkere Vernetzung der Topologie mit anderen Disziplinen, in erster Linie natürlich mit der Algebra, und führte schließlich auch zur Entstehung neuer Teilgebiete wie homologische Algebra und Kategorientheorie. Hierbei spielte ein allgemeiner Trend der Mathematik, den man mit „Bourbakisierung" oder auch als „Französische Revolution" (F. Hirzebruch) bezeichnen könnte, eine wichtige Rolle (siehe unten).

Fassen wir die wichtigsten Stationen in der Disziplinwerdung der Topologie noch einmal zusammen: Da ist zuerst das Auftreten topologischer Fragestellungen in den klassischen Disziplinen der Mathematik zu nennen - hauptsächlich in der Funktionentheorie. Diese entzogen sich der Behandlung mit den traditionellen Mitteln, erforderten also neue Ansätze. Nach und nach lösten sich dann diese Probleme nebst den Methoden zu ihrer Behandlung aus dem hergebrachten Rahmen, um einen autonomen Status zu erlangen. Dabei wurde die Klassifikation der Flächen zum Musterbeispiel einer topologischen Problemlösung schlechthin. Erste Grundlegungsversuche erfolgten, vor allem bei W. Dyck. Schließlich erreichte die Topologie im Werk von H. Poincaré den Stand einer theoretischen Disziplin mit einem Zentralproblem, dem Homöomorphieproblem, mit effizienten Hilfsmitteln (Fundamentalgruppe, Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten) nebst Berechnungsmöglichkeiten (kombinatorische Gruppentheorie, Inzidenzmatrizen), mit einer nicht ganz neuen Grundlegung (kombinatorisch), zahlreichen gehaltvollen Beispielen und ersten allgemeinen Sätzen (insbesondere Dualitätssatz).

Genauer betrachtet markieren die Abhandlung von 1895 und die an sie anknüpfenden Komplemente - soweit sie überwiegend topologisch sind - sogar zwei unterschiedliche Etappen in der disziplinären Entwicklung der Theorie der Mannigfaltigkeiten. In der ersten haben wir es mit einer proliferierenden Phase zu tun, in der Definitionen, Beispiele, Sätze und auch Beweise ohne allzu große Rücksicht auf eine fällige Grundlegung in rascher Abfolge entstanden. Dies war der Stand der Dinge 1895, schon oberflächlich erkennbar am häufigen Wechsel des begrifflichen Rahmens, in dem gearbeitet wurde. Dagegen ist im ersten und zweiten Komplement das Bestreben erkennbar, die Erkenntnisse von 1895 auf einen sichereren Boden zu stellen. Diese Phase, die man vielleicht die kodifizierende nennen könnte, wurde durch Dehn und Heegard, auch durch Steinitz, der allerdings wenig Resonanz fand, und Tietze dann zu einem vorläufigen Ende gebracht. Auf dieser Entwicklungsstufe wurden Argumentationsmuster fixiert, welche zukünftig als Beweise galten; es wurden also neue Rationalitätskriterien (vgl. Epple 1994, 6, wo von „new standards of rationality" gesprochen wird) geschaffen. Im Falle der Topologie ist hier vor allem die Frage nach der Zulässigkeit anschaulicher Begründungen in ihrem Spannungsverhältnis zu einer mehr oder minder „arithmetisierten" Beweisführung klärungsbedürftig gewesen. Weiter wurden die Grundlagen der Theorie der Mannigfaltigkeiten in Gestalt von Axiomen festgeschrieben, die man fortan zitieren konnte. Es wäre interessant zu sehen, wie der ursprünglich rein kombinatorische Ansatz von Dehn und Heegard, der ohne geometrische Interpretation auszukommen hoffte, nach und nach von (mengentheoretisch-) topologischen und geometrischen Ideen infiltriert wurde, um schließlich in den modernen Mannigfaltigkeitsbegriff zu münden. Auf der von Dehn und Heegard sowie Steinitz formulierten Grundlage aufbauend konnte man sich hier und da über deren Grenzen hinwegsetzend weiterarbeiten, bis sich schließlich der gesteckte Rahmen als zu eng, die grundlegenden Probleme (Hauptvermutung, Triangulierbarkeit) als zu schwierig und konkurrierende Ansätze (Algebraisierung, die auf der mengentheoretischen Topologie fußende „méthode mixte") als aussichtsreicher erweisen sollten. Dieser Zustand stellte sich in den 30er Jahren allmählich ein, ohne daß man ein exaktes Datum nennen könnte. Es kam zu einer Umorientierung, zu einem Bruch, welche aber durch die Entwicklung der Weltpolitik und dadurch bedingter Separatentwicklungen vor allem im deutschsprachigen Raum erst nach dem Zweiten Weltkrieg manifest und allgemein bewußt wurde. Im Gefolge dieser Umorientierung verloren das Homöomorphieproblem und die Poincaré-Vermutung ihre Position als Zentralprobleme; nun ging es mehr um die Verallgemeinerung bereits vorhandener Theorien, um deren Reformulierung in kategorientheoretischer Sprache und anderes mehr. Das ehemals Ganze wurde nun zu einem Teil: Die Theorie der Mannigfaltigkeiten erhielt den neuen Namen „geometrische Topologie" und wurde zu einer Subdisziplin der Disziplin, der sie einst wesentlich zur Entstehung verholfen hatte. Unter diesem Aspekt liegt es nahe, von einer Phase der Subsumption zu sprechen.

Zusammenfassend können wir also von drei Perioden in der Disziplingenese der Topologie sprechen, die wir kennengelernt haben: Die erste war die als proliferierend gekennzeichnete Phase, in der, nachdem sich topologische Fragestellungen aus ihren Ursprungskontexten gelöst hatten, vor allem das konkrete Beispielmaterial angereichert und konkrete Methoden zu dessen Bearbeitung entwickelt wurden. In der nachfolgenden kodifizierenden Phase wurden die vorangegangenen Errungenschaften in einen einheitlichen theoretischen Rahmen eingebettet, was besonders den Grundlagenaspekt betonte. In der dritten und letzten Phase wurde die Topologie in stärkerem Maße mit anderen Teilgebieten der reinen Mathematik vernetzt und im Sinne des Bourbaki-Programmes umgestaltet. Diese haben wir als die Phase der Subsumption bezeichnet. Es wäre interessant zu untersuchen, ob und inwieweit sich das eben entworfene Modell auch auf die Entwicklung anderer mathematischer Gebiete übertragen läßt.

Doch gehen wir jetzt noch kurz auf die Rolle der Beispiele ein. Schon diese Redeweise deutet in Richtung auf die Unterordnung des Konkreten unter das Allgemeine: Beispiele sind Gegenstände, welche einen abstrakten Sachverhalt verdeutlichen. Typischerweise folgen sie den Definitionen auf dem Fuß, auch nach Sätzen sind sie häufig zu finden, im letzteren Fall dann oft als Gegenbeispiele („Aus differenzierbar folgt stetig aber nicht umgekehrt."). Das Gegenbeispiel ist wohl die signifikanteste Verwendung des Beispieles in der modernen Mathematik, welche letztlich auf der entsprechenden Interpretation der Quantoren „für alle" und „es gibt" basiert.[4] Die Konjunktion dieser Sichtweise der modernen post-Fregeschen Logik mit dem kritischen Rationalismus von K. Popper liegt der Philosophie der Mathematik von I. Lakatos zugrunde. Diese ist meines Wissens die einzige ihrer Art, welche Beispielen (als Gegenbeispiele) eine wirklich wichtige Rolle für die Entwicklung der Mathematik zugesteht.

Insofern paßt sie vorzüglich etwa zu der schrittweisen Präzisierung, welche das Homöomorphieproblem für geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten bei Poincaré erfahren hat:

1. Stufe: Hypothese der Analogie zum zweidimensionalen Fall, das heißt, geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten sind homöomorph, wenn ihre Betti-Zahlen übereinstimmen. Gegenbeispiel: 6. Beispiel (vgl. 3.1.3 und 3.2).

2. Stufe: Einbeziehung der Fundamentalgruppe. Hypothese: Zwei geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten sind homöomorph, wenn ihre Fundamentalgruppen isomorph sind. Gegenbeispiel: Etwa $S^2 \times S^2$ und S^4 (vgl. 4.2) oder $L(5,1)$ und $L(5,2)$ - vgl. 4.2 und 5.1.1. Diese These findet sich in nicht-spezifizierter Form bezüglich der zugrundegelegten Dimension explizit bei Poincaré.

3. Stufe: Entdeckung der Torsion. Hypothese: Eine Mannigfaltigkeit ist der Sphäre homöomorph, wenn sie dieselben Betti-Zahlen und Torsionskoeffizienten wie jene besitzt. Gegenbeispiel: Poincaré's Homologiesphäre (vgl. 3.3 und 3.4).

4. Stufe: Berücksichtigung der Fundamentalgruppe. Hypothese: Eine Mannigfaltigkeit ist der Sphäre homöomorph, wenn sie eine triviale Fundamentalgruppe aufweist. Ohne Spezifikation der Dimension ist auch diese These zu unscharf. Für Dimensionen größer/gleich 4 wird sie bereits durch Steinitz' Gegenbeispiel widerlegt (vgl. 4.2). Im dreidimensionalen Fall ergibt sich die Poincaré-Vermutung, zu der bis heute kein Gegenbeispiel bekannt ist, aber auch kein Beweis (vgl. 3.4 und 5.4). Im höherdimensionalen Fall kann eine Präzisierung im Sinne der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung erfolgen (vgl. 7), was zu einer beweisbaren Aussage führt.

[4] Vergleiche Volkert 1987, wo die Verwendung von Gegenbeispielen in der Analysis der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts - die vielleicht paradigmatischen Charakter für die Mathematik überhaupt hatte damals - analysiert wird.

So schön dies alles in das Schema von Lakatos' Quasiempirismus paßt, so ist es doch meiner Ansicht nach zu kurz gegriffen, die Rolle der Beispiele auf jene von Gegenbeispielen zu reduzieren, an deren harter Realität sich gleichsam voreilige mathematische Verallgemeinerungen stoßen. Das, so finde ich, wird in der hier untersuchten Geschichte des Homöomorphieproblems sehr deutlich. In der ersten Phase der Disziplinentwicklung, welche oben als proliferierend gekennzeichnet wurde und die mehr oder minder mit Poincaré's frühen Arbeiten zusammenfiel, begegneten uns die Beispiele gewissermaßen als Träger des mathematischen Fortschrittes. Erst die Anreicherung des Beispielvorrates im Bereich der geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten erlaubte es Poincaré, die Lehre von den Mannigfaltigkeiten zu einer wirklichen Theorie mit allgemeinen Sätzen fortzuentwicklen. Sie lieferten ihm die Objekte, an denen er Zusammenhänge entdecken und Eigenschaften ergründen konnte. Die Reihenfolge war hier also genau umgekehrt wie die oben geschilderte Sichtweise vom Primat der Theorie annimmt: nicht die Beispiele erläutern eine vorgängige Theorie, sondern die Theorie wird an Beispielen gefunden.[5] Auch eine mathematische Theorie beschreibt einen Gegenstandsbereich; ohne diesen ist sie leer. Insofern aber die Theorie ihre mathematischen Gegenstände definiert, scheint sie logisch gesehen vorrangig. Dies trifft aber nur auf eine vollentwickelte, eine, wie oben formuliert, kodifizierte, Theorie zu. Im proliferierenden Stadium sind auch die Definitionen noch schwankend (man denke etwa an die zahlreichen Mannigfaltigkeitsdefinitionen, die Poincaré verwendet); diese wurden unter anderem unter Zweckmäßigkeitsgesichtspunkten in einem Prozeß der Auseinandersetzung mit dem vorhandenen Gegenstandsmaterial ausgelotet. Letztlich wurde dann eine bestimmte Fassung der Definition festgeschrieben. Eine derartige Festschreibung ist in der Regel mit bestimmten Absichten verknüpft und wird auch versuchen, den anschaulichen Gehalt des fraglichen Begriffes (etwa Mannigfaltigkeit) zu bewahren.

Etwas metaphorisch könnte man das eben Gesagte so zusammenfassen: Die Mathematiker vor Poincaré, allen voran W. Dyck, hatten eine neue Welt entdeckt - die der drei- und höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten nämlich. Sie dachten anfänglich, dort sähe es ganz ähnlich aus, wie im vertrauten zweidimensionalen Bereich. Dyck ahnte bald, daß dem nicht so ist. Poincaré bevölkerte dann die neue Welt mit vielen interessanten Individuen, und siehe da, es zeigte sich, daß diese viele unerwartete Eigenschaften aufzuweisen hatten. Das Ordnungsschema, welches aus dem Zweidimensionalen vertraut war, erwies sich als unzureichend, um die Vielfalt der Arten in der neuen Welt zu klassifizieren. Die Arbeit an seiner Verfeinerung ist bis heute nicht abgeschlossen, wenngleich sich die Topologie zwischenzeitlich auch und vor allem in andere und abstraktere Gefilde begeben hat.

Es ist hier nicht der Ort, diese Andeutungen weiter auszuarbeiten. Auf einen letzten Gesichtspunkt möchte ich aber noch hinweisen: Möglicherweise ist es für den Gang der Mathematikgeschichte eher untypisch, wenn in der Topologie eine Welt entdeckt wurde, die es erst zu bevölkern galt. Bei anderen Disziplinen ist eine größere Konstanz der Objekte festzustellen; man denke nur an Zahlentheorie oder Algebra. Es „gab" implizit schon Gruppen, bevor man diesen Begriff explizit erarbeitete, und Primzahlen sind seit alters her

---

[5] Vergleiche das folgende Zitat aus Seifert 1931, 26: „Solange das vollständige Invariantensystem der dreidimensionalen geschlossenen Räume gegenüber stetigen Abbildungen aussteht, ist die Konstruktion einzelner solcher Räume gerechtfertigt, die die vollständige Aufzählung durch eine Beispielsammlung ersetzt."

bekannt. Insofern paßt auf die Topologie besonders gut Dedekinds Diktum von der freien Schöpfung des menschlichen Geistes.

Womit wir beim Stichwort Moderne angelangt wären. Ich möchte an dieser Stelle keine Auseinandersetzung mit diesem von H.Mehrtens[6] neuerdings populär gemachten Begriff führen. Allein ist es nicht übertrieben, zu behaupten, daß die Topologie in einem gewissen Zeitraum nach dem Zweiten Weltkrieg bis hin zu den 80er Jahren Inbegriff der modernen Mathematik gewesen ist. Dies in mehrfacher Hinsicht: Zum einen war sie eine Disziplin, welche sich in stürmischer Entwicklung befand, was man an der ungeheuren Anzahl von Veröffentlichungen, Lehrbüchern und dergleichen ersehen kann.[7] Auch die auffallend große Zahl von Topologen, welche mit der Fields-Medaille ausgezeichnet worden sind, ist ein Indiz hierfür.[8] Zum andern entsprach „die" Topologie, wie sie im genannten Zeitraum sich entfaltete, dem Idealbild einer mathematischen Theorie, wie es Bourbaki entworfen hatte, offensichtlich in besonderer Weise. Es war gewiß kein Zufall, daß einer der allerersten Bände von Bourbaki's „Eléments de mathématique" die noch vor dem Zweiten Weltkrieg erschienene „Topologie générale" gewesen ist. Gerade in dieser noch jungen Disziplin, die eben[9] erst angefangen hatte, sich ernsthaft ihre mengentheoretischen Grundlagen anzueignen, waren die Möglichkeiten einer begrifflichen Durchstrukturierung von Anfang an optimal. Es gibt denn auch kaum ein Gebiet, in dem sich die Terminologie und Sichtweise Bourbaki's so durchgesetzt hat wie in der Topologie.

Allein, unter einem Verdikt, welches den Begriffen Vorrang vor den Rechnungen einräumt[10], kam den traditionellen Problemen der Theorie der Mannigfaltigkeiten, allen voran dem Homöomorphieproblem und der Poincaré-Vermutung wenig Interesse zu. Der breite Strom topologischer Forschung orientierte sich nun auf ganz andere Themen hin, was unter anderem in den im bezeichneten Zeitraum entstandenen Lehrbüchern deutlich wird[11], wo selbst der ehedem zentrale Begriff Mannigfaltigkeit nur noch eine untergeordnete Rolle spielt. Die moderne Mathematik - so könnte man polemisch zugespitzt formulieren - kümmert sich wenig um Einzelfragen, ihr Anliegen ist die möglichst allgemeine Theorie (sozusagen die „theory of everything", welche manchmal mit der Kategorientheorie identifiziert wird). Insbesondere ist die „bourbakisierte" Topologie nicht identisch mit der traditionellen, wie man sie bei Seifert-Threlfall findet; sie ist auch nicht einfach deren kumulative Fortentwicklung.

Dennoch wurden auch im Bereich der Theorie der Mannigfaltigkeiten in den 50er und 60er Jahren große Fortschritte erzielt - ich nenne nur Triangulierbarkeit und Hauptvermutung für 3-Mannigfaltigkeiten (E. E. Moise, 1952), Milnors Entdeckung exotischer Sphären (1956) und die Bestätigung der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung (S. Smale und andere, 1960). Allerdings hat man all dies niemals „bourbakisiert"; es bleibt das Ergebnis

---

[6] Vergleiche Mehrtens 1990.

[7] Diese Behauptungen müßten natürlich durch entsprechende Untersuchungen untermauert werden; bis zum Beweis ihrer Gültigkeit sind sie als Thesen zu lesen. Ich denke allerdings, daß ihnen kaum jemand widersprechen wird.

[8] Ich nenne nur J.P.Serre, R.Thom, J.Milnor und S.Smale aus den 50er und 60er Jahren.

[9] Vielleicht ist Radó 1925 die erste Arbeit, in der mengentheoretische Topologie (z.B. Abzählbarkeitsfragen) und die Theorie der Mannigfaltigkeiten zusammengeführt wurden.

[10] J. Dieudonné über E. Noether (Dieudonné 1984, 5).

[11] Man denke etwa an das bekannte Lehrbuch von E.Spanier, um nur ein Beispiel zu nennen (Spanier 1966).

einer vielleicht nicht ganz so modernen Unter- oder Nebenströmung, oft geometrische Topologie genannt. In den letzten Jahren hat eine Tendenzwende stattgefunden[12], doch damit verlasse ich den Bereich der Geschichte, weshalb es ratsam ist, einzuhalten.

In den letzten Bemerkungen klingt bewußt eine Dimension an, die ich bei allen meinen vorhergehenden Betrachtungen fast vollständig ausgeklammert hatte: die extrinsische nämlich, also jene, welche Mathematikgeschichte in das Spannungsfeld sozialer, institutioneller, kultureller und politischer Bezüge stellt. Allein, das wäre eine andere Geschichte, die zu erzählen ich mich nicht kompetent fühle, was natürlich nicht heißt, daß diese Geschichte eine unwichtige sei.

[12] Vergleiche etwa Dieck 1990, wo klassische Fragen der Theorie der Mannigfaltigkeiten wieder eine wichtige Rolle spielen.

Literaturverzeichnis

Aleksandrov, P. S.: Poincaré and topology (Russian Mathematical Survey 27 (1972), 157-168).

Alexander, J. W.: A proof of the invariance of certain constants of analysis situs (Transactions of the American Mathematical Society 16 (1915), 148-154).

Alexander, J. W.: Note on two three-dimensional manifolds with the same group (Transactions of the American Mathematical Society 20 (1919), 339-342).

Alexander, J. W.: Note on Riemann spaces (Bulletin of the American Mathematical Society 26 (1919-20), 370-372).

Alexander, J. W.: The subdivision of 3-space by a polyhedron (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 10 (1924), 6-8).

Alexander, J. W.: New topological invariants expressible as tensors (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 10 (1924), 99-101).

Alexander, J. W.: An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 10 (1924), 8-10).

Alexander, J. W.: Combinatorial Analysis situs (Transactions of the American Mathematical Society 28, (1926), 301-329).

Alexander, J. W.: Topological invariants of knots and links (Transactions of the American Mathematical Society 30, (1928), 275-306).

Alexander, J. W.: The combinatorial theory of complexes (Annals of Mathematics 31 (1930), 292-320).

Alexander, J. W.: Some problems in topology. In: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932. I. Band: Bericht und Allgemeine Vorträge, hg. von W. Saxer (Zürich und Leipzig, o. J.), 249-257.

Alexandroff, P.: Einfache Grundbegriffe der Topologie. Anhang zu Hilbert/Cohn - Vossen 1932 (separat paginiert).

Alexandroff, P.: Die Topologie in und um Holland in den Jahren 1920-1930 (Nieuw Archiev voor Wiskunde (3) 17 (1969), 109-127).

Alexandroff, P. - Hopf, H.: Topologie. Erster Band (Berlin, 1935).

Artin, E.: Theorie der Zöpfe (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 4 (1925), 47-72).

Artin, E.: Geometric algebra (New York u. a., 1957).

Atiyah, M.: On the work of Simon Donaldson. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, California, USA 1966, hg. von A. M. Gleason (Berkeley, 1987), 3-6.

Baer, R.: Kurventypen auf Flächen und Isotopie von Kurven auf orientierbaren Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen I (Journal für die reine und angewandte Mathematik 156 (1927), 231-246).

Baer, R.: Kurventypen auf Flächen und Isotopie von Kurven auf orientierbaren Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen II (Journal für die reine und angewandte Mathematik 159 (1928), 101-116).

Baer, R.: Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren Flächen vom Geschlecht 2 (Journal für die reine und angewandte Mathematik 160 (1928), 1-25).

Betti, E.: Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimenzioni (Annali di mathematica pura et applicita (2) 4 (1871), 140-158).

Bieberbach, L. Über die Bewegungsgreuppen des euklidischen Raumes I (Mathematische Annalen 70 (1911), 279 - 336).

Bieberbach, L. Über die Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes II (Mathematische Annalen 72 (1912), 400 - 412).

Bilz, E.: Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs (Mathematische Zeitschrift 18 (1923), 1-41).

Bing, R. H.: Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3 (Annals of Mathematics (2) 68 (1958), 17-37).

Bing, R. H.: Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré Conjecture. In: Lectures in modern mathematics. Bd. 2, hg. von T. L. Saaty (New York u. a., 1964), 93-128.

Bing, R. H.: Mapping a 3-Spere onto a Homotopy 3-Sphere. In. Topology Seminar Wisconsin, 1965. Hg. von R. H. Bing und R. J. Bean (Princeton, 1966), 89-96.

Birman, J. S.: Preface to the English Edition. In: Seifert und Threlfall: A Textbook of Topology and Seifert: Topology of 3-Dimensional Fibered Spaces (New York u.a., 1980), ix-xi.

Blaschke, W.: Projektive Geometrie (Basel u.a., 1954).

Blatter, Chr.: Analysis III (Berlin u. a., 1974).

Bollinger, M.: Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffes (Archive for History of Exact Sciences 9 (1972), 94-170).

Bottazini, U.: Riemanns Einfluß auf Betti und Casorati (Achive for History of Exact Sciences 18 (1977), 27-37).

Brahana, H. R.: Systems of circuits on two-dimensional manifolds (Annals of Mathematics 23 (1922), 144-168).

Brandt, H.: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs (Mathematische Annalen 96 (1927), 360-366).

Brauner, K.: Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6 (1928), 1-55).

Brieskorn, E.: The Development of Geometry and Topology. In: Materialien zur Analyse der Berufspraxis des Mathematikers, hg. von der Universität Bielefeld u.a. Heft 17 (Bielefeld, 1976), 101-203.

Brody, E. J.: The topolgical classification of the lens spaces (Annals of Mathematics (2) 71 (1960), 163-185).

Brouwer, L. E. J.: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (Mathematische Annalen 69 (1910), 169-175.

Brouwer, L. E. J.: Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl (Mathematische Annalen 70 (1911), 161-165).

Brouwer, L. E. J.: On looping coefficients (Koninklijke Akademie van Wettenschapen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 15 (1912), 113-122).

Brown, R.: Elements of modern topology (New York u. a., 1968).

Burde, G. - Zieschang, H.: Knots (New York u.a., 1985).

Calugreanu, G.: Sur les courbes fermées simples tracées sur une surface fermée orientable (Mathematica (Cluj) 78 (1966), 29-38).

Chandler, B. - Magnus, W.: The History of Combinatorical Group Theory: A Case Study in the History of Ideas (New York u. a., 1982).

Chern, S.S.: From Triangles to Manifolds (The American Mathematical Monthly 86 (1979), 339-349).

Clifford, W. K.: On the canonical form and dissection of a Riemannian surface (Proceedings of the London Mathematical Society 8 (1877), 292-304).

Cohen, M. M.: A Course in Simple Homotopy Theory (New York u. a., 1973).

Couturat, L.: Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre (Paris, 1903 - Nachdruck Hildesheim, 1961).

Couturat, L.: L'oeuvre de Louis Couturat (1886-1914) de Leibniz à Russell (Paris, 1973).

Crowell, R. H. - Fox, R. H.: Knot theory (New York u. a., 1963).

Dehn, M.: Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck (Mathematische Annalen 53 (1900), 404-439).

Dehn, M.: Über den Rauminhalt (Mathematische Annalen 55 (1901), 465-478).

Dehn, M.: Berichtigender Zusatz zu III AB 3 Analysis situs (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 16 (1907), 573).

Dehn, M.: Brief an David Hilbert vom 12.II.1908 (Cod. Ms. Hilbert, Handschriftenabteilung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen).

Dehn, M.: Brief an David Hilbert vom 16.IV.1908 (Cod. Ms. Hilbert, Handschriftenabteilung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen).

Dehn, M.: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes (Mathematische Annalen 69 (1910), 137-168).

Dehn, M.: Über unendliche diskontinuierliche Gruppen (Mathematische Annalen 71 (1911), 116-144).

Dehn, M.: Transformationen der Kurven auf zweiseitigen Flächen (Mathematische Annalen 72 (1912), 413-421).

Dehn, M.: Die beiden Kleeblattschlingen (Mathematische Annalen 75 (1914), 402-413).

Dehn, M.: Über kombinatorische Topologie (Acta mathematica 67 (1936), 123-168).

Dehn, M.: Die Gruppen der Abbildungsklassen [Das arithmetische Feld auf Flächen] (Acta mathematica 69 (1939), 135-206).

Dehn, M.: Papers on group theory and topology, translated and introduced by J. Stillwell (New York u.a., 1987).

Dehn, M. - Heegard, P.: Analysis situs. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band in drei Teilen: Geometrie. Redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Erster Teil. Erste Hälfte (Leipzig, 1907-1910) 153-220 (abgeschlossen Ende Januar 1907, ausgegeben 25.06.1907).

Descartes, R.: Geometrie. Deutsch herausgegeben von L. Schlesinger (Darmstadt 1981)

Dieck, T. tom: Topologie (Berlin - New York, 1991).

Dieck, T. tom - Kamps, K. H. - Puppe, D.: Homotopietheorie (Berlin u. a., 1970).

Dieudonné, J.: Cours de géométrie algébrique 1 (Paris, 1974).

Dieudonné, J.: Emmy Noether and algebraic topology (Journal of pure and applied algebra 31 (1984), 5-6).

Dieudonné, J.: A history of algebraic and differential topology 1900-1960 (Boston-Basel, 1989).

Dingeldey, F.: Topologische Studien (Leipzig, 1890).

Discrete Mathematics 100 (1992), 1175 (Artikel zu Ehren von J. Petersen anläßlich des 100jährigen Jubiläums von "Die Theorie der regulären Graphen").

Dold, A.: Partitions of unity in the theory of fibrations (Annals of Mathematics 78 (1963), 223-255).

Dombrowski, P.: Differentialgeometrie. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990, hg. von G. Fischer u.a. (Braunschweig-Wiesbaden, 1990), 323-360.

Donaldson, S. K.: Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds (Bulletin of the American Mathematical Society. New Series 8 (1983), 81-83).

Dugac, P.: La correspondance de Henri Poincaré avec mathématiciens A-H (Cahiers du seminaire d'histoire des mathématiques 7 (1986), 59-227).

Dugac, P.: La correspondance de Henri Poincaré avec mathématiciens I-Z (Cahiers du seminaire d'histoire des mathématiques 10 (1989), 83-229).

Durège, H.: Elemente der Theorie der Functionen einer complexen Größe. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns (Leipzig, ²1873).

Dyck, W.: Ueber regulär verzweigte Riemannsche Flächen und die durch diese definierten Singularitäten (Dissertation München, 1879).

Dyck, W.: On the "Analysis situs" of three-dimensional spaces. In: Report of the fifty-fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Montreal in August and September 1884 (London, 1885), 648.

Dyck, W.: Beiträge zur Analysis situs. I. Mittheilung (Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe 37 (1885), 314-325.

Dyck, W.: Beiträge zur Analysis situs. II. Mittheilung (Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe 38 (1886), 53-69.

Dyck, W.: Beiträge zur Analysis situs. III. Mittheilung (Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe 39 (1887), 40-52.

Dyck, W.: Beiträge zur Analysis situs. I. Aufsatz. Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (Mathematische Annalen 32 (1888), 457-512).

Dyck, W.: Beiträge zur Analysis situs. II. Aufsatz. Mannigfaltigkeiten von n-Dimensionen (Mathematische Annalen 37 (1890), 273-316).

Ehresmann, Cl.: Sur les espaces fibrés associés à une variété différentielle (Comptes rendus de l'Académie des Sciences 216 (1943), 628-630).

Eilenberg, S.: On the problems of topology (Annals of Mathematics 50 (1949), 247-260).

Eilenberg, S. - Steenrod, N.: Foundations of algebraic topology (Princeton, 1952).

Einhorn, R.: Vertreter der Mathematik und Geometrie an den Wiener Hochschulen 1900 - 1940 (Dissertation Wien, 1983).

Engmann, R.: Nicht-homöomorphe Heegard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der zusammenhängenden Summe zweier Linsenräume (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 35 (1971), 33-38).

Enriques, F.: Prinzipien der Geometrie. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften unter Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie, redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Erster Theil, erste Hälfte (Leipzig, 1907 - 1920), 1-129 (abgeschlossen März 1907, ausgegeben 25.6.1907).

Epple, M.: Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory (Preprint Nr. 15 [Juni 1994] Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg Universität Mainz).

Evans, B. - Moser, L.: Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds (Transactions American Mathematical Society 168 (1972), 189-210).

Feigl, G.: Besprechung von Veblen 1931 (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 57 (1931, I), 712f - gedruckt 1937).

Fox, R. H.: Recent Development of Knot Theory at Princeton. In: Prodceedings of the International Congress of Mathematicians Cambridge, Massachusetts, 1950. Bd. II (American Mathematical Society, 1952 - Nachdruck Nendeln, 1967), 453-457.

Fox, R. H.: Constructions of Simply Connected 3-Manifolds. In: Topology of 3-Manifolds and Related Topics 1962, 213-216.

Frankl, F.: Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes (Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931), 357-364).

Franz, W.: Über die Torsion einer Überdeckung (Journal für die reine und angewandte Mathematik 173 (1935), 245-254).

Freedman, M. H.: The topology of 4-manifolds (Journal of Differential Geometry 17 (1982), 357-454).

Freudenthal, H.: Leibniz und die Analysis situs. In: Homenaje a Millas - Vallicrosa. Band I (Barcelona, 1954), 611-626.

Freudenthal, H.: Notes. In: L. E. J. Brouwer. Collected Works 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics (Amsterdam u. a., 1976), passim.

Fricke, R.: Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften unter Einschluß ihrer Anwendungen. Zweiter Band: Analysis, redigiert von H. Burkhardt u. a. Zweiter Teil (Leipzig 1901-1921) [abgeschlossen im November 1913, ausgegeben 29.12.1913], 351-470.

Friedge, H.: Verallgemeinerung der Dodekaederräume (Mathematische Zeitschrift 46 (1940), 27-44).

Furch, R.: Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924), 69-78).

Furch, R.: Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924). 237-245).

Gauß, C. F.: Werke. Fünfter Band (Göttingen, ²1877).

Gawehn, I.: Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten (Mathematische Annalen 98 (1927), 321-354).

Gerwien, P.: Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke (Journal für die reine und angewandte Mathematik 10 (1833), 228-234).

Giesecking, H.: Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen (Hilchenbach 1912).

Gilain, Chr.: La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'analyse. (Thèse pour le doctorat de 3ième cycle, Université Paris I, 1977).

Gilain, Chr.: La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles. In: La France mathématiques. La Société mathématique de France (1872-1914), hg. von H. Gispert (Cahièrs d'histoire et de philosophie des sciences. Nouvelles série. No. 34 (Paris, 1991), 215-242).

Glas, E.: Mathematical Progress: Between Reason and Society. Part I (Journal for General Philosophy of Sciences 24 (1993), 43-62).

Glas, E.: Mathematical Progress: Between Reason and Society. Part II (Journal for General Philosophy of Sciences 24 (1993), 235-256).

Gleason, A. M.: Evolution of an active mathematical theory (Science 145 (1964) No. 3631, 451-457).

Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux (Paris, 1958).

Goeritz, L.: Die Heegard-Diagramme des Torus. (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 9 (1932), 187-188).

Goeritz, L.: Die Abbildungen der Brezelfläche und der Vollbrezel vom Geschlecht 2 (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 9 (1933), 244-259).

Goursat, E.: Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace (Annales scientifiques de l'école normale supérieure (3) 6 (1889), 9-102).

Gramain, A.: Topologie des surfaces (Paris, 1971).

Grauert, H.: On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds (Annals of Mathematics (2) 68 (1958), 460-472).

Gray, J.: Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré (Boston u.a., 1986).

Grayson, M. - Kitchens, B. - Zettler, G.: Visualizing Toral Automorphisms (the Mathematical Intelligencer 15 No. 1 (1993), 63 - 66).

Guérindon, J. - Dieudonné, J.: Die Algebra seit 1840. In: Geschichte der Mathematik 1700 - 1900, hg. von J. Dieudonné (Braunschweig - Wiesbaden, 1985), 95-133).

Guillou, L. - Marin, A.: Introduction. In: A la recherche de la topologie perdue, hg. von L. Guillou und A. Marin (Basel u. a., 1986), XV-XXIII).

Hadamard, J.: Oeuvres de Jacques Hadamard. Tome 2 (Paris, 1968).

Haken, W.: Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I (Mathematische Zeitschrift 80 (1962), 89-120).

Haken, W.: Some results on surfaces in 3-manifolds. In: Studies in Modern Topology. Vol. 5, hg. von P. J. Hilton (Englewood Cliffs, N. Y., 1968), 39-98.

Hallett, M.: Towards a Theory of Mathematical Research Programs I and II (British Journal for the Philosophy of Sciences 30 (1979), 1-25 und 135-159).

Hansen, V. L.: Jakob Nielsen [1890-1959] (The Mathematical Intelligenzer 15 No. 4 (1993), 44-53).

Hantzsche, W. - Wendt, H.: Dreidimensionale euklidische Raumformen (Mathematische Annalen 110 (1935), 593-611).

Heegard, P.: Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske Fladers Sammenhaeng (Kopenhagen, 1898) - französische Übersetzung von Lycke: Sur l'Analysis situs (Bulletin de la Société mathématique de France 44 (1916), 161-242).

Helmholtz, H.: Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 55 (1858), 25-55).

Helmholtz, H.: Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie (Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg 4 (1868), 197-202).

Hempel, J.: 3-Manifolds (Princeton, 1976).

Henn, W. - Puppe, D.: Algebraische Topologie. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV, hg. von G. Fischer u.a. (Braunschweig-Wiesbaden, 1990), 673-716.

Heß, A. E.: Über einige einfache Polyeder mit einseitiger Oberfläche (Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg 1 (1879).

Hilbert, D.: Über die Grundlagen der Geometrie (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1902, 233-241).

Hilbert, D.: Über die Grundlagen der Geometrie. (Mathematische Annalen 56 (1902), 381-422).

Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie (Stuttgart, [11]1972)

Hilbert, D.: Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker - Kongreß zu Paris 1900. In: Die Hilbertschen Probleme, erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov (Leipzig, 1979), 22-80.

Hilbert, D. - Cohn-Vossen, St.: Anschauliche Geometrie. Mit einem Anhang von P. Alexandroff: Einfachste Grundbegriffe der Topologie (Leipzig und Berlin, 1932 - Nachdruck Darmstadt, 1973).

Hilden, H. M.: Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3 (Bulletin of the American Mathematical Society 80 (1974), 1243-1244).

Hilton, P. J.: Introduction: Modern Topology. In: Studies in Modern Topology. Vol. 5, hg. von P. J. Hilton (Englewood Cliffs (N. Y.), 1968).

Hirsch, G.: Comment la topologie est-elle devenue algébrique? (Cahiers Fundamenta Scientiae no 100 [Strasbourg, 1982], 9-20).

Hirsch, G.: Topologie. In: Geschichte der Mathematik 1700-1900, hg. von J. Dieudonné (Braunschweig-Wiesbaden, 1985), 639-697.

Hopf, H.: Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. (Mathematische Annalen 95 (1925), 313-339).

Hopf, H.: Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 1928, 127-136).

Hopf, H.: A new proof of the Lefschetz formula on invariant points (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 14 (1929), 149-153).

Hopf, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche (Mathematische Annalen 104 (1931), 637-665).

Hopf, H.: The work of R. Thom. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge 1958, hg. von J. A. Todd (Cambridge, 1960), LX-LXIV.

Hopf, H.: Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung 86 (1966), 182-192).

Houel, J.: B. Riemann. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, traduit par J. Houel (Annali di mathematica pura et applicata (2) 3 (1870), 309-327).

Houzel, Chr.: Aux origines de la géométrie algébrique: les travaux de Picard sur les surfaces (1884-1905). In: La France mathématique. La Société mathématique de France (1872-1914), hg. von H. Gispert (Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. Nouvelle série. No. 34 (Paris, 1991), 243-276).

Hurewicz, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen. I. Höherdimensionale Homotopiegruppen] (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 38 (1935), 112-119).

Hurewicz, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen. II. Homotopie - und Homologiegruppen] (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 38 (1935), 521-528).

Hurewicz, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen. III. Klassen und Homotopietypen von Abbildungen. (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 39 (1936), 117-126).

Hurewicz, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen IV. Asphärische Räume. (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 39 (1936), 215-224).

Hurwitz, W.: Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuer Zeit. In: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897, hg. von F. Rudio (Leipzig, 1898), 91-106.

Huygens, Chr.: Oevres complites. Tomo VIII (Den Haag, 1899).

Jordan C. Oeuvres de Camille Jordan, publiées sous la direction de G. Julia par R. Garnier et J. Dieudonné. Tome IV (Paris, 1964).

Kampen, E. R. van: Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze (Den Haag, 1929).

Kampen, E. R. van: On the connection between the fundamental groups of some related spaces (American Journal of Mathematics 55 (1933) 231-267).

Kampen, E. R. van: Remark on the Address of S. S. Cairns. In: Lectures in Topology, hg. von R. I. Wilder und W. L. Ayres (London/Oxford, 1941), 311-313.

Kerekjártó, B. von: Vorlesungen über Topologie. I. Flächentopologie (Berlin, 1923).

Killing, W.: Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Paderborn, 1893).

Kinsey, L. C.: Topology of Surfaces (New York u.a., 1993).

Kirby, R. - Siebenmann, L.: On the triangulation of manifolds and the Hauptvermtung (Bulletin of the American Mathematical Society 75 (1969), 742-749).

Klein, F.: Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen (Mathematische Annalen 7 (1874), 549-557).

Klein, F.: Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen (Mathematische Annalen 7 (1874), 558-566).

Klein, F.: Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale (Leipzig, 1882) = Klein 1923, 499-573.

Klein, F.: Zur Nicht - Euklidischen Geometrie (Mathematische Annalen 37 (1990), 544-572).

Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrie (Mathematische Annalen 43 (1894), 63-100).

Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen. 3. Band, hg. von R. Fricke, H. Vermeil und E. Bressel-Hagen (Berlin, 1923).

Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Ausgabe in einem Band (Berlin u. a., 1979).

Klein, F.: Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise. Vorlesung gehalten in Leipzig 1880/81 (Leipzig, 1987).

Klein, F. - Fricke, R.: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Erster Band. Grundlegung der Theorie (Leipzig, 1890).

Klein, F. - Fricke, R.: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Zweiter Band. Fortbildung und Anwendung der Theorie (Leipzig, 1892).

Klein, F. - Fricke, R.: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Band 1 (Leipzig, 1897).

Klügel, G. S.: Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und litterarischen Nachrichten begleitet in alphabetischer Ordnung. Erste Abtheilung. Die reine Mathematik. Zweyter Theil von E bis J (Leipzig, 1805).

Kneser, H.: Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten (Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse 1925, 127-129).

Kneser, H.: Die Topologie der Mannigfaltigkeiten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 34 (1926), 1-14).

Kneser, H.: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 38 (1929), 248-260).

Koch, W. - Puppe, D.: Differenzierbare Strukturen auf Mannigfaltigkeiten ohne abzählbare Basis (Archiv der Mathematik 19 (1968), 95-102).

Koseki, K.: Poincarésche Vermutung in Topologie (Mathematical Journal Okoyama University 8 (1958), 1-106).

Kreines, M.: Zur Konstruktion der Poincaré-Räume (Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo 56 (1932), 277-280).

Kronecker, L.: Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen (Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1869, 159-193).

Künneth, H.: Zur topologischen Untersuchung geometrischer Gebilde (Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München (1922), 213-220).

Künneth, H.: Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Produktmannigfaltigkeit (Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen 54/55 (1922/23), 190-196).

Künneth, H.: Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit (Mathematische Annalen 90 (1923), 65-85).

Künneth, H.: Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten (Mathematische Annalen 91 (1924), 125-134).

Kusch, J.: Der Hauptsatz der Topologie in drei Dimensionen unter Zugrundelegung des Schalensatzes (Inangural-Dissertation Rostock; Borna-Leipzig, 1932).

Lacroix, S. F.: Élémens de géométrie à l'usage de l'École centrale des quatre nations (Paris, [11]1819).

Lakatos, I.: Proofs and Refutations (Cambridge u. a., 1977).

Lashof, R.: Problems in differential and algebraic topology (Annals of Mathematics 81 (1965), 565-591).

Lefschetz, S.: Topology (New York 1930 - 2. Auflage New York 1952).

Lefschetz, S.: Algebraic Topology (New York, 1942).

Lefschetz, S.: The early development of algebraic topology (Boletin da Sociedade Brasileira de Mathematica 1 (1970), 1-48).

Legendre, A. M.: Éléments de géométrie (Paris, [11]1817).

Leibniz, G. W.: Mathematische Schriften 5, hg. von C. I. Gerhardt (Halle, 1858 - Nachdruck Hildesheim, 1971).

Levi, F.: Geometrische Konfigurationen - Mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie (Leipzig, 1929).

Lickorish, W. B. R.: A representation of orientable combinatorial 3-manifolds (Annals of Mathematics 76 (1962), 531-538).

Lippich, F.: Untersuchung über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's (Mathematische Annalen 7 (1874), 212-229).

Listing, J. B.: Vorstudien zur Topologie (Göttinger Studien (Abt. I), mathematisch-naturwissenschaftliche Abhandlungen. Abhandlung 1 (1847), 811-875).

Listing, J. B.: Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern (Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissen-schaften 10 (1862), 97-180).

Löbell, F.: Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung (Verhandlungen der Sächsischen Akademei der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse 83 (1931), 26-66).

Lorey, W.: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts (Leipzig und Berlin, 1916).

MacLane, S: Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether (Journal of pure and applied algebra 38 (1986), 305-307).

Magnus, W.: Noneuclidean tessalations and their groups (New York u. a., 1974).

Magnus, W. - Moufang, R.: Max Dehn zum Gedächtnis (Mathematische Annalen 127 (1954), 215-227).

Manheim, J.: The genesis of point-set topology (Oxford u. a., 1964).

Mannoury, G.: Lois cyclomatiques (Nieuw Achief voor Wiskunde 2. Serie 3 (1898), 126-152).

Massey, W. S.: Some problems in algebraic topology and the theory of fibre bundles (Annals of Mathematics 62 (1955), 327-359).

Massey, W. S.: Algebraic topology: an introduction (New York u. a., [8]1989).

Mawhin, J.: The centennial legacy of Poincaré and Lyapunov in ordinary differential equations (Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Serie II 14 (1994), 9-46).

Mayer, W.: Über abstrakte Topologie (Monatshefte für Mathematik und Physik 36 (1929), 1-42).

Mayer, W.: Über abstrakte Topologie (Monatshefte für Mathematik und Physik 36 (1929), 219-258).

Mehrtens, H.: Moderne Sprache Mathematik (Frankfurt a.M., 1990).

Meyerhoff, R.: Geometric invariants for 3-manifolds (The mathematical Intelligencer 14 No. 1 (1992), 37-53).

Milnor, J.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere (Annals of Mathematics 64 (1956), 399-405).

Milnor, J.: Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct (Annals of Mathematics 74 (1961), 575-590).

Milnor, J.: The work of J. H. C. Whitehead. In: Mathematical Works of J. H. C. Whitehead. Bd. 1, hg. von I. M. James (Oxford u.a., 1962), XXI-XXXIII.

Milnor, J.: A unique decomposition theorem for 3-manifolds (American Journal of Mathematics 84 (1962), 1-7).

Milnor, J.: Whitehead torsion (Bulletin of the American Mathematical Society 72 (1966), 358-426).

Milnor, J.: Hyperbolic Geometry: the first 150 years (Bulletin of the American Mathematical Society (New Series) 6 (1982), 9-24).

Milnor, J.: The work of M. H. Freedman. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Berkeley, California, USA 1986, hg. von A. M. Gleason (Berkeley 1987), 13-15.

Möbius, A. F.: Gesammelte Werke. Erster Band. Herausgegeben von R. Baltzer (Leipzig, 1885).

Möbius, A. F.: Gesammelte Werke. Zweiter Band. Herausgegeben von F. Klein (Leipzig, 1886).

Moise, E. E.: Affine structures in 3-manifolds, V. The triangulation theorem and Hauptvermutung (Annals of Mathematics 56 (1952), 96-114).

Moise, E. E.: Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 (New York u. a., 1977).

Moser, L.: Elementary surgery along a torus knot (Pacific Journal of Mathematics 38 (1971), 737-745).

Müller, Felix: Führer durch die mathematische Literatur (Leipzig - Berlin, 1909).

Neumann, Carl.: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig, 1865).

Newman, M. H. A.: On the foundations of combinatorial analysis situs. I. Definitions and elementary theorems. II. Theorems on sets of elements (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 29 (1926), 610-641).

Newman, M. H. A.: Additions and corrections (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of sciences 30 (1930), 670-673).

Newman, M. H. A.: Geometrical topology In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Stockholm 15-22 August 1962. Bd. 1 (Uppsala, 1963), 139-146.

Newman, M. H. A.: The engulfing theorem for topological manifolds (Annals of Mathematics 84 (1966), 555-571).

Newman, M. H. A. - Whitehead, B.: A Biographical Note. In: Mathematical Works of J. H. C. Whitehead. Bd. 1, hg. von I. M. James (Oxford u.a., 1962), XV-XIX.

Noether, A.: Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 34 (1926), Abteilung Angelegenheiten der DMV, 104).

Novivkov, S. P.: The topology summer institute (Russian Mathematical Surveys 20 (1965), 145-168).

Nowacki, W.: Die euklidischen dreidimensionalen geschlossenen und offenen Raumformen (Commentarii Mathematici Helvetii 7 (1934), 81 - 92).

Orlik, P.: Seifert Manifolds (Berlin u.a., 1972)

Pannwitz, E.: Besprechung von Hurewicz 1935 und Hurewicz 1935 (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 61(1935II), 620).

Papakyriakopoulos, C. D.: On solid tori (Proceedings of the London Mathematical Society (3) 7 (1957), 281-299).

Papakyriakopoulos, C. D.: On Dehn's lemma and asphericity of knots (Annals of Mathematics 66 (1957), 1-26).

Papakyriakopoulos, C. D.: Some problems on 3-dimensional manifolds (Bulletin of the American Mathematical Society 64 (1958), 317-335).

Papakyriakopoulos, C. D.: A reduction of the Poincaré conjecture to other conjectures (Bulletin of the American Mathematical Society 68 (1962), 360-366).

Papakyriakopoulos, C. D.: A reduction of the Poincaré conjecture to other conjectures (Bulletin of the American Mathematical Society 69 (1963), 399-401).

Petersen, J.: Funktionentheorie. (Kopenhagen, 1898 - dänisches Original Kopenhagen, 1895).

Picard, E.: Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (Journal de mathématiques pures et appliquées (4) 5 (1889), 135-319).

Picard, E. - Simart, G.: Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Tome I (Paris, 1897).

Poénaru, V.: The collapsible pseudo - spine representation theorem (Topology 31 (1992), 625-656).

Poincaré, H.: Oeuvres de Henri Poincaré, Tome I, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par P. Appell (Paris, 1928).

Poincaré, H.: Oeuvres de Henri Poincaré Tome II, publiées sous les auspices du Ministère de l'instruction publique par G. Darboux (Paris, 1916)

Poincaré, H.: Oeuvres de Henri Poincaré, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par la section de géométrie. Tome VI, publié aves la collaboration de R. Garnier et J. Leray (Paris, 1953).

Poincaré, H.: Oeuvres de Henri Poincaré. Tome XI, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par la section de géométrie avec la collaboration de Gérard Petiau (Paris, 1956).

Poincaré, H.: Analyse de ses travaux scientifiques (Acta mathematica 38 (1921), 3-188) [auszugsweise auch in einzelnen Bänden der Oeuvres abgedruckt].

Poincaré, H.: Dernères pensées (Paris, 1963)

Poincaré, H.: La valeur de la science (Paris, 1970)

Poincaré, H.: Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes. Three Supplementary Essais on the Discovery of Fuchsien Functions, éd. par J. J.Gray et S. Walter (Berlin/Paris, 1997).

Pont, J. C.: La topologie algébrique des origines à Poincaré (Paris, 1974).

Radó, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche (Acta litterarum ac scientiarum regia universitatis hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio scientiarum mathematicarum 2 (1925), 101-121).

Rassias, G. M.: Poincaré's Conjecture in Topology. In: Differential Topology - Geometry and Related Fields, and their Application to the Physical Sciences and Engineering, hg. von G.M. Rassias (Leipzig, 1985), 8-25.

Ratcliffe, J. G.: Foundations to Hyperbolic Manifolds (New York u.a., 1994).

Reidemeister, K.: Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume. (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 1928, 69-76).

Reidemeister, K.: Über Knotengruppen (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6 (1928), 56-64).

Reidemeister, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie (Braunschweig, 1932 - Nachdruck Darmstadt, 1972).

Reidemeister, K.: Zur dreidimensionalen Topologie (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 9 (1933), 189-194).

Reidemeister, K.: Heegard-Diagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 10 (1934), 109-118).

Reidemeister, K.: Überdeckungen von Komplexen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 173 (1935), 164-173).

Reidemeister, K.: Homotopieringe und Linsenräume (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 11 (1936), 102-109).

Reinhardt, C.: Zu Möbius Polyedertheorie (Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe 37 (1885), 106-125).

Reitberger, H.: Geometrische Topologie, Dynamik und das Werk von William P. Thurston. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik, hg. von R. Chatterij u.a. (Mannheim u.a., 1984, 221-227).

Rham, G. de: Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions (Journal des mathématiques pures et appliquées (9) 10 (1931), 115-200).

Rham, G. de: Sur les complexes avec automorphismus (Commentarii Mathematici Helvetii 12 (1939-40), 1919-211).

Riemann, B.: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe (Inauguraldissertation Göttingen, 1851 = Riemann 1990, 35-80 = Riemann 1892, 3-48).

Riemann, B.: Theorie der Abel'schen Functionen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 54 (1857), 115-155 = Riemann 1990, 120-176. = Riemann, 1892, 88-142).

Riemann, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1868), 132-152 = Riemann 1990, 304-319 = Riemann 1892, 272-287).

Riemann, B.: Fragment aus der Analysis situs (aus dem Nachlaß) = Riemann 1990, 511-514 = Riemann 1892, 479-482.

Riemann, B.: Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, hg. von H. Weber in Zusammenarbeit mit R. Dedekind (Leipzig, ²1892).

Riemann, B.: Gesammelte Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge. Collected papers. Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu hg. von R. Narasimhan (Berlin u.a., Leipzig, 1990).

Rolfsen, D.: Knots and links (Berkeley, 1976).

Rosenthal, A.: Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlicher. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Zweiter Band: Analysis, redigiert von H. Burkhardt u. a. Dritter Teil, Zweite Hälfte (Leipzig, 1923-1927), 851-1187 (abgeschlossen Juli 1923, ausgegeben 1.4.1924)..

Rourke, C. P. - Sanderson, B. J: Introduction to Piecewise-Linear Topology (Berlin u.a., 1982).

Rourke, C. - Stewart, J.: Poincaré's perplexing problem (New Scientist 4. September 1986, 41-46).

Rubinstein, T. H.: An algorithm to recognize the 3-sphere. (Tagungsbericht 39/1991 des mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, 10-11).

Rudin, M. E.: An unshellable triangulation of a tetrahedron (Bulletin of the American Mathematical Society 64 (1958), 90-91).

Saldanha, N. C.: An Introduction to Geometric Topology: Geometric Structures on Manifolds of Dimensions 2 and 3. In: Differential Topology, Foliations, and Group Actions, hg. von P. A. Schweitzer SJ u.a. (Providence, 1994), 175-216.

Sanderson, D. E.: Isotopy in 3-Manifolds I (Proceedings of the American Mathematical Society 8 (1957), 912-922).

Sarkaria, K.: A Look Back at Poincaré's Analysis Situs. In: Henri Poincaré. Science et Philosophie, éd. par J. L. Greffe, G. Heinzmann et K. Lorenz (Berlin/Paris, 1996), 251 - 258.

Schlegel, V.: Ueber Entwicklung und Stand der n-dimensionalen Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der vierdimensionalen (Nova Acta Leopoldina 22 (1886), 92-96, 108-110, 133-135, 149-152, 160-163).

Scholz, E.: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffes von Riemann bis Poincaré (Boston u. a., 1980).

Schönfließ, A.: Besprechung von H. Poincaré. Complément à l'Analysis situs (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 30 (1899), 435).

Schottland, E.: Über die topologische Struktur der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, insbesondere der Sphäre (Inaugural-Dissertation Heidelberg, 1934).

Schreier, O.: Über die Gruppen $A^aB^b=1$ (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1923), 167-169).

Schubert, H. Topologie (Stuttgart, 1971).

Segre, C.: Mehrdimensionale Räume. In: Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie, redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Zweiter Teil, zweite Hälfte, Teilband A (Leipzig, 1921-1928), 769-972 (abgeschlossen Ende 1912; ausgegeben 3.1.1921).

Seifert, H.: Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. (Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse 83 (1931), 26-66).

Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume (Acta mathematica 60 (1932), 147-238).

Seifert, H.: Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (Mathematische Zeitschrift 35 (1932), 609-611).

Seifert, H.: Poincaré'sche Räume. In: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932. II. Band/Sektions-Vorträge, hg. von W. Saxer (Zürich und Leipzig, o.J.), 197-198.

Seifert, H.: Verschlingungsinvarianten (Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte der physikalisch-mathematischen Klasse 1933, 811-828).

Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten (Mathematische Annalen 110 (1934), 571-592).

Seifert, H.: Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 11 (1936), 84-101).

Seifert, H.: Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen (Abhandlungen aus dem mathematischen Semiar der Hamburgischen Universität 12 (1938), 29-37).

Seifert, H. - Threlfall, W.: Lehrbuch der Topologie (Leipzig, 1934 - Nachdruck New York. o. J.).

Seifert, H. - Threlfall, W.: Variationsrechnung im Großen. theorie von Marston Morse (Leipzig, 1938).

Seifert, H. - Threlfall, W.: Topologie. In: Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939-1949. Für Deutschland bestimmte Ausgabe der FIAT Review of German Science. Bd. 2: Reine Mathematik. Teil II, hg. von W. Süss (Wiesbaden, 1948), 239-252.

Shields, A.: Years ago. (The Mathematical Intelligencer 9 No. 1 (1987), 6-7).

Singer, J.: Three-dimensional manifolds and their Heegard diagrams (Transactions of the American Mathematical Society 35 (1933), 88-111).

Smale, J.: The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions (Bulletin of the American Mathematical Society 66 (1960), 373-375).

Smale, J.: The generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four (Annals of Mathematics (2) 74 (1961), 391-406).

Smale, J.: A survey of some recent developments in differential topology (Bulletin of the American Mathematical Society 69 (1963), 131-145).

Smale, S.: The story of the higher dimensional Poincaré conjecture [What actually happened on the beaches of Rio] (The Mathematical Intelligencer 12 No. 2 (1990), 44-51).

Smith, H. J. S.: The collected mathematical papers, Vol. I., hg. von J. W. L. Glaisher (New York, 1894).

Sommerville, D. M. Y.: Bibliography of non-Euclidean geometry, including the theory of parallels, the foundations of geometry and space of n-dimensions (London 1911- Nachdruck New York, 1970).

Spivak, M.: A comprehensive introduction to differential geometry. Volume two (Berkeley, ²1979).

Stäckel, P.: Besprechung von Picard - Simart 1897. In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 28 (1897), 327-331.

Stäckel, P.: Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie (Bibliotheca Mathematica (3) 1 (1900), 109-128).

Stallings, J. R.: Polyhedral homotopy spheres (Bulletin of the American Mathematical Society 66 (1960), 458-488).

Stallings, J. R.: On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups (Fundamenta Mathematica 51 (1962), 191-194).

Stallings, J.: How not to prove the Poincaré conjecture. In: Topology Seminar Wisconsin, 1965. Hg. von R. H. Bing und R. J. Bean (Princeton, 1966), 83-88.

Steenrod, N.: The topology of fibre bundles (Princeton, 1951).

Steinitz, E.: Über ein merkwürdiges Polyeder von einseitiger Gesamtfläche (Journal für die reine und angewandte Mathematik 130 (1906), 281-307).

Steinitz, E.: Beiträge zur Analysis situs (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 7 (1908), 29-49; mit eigener Pagnierung in Archiv der Mathematik und Physik 13 (1908)).

Steinitz, E.: Polyeder und Raumeinteilungen. In: Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie, redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Erster Teil. Zweite Hälfte (Leipzig, 1914-1931), 1-139 (ausgegeben 31.08.1916).

Steinitz, E. - Rademacher, H.: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder (Berlin, 1934).

Stewart, I.: The Poincaré conjecture proved (Nature 320 (1986) 20. March, 217-218).

Stewart, I.: Möbius' Modern Legacy. In: Möbius and his Band, hg. von J. Fauvel, R. Flood and R. Wilson (Oxford u.a., 1993), 120-160.

Stillwell, J.: Classical topology and combinatorial group theory (New York u. a., 1980).

Stillwell, J.: Introductions. In: Dehn 1987, passim.

Storch, U. - Wiebe, H.: Lehrbuch der Mathematik. Band II (Mannheim u.a., 1990).

Strebel, R.: Kombinatorische Gruppentheorie. Ausarbeitung einer Vorlesung, gehalten am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg im WS 1975/76.

Struve, H.: Grundlagen einer Geometriedidaktik (Mannheim u. a., 1990).

Tait, P. G.: Johann Benedict Listing (Nature 27 (1.Februar 1883), 316-317).

Taubes, G.: What happens when Hubris meets Nemesis (Discover July 1987, 67-77).

Threlfall, W.: Gruppenbilder (Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften Band XVI, No. VI [Leipzig, 1932]).

Threlfall, W.: Dreidimensionale Raumformen. In: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932. II. Band/Sektionsvorträge, hg. von W. Saxer (Zürich und Leipzig, o. J.), 148-149.

Threlfall, W.: Räume aus Linienelementen (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 42 (1933), 87-110).

Threlfall, W. - Seifert, H.: Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes (Mathematische Annalen 104 (1931), 1-70).

Threlfall, W. - Seifert, H.: Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes [Schluß] (Mathematische Annalen 107 (1933), 543-586).

Thurston, W.: The geometry and topology of 3-manifolds (Princeton, 1978).

Thurston, W.: Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry (Bulletin of the American Mathematical Society (2) 6 (1982), 357-381).

Tietze, H.: Über das Problem der Nachbargebiete im Raum (Monatshefte für Mathematik und Physik 16 (1905), 211-216).

Tietze, H.: Zur Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten (Sitzungberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abtheilung IIa, 115 (1906), 841-848).

Tietze, H.: Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten (Monatshefte für Mathematik und Physik 19 (1908), 1-118).

Tietze, H.: Besprechung von Brahana 1921 (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 48 (1921-22), 661-662).

Tietze, H.: Über Analysis situs (Hamburger Mathematische Einzelschriften 2. Heft [Hamburg, 1923]).

Tietze, H. - Vietoris, L.: Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie, redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Erster Teil. Zweite Hälfte (Leipzig, 1914-1931), 141-237 (abgeschlossen 15.10.1929; ausgegeben 10.12.1930).

Tonelli, A.: Osservazioni sulla teoria della connessione (Atti della reale Accademia dei Lincei in Roma (2) 2 (1873-74), 594-601).

Tonelli, A.: Zur Lehre vom Zusammenhang (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität aus dem Jahre 1875, 387-390).

Topology of 3-manifolds and related topics, hg. von M. K. Fort jr. (Englewood Cliffs, 1962).

Tucker, A. W.: On combinatorial topology (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 18 (1932), 86-89).

Tucker, A. W.: An abstract approach to manifolds (Annals of Mathematics 31 (1933), 191-243).

Tucker, A. W.: Two books on topology (Bulletin of the American Mathematical Society (1935), 468-471).

Tucker, A. W.: Interview. In: Mathematical People, hg. von D. J. Albers und G. L. Alexanderson (Boston u. a., 1985), 338-348.

Two-dimensional Homotopy and Combinatorical Group Theory, hg. von C. Hog-Angeloni, W. Metzler und A. J. Sieradski (Cambridge, 1993).

Tzanakis, G.: Rotations, nombres complexes et quaternions (L'Ouvert No. 75 (juin 1994), 15-31).

Vanden Eynde, R.: Historical Evolution of the Concept of Homotopic Paths (Archive for History of Exact Sciences 45 (1992/93), 127-188).

Veblen, O.: Analysis situs (New York, 21931 - Nachdruck Ann Arbor/London, 1976).

Veblen, O. - Whitehead, J. H. C.: The foundations of differential geometry (Cambridge, 1932).

Vietoris, L.: Über den höheren Zusammenhang von kompakten Räumen und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert lassen (Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences 29 (1926), 108-1013).

Vietoris, L.: Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen (Mathematische Annalen 97 (1927), 454-472).

Volkert, K.: Die Geschichte der pathologischen Funktionen. Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie (Archive for History of Exact Sciences 37 (1987), 193-232).

Volkert, K.: Auswirkungen der und Reaktionen auf die nichteuklidische Revolution 1860-1880. In: Preprint 3/93 des Zentrums für interdisziplinäre Forschung der Universität Bielefeld (Bielefeld, 1993).

Volkert, K.: Wie und warum wurde Poincaré zum Topologen? (erscheint 1997 in der Zeitschrift Philosophia scientiae).

Waerden, B. L. van der: Kombinatorische Topologie (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), 121-139).

Waerden, B. L. van der: A History of Algebra. From al-Khwarizimi to Emmy Noether (Berlin u. a., 1985).

Waldhausen, F.: On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large (Annals of Mathematics 87 (1968), 56-87).

Wallace, A. D.: Modifications and cobounding manifolds (Canadian Journal of Mathematics 12 (1960), 503-528).

Wallace, A. H.: Modifications and cobounding manifolds II (Journal of Mathematics and Mechanics 10 (1961), 773-809).

Weber, C.: - Seifert, H.: Die beiden Dodekaederräume (Mathematische Zeitschrift 37 (1933), 237-253.).

Weeks, J.: The Shape of Space (New York-Basel, 1985)

Weichold, G.: Über symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodizitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung (Dissertation Leipzig; Dresden, 1883).

Weil, A.: Riemann, Betti and the birth of topology (Archive for History of Exact Sciences 20 (1979), 91-96).

Wernicke, A.: Über die Analysis situs mehrdimensionaler Räume (Dissertation Göttingen, 1904).

Weyl, H.: Henri Poincaré (Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter 9 (1912), 161-163).

Weyl, H.: Über die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig, 1913).

Weyl, H.: Erläuterungen. In: Riemann, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Leipzig, ²1923) = Riemann 1990, 740-768.

Weyl, H.: Análisis situs combinatorio (Revista Matematica Hispano - Americana 5 (1923), 209-218, 241-248 sowie 273-279 und Revista Matematica Hispano-Americana 6 (1924), 33-41).

Whitehead, G. W.: 50 years of homotopy theory (Bulletin of the American Mathematical Society (New series) 8 (1983), 1-29).

Whitehead, J. H. C.: Certain theorems about three-dimensional manifolds [I]) (The Quaterly Journal of Mathematics (2) 5 (1934), 308-320).

Whitehead, J. H. C.: Certain theorems about three-dimensional manifolds [Corrigendum] (The Quaterly Journal of Mathematics (2) 6 (1935), 80).

Whitehead, J. H. C.: A certain open manifold whose group is unity (Quaterly Journal of Mathematics (2) 6 (1935), 268-279).

Whitehead, J. H. C.: Simplicial spaces, nuclei and m-gropus (Proceedings of the London Mathematical Society (2) 45 (1939), 243-327).

Whitehead, J. H. C.: On certain invariants introduced by Reidemeister (The Quaterly Journal of Mathematics (2) 10 (1939), 81-83).

Whitehead, J. H. C.: On incidence matrices, nuclei and homotopy types (Annals of Mathematics 42 (1941), 1197-1239).

Whitehead, J. H. C.: Combinatorial homotopy (Bulletin of the American Mathematical Society 55 (1949), 213-245).

Whitehead, J. H. C.: Simple homotopy type (American Journal of Mathematics 72 (1952), 1-57).

Whitehead, J. H. C.: 2-spheres in 3-manifolds (Bulletin of the American Mathematical Society 64 (1958), 161-166).

Whitney, H.: Differentiable manifolds (Annals of Mathematics 37 (1936), 645-680).

Whitney, H.: The work of J. Milnor. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Stockholm 15.-22. August 1962. Bd. I (Uppsala, 1963), XLVIII-L.

Wirtinger, W.: Algebraische Funktionen und ihre Integrale. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften unter Einschluß ihrer Anwendungen. Zweiter Band: Analysis, redigiert von H. Burkhardt u.a. Zweiter Teil (Leipzig, 1901 - 1921), 115-175 (abgeschlossen Oktober 1901, ausgegeben 27.12.1901).

Wussing, H.: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs. Ein Beitrag zu Entstehung der abstrakten Gruppentheorie (Berlin [DDR], 1969).

Zeemann, E. C.: The generalized Poincaré conjecture (Bulletin of the American Mathematical Society 67 (1961), 270).

Zeemann, E. C.: The Poincaré conjecture for $n \geq 5$. In: Topology of 3-manifolds and related topics, hg. von M. K. Fort jr. (Englewood Cliffs, 1962).

Abbildungsverzeichnis