

Der Signaturdefektsatz
für
Bündel

Diplomarbeit

vorgelegt von
Charlotte Wahl
aus
Heidelberg

angefertigt im
Institut für
Reine Mathematik
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
1998

Inhalt

1	Die Signatur von Mannigfaltigkeiten	7
1.1	Die Schnittform und die topologische Signatur	7
1.2	Die Signatur als Index eines Operators	8
1.2.1	Die Konstruktion	8
1.2.2	Der Zusammenhang mit der topologischen Signatur . . .	10
1.2.3	Modifikationen bei Mannigfaltigkeiten mit Rand	11
1.2.4	Der Indexsatz	15
2	Der Familienindex der Signatur	17
2.1	Der Begriff des Faserbündels	17
2.2	Differentialgeometrie auf Faserbündeln	18
2.3	Die Konstruktion des Familienindex	19
2.4	Modifikationen bei Faserbündeln mit Rand	20
2.5	Die Integration über die Faser	22
2.6	Der Familienindexsatz	23
3	Das Signaturbündel	24
3.1	Das Signaturbündel einer Form	24
3.1.1	Die Konstruktion	24
3.1.2	Eigenschaften	26
3.2	Das Kohomologiebündel	28
3.2.1	Die Definition	28
3.2.2	Die Strukturgruppe	29
3.2.3	Rechnen mit Kohomologiebündeln	29
3.3	Das Signaturbündel eines Mannigfaltigkeitenbündels	30
3.3.1	Die Definition	30
3.3.2	Vergleich mit dem Familienindex	31
3.3.3	Die Strukturgruppe	33
3.3.4	Der Cherncharakter und die Signatur des Totalraums . .	33
3.3.5	Eigenschaften	35

4	Der Signaturdefekt	39
4.1	Die Situation	39
4.2	Ein Beispiel für $\text{sign}(Y) \neq \text{sign}(Y_+) + \text{sign}(Y_-)$	39
4.3	Der Signaturdefekt für Mannigfaltigkeiten	40
4.4	Die Verallgemeinerung für Faserbündel	42
4.5	Ein Beispiel für einen nichttrivialen Korrekturterm	53
5	Der Korrekturterm und die Etainvarianten	54

Einführung

Bei der Suche nach Invarianten, die Mannigfaltigkeiten und Strukturen auf ihnen – wie differenzierbare oder Riemannsche – klassifizieren, fand man in der Indextheorie ein mächtiges Hilfsmittel:

Die Indizes elliptischer Operatoren auf Mannigfaltigkeiten sind Invarianten der Struktur, die sie definieren. Da nur diskrete Werte auftreten und sie stetig von den Operatoren abhängen, sind sie außerdem stabil gegen kleine Störungen. Daher erweisen sie sich häufig als unabhängig von den Voraussetzungen, die zur Konstruktion der Operatoren nötig sind. So können auch topologische Invarianten als Indizes konstruiert werden, obwohl die Operatoren i.a. eine differenzierbare Struktur fordern.

Einen wesentlichen Anteil an der Entwicklung der Indextheorie hatten Atiyah und Singer:

Sie untersuchten die Indizes elliptischer Operatoren auf kompakten und geschlossenen Mannigfaltigkeiten [2] und definierten einen Familienindex für Faserbündel kompakter, geschlossener Mannigfaltigkeiten [3]. Dieser ist ein Element der K-Theorie der Basis.

Von Atiyah, Patodi und Singer wurde die Theorie auf Mannigfaltigkeiten mit Rand ausgedehnt, was zur Definition der η -Invarianten, die sich aus dem Spektrum der Einschränkung des Operators auf den Rand berechnet, führte [4]. Von Bismut und Cheeger konnte auch dieser Fall auf Faserbündel übertragen werden, wobei an die Stelle der η -Invarianten die η -Form trat [5].

Jeder Teil der Theorie gipfelt in einem Indexsatz, der den Index als Summe eines Integrals über die Mannigfaltigkeit und der η -Invarianten ausdrückt bzw. für Faserbündel die Chernklasse des Familienindex als Summe eines Integrals über die Faser und der η -Form.

Bei der Konstruktion verschiedener Indizes traf man auf altbekannte Invarianten wie die Eulercharakteristik und die Signatur von Mannigfaltigkeiten. Dadurch konnten einerseits neue Erkenntnisse über diese beiden Größen gewonnen werden, andererseits dienen sie als „Experimentierkasten“:

An ihnen können Ideen ausprobiert werden mit dem Ziel, die Resultate vielleicht auf Indizes beliebiger Operatoren zu übertragen.

Um ein solches „Experiment“ handelt es sich bei der vorliegenden Arbeit.

Ein offenes Problem der Indextheorie ist, wie beim Verkleben von Faserbündeln mit Rand die Familienindizes der Teile und des Ganzen zusammenhängen. Für Mannigfaltigkeiten mit Rand wurde von Bunke ein Zusammenhang hergestellt [8].

Das Verhalten der Signatur beim Verkleben zweier Mannigfaltigkeiten mit Rand an einem gemeinsamen Randstück wurde von Wall mit Methoden der

algebraischen Topologie untersucht [13]. Er fand, daß die Signatur des Ganzen die Summe der Signaturen der Teile und eines Korrekturterms ist.

In dieser Arbeit soll der Familienindex der Signatur mit Hilfsmitteln der algebraischen Topologie beschrieben und auf diese Weise Walls Ergebnis auf den Familienindex der Signatur verallgemeinert werden. Der Korrekturterm wird ein Element in der K-Theorie der Basis sein.

Für den Atiyah-Singer-Indexsatz und seine Verallgemeinerungen interessant sind Bündel, wenn ihr Cherncharakter nichttrivial ist, d.h. Anteile in den höheren Kohomologiegruppen des Basisraums hat. Dies ist z.B. beim Familienindex der Eulercharakteristik nicht der Fall; er wird nämlich durch ein flaches Bündel repräsentiert.

Für die Signatur hingegen fand Atiyah ein Beispiel eines Familienindex mit nichttrivialem Cherncharakter [1]. Es wird hier verwendet, um ein Beispiel für einen Korrekturterm mit nichttrivialem Cherncharakter zu konstruieren.

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \neq 0 \bmod 4$ verschwindet die Signatur. Atiyahs Beispiel zeigt, daß dies für den Familienindex nicht gilt: Das von ihm konstruierte Mannigfaltigkeitenbündel hat Faserdimension $n = 2$. Das in dieser Arbeit angegebene Beispiel belegt, daß auch der Korrekturterm für Faserbündel mit Faserdimension $n = 2 \bmod 4$ i.a. nicht verschwindet. Hier wird die Faserdimension 6 sein.

Zum Schluß der Arbeit wird der Indexsatz auf die beiden Teile und das durch Verkleben entstandene Faserbündel angewandt und die Resultate werden miteinander verglichen. Nach Überwindung einiger technischer Schwierigkeiten ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen den drei η -Formen und dem Cherncharakter des Korrekturterms, der eine Verallgemeinerung von [8], (20), darstellt. Er lautet nämlich für das durch Verkleben von $\tilde{Y}_+$ und $\tilde{Y}_-$ entstandene Faserbündel $\tilde{Y}$, wenn die Faserdimension $2k$ ist und T der Korrekturterm:

$$[\eta_{\partial\tilde{Y}} - \eta_{\partial\tilde{Y}_+} - \eta_{\partial\tilde{Y}_-}] = (-1)^{k+1} \text{ch } T.$$

Durch eckige Klammern wird dabei die Äquivalenzklasse in der de Rham-Kohomologie der Basis bezeichnet.

Für die Formulierung dieser Gleichung ist die Existenz der Faserbündel $\tilde{Y}$ und $\tilde{Y}_\pm$ nicht nötig. Die auftretenden Größen lassen sich für ein Tripel beliebiger Mannigfaltigkeitenbündel $\tilde{X}_i$, $i = -, 0, +$, mit gemeinsamem Rand $\tilde{Z}$ definieren, wenn man $\partial\tilde{Y}$ durch $\tilde{X}_+ \cup_{\tilde{Z}} \tilde{X}_-$ und $\partial\tilde{Y}_\pm$ durch $\tilde{X}_0 \cup_{\tilde{Z}} \tilde{X}_\pm$ ersetzt.

Ob die Gleichung dann immer noch gilt, wird hier nicht untersucht werden. Für Mannigfaltigkeiten wurde diese Frage in [8], Lemma (2.12), positiv beantwortet.

Bevor jedoch der Korrekturterm definiert wird, sollen zunächst in den ersten beiden Abschnitten die beiden Darstellungen der Signatur aus Algebraischer

Topologie und Indextheorie vorgestellt werden und die daraus resultierenden, später benötigten Informationen zusammengetragen werden.

Noch einige Festsetzungen:

Alle auftretenden Mannigfaltigkeiten seien orientiert, kompakt und zusammenhängend. Riemannsche Mannigfaltigkeiten seien glatt mit glatter Metrik.

Die Basisräume der Faserbündel seien stets kompakt und zusammenhängend.

Äquivalenzklassen in Kohomologie und K-Theorie werden mit eckigen Klammern bezeichnet.

Ich danke Prof. U. Bunke für die vielen Anregungen während der Betreuung dieser Arbeit.

1 Die Signatur von Mannigfaltigkeiten

1.1 Die Schnittform und die topologische Signatur

Sei $(M, \partial M)$ eine orientierte, kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2k$ mit oder ohne Rand (dann ist im folgenden $\partial M = \emptyset$ zu setzen), $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M)$ sei die Orientierungsklasse von M . Die Koeffizienten der (Ko-)Homologie von M seien reell oder komplex und werden mit K bezeichnet.

Die Vektorräume $H^i(M, \partial M)$ und $H_i(M, \partial M)$ sind dann zueinander dual. Die Auswertung eines Elements $\alpha \in H^i(M, \partial M)$ auf $a \in H_i(M, \partial M)$ wird mit αa bezeichnet.

Die Poincarédualität liefert außerdem einen Isomorphismus

$$H^i(M) \xrightarrow{-\cap [M, \partial M]} H_{n-i}(M, \partial M).$$

Definition. Auf der mittleren Kohomologie $H^k(M, \partial M)$ einer Mannigfaltigkeit $(M, \partial M)$ der Dimension $2k$ definiert das Cupprodukt

$$\cup : H^k(M, \partial M) \times H^k(M, \partial M) \rightarrow H^{2k}(M, \partial M)$$

mit Hilfe der von $j : M \rightarrow (M, \partial M)$ induzierten Abbildung $j^* : H^k(M, \partial M) \rightarrow H^k(M)$ eine Form:

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \cup j^* \beta)[M, \partial M] = (j^* \alpha \cup \beta)[M, \partial M].$$

Sie wird die Schnittform auf M genannt.

Aus den Eigenschaften des Cupproduktes folgt, daß diese für gerades k symmetrisch ist und sonst schief-symmetrisch.

Satz. Das Radikal der Schnittform einer Mannigfaltigkeit $(M, \partial M)$ der Dimension $2k$ ist

$$\text{Ker}(j^* : H^k(M, \partial M) \rightarrow H^k(M)).$$

Nach der exakten Sequenz des Paares $(M, \partial M)$ ist das gleich

$$\text{Im}(\delta : H^{k-1}(\partial M) \rightarrow H^k(M, \partial M)).$$

Beweis. Sei $\beta \in H^k(M, \partial M)$ aus dem Radikal der Form, d.h. für alle $\alpha \in H^k(M, \partial M)$ gelte:

$$(\alpha \cup j^* \beta)[M, \partial M] = 0.$$

Da $H^k(M, \partial M) = \text{Hom}(H_k(M, \partial M), K)$ ist und

$$(\alpha \cup j^* \beta)[M, \partial M] = \alpha(j^* \beta \cap [M, \partial M]),$$

folgt:

$$j^*\beta \cap [M, \partial M] = 0.$$

Die Abbildung $\lrcorner \cap [M, \partial M] : H^k(M) \rightarrow H_k(M, \partial M)$ ist gerade der Isomorphismus der Poincarédualität; deshalb muß $j^*\beta$ verschwinden. $\square$

Insbesondere ist die Form für Mannigfaltigkeiten ohne Rand nicht entartet.

Definition. Die Signatur $\text{sign}M$ einer orientierten Mannigfaltigkeit $(M, \partial M)$ wird definiert als die Signatur der Schnittform auf M .

Die Orientierung von M bestimmt das Vorzeichen von $\text{sign}M$.

1.2 Die Signatur als Index eines Operators

Die Signatur einer orientierbaren kompakten Mannigfaltigkeit kann auch als Index eines analytischen Operators beschrieben werden, der mit Hilfe einer Riemannschen Metrik definiert wird (s. [2], §6 o. [9], §3.1.). Dies eröffnet die Möglichkeit, aus der Indextheorie weitere Informationen über sie zu erhalten. Der Indexatz zum Beispiel sagt aus, daß sie sich als Integral einer bestimmten charakteristischen Form über die Mannigfaltigkeit berechnen läßt.

Bei Mannigfaltigkeiten mit Rand hingegen tritt zusätzlich zum Integral ein nur vom Rand abhängiger globaler Zusatzterm auf.

1.2.1 Die Konstruktion

Sei (M, g) eine orientierbare, geschlossene Riemannsche C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2k$; die zugehörige Volumenform sei dvol . Die Metrik g auf TM induziert eine hermitesche Metrik auf $\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M = \bigoplus_p \Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M$, wobei $\Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M = \Lambda^p T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ das Bündel der komplexwertigen Formen auf TM ist. Die induzierte Metrik wird auch mit g bezeichnet.

Darüber hinaus ist ein hermitesches Produkt

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M g(\alpha, \beta) \text{dvol}$$

definiert für Schnitte aus $C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$, d.h. Schnitte, die unendlich oft differenzierbar sind.

Das äußere Differential

$$d : C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M) \rightarrow C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$$

ist ein Differentialoperator erster Ordnung.

Daher ist der zu d formal adjungierte Operator δ auch ein Differentialoperator erster Ordnung auf $C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$.

Über den Hodge-*-Operator $*$ $\in \text{Aut}(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$ kann eine $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung auf $\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M$ konstruiert werden:

Die Einschränkung $*_p : \Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^{n-p} T^*M$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$g(\alpha, \beta) \text{dvol} = \alpha \wedge \overline{*_p \beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M.$$

Dies legt $*$ auf $\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M$ fest und liefert als weitere Eigenschaft:

$$*_{n-p} *_p = (-1)^{p(n-p)}.$$

Daher ist $\tau = \oplus_p \tau_p \in \text{Aut}(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$ mit

$$\tau_p := i^{k+p(p+1)} *_p$$

eine Involution auf $\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M$ und definiert eine Zerlegung

$$\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M = \Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^*M \oplus \Lambda_{\mathbb{C}}^- T^*M,$$

wobei $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^*M$ ($\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^*M$) der Eigenraum zum Eigenwert $+1$ (-1) von τ sei. Dies induziert auch eine $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung auf $C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}T^*M)$.

Außerdem läßt sich zeigen, daß $\delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M)} = (-1)^{np+n+1} * d*$ gilt. Daraus folgt für den Operator $(d + \delta)$:

$$(d + \delta)\tau = -\tau(d + \delta).$$

Er vertauscht also den positiven und negativen Eigenraum von τ . Daher sind

$$(d + \delta)_+ := (d + \delta)|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^*M)}$$

und

$$(d + \delta)_- := (d + \delta)|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^*M)}$$

formal adjungiert zueinander.

Es kann außerdem gezeigt werden, daß sie die Einschränkungen auf glatte Schnitte von zueinander adjungierten Operatoren zwischen Hilberträumen sind. Dies ermöglicht die Definition des Indexes von $(d + \delta)$ bzgl. der $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung im Sinne der Theorie der Fredholmoperatoren:

Definition. Die analytische Signatur einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) wird definiert als

$$\begin{aligned} \text{sign}_a(M) &:= \text{ind}_\tau(d + \delta) \\ &:= \dim \text{Ker}(d + \delta)_+ - \dim \text{Ker}(d + \delta)_-. \end{aligned}$$

Damit dieser Ausdruck wohldefiniert ist, müssen die Dimensionen der Kerne endlich sein. Dies ist ein Ergebnis der Hodgetheorie, die im nächsten Abschnitt näher erläutert wird. Sie wird ausführlich in [9], §1.5, behandelt.

1.2.2 Der Zusammenhang mit der topologischen Signatur

Da $(d + \delta)$ formal selbstadjungiert ist, enthält $\text{Ker}(d + \delta) \cap \text{Im}(d + \delta)$ nur den Nullschnitt, und daher gilt $\text{Ker}(d + \delta) = \text{Ker}\Delta$.

Damit läßt sich der Ausdruck für den Index umformen zu

$$\text{ind}_\tau(d + \delta) = \dim \text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^*M)} - \dim \text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^*M)}.$$

Der Operator Δ erhält den Formengrad, deshalb gilt: $\text{Ker}\Delta = \bigoplus_p \text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M)}$. Aus $\text{Ker}(d + \delta) = \text{Ker}\Delta$ und einem Vergleich der Formengrade – d erhöht und δ erniedrigt den Formengrad um 1 – folgt daher für $\omega \in \text{Ker}\Delta$: $d\omega = 0$. Die Projektion $\text{Ker}\Delta \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$ ist also definiert im Sinne der de Rham-Kohomologie.

Die Hodgetheorie verbindet die topologisch und die analytisch definierte Signatur:

Sie besagt, daß die Projektion $\text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M)} \rightarrow H^p(M, \mathbb{C})$ ein Isomorphismus ist; insbesondere ist damit $\text{Ker}\Delta$ endlichdimensional und $\text{sign}_a(M)$ wohldefiniert.

Der Hodge-*-Operator und damit die Involution τ sind auch auf $H^*(M, \mathbb{C})$ definiert. Seien $H^*(M, \mathbb{C})^\pm$ die Eigenräume von $\tau|_{H^*(M, \mathbb{C})}$ zu den Eigenwerten ± 1 . Damit gilt also:

$$\text{sign}_a(M) = \dim H^*(M, \mathbb{C})^+ - \dim H^*(M, \mathbb{C})^-.$$

Dies kann weiter vereinfacht werden: Da $\tau_p : H^p(M, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-p}(M, \mathbb{C})$ ein Isomorphismus ist, liefert die Abbildung

$$H^p(M, \mathbb{C}) \rightarrow (H^p(M, \mathbb{C}) \oplus H^{n-p}(M, \mathbb{C}))^\pm, \quad \alpha \mapsto \frac{1}{2}(\alpha \pm \tau_p \alpha)$$

für $p \neq k$ einen Isomorphismus $(H^p(M, \mathbb{C}) \oplus H^{n-p}(M, \mathbb{C}))^+ \cong (H^p(M, \mathbb{C}) \oplus H^{n-p}(M, \mathbb{C}))^-$. Daher trägt nur die mittlere Dimension zur Signatur bei:

$$\text{sign}_a(M) = \dim(H^k(M, \mathbb{C})^+) - \dim(H^k(M, \mathbb{C})^-).$$

Ist $\dim M = 2 \bmod 4$, d.h. k ungerade, dann ist $\tau_k = i*_k$ ein imaginärer Automorphismus, daher ist $H^k(M, \mathbb{C})^+$ der komplex konjugierte Raum zu $H^k(M, \mathbb{C})^-$. Die analytische Signatur verschwindet also – wie die topologische.

Für gerades k ist $\tau = *$, insbesondere also reell. Da Δ ein reeller Operator ist, ist $\text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^k T^*M)} = \text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda^k T^*M)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Daher reicht es, reelle Formen zu betrachten.

Für $\alpha, \beta \in \text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda^k T^*M)}$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \tau\beta) d\text{vol} &= \int_M g(\alpha, *\beta) d\text{vol} \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta \\ &= ([\alpha] \cup [\beta])[M]. \end{aligned}$$

Dabei werden in der letzten Zeile mit eckigen Klammern die Kohomologieklassen von α, β in $H^k(M, \mathbb{R})$ bezeichnet. Da $\int_M g(\cdot, \cdot) d\text{vol}$ ein Skalarprodukt auf $\text{Ker}\Delta|_{C^\infty(\Lambda^k T^*M)}$ ist, ist die Signatur der durch das Cupprodukt induzierten symmetrischen Form auf $H^k(M, \mathbb{R})$ gerade die Differenz der Dimensionen der Eigenräume von τ .

Also ergibt sich:

$$\text{sign}_a(M) = \text{sign}(M).$$

Insbesondere ist die analytische Signatur unabhängig von der Metrik, die zu ihrer Definition nötig war.

1.2.3 Modifikationen bei Mannigfaltigkeiten mit Rand

Auch für eine glatte Mannigfaltigkeit $(M, \partial M)$ mit Rand läßt sich die Signatur als Index von $(d + \delta)$ bzgl. der durch τ definierten Graduierung beschreiben.

Der Operator δ , der durch $\delta|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^p T^*M)} := (-1)^{np+n+1} * d*$ definiert ist, ist jedoch auf $C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}} T^*M)$ nicht zu d adjungiert.

Damit die Operatoren $(d + \delta)_\pm$ formal adjungiert zueinander sind und sich zu Fredholmschen Operatoren erweitern lassen, werden ihre Definitionsbereiche auf Schnitte von $\Lambda_{\mathbb{C}} T^*M$ eingeschränkt, die bestimmten „globalen“ Randbedingungen, den sogenannten Atiyah-Patodi-Singer-Randbedingungen, genügen.

Im folgenden werden die Ergebnisse aus dem Artikel [4], in dem Atiyah, Patodi und Singer die Konstruktion des Indexes für Mannigfaltigkeiten mit Rand beschrieben, für die Signatur zusammengefaßt.

Um die Randbedingungen zu definieren, müssen Forderungen an die Metrik auf $(M, \partial M)$ gestellt werden: Sie soll so beschaffen sein, daß es eine Umgebung des Randes $U_{\partial M}$ gibt, die isometrisch zu $\partial M \times [0, \varepsilon[$ ist. Dabei sei $\partial M \times [0, \varepsilon[$ mit der Produktmetrik der von M auf ∂M eingeschränkten Metrik und der euklidischen Metrik auf $[0, \varepsilon[$ versehen.

Die Bündel $\Lambda_{\mathbb{C}}^\pm T^*M|_{U_{\partial M}}$ können über die Isometrie $\varphi : \partial M \times [0, \varepsilon[\rightarrow U_{\partial M}$ mit den Bündeln $\Lambda_{\mathbb{C}}^\pm T^*(\partial M \times [0, \varepsilon[)$ identifiziert werden. Diese sind in Normalenrichtung trivial, d.h. sie sind isomorph zu $p^*(\Lambda_{\mathbb{C}}^\pm T^*(\partial M \times [0, \varepsilon[)|_{\partial M})$, wobei $p : \partial M \times [0, \varepsilon[\rightarrow \partial M$ die Projektion sei.

Sei u die Normalkoordinate von $U_{\partial M}$, die über φ definiert ist. Sei $i(du)$ die Adjungierte zum äußeren Produkt $du \wedge _$, und sei $c(du) := du \wedge _ - i(du)$. Da $c(du)c(du) = -id$ und $\tau c(du) = -c(du)\tau$ gilt, ist $c(du) : \Lambda_{\mathbb{C}}^{\pm} T^* M|_{U_{\partial M}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^{\mp} T^* M|_{U_{\partial M}}$ ein Isomorphismus.

Andererseits definiert $i : \partial M \hookrightarrow M$ einen Bündelmorphismus $Di : \Lambda_{\mathbb{C}} T^* M|_{\partial M} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}} T^* \partial M$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Einschränkungen $Di_{\pm} : \Lambda_{\mathbb{C}}^{\pm} T^* M|_{\partial M} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}} T^* \partial M$ Bündelisomorphismen sind.

Bezeichnet $(d+\delta)_{\partial M}$ den auf den Schnitten von $\Lambda_{\mathbb{C}} T^* \partial M$ wirkenden Operator, der durch die von M auf ∂M induzierte Metrik definiert ist, so hat $(d+\delta)$ auf $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M|_{U_{\partial M}}$ die Form

$$c(du) \frac{\partial}{\partial u} + (Di_-)^{-1} (d+\delta)_{\partial M} Di_+ = c(du) \left(\frac{\partial}{\partial u} - \underbrace{c(du)(Di_-)^{-1} (d+\delta)_{\partial M} Di_+}_{=:-B_+} \right).$$

Der Operator B_+ ist selbstadjungiert. Er wirkt zunächst auf den Schnitten von $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M|_{\partial M}$, läßt sich aber eindeutig auf Schnitte von $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M|_{U_{\partial M}}$ fortsetzen, da dieses Bündel in Normalenrichtung trivial ist.

Sei P_+ der orthogonale Projektor der Schnitte von $\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M|_{\partial M}$ auf den Raum, der von den Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten von B_+ aufgespannt wird, und P_+^0 sei der Projektor auf den Kern von B_+ .

Analog seien B_- , P_- und P_-^0 für die Einschränkung von $(d+\delta)$ auf $C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^* M)$ definiert. Sie läßt sich über $U_{\partial M}$ als

$$c(du) \left(\frac{\partial}{\partial u} - c(du)(Di_+)^{-1} (d+\delta)_{\partial M} Di_- \right)$$

ausdrücken.

Für einen Projektor P seien

$$C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^{\pm} T^* M, P) := \{ \alpha \in C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^{\pm} T^* M) : P(\alpha|_{\partial M}) = 0 \}.$$

Damit können nun die Definitionsbereiche von $(d+\delta)_{\pm}$ formuliert werden, und der Index von $(d+\delta)$ bzgl. τ kann definiert werden.

Definition. Der Index von $(d+\delta)$ bzgl. der von τ induzierten $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung auf $\Lambda_{\mathbb{C}} T^* M$ ist definiert als

$$\text{ind}_{\tau}(d+\delta) = \dim \text{Ker}(d+\delta)_+ - \dim \text{Ker}(d+\delta)_-$$

mit

$$(d+\delta)_+ : C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M, P_+ + P_+^0) \rightarrow C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^* M)$$

und

$$(d+\delta)_- : C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^* M, P_-) \rightarrow C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M).$$

Er soll nun mit der Signatur von $(M, \partial M)$ verglichen werden. Die folgenden Ausführungen belegen auch, daß die Dimensionen der Kerne endlich sind, d.h. der Index wohldefiniert ist.

Seien

$$H^+ := \text{Ker}(d + \delta)_+$$

und

$$H^- := \text{Ker}(d + \delta)_-|_{C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T^* M, P_- + P_-^0)},$$

und H^∞ sei das Komplement von H^- in $\text{Ker}(d + \delta)_-$. Also ist

$$\text{ind}_\tau(d + \delta) = \dim H^+ - \dim H^- - \dim H^\infty.$$

Um mehr Informationen über diese Räume zu erhalten, müssen die Randbedingungen besser verstanden werden. Dabei hilft folgende Konstruktion, mit der Atiyah, Patodi und Singer den Indexsatz für Mannigfaltigkeiten mit Rand bewiesen:

Wird an den Rand von M ein Zylinder $\partial M \times \mathbb{R}^-$ geklebt, dann erhält man eine Mannigfaltigkeit M' ohne Rand, die aber nicht mehr kompakt ist. Die an die Metrik gestellten Bedingungen garantieren, daß sie sich auf M' fortsetzen läßt.

Für M' sind Operatoren $(d + \delta)_{M', \pm}$ definiert, deren Einschränkung auf M gerade $(d + \delta)_\pm$ ist. Die Räume $H^\pm$ lassen sich folgendermaßen charakterisieren: Eine Form $\alpha \in C^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T^* M)$ mit $(d + \delta)\alpha = 0$ läßt sich genau dann zu einer L^2 -integrierbaren Form aus dem Kern von $(d + \delta)_{M', +}$ fortsetzen, wenn $(P_+ + P_+^0)\alpha|_{\partial M} = 0$, d.h. $\alpha \in H^+$ ist. Gleiches gilt für H^- .

Wie unter 1.2 zeigen Gradbetrachtungen, daß die Elemente von $\text{Ker}(d + \delta)_\pm$ geschlossen sind.

Dann wird plausibel, daß für $\alpha \in H^\pm$ die Einschränkung $Di_\pm \alpha|_{\partial M}$ exakt ist, denn wegen $(P_+ + P_+^0)\alpha|_{\partial M} = 0$ setzt sie sich zu einer geschlossenen Form aus $\text{Ker}(d + \delta)_{M', \pm}$, die im Unendlichen verschwindet, fort (s.[4], Satz (4.9)).

Daraus folgt, daß das Bild von $H^+ \oplus H^-$ unter der Projektion nach $H^*(M)$ in $\text{Im}(j^* : H^*(M, \partial M) \rightarrow H^*(M))$ liegt.

Atiyah, Patodi und Singer bewiesen, daß sogar gilt:

$$H^+ \oplus H^- \cong \text{Im}(j^* : H^*(M, \partial M) \rightarrow H^*(M))$$

Außerdem zeigt die oben erwähnte Charakterisierung von $H^\pm$, daß die Randbedingungen eine Zerlegung von $H^\pm$ in eine direkte Summe $H^{*\neq n/2, \pm} \oplus H^{n/2, \pm}$ zulassen und daß der Bündelisomorphismus

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbb{C}}^{* < n/2} T^* M &\rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^{* \neq n/2, \pm} T^* M, \\ \alpha &\mapsto \frac{1}{2}(\alpha \pm \tau \alpha) \end{aligned}$$

einen wohldefinierten Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^{*\neq n/2,+} &\rightarrow H^{*\neq n/2,-}, \\ \alpha + \tau\alpha &\mapsto \alpha - \tau\alpha. \end{aligned}$$

liefert. Die Indizes bezeichnen dabei die Formengrade.

Damit gilt

$$\dim H^+ - \dim H^- = \dim H^{n/2,+} - \dim H^{n/2,-}.$$

Auf $H^{n/2,+} \oplus H^{n/2,-} \cong \text{Im}(j^* : H^{n/2}(M, \partial M) \rightarrow H^{n/2}(M))$ ist die Schnittform definiert und nicht entartet (s. 1.1). Die gleiche Rechnung wie in 1.2 zeigt, daß

$$\text{sign}(M) = \dim H^{n/2,+} - \dim H^{n/2,-} = \dim H^+ - \dim H^-$$

ist.

Nun soll noch H^∞ näher bestimmt werden.

Dazu wird die Abbildung

$$I : \text{Ker}(d + \delta)_- = H^- \oplus H^\infty \rightarrow H^*(M) \xrightarrow{i^*} H^*(\partial M)$$

betrachtet.

Da H^- nach $\text{Im}(j^* : H^*(M, \partial M) \rightarrow H^*(M))$ abgebildet wird, ist $H^- \subset \text{Ker} I$.

Sei andererseits $0 \neq \alpha \in H^\infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} I\alpha &= i^*[\alpha] \\ &= [Di_- \alpha|_{\partial M}] \\ &= [Di_- P_-^0 \alpha|_{\partial M} + Di_-(1 - P_- - P_-^0)\alpha|_{\partial M}] \in H^*(\partial M). \end{aligned}$$

Die erste Komponente ist in $Di_- \text{Ker} B_- = \text{Ker}(d + \delta)_{\partial M}$ und verschwindet dort nach Voraussetzung nicht, und der zweite Summand ist eine exakte Form, denn $(1 - P_- - P_-^0)\alpha|_{\partial M}$ läßt sich zu einer geschlossenen, im Unendlichen verschwindenden Form auf $\partial M \times \mathbb{R}^-$ fortsetzen. Daher ist $Di_- P_-^0 \alpha|_{\partial M}$ ein Repräsentant von $I\alpha$. Da die Projektion $\text{Ker}(d + \delta)_{\partial M} \rightarrow H^*(\partial M)$ eine Isomorphie ist, ist $I\alpha \neq 0$. Die Einschränkung von I auf H^∞ ist also injektiv.

Außerdem kann mit dem Indexsatz für Mannigfaltigkeiten mit Rand gezeigt werden, daß $\dim H^\infty \geq \frac{1}{2} \dim \text{Ker} B_-$ gilt.

Mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dim \text{Ker} B_- &= \frac{1}{2} \dim \text{Ker}(d + \delta)_{\partial M} \\ &= \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M) \\ &= \dim \text{Im}(i^* : H^*(M) \rightarrow H^*(\partial M)) \end{aligned}$$

folgt, daß $I : H^\infty \rightarrow \text{Im}(i^* : H^*(M) \rightarrow H^*(\partial M))$ auch surjektiv ist. Die letzte Gleichheit wird in 3.3.5, Satz 2 bewiesen werden.

Folgende Gleichung faßt die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

$$\begin{aligned} \text{ind}_7(d + \delta) &= \text{sign}(M) - \dim \text{Im}(i^* : H^*(M) \rightarrow H^*(\partial M)) \\ &= \text{sign}(M) - \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M). \end{aligned}$$

1.2.4 Der Indexsatz

Sei zunächst M eine geschlossene Mannigfaltigkeit.

Aus dem Atiyah-Singer-Indextheorem (s. [2], (2.12)) folgt, daß die Signatur das Integral über eine Form auf M ist, die von der Wahl einer Metrik auf TM abhängt.

Es gilt nämlich:

$$\text{sign}(M) = \int_M L(TM).$$

Das Integral wird dabei mit Null fortgesetzt auf Formen vom Grad $< \dim M$.

Die Form $L(E)$, die für ein beliebiges, mit einem Zusammenhang versehenes Vektorbündel E über M definiert ist, ist das Hirzebruch- L -Polynom in den Einträgen des Krümmungstensors, wobei dieser lokal durch eine Matrix von 2-Formen beschrieben wird.

Sie ist geschlossen, und das durch sie definierte Element der Kohomologie $\mathcal{L}(E) := [L(E)]$ ist unabhängig vom Zusammenhang. Sie definiert damit eine charakteristische Klasse, die als Polynom in den Pontrjaginklassen mit

$$\mathcal{L}(E) = 1 + \frac{1}{3}p_1(E) + \frac{1}{45}(7p_2(E) - p_1^2(E)) \dots$$

beginnt.

In der Kohomologie läßt sich also schreiben:

$$\text{sign}(M) = \mathcal{L}(TM)[M].$$

Da eine Metrik auf dem Tangentialraum einen eindeutigen Zusammenhang, den Levi-Civita-Zusammenhang, liefert, kann die Form $L(TM)$ auch bzgl. einer Metrik definiert werden.

Folgende Eigenschaft der L -Form wird später gebraucht werden:

Seien E_1, E_2 mit Zusammenhängen versehene Vektorbündel über M . Diese induzieren einen Zusammenhang auf $E_1 \oplus E_2$, mit dem gilt:

$$L(E_1 \oplus E_2) = L(E_1) \wedge L(E_2).$$

Der oben erwähnte Indexsatz gilt nicht mehr für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Indexsatz für elliptische Operatoren, die den Atiyah-Patodi-Singer-Randbedingungen genügen, (s. [4], (4.14)) zeigt, daß zu dem Integral der L -Form ein Zusatzterm $\eta_{\partial M}$, der nur von den Eigenwerten von B_+ abhängt, tritt:

$$\text{sign}(M) = \int_M L(TM) - \eta_{\partial M}.$$

Auch hier ist $L(TM) \in C^\infty(\Lambda(T^*M))$ eine geschlossene Form, jedoch hängt das Bild von $L(TM)$ in $H^*(M, \partial M)$ von der Metrik ab.

Daher ist zwar $\text{sign}(M)$ unabhängig von der Metrik, aber die Summanden der rechten Seite sind es nicht.

2 Der Familienindex der Signatur

2.1 Der Begriff des Faserbündels

Sei $P \xrightarrow{G} B$ ein Hauptfaserbündel einer topologischen Gruppe G , und X ein topologischer Raum, auf dem G stetig von links wirkt. Diese Wirkung wird hier i.a. mit ρ bezeichnet.

Der Basisraum B sei stets zusammenhängend.

Das zu P über diese Wirkung assoziierte Faserbündel mit Faser X wird als Quotientenraum von $P \times X$ unter der Äquivalenzrelation $(p, x) \sim (pg, g^{-1}x) \forall g \in G$ definiert und mit $P \times_{\rho} X$ bezeichnet.

Die Gruppe G wird Strukturgruppe des Faserbündels $Z := P \times_{\rho} X$ genannt. Diese ist nicht eindeutig bestimmt: Entscheidend dafür, ob eine Gruppe H , die auf X wirkt, als Strukturgruppe von Z betrachtet werden kann, ist, ob es ein Hauptfaserbündel $P' \xrightarrow{H} B$ mit $Z \cong P' \times_{\rho} X$ in der Kategorie der topologischen Räume gibt. (Wird, wie unten erläutert, mehr Struktur auf den Fasern verlangt, so muß dieser Isomorphismus in der entsprechenden Kategorie sein.)

Dies ist z.B. der Fall, wenn die Abbildung $G \rightarrow \text{Aut}(X)$ über einen stetigen Gruppenmorphismus $G \rightarrow H$ faktorisiert (s. [10], Kap. 6). Wird die Strukturgruppe - falls dies möglich ist - auf eine Untergruppe eingeschränkt, so wird dies „Reduktion der Strukturgruppe“ genannt.

Auf analoge Weise wird ein Faserbündelpaar definiert - die Faser ist ein topologisches Paar, auf dem die Strukturgruppe durch Morphismen von Paaren wirkt.

Wenn der Raum X mit einer zusätzlichen Struktur ausgestattet ist, die von der G -Wirkung erhalten wird, dann überträgt sich diese Struktur auf die Fasern des Faserbündels. Dies führt z.B. zu Mannigfaltigkeitenbündeln, bei denen die Faser eine C^i -Mannigfaltigkeit ist, auf der die Gruppe über C^i -Diffeomorphismen wirkt.

Ein anderes für diese Arbeit wichtiges Beispiel sind Vektorbündel, bei denen die Fasern Vektorräume sind.

Wenn im folgenden von einer Struktur auf einem Faserbündel gesprochen wird, so ist das immer in diesem Sinne gemeint. Eine Struktur auf dem Totalraum des Bündels wird immer explizit als solche eingeführt werden.

2.2 Differentialgeometrie auf Faserbündeln

Eine differenzierbare Struktur auf einem Faserbündel erlaubt, weitere Konzepte aus der Differentialgeometrie auf Faserbündeln von Mannigfaltigkeiten zu übernehmen. Im folgenden werden einige davon vorgestellt - nämlich die, die zur Verallgemeinerung der analytischen Signatur für Bündel von Mannigfaltigkeiten führen.

Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Faserbündel, dessen Faser M eine kompakte C^∞ -Mannigfaltigkeit ist. Die Projektion wird mit $p : Z \rightarrow B$ bezeichnet. Als Strukturgruppe können die C^∞ -Diffeomorphismen $\text{Diff}(M)$ genommen werden, denn es gibt eine Topologie auf $\text{Diff}(M)$, mit der $\text{Diff}(M)$ eine topologische Gruppe ist und die Wirkung von $\text{Diff}(M)$ auf M , sowie alle weiteren im folgenden definierten Wirkungen von $\text{Diff}(M)$ stetig sind [11].

Sei $P \xrightarrow{\text{Diff}(M)} B$ das Hauptfaserbündel, für das gilt:

$$\begin{array}{c} Z = P \times_\rho M \\ \downarrow \text{Diff}(M) \\ B. \end{array}$$

Über $f \mapsto Df$ wirkt die Diffeomorphismengruppe auf dem Tangentialraum von M .

Damit wird das Tangentialbündel entlang der Fasern definiert:

$$\begin{array}{c} T_p Z := P \times_\rho TM \\ \downarrow \text{Diff}(M) \\ B. \end{array}$$

Dies, ein Bündel von Vektorbündeln über B , kann auch als Vektorbündel über Z aufgefaßt werden. Ist der Totalraum von Z mit einer differenzierbaren Struktur versehen, die mit derjenigen entlang der Fasern verträglich ist, dann kann es mit $\text{Ker}(p_* : TZ \rightarrow TB)$ identifiziert werden.

Analog werden die Bündel $\Lambda^i T_p^* Z$ definiert. Das äußere Produkt, daß sich wegen seiner Natürlichkeit auf die Fasern des Bündels $\Lambda T_p^* Z = \oplus_i \Lambda^i T_p^* Z$ übertragen läßt, versieht diese mit einer Ringstruktur.

Desweiteren wird ein Analogon der Schnitte von $\Lambda T^* M$ gebraucht. Da auch auf $C^\infty(\Lambda T^* M)$ eine Wirkung von $\text{Diff}(M)$ durch das Zurückziehen der Formen

gegeben ist, gibt es ein Bündel von Schnitten

$$\begin{array}{c} \tilde{C}^\infty(\Lambda T_p^* Z) := P \times_\rho C^\infty(\Lambda T^* M) \\ \downarrow \text{Diff}(M) \\ B. \end{array}$$

Nun zu der Verallgemeinerung der Operatoren auf $C^\infty(\Lambda T^* M)$:

Die äußere Ableitung $d : C^\infty(\Lambda T^* M) \rightarrow C^\infty(\Lambda T^* M)$ vertauscht mit den Diffeomorphismen von M . Sie liefert daher einen Operator $\tilde{d} \in \text{End } \tilde{C}^\infty(\Lambda T_p^* Z)$.

Außerdem kann auf $T_p^* Z$ – als Vektorbündel über Z – eine Metrik gewählt werden, die eine Metrik auf $\Lambda T_p^* Z$ induziert. Sie zeichnet eine Form $\text{dvol} \in \Lambda^{\dim M} T_p^* Z$ aus. Damit sind der Hodge-*-Operator auf $\Lambda T_p^* Z$ und die Operatoren $\tilde{\delta}$ und $\tilde{\Delta}$ definiert.

Sie lassen sich übrigens i.a. nicht aus den entsprechenden Operatoren auf der Faser konstruieren. Diese sind nämlich, da sie von der Metrik abhängen, nicht $\text{Diff}(M)$ -invariant.

2.3 Die Konstruktion des Familienindexes

Sei nun die Faser M eine geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim M = 2k$.

Alle oben erwähnten Konstruktionen lassen sich eindeutig auf das komplexifizierte Bündel $\Lambda_{\mathbb{C}} T_p^* Z$ fortsetzen.

Die Konstruktion der analytischen Signatur für Faserbündel verläuft mit diesen Hilfsmitteln analog zu ihrem Vorbild (s. 1.2.1). Das Resultat wird jedoch keine Zahl, sondern ein Element in der K -Theorie der Basis $K_0(B)$ sein:

Wie in 1.2.1 wird mit Hilfe des Hodge-*-Operators eine Involution $\tilde{\tau}$ auf $\tilde{C}^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}} T_p^* Z)$ konstruiert, die mit dem formal selbstadjungierten Operator

$$(\tilde{d} + \tilde{\delta}) \in \text{End } (\tilde{C}^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}} T_p^* Z))$$

antikommutiert. Dies definiert die Einschränkungen $(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+$ und $(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-$ von $(\tilde{d} + \tilde{\delta})$ auf die Eigenräume von $\tilde{\tau}$.

Die Dimensionen der beiden Komponenten $\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+$ und $\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-$ sind endlich (s. 1.2.2) und unabhängig vom Basispunkt in B , denn ihre Summe muß die Dimension von $H^*(M)$ ergeben und die Differenz die Signatur von M . Daher bilden beide Komponenten Vektorbündel über B .

Definition. Das analytische Signaturbündel ist für Mannigfaltigkeitenbündel ohne Rand definiert als der Familienindex zu $(\tilde{d} + \tilde{\delta})$ und der von $\tilde{\tau}$ auf $\Lambda_{\mathbb{C}} T_p^* Z$ festgesetzten $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung:

$$\text{Sign}_a(Z) := \text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) := [\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+] - [\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-] \in K_0(B).$$

In 1.2.2 wurde gezeigt, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+|_{\tilde{C}^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^{*\neq k, +} T_p^* Z)} &\rightarrow \text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-|_{\tilde{C}^\infty(\Lambda_{\mathbb{C}}^{*\neq k, -} T_p^* Z)}, \\ \alpha + \tilde{\tau}(\alpha) &\mapsto \alpha - \tilde{\tau}(\alpha) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Daher tragen auch zum Familienindex der Signatur nur die Formen von Grad k bei.

Die Konstruktion und die Eigenschaften des Familienindex eines allgemeinen elliptischen Operators werden in [3] beschrieben.

2.4 Modifikationen bei Faserbündeln mit Rand

Sei Z ein Faserbündel mit einer Mannigfaltigkeit mit Rand $(M, \partial M)$ als Faser.

Auf dem vertikalen Tangentialraum $T_p Z$, der als Bündel über Z aufgefaßt wird, werde eine Metrik gewählt, die in der Nähe des Randes Produktstruktur hat:

Es soll also eine Umgebung $U_{\partial Z}$ von ∂Z geben und für ein $\varepsilon > 0$ einen Diffeomorphismus $\varphi : U_{\partial Z} \rightarrow \partial Z \times [0, \varepsilon[$, über den die Projektion nach B faktorisiert, d.h. folgendes Diagramm kommutiere:

$$\begin{array}{ccc} U_{\partial Z} & \xrightarrow{\varphi} & \partial Z \times [0, \varepsilon[\\ & \searrow p & \swarrow \\ & B. & \end{array}$$

Außerdem wirke φ auf den Fasern als Isometrie. Die Metrik auf dem Raum $\partial Z \times [0, \varepsilon[$, der als Faserbündel über B aufgefaßt wird, sei dabei die Produktmetrik einer beliebigen Metrik auf ∂Z und der euklidischen Metrik auf $[0, \varepsilon[$.

Eine solche Metrik existiert immer; sie läßt sich folgendermaßen definieren: Zunächst wird mit Hilfe eines nach innen zeigenden, in der Nähe von ∂Z definierten Vektorfeldes von $T_p Z$ der Diffeomorphismus φ konstruiert – die Konstruktion entspricht der eines Kragens bei Mannigfaltigkeiten mit Rand (s. [7], (13.6)). Über φ wird dann eine Produktmetrik von $\partial Z \times [0, \varepsilon[$ auf $U_{\partial Z}$ zurückgezogen und mit einer Partition der Eins auf das Innere von Z fortgesetzt. Bzgl. dieser Metrik ist φ eine Isometrie.

Analog zu den Operatoren $B_{\pm}$ in 1.2.3 werden die Operatoren $\tilde{B}_{\pm}$ über die Isometrie φ definiert.

Die Atiyah-Patodi-Singer-Randbedingungen lassen sich auf Faserbündel verallgemeinern, wenn die Dimensionen von $\text{Ker} \tilde{B}_{\pm}$ konstant sind. Dann wechseln nämlich die Eigenwerte von $\tilde{B}_{\pm}$ nicht das Vorzeichen und die Projektoren $\tilde{P}_{\pm}$ und $\tilde{P}_{\pm}^0$ sind stetig. Da $\dim \text{Ker} B_{\pm} = \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M)$ ist, sind die Definitionsbereiche der Operatoren $(\tilde{d} + \tilde{\delta})_{\pm}$ wie in 1.2.3 definiert. Ihre Kerne haben konstante endliche Dimensionen:

Die Summe der Dimensionen muß $\dim \text{Im}(j^* : H^*(M, \partial M) \rightarrow H^*(M)) + \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M)$ und ihre Differenz $\text{sign}(M) - \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M)$ ergeben.

Damit kann der Familienindex definiert werden:

Definition. *Der Familienindex von $(\tilde{d} + \tilde{\delta})$ zu der von $\tilde{\tau}$ auf $\Lambda_{\mathbb{C}} T_p^* Z$ festgesetzten $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung ist definiert als*

$$\text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) := [\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+] - [\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-]$$

mit

$$(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+ : \tilde{C}^{\infty}(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T_p^* Z, \tilde{P}_+ + \tilde{P}_+^0) \rightarrow \tilde{C}^{\infty}(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T_p^* Z)$$

und

$$(\tilde{d} + \tilde{\delta})_- : \tilde{C}^{\infty}(\Lambda_{\mathbb{C}}^- T_p^* Z, \tilde{P}_-) \rightarrow \tilde{C}^{\infty}(\Lambda_{\mathbb{C}}^+ T_p^* Z).$$

Viele der Eigenschaften aus 1.2.3 verallgemeinern sich auf den Familienindex:

Es existieren die Bündel

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &:= \text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_+, \\ \mathcal{H}^- &:= \text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-|_{\tilde{C}^{\infty}(\Lambda^* T_p Z, \tilde{P}_- + \tilde{P}_-^0)} \end{aligned}$$

und ein Bündel $\mathcal{H}^{\infty}$, das als orthogonales Komplement zu $\mathcal{H}^-$ in $\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_-$ bzgl. einer beliebigen Metrik konstruiert wird.

Die in 1.2.3 gefundene Relation zwischen Signatur und Index motiviert folgende Definition eines Signaturbündels, das ein Element der K-Theorie von B ist:

Definition. *Das analytische Signaturbündel des Faserbündels Z mit Rand ist definiert als*

$$\text{Sign}_a(Z) := [\mathcal{H}^+] - [\mathcal{H}^-] = \text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) + [\mathcal{H}^{\infty}] \in K_0(B).$$

In 1.2.3 wurde bewiesen, daß $\dim(\text{Sign}_a(Z)) = \text{sign}(M)$ ist. Das dort angeführte Argument zeigt auch, daß sich die Unterbündel der Formen vom Grad $\neq k$ gegenseitig aufheben und daher

$$\text{Sign}_a(Z) = [\mathcal{H}^{k,+}] - [\mathcal{H}^{k,-}]$$

gilt.

2.5 Die Integration über die Faser

Für die glatten Formen eines Produktes zweier glatter Riemannscher Mannigfaltigkeiten M und N gilt:

$$C^\infty(\Lambda T^*(N \times M)) \cong \overline{C^\infty(\Lambda T^*N) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\Lambda T^*M)}.$$

Die Topologie auf den Funktionenräumen sei die der lokal gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen.

Sei M kompakt.

Da das Integral $\int_M : C^\infty(\Lambda T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$, das auf Formen vom Grad $< \dim M$ mit 0 fortgesetzt wird, $\mathbb{R}$ -linear und stetig ist, existiert die Abbildung

$$id \otimes \int_M : C^\infty(\Lambda T^*(N \times M)) \rightarrow C^\infty(\Lambda T^*N).$$

Eine glatte Abbildung $f : N \rightarrow \text{Diff}(M)$ liefert einen Diffeomorphismus (id, f) von $N \times M$, der die Abbildung $id \otimes \int_M$ invariant läßt. Denn für $n \in N$ und $\alpha \in C^\infty(\Lambda T^*M)$ gilt:

$$\int_M \alpha = \int_M f^*(n)\alpha.$$

Diese Eigenschaft eröffnet die Möglichkeit, die Abbildung auf Faserbündel mit Faser M zu verallgemeinern. Das Resultat wird Integration über die Faser genannt und mit $\int_M$ bezeichnet.

Sei also $Z \xrightarrow{M} B$ ein Mannigfaltigkeitenbündel mit differenzierbarem Totalraum, und sei $U \in B$ eine offene Menge, über der Z lokal trivial ist, d.h. es gibt einen Diffeomorphismus $\phi : U \times M \rightarrow p^{-1}(U)$.

Die Integration über die Faser

$$\int_M : C^\infty(\Lambda T^*Z) \rightarrow C^\infty(\Lambda T^*B)$$

ist zunächst einmal für eine Form $\omega \in C^\infty(\Lambda T^*Z)$ mit Träger in U als

$$\int_M \omega := id \otimes \int_M (\phi^*\omega)$$

definiert. Daß dieses Ergebnis unabhängig von der Wahl der lokalen Trivialisierung ϕ ist, gilt gerade wegen der Invarianz des Integrals unter der Wirkung von glatten Abbildungen $U \rightarrow \text{Diff}(M)$.

Mit Hilfe einer Partition der Eins auf B läßt sich das Integral über die Faser auf alle Schnitte aus $C^\infty(\Lambda T^*Z)$ ausdehnen.

Es kann nachgewiesen werden, daß dieses Integral auch als Abbildung von der Kohomologie von Z in die Kohomologie von B wohldefiniert ist. Als solche wird es mit

$$p_* : H^*(Z) \rightarrow H^{*- \dim M}(B)$$

bezeichnet und stimmt für Faserbündel ohne Rand mit der Verknüpfung

$$H^*(Z) \xrightarrow{\cap[Z]} H_{\dim Z - *}(Z) \xrightarrow{p_*} H_{\dim Z - *}(B) \xrightarrow{(-\cap[B])^{-1}} H^{*- \dim M}(B)$$

überein.

Für Faserbündel mit Rand erhält man eine Abbildung

$$p_* : H^*(Z, \partial Z) \rightarrow H^{*- \dim M}(B).$$

2.6 Der Familienindexsatz

Die Verallgemeinerung des Indexsatzes für Faserbündel, die in [3], §5, eingeführt wird, führt zu einer Gleichung, aus der sich der Cherncharakter des Familienindex berechnen läßt. Ein Teil der Information, die im Familienindex steckt, geht dort also nicht ein.

In der Gleichung des Indexsatzes wird die Integration über die Mannigfaltigkeit durch das Integral über die Fasern ersetzt. Damit erhält man einen Schnitt von ΛT^*B bzw. ein Element in $H^*(B)$, wenn B der Basisraum des Faserbündels ist.

Für Faserbündel ohne Rand lautet der Familienindexsatz, angewendet auf den Familienindex der Signatur, folgendermaßen:

$$\text{ch}(\text{Sign}_a(Z)) = \left[\int_M L(T_p Z) \right] = p_*(\mathcal{L}(T_p Z)) \in H^*(B).$$

Auch für Faserbündel mit Rand existiert ein Indexsatz, der dem gewohnten (s. 1.2.3) ähnelt: Die η -Invariante wird zur η -Form, die nur von der Wahl der Metrik auf $T_p \partial Z$ abhängt. Weder sie noch die Form $\int_M L(T_p Z)$ sind geschlossen. Beide definieren also keine Elemente in der Kohomologie. Dennoch bildet die rechte Seite der folgenden Gleichung eine geschlossene Form. In der Kohomologie besagt der Indexsatz in der von Melrose und Piazza angegebenen Form (s. [12], Theorem 3):

$$\text{ch}(\text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta})) = \left[\int_M L(T_p Z) - \eta_{\partial Z} \right] - \frac{1}{2} \text{ch} \text{Ker } \tilde{B}_+ \in H^*(B).$$

In 3.3.2 wird gezeigt werden, daß $2 \text{ch } \mathcal{H}^\infty = \text{ch} \text{Ker } \tilde{B}_+$ ist. Daraus folgt für das Signaturbündel:

$$\text{ch}(\text{Sign}_a(Z)) = \left[\int_M L(T_p Z) - \eta_{\partial Z} \right].$$

Diese Gleichung wurde von Bismut und Cheeger in [6], §1, Theorem 1.5, ohne Beweis aufgeführt.

3 Das Signaturbündel

Wie für die Signatur von Mannigfaltigkeiten gibt es auch für den Familienindex der Signatur eine alternative Beschreibung, die auf der Definition der Signatur in der Algebraischen Topologie beruht.

Damit können Eigenschaften der Signatur, die mit Methoden der Algebraischen Topologie bewiesen werden, auf den Familienindex übertragen werden.

Ein Beispiel dazu ist das Ziel dieser Arbeit.

Die Idee ist, als Signaturbündel in der K-Theorie die Differenz der Klassen zweier Unterbündel eines noch zu definierenden Kohomologiebündels zu nehmen, auf denen die Schnittform positiv bzw. negativ definit ist.

Bevor näher darauf eingegangen wird, soll erläutert werden, wann und auf welche Weise einer Form auf einem Vektorbündel solche Unterbündel zugeordnet werden können.

3.1 Das Signaturbündel einer Form

3.1.1 Die Konstruktion

Sei E ein komplexes Vektorbündel über einem zusammenhängenden topologischen Raum B und s eine hermitesche oder symplektische Form auf E , d.h. s ist ein Schnitt in $\overline{E}^* \otimes E^*$ mit $s_x(a, b) = \overline{s_x(b, a)}$ bzw. $s_x(a, b) = -\overline{s_x(b, a)}$ für $x \in B$ und $a, b \in E_x$.

Im hermiteschen Fall kann jede Faser E_x aufgespalten werden in das Radikal und zwei nicht eindeutig bestimmte Untervektorräume E_x^+ und E_x^- , auf denen die Form positiv bzw. negativ definit ist. Im folgenden wird beschrieben, wie sich diese Aufspaltung auf Vektorbündel einerseits und auf symplektische Formen andererseits verallgemeinern läßt.

Dabei gibt der erste Abschnitt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Bündeln E^+ und E^- an, der zweite erläutert ihre Konstruktion und der dritte gibt Eigenschaften an, die diese Bündel bis auf Isomorphie charakterisieren.

a) Das Radikalbündel:

In jeder Faser ist das Radikal von s definiert. Ist die Dimension der Radikale der Fasern unabhängig vom Basispunkt, bilden sie ein Vektorbündel $\text{Rad}(s)$.

Dann sind auch die Signatur und die Dimensionen der Vektorräume E_x^+ und E_x^- unabhängig vom Punkt $x \in B$. Das Problem ist nun, diese auf den Fasern so festzulegen, daß sie Vektorbündel bilden. Dies geschieht über die Wahl einer Metrik:

b) *Die Konstruktion der Bündel E^+ und E^- :*

Sei s zunächst hermitisch. Auf E werde eine hermitische Metrik g gewählt. Sie liefert einen Isomorphismus $\overline{E}^* \otimes E^* \rightarrow E \otimes E^* = \text{End}(E)$. Sei S das Bild von s unter diesem Isomorphismus.

Da $\text{Ker} S = \text{Rad}(s)$ gilt, ist die Dimension des Kerns unabhängig vom Basispunkt. Daraus folgt, daß die Eigenwerte von S nicht das Vorzeichen wechseln. Die Dimension des Raums E^+ , der von Eigenvektoren zu positiven Eigenwerten aufgespannt wird, ist also konstant und der orthogonale Projektor auf ihn hängt stetig vom Basispunkt ab. Das gleiche gilt für den entsprechenden Raum der negativen Eigenwerte E^- . Daher bilden E^+ und E^- Vektorbündel über B . Sie stehen bzgl. der Metrik senkrecht aufeinander.

Ist s eine symplektische Form auf E , so ist die Form $(a, b) \mapsto s(a, ib)$ hermitisch. Wenn ihr Radikalbündel existiert, dann können auch ihr zwei Vektorbündel E^+ und E^- zugeordnet werden. Die Signatur dieser Form verschwindet, d.h. beide Bündel haben dieselbe Dimension.

Mit diesem „Trick“ lassen sich die folgenden Ergebnisse, die nur für hermitische Formen bewiesen werden, auf symplektische übertragen.

Außerdem erhält der Begriff „orthogonal“ damit für symplektische Formen eine Bedeutung.

c) *Eindeutigkeit in $K_0(B)$:*

Die Vektorbündel E^+ und E^- haben die Eigenschaft, daß die Einschränkungen der Form s auf sie positiv oder negativ definit sind und $E^+ \oplus E^- \oplus \text{Rad}(s) = E$ gilt. Hier soll gezeigt werden, daß sie damit bis auf Isomorphie bestimmt sind. Daher liefert eine andere Wahl der Metrik dieselben Elemente in $K_0(B)$.

Seien $\tilde{E}^+$ und $\tilde{E}^-$ Unterbündel von E mit dieser Eigenschaft. Auf E werde eine Metrik so gewählt, daß die Bündel $\tilde{E}^+$, $\tilde{E}^-$ und $\text{Rad}(s)$ senkrecht aufeinander stehen.

Die Projektion von E^+ auf $\tilde{E}^+$ (E^- auf $\tilde{E}^-$) bzgl. dieser Metrik ist dann ein Isomorphismus von Vektorbündeln:

Der Kern ist gerade $E^+ \cap \tilde{E}^{+\perp} = E^+ \cap (\tilde{E}^- \cup \text{Rad}(s)) = E^+ \cap \tilde{E}^-$. Für $0 \neq x \in E^+ \cap \tilde{E}^-$ müßte allerdings einerseits $s(x, x) > 0$ andererseits $s(x, x) \leq 0$ gelten. Solch ein x existiert also nicht. Damit ist der Kern der Abbildung trivial.

Außerdem sind die Dimensionen von E^+ und $\tilde{E}^+$ gleich. Deshalb ist die Abbildung ein Isomorphismus. Das Analogon dazu gilt natürlich für E^- und $\tilde{E}^-$. Als Element in $K_0(B)$ ist $[E^+] - [E^-]$ daher unabhängig von der Wahl der Metrik.

Definition. *Sei s eine symplektische oder hermitische Form auf einem komplexen Vektorbündel E über B . Das Bündel $\text{Rad}(s)$ existiere. Dann ist das oben konstruierte Element*

$$\text{Sign}(s) := [E^+] - [E^-] \in K_0(B)$$

definiert. Es wird das Signaturbündel von s genannt.

Die Dimension von $\text{Sign}(s)$ verschwindet im symplektischen Fall. Sie ist gleich der Signatur von s , wenn s hermitisch ist.

3.1.2 Eigenschaften

Die folgenden Sätze werden teilweise nur für nicht entartete Formen formuliert. Die Einschränkung einer entarteten Form, deren Radikalbündel existiert, auf das bzgl. einer Metrik orthogonale Komplement des Radikalbündels ist nicht entartet. Deswegen lassen sich die Ergebnisse leicht für entartete Formen verallgemeinern.

Satz 1. (i) Sei E ein komplexes Vektorbündel mit einer nicht entarteten hermitischen oder symplektischen Form s . Seien E_1, E_2 Unterbündel von E mit $E = E_1 \oplus E_2$ und $E_1^\perp = E_2$. Dann gilt:

$$\text{Sign}(s) = \text{Sign}(s|_{E_1}) + \text{Sign}(s|_{E_2}).$$

(ii) Seien E_1, E_2 komplexe Vektorbündel, die mit hermitischen oder symplektischen Formen s_1, s_2 versehen seien. Diese induzieren eine Form $s_1 \otimes s_2$ auf dem Tensorprodukt $E_1 \otimes E_2$. Die Signaturbündel von s_1 und s_2 seien definiert. Dann existiert das Signaturbündel von $s_1 \otimes s_2$ und es gilt:

$$\text{Sign}(s_1 \otimes s_2) = \text{Sign}(s_1) \cdot \text{Sign}(s_2).$$

Beweis. Sei s o.B.d.A. eine hermitische Form.

Zu (i): Über die Wahl einer Metrik auf E sind die Bündel $E_1^\pm$ und $E_2^\pm$ definiert. Die Bedingung $E_1^\perp = E_2$ impliziert, daß $s|_{E_1}$ und $s|_{E_2}$ nicht entartet sind, d.h. es gilt $E_i^+ \oplus E_i^- = E_i$, $i = 1, 2$.

Die Form s ist auf $E^+ := E_1^+ \oplus E_2^+$ positiv und auf $E^- := E_1^- \oplus E_2^-$ negativ definit, und es gilt $E^+ \oplus E^- = E$.

Nach 3.1.1 c) ist daher $\text{Sign}(s) = [E^+] - [E^-]$.

Zu (ii): Aufgrund der Eigenschaften des Tensorproduktes existiert das Radikalbündel von $s_1 \otimes s_2$, es gilt nämlich:

$$\text{Rad}(s_1 \otimes s_2) = \text{Rad}(s_1) \otimes E_2 \oplus E_1 \otimes \text{Rad}(s_2).$$

Seien E_i^+ und E_i^- die Unterbündel von E_i , $i = 1, 2$, die die Signaturbündel von s_i definieren. Dann ist $s_1 \otimes s_2$ auf

$$E^+ := E_1^+ \otimes E_2^+ \oplus E_1^- \otimes E_2^-$$

positiv und auf

$$E^- := E_1^+ \otimes E_2^- \oplus E_1^- \otimes E_2^+$$

negativ definit. Außerdem gilt $\text{Rad}(s_1 \otimes s_2) \oplus E^+ \oplus E^- = E$. Daraus folgt – wieder mit 3.1.1 c) –, daß $[E^+] - [E^-]$ das Signaturbündel von s ist.

□

Satz 2. *Sei E ein mit einer nicht entarteten hermitischen oder symplektischen Form s ausgestattetes komplexes Vektorbündel über B ; $C \subset E$ sei ein isotropes Untervektorbündel mit $\dim C = \frac{1}{2} \dim E$, d.h. es gelte $C^\perp = C$.*

Dann verschwindet das Signaturbündel $[E^+] - [E^-]$ dieser Form.

Beweis. Da s nicht entartet ist, existiert das Signaturbündel von s .

Man wähle eine Metrik auf E . Die orthogonalen Komplemente bezüglich dieser werden mit c bezeichnet, um sie von den Komplementen bezüglich s zu unterscheiden.

Die Metrik definiert die Bündel E^+ und E^- , deren Differenz in der K-Theorie das Signaturbündel der Form ergibt.

Da

$$v \in C \Rightarrow s(v, v) = 0$$

und

$$0 \neq v \in E^+ \Rightarrow s(v, v) > 0$$

gilt, ist $C \cap E^\pm = \{0\}$.

Mit $(E^+)^c = E^-$ ergibt sich

$$E^+ \oplus C^c = (E^- \cap C)^c = \{0\}^c = E.$$

Daher sind die orthogonalen Projektionen

$$pr_\pm : E^\pm \rightarrow C, v \mapsto (v + C^c) \cap C$$

surjektiv. Daraus folgt $\dim E^\pm \geq \dim C$. Da C ein maximales isotropes Unterbündel ist, gilt aber

$$2 \dim C = \dim E$$

und deshalb

$$\dim E^+ + \dim E^- = 2 \dim C.$$

Also müssen die Dimensionen von E^+ und E^- gleich sein. Die Projektionen $pr_\pm$ sind dann Isomorphismen von Vektorbündeln, und $(pr_+)^{-1} \circ pr_-$ ist ein Isomorphismus von E^- nach E^+ .

In $K_0(B)$ gilt daher $[E^+] = [E^-]$ und damit $\text{Sign}(s) = 0$.

□

3.2 Das Kohomologiebündel

3.2.1 Die Definition

Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Faserbündel mit einer glatten Mannigfaltigkeit M ohne Rand als Faser.

Um den Familienindex der Signatur als Signaturbündel der Schnittform zu realisieren, muß zunächst die Kohomologie der Faser als Bündel verallgemeinert werden.

Sei P das Hauptfaserbündel der Strukturgruppe $\text{Diff}(M)$ von Z , für das gilt:

$$\begin{array}{c} Z = P \times_{\rho} M \\ \downarrow \text{Diff}(M) \\ B. \end{array}$$

Die Wirkung von $\text{Diff}(M)$ auf M induziert eine Wirkung ρ' von $\text{Diff}(M)$ auf der Kohomologie $H^i(M)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \rho' : \text{Diff}(M) &\rightarrow \text{Aut}(H^i(M)), \\ \rho'(f) &= f^* : H^i(M) \rightarrow H^i(M). \end{aligned}$$

Damit wird $H^i(M)$ zu einer $\text{Diff}(M)$ -Darstellung. Die Wirkung ρ' wird in der de Rham-Kohomologie induziert von der Wirkung auf $C^\infty(\Lambda^i T^*M)$ und ist daher stetig (s. 2.2).

Definition. Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Faserbündel mit Strukturgruppe G und P das zugehörige Hauptfaserbündel. Dann wirkt G auch auf der Kohomologie von M . Darüber wird das i -te Kohomologiebündel

$$\begin{array}{c} \mathcal{H}^i(M) := P \times_{\rho'} H^i(M) \\ \downarrow \text{Diff}(M) \\ B \end{array}$$

definiert.

Diese Definition ist nicht auf Mannigfaltigkeitenbündel beschränkt, auch wenn hier nur solche betrachtet werden.

Analog lassen sich relative Kohomologiebündel definieren.

Die Projektion $C^\infty(\Lambda T^*M) \rightarrow H^*(M)$ ist $\text{Diff}(M)$ -äquivariant und ist daher auch zwischen den entsprechenden Bündel $\tilde{C}^\infty(\Lambda T_p^*Z)$ und $\mathcal{H}^*(M)$ definiert. Die Hodgetheorie sagt aus, daß die Einschränkung dieser Abbildung auf das Bündel $\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})$ ein Isomorphismus ist.

3.2.2 Die Strukturgruppe

Da die Wirkung von $\text{Diff}(M)$ auf $H^i(M) = H^i(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ mit $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ durch die Wirkung auf $H^i(M, \mathbb{Z})$ induziert ist, liegt das Bild von ρ' in den invertierbaren Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten $\text{Gl}(H^i(M), \mathbb{Z})$. Daher kann $\text{Gl}(H^i(M), \mathbb{Z})$ als Strukturgruppe von $\mathcal{H}^i(M)$ genommen werden. Das bedeutet, daß es ein $\text{Gl}(H^i(M), \mathbb{Z})$ -Hauptfaserbündel P' über B gibt, für das gilt:

$$\begin{array}{c} \mathcal{H}^i(M) \cong P' \times_{\rho'} H^i(M) \\ \downarrow \text{Gl}(H^i(M), \mathbb{Z}) \\ B. \end{array}$$

Die Gruppe $\text{Gl}(H^i(M), \mathbb{Z})$ ist diskret, d.h. P' ist eine Überlagerung von B . Es existiert deshalb eine surjektive Bündelabbildung von der universellen Überlagerung $\tilde{B}$ in eine Zusammenhangskomponente P'_0 von P' ; mittels dieser kann $\mathcal{H}^i(M, K)$ als zu $\tilde{B}$ assoziiert aufgefaßt werden:

$$\begin{array}{c} \mathcal{H}^i(M, K) \cong \tilde{B} \times_{\rho''} H^i(M) \\ \downarrow \pi_1(B) \\ B. \end{array}$$

Dies zeigt, daß die Kohomologiebündel flache Vektorbündel sind.

Daher sind alle von den Chernklassen abgeleiteten charakteristischen Klassen Elemente von $H^0(B)$; z.B. gilt

$$\text{ch}(\mathcal{H}^i(M)) = \dim H^i(M).$$

3.2.3 Rechnen mit Kohomologiebündeln

Natürliche Konstruktionen lassen sich auf Kohomologiebündel übertragen.

Die Kerne und Bilder von Vektorbündelmorphismen bilden i.a. keine Vektorbündel, da ihre Dimension abhängig vom Basispunkt ist. Bei Morphismen, die von äquivarianten Abbildungen auf der Faser herrühren, ist die Dimension jedoch konstant. Daher sind in diesem Fall Kern- und Bildbündel definiert, und es kann von Exaktheit von Sequenzen gesprochen werden.

a) Lange exakte Sequenz von Kohomologiebündeln:

Sei $(\tilde{X}, \tilde{Z})$ ein Faserbündelpaar mit dem topologischen Paar (X, Z) als Faser. Der Randoperator $\delta : H^k(Z) \rightarrow H^{k+1}(X, Z)$ vertauscht mit der Wirkung der Diffeomorphismen von (X, Z) auf der Kohomologie. Er induziert daher einen Randoperator $\delta : \mathcal{H}^k(Z) \rightarrow \mathcal{H}^{k+1}(X, Z)$.

Außerdem liefern die Inklusionen auf den Fasern $i : Z \rightarrow X$ und $j : X \rightarrow (X, Z)$, die mit den Diffeomorphismen von (X, Z) vertauschen, Bündelmorphismen $i^* : \mathcal{H}^k(Z) \rightarrow \mathcal{H}^k(X)$, $j^* : \mathcal{H}^k(X, Z) \rightarrow \mathcal{H}^k(X)$. Es gibt also für Faserbündelpaare eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \longrightarrow \mathcal{H}^{k-1}(Z) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^k(X, Z) \xrightarrow{j^*} \mathcal{H}^k(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}^k(Z) \longrightarrow \dots$$

Genauso existiert natürlich eine lange exakte Sequenz von Faserbündeltripeln.

b) Ausschneidung:

Sei $(\tilde{X}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ ein Faserbündeltripel mit Faser (X, Z, U) wobei $Z \subset X$ abgeschlossen sei und $U \subset Z^\circ$ offen. Die Abbildung $i : (X - U, Z - U) \rightarrow (X, Z)$ induziert nach a) einen Bündelmorphismus $i^* : \mathcal{H}^k(X, Z) \rightarrow \mathcal{H}^k(X - U, Z - U)$. Auf den Fasern ist dieser nach dem Ausschneidungsaxiom bijektiv, also ist er ein Bündelisomorphismus.

c) Orientierung:

Auf die gleiche Weise wie Kohomologiebündel lassen sich Homologiebündel definieren. Dies wird zur Definition der Orientierung eines Faserbündels gebraucht: Ein Mannigfaltigkeitenbündel $\tilde{X} \xrightarrow{X} B$ mit oder ohne Rand wird orientierbar genannt, wenn X orientierbar ist und das höchste Homologiebündel $\mathcal{H}_n(X, \partial X)$ mit $n := \dim X$ trivial ist, d.h. $\mathcal{H}_n(X, \partial X) = B \times H_n(X, \partial X)$. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Strukturgruppe des Faserbündels auf orientierungserhaltenden Diffeomorphismen reduziert werden kann.

Die Wahl einer Orientierung auf X definiert ein Element $[X, \partial X] \in H_n(X, \partial X)$, das dann einen nichtverschwindenden Schnitt $B \rightarrow H_n(X, \partial X)$, $x \mapsto [X, \partial X]$ von $\mathcal{H}_n(X)$ liefert, der auch mit $[X, \partial X]$ bezeichnet wird.

3.3 Das Signaturbündel eines Mannigfaltigkeitenbündels

3.3.1 Die Definition

Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Faserbündel mit oder ohne Rand. Die Faser M sei eine Mannigfaltigkeit von gerader Dimension $n = 2k$. Die Schnittform (s. 1.1) auf $H^{n/2}(M, \partial M; \mathbb{R})$ ist symmetrisch im Fall $n = 0 \bmod 4$ und schiefsymmetrisch im Fall $n = 2 \bmod 4$. Da die Form invariant unter der Wirkung von $\text{Diff}(M)$ auf $H^k(M, \partial M; \mathbb{R})$ ist, wird durch sie eine symmetrische oder schiefsymmetrische Form s auf $\mathcal{H}^k(M, \partial M; \mathbb{R})$ definiert.

Zur Definition des Signaturbündels wird das Bündel $\mathcal{H}^k(M, \partial M; \mathbb{R})$ komplexifiziert und die symmetrische bzw. schiefsymmetrische Form zu einer hermiteschen bzw. symplektischen Form fortgesetzt. Diese stimmt übrigens nicht mit

der Schnittform auf $\mathcal{H}^k(M, \partial M; \mathbb{C})$ überein, die nämlich nicht hermitisch oder symplektisch, sondern symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist.

Da die Fortsetzung eindeutig ist, sind die Eigenschaften der Form durch die Schnittform auf $\mathcal{H}^k(M, \partial M; \mathbb{R})$ bestimmt. Meist wird daher nur diese betrachtet.

Die Koeffizienten der Kohomologie seien im folgenden, wenn sie nicht explizit angegeben werden, reell.

Nach dem Satz in 1.1 ist $\text{Ker}(j^* : \mathcal{H}^k(M, \partial M; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}^k(M; \mathbb{C}))$ das Radikalbündel der Form. Daher existiert ein Signaturbündel.

Definition. Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Mannigfaltigkeitenbündel.

Das durch die Schnittform definierte Signaturbündel

$$\text{Sign}(Z) := [\mathcal{H}^k(M, \partial M)^+] - [\mathcal{H}^k(M, \partial M)^-] \in K_0(B)$$

wird Signaturbündel von Z genannt.

3.3.2 Vergleich mit dem Familienindex

Wie in 3.2.1 erläutert wurde, kann das Bündel $\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})$ über die Projektion mit $\mathcal{H}^*(M)$ identifiziert werden. Da der Hodge-*-Operator mit $(\tilde{d} + \tilde{\delta})$ bis auf Vorfaktoren kommutiert, ist er auf $\mathcal{H}^*(M)$ definiert.

Die Wahl einer Metrik auf $T_p Z$ induziert eine Metrik $<, >$ auf $\tilde{C}^\infty(\Lambda^* T_p Z)$ und daher auf $\mathcal{H}^*(M)$.

Diese ordnet der Schnittform einen Endomorphismus auf $\mathcal{H}^k(M)$ zu. Mit dem von der Metrik induzierten Isomorphismus $I : \mathcal{H}_k(M) \rightarrow \mathcal{H}^k(M)$ schreibt er sich

$$\mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{\cap [M]} \mathcal{H}_k(M) \xrightarrow{I} \mathcal{H}^k(M).$$

Die Gleichung $\langle \alpha, I(\beta \cap [M]) \rangle = (\alpha \cup \beta)[M]$ für α, β aus der Faser $\mathcal{H}^k(M)_x$ zeigt, daß dieser Endomorphismus gerade der Hodge-*-Operator auf $\mathcal{H}^k(M)$ ist.

Im symmetrischen Fall stimmen die analytische und die topologische Definition wegen $* = \tilde{\tau}$ überein, denn der Familienindex ist gerade die Differenz der Eigenräume zu ± 1 von $\tilde{\tau}|_{\text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})}$. Ist die Schnittform schiefsymmetrisch, so ist der Endomorphismus der zugeordneten hermiteschen Form gerade $i* = \tilde{\tau}$. Deshalb gilt auch hier die Gleichheit.

Die Argumentation überträgt sich auf Mannigfaltigkeitenbündel mit Rand, wenn die Bündel $\mathcal{H}^{k,+} \oplus \mathcal{H}^{k,-}$ mit $\text{Im}(\mathcal{H}^k(M, \partial M) \rightarrow \mathcal{H}^k(M))$ identifiziert werden.

Aus den Ausführungen in 1.2.3 folgt auch, daß das Bündel $\mathcal{H}^\infty$ isomorph zu $\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^*(M) \rightarrow \mathcal{H}^*(\partial M))$ ist.

In 3.3.5, Satz 3 wird gezeigt werden, daß in $K_0(B)$ gilt:

$$2 [\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^*(M) \rightarrow \mathcal{H}^*(\partial M))] = [\mathcal{H}^*(\partial M)].$$

Mit $\text{ch } \mathcal{H}^\infty = \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M)$ ergibt sich daher

$$\text{ch}(\text{Sign}(Z)) = \text{ch } \text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) + \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M).$$

Andererseits kann nun der Term $\frac{1}{2} \text{ch } \text{Ker } \tilde{B}_+$ aus dem Familienindexsatz (s. 2.4) näher bestimmt werden. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\infty \oplus \mathcal{H}^\infty &\cong \mathcal{H}^*(\partial M) \\ &\cong \text{Ker}(\tilde{d} + \tilde{\delta})_{\partial M} \\ &\cong \text{Ker } \tilde{B}_+. \end{aligned}$$

Dies wird in den Familienindexsatz eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\text{Sign}(Z)) &= \text{ch } \text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) + \text{ch } \mathcal{H}^\infty \\ &= \left[\int_M L(T_p Z) - \eta_{\partial Z} \right] - \frac{1}{2} \text{ch } \text{Ker } \tilde{B}_+ + \text{ch } \mathcal{H}^\infty \\ &= \left[\int_M L(T_p Z) - \eta_{\partial Z} \right]. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind im folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz. Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Mannigfaltigkeitenbündel mit gerader Faserdimension. Dann gilt:

$$\text{Sign}(Z) = \text{Sign}_a(Z).$$

Für ein Mannigfaltigkeitenbündel mit Rand folgt daraus

$$\text{Sign}(Z) = \text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) + [\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^*(M) \rightarrow \mathcal{H}^*(\partial M))].$$

Der Familienindexsatz liefert dann

$$\begin{aligned} \text{ch}(\text{Sign}(Z)) &= \text{ch } \text{Ind}_{\tilde{\tau}}(\tilde{d} + \tilde{\delta}) + \frac{1}{2} \dim H^*(\partial M) \\ &= \left[\int_M L(T_p Z) - \eta_{\partial Z} \right]. \end{aligned}$$

3.3.3 Die Strukturgruppe

In der Sprache der Hauptfaserbündel läßt sich das Signaturbündel folgendermaßen beschreiben:

Die Schnittform s ist invariant unter der Wirkung von $\text{Diff}(M)$ auf $H^k(M, \mathbb{R})$. Das Bild G von $\text{Diff}(M) \rightarrow \text{Aut}(H^k(M, \partial M))$ ist eine Untergruppe von

$$O(s, \mathbb{Z}) := \{A \in \text{Gl}(H^k(M, \partial M; \mathbb{Z})) : s(Ax, Ay) = s(x, y) \forall x, y \in H^k(M, \partial M)\}.$$

Wenn s indefinit ist, ist die Gruppe $O(s, \mathbb{Z})$ nicht kompakt. Ist auch G nicht kompakt, so gibt es keine invariante Metrik auf ihrer Darstellung $H^k(M, \partial M)$. Dann ist die Aufspaltung in Unterräume, auf denen die Form positiv bzw. negativ definit ist, nicht invariant unter der Wirkung von G .

Ein einfaches Beispiel, bei dem G nicht kompakt ist, ist der Torus T^2 : Die Schnittform auf $H^1(T^2) \cong \mathbb{R}^2$ ist schiefsymmetrisch, und die Abbildung

$$\text{Diff}(T^2) \rightarrow O(s, \mathbb{Z})$$

ist surjektiv.

In einem solchen Fall kann G also nicht Strukturgruppe der Bündel $\mathcal{H}^k(M, \partial M)^+$ und $\mathcal{H}^k(M, \partial M)^-$ sein. Das ist der Grund dafür, daß diese Bündel im Gegensatz zu den Kohomologiebündeln i.a. keine diskrete Strukturgruppe haben. Ihre Strukturgruppen sind im symmetrischen Fall z.B. $O(p)$ und $O(q)$, wobei p und q die Dimensionen der Bündel sind, oder $U(p)$ im symplektischen Fall, in dem beide Bündel die gleiche Dimension haben.

Daher sind diese Bündel nicht notwendig flach. Ihre charakteristischen Klassen können Anteile in den höheren Kohomologiegruppen des Basisraums haben. Dies macht die Signaturbündel für den Familienindexsatz interessant.

Daß es Signaturbündel mit nichttrivialem Cherncharakter gibt, zeigt ein Beispiel von Atiyah, das im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

3.3.4 Der Cherncharakter und die Signatur des Totalraums

Für ein Produkt zweier Mannigfaltigkeiten M und N gilt:

$$\text{sign}(M \times N) = \text{sign}(M) \cdot \text{sign}(N).$$

Dies läßt sich nicht auf Faserbündel verallgemeinern: Die Signatur des Totalraums ist i.a. nicht das Produkt der Signaturen von Basis und Faser. Der Zusammenhang läßt sich folgendermaßen beschreiben:

Sei $Z \xrightarrow{M} B$ ein Mannigfaltigkeitenbündel ohne Rand, und $p : Z \rightarrow B$ die Projektion. Der Totalraum Z sei mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen, die die Struktur auf Basis und Faser induziert. Dann gilt

für das Tangentialbündel an Z :

$$TZ = T_p Z \oplus p^*TB.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{sign}(Z) &= \mathcal{L}(TZ)[Z] \\ &= (\mathcal{L}(T_p Z) \cup p^* \mathcal{L}(TB))[Z] \\ &= (p_* \mathcal{L}(T_p Z) \cup \mathcal{L}(TB))[B] \\ &= (\text{ch}(\text{Sign}(Z)) \cup \mathcal{L}(TB))[B] \quad (\text{Familienindexsatz}). \end{aligned}$$

Ist

$$\text{ch}(\text{Sign}(Z)) = \dim(\text{Sign}(Z)) = \text{sign}(M)$$

unter der Identifikation $H^0(B) \cong \mathbb{C}$, dann folgt:

$$\text{sign}(Z) = \text{sign}(M) \cdot \text{sign}(B).$$

Die Umkehrung ist ein Kriterium für ein Signaturbündel mit nichttrivialem Cherncharakter:

$$\text{sign}(Z) \neq \text{sign}(M)\text{sign}(B) \Rightarrow \text{ch}(\text{Sign}(Z)) \notin H^0(B).$$

Ein **Beispiel** $Z_A \xrightarrow{M_A} B_A$ mit $\text{sign}(Z_A) \neq \text{sign}(M_A)\text{sign}(B_A)$ konstruierte Atiyah [1]:

Die Faser M_A und der Basisraum B_A sind zweidimensional, d.h. es gilt

$$\text{sign}(M_A) = \text{sign}(B_A) = 0.$$

Die entscheidende Eigenschaft seines Beispiel ist, daß $p_1(TZ_A) \in H^4(Z_A)$ nicht verschwindet. Für den vierdimensionalen Raum Z_A gilt nämlich nach dem Indexsatz:

$$\text{sign}(Z_A) = \mathcal{L}(TZ_A)[Z_A] = \frac{1}{3}p_1(TZ_A)[Z_A].$$

Da die Auswertung auf $[Z_A]$ einen Isomorphismus $H^4(Z_A) \rightarrow \mathbb{R}$ darstellt, folgt daraus, daß $\text{sign}(Z_A) \neq 0$ ist.

3.3.5 Eigenschaften

Satz 1. (i) Für ein Mannigfaltigkeitenbündel $Z \xrightarrow{M} B$ gilt:

$$\dim \text{Sign}(Z) = p - q = \text{sign}(M).$$

(ii) Für das Faserprodukt $(Z_1 \times_B Z_2, \partial Z_1 \times_B Z_2 \cup Z_1 \times_B \partial Z_2)$ zweier Mannigfaltigkeitenbündel $Z_i \xrightarrow{M_i} B$, $i = 1, 2$ gilt:

$$\text{Sign}(Z_1 \otimes Z_2) = \text{Sign}(Z_1) \otimes \text{Sign}(Z_2).$$

Beweis. Zu (i):

Dies ist gerade die Definition der Signatur von M .

Zu (ii):

Sei $\dim M_1 = n$, $\dim M_2 = m$. Die Orientierung von $Z_1 \times_B Z_2$ sei so gewählt, daß

$$[M_1 \times M_2, \partial(M_1 \times M_2)] = [M_1, \partial M_1] \times [M_2, \partial M_2]$$

ist.

Der Isomorphismus

$$\begin{aligned} & \bigoplus_i \mathcal{H}^i(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_2, \partial M_2) \\ & \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{(n+m)/2}(M_1 \times M_2, \partial M_1 \times M_2 \cup M_1 \times \partial M_2) \end{aligned}$$

vertauscht bis auf Vorzeichen mit dem Cupprodukt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \times \beta_1) \cup (\alpha_2 \times \beta_2) [M_1 \times M_2, \partial(M_1 \cup M_2)] \\ & = (-1)^{\deg(\alpha_1) \deg(\beta_1)} (\alpha_1 \cup \alpha_2) \times (\beta_1 \cup \beta_2) [M_1 \times M_2, \partial(M_1 \cup M_2)]. \end{aligned}$$

Wegen $\deg(\alpha_1) + \deg(\alpha_2) \leq n$ und $\deg(\beta_1) + \deg(\beta_2) \leq m$ verschwindet die rechte Seite nur dann nicht, wenn $\deg(\alpha_1) + \deg(\alpha_2) = n$ und $\deg(\beta_1) + \deg(\beta_2) = m$ sind.

Das bedeutet, daß die Summanden

$$\mathcal{H}^i(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_2, \partial M_2) \oplus \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^i(M_2, \partial M_2)$$

mit $i \neq n/2$

und – falls $n/2 \in \mathbb{N}$ ist –

$$\mathcal{H}^{n/2}(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{m/2}(M_2, \partial M_2)$$

senkrecht aufeinander stehen. Das Signaturbündel von $Z_1 \times_B Z_2$ ist daher die direkte Summe der Signaturbündel der auf diese Summanden eingeschränkten Formen (s. 3.1.2, Satz 1).

Für $i \neq n/2$ sind die Unterbündel

$$\mathcal{H}^i(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_2, \partial M_2)$$

von

$$\mathcal{H}^i(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_2, \partial M_2) \oplus \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^i(M_2, \partial M_2)$$

isotrop – dies folgt aus den vorigen Gradbetrachtungen.

Da die Bündel

$$\mathcal{H}^i(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_2, \partial M_2)$$

und

$$\mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^i(M_2, \partial M_2)$$

isomorph zueinander sind, also insbesondere die gleiche Dimension haben, verschwindet nach 3.1.2, Satz 2, das Signaturbündel von

$$\mathcal{H}^i(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_2, \partial M_2) \oplus \mathcal{H}^{(n+m)/2-i}(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^i(M_2, \partial M_2).$$

Einen Beitrag zum Signaturbündel von $Z_1 \times_B Z_2$ leistet also nur der Summand

$$\mathcal{H}^{n/2}(M_1, \partial M_1) \otimes \mathcal{H}^{m/2}(M_2, \partial M_2).$$

Die Schnittform darauf ist aber gerade das Tensorprodukt der Schnittformen von Z_1 und Z_2 . Mit 3.1.2, Satz 1, folgt die Behauptung. $\square$

Eine Folgerung daraus ist, daß das Signaturbündel verschwindet, wenn die Faserdimension eines der Bündel ungerade ist.

Satz 2. *Sei F eine orientierte, kompakte Mannigfaltigkeit mit zusammenhängendem Rand ∂F .*

Die Orientierung des Randes sei so gewählt, daß $\delta[F, \partial F] = [\partial F]$ ist. Die Dimension von F sei $n = 2k + 1$.

Dann gilt bzgl. der Schnittform mit $i : \partial F \hookrightarrow F$:

$$\text{Im}(i^* : H^k(F) \rightarrow H^k(\partial F)) \subset \text{Im}(i^* : H^k(F) \rightarrow H^k(\partial F))^\perp.$$

Beweis. Für $\alpha, \beta \in H^k(F)$ gilt:

$$\delta(i^*\alpha \cup i^*\beta) = \delta i^*(\alpha \cup \beta) = 0 \in H^n(F, \partial F).$$

Unter der Poincarédualität entspricht $\delta : H^{n-1}(\partial F) \rightarrow H^n(F, \partial F)$ der injektiven Abbildung $i_* : H_0(\partial F) \rightarrow H_0(F)$. Also ist auch δ injektiv.

Aufgrund der Exaktheit von

$$H^{n-1}(F) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(\partial F) \xrightarrow{\delta} H^n(F, \partial F)$$

muß dann $i^*\alpha \cup i^*\beta = i^*(\alpha \cup \beta) = 0$ sein. Daher gilt $i^*H^k(F) \subset i^*H^k(F)^\perp$. □

Satz 3. Sei $\tilde{F}$ ein orientiertes, kompaktes Mannigfaltigkeitenbündel mit zusammenhängendem Rand $\partial\tilde{F}$ und Faserdimension $\dim F = n$.

Die Orientierung des Randes sei so gewählt, daß $\delta[F, \partial F] = [\partial F]$ ist.

Mit $i : \partial F \rightarrow F$ gilt dann

$$\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^j(F) \rightarrow \mathcal{H}^j(\partial F)) \oplus \text{Im}(i^* : \mathcal{H}^{n-1-j}(F) \rightarrow \mathcal{H}^{n-1-j}(\partial F)) \cong \mathcal{H}^j(\partial F)$$

und daher in $K_0(B)$:

$$2 [\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^*(F) \rightarrow \mathcal{H}^*(\partial F))] = [\mathcal{H}^*(\partial F)].$$

Beweis. Der Beweis stützt sich auf das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{n-1-j}(F) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{H}^{n-1-j}(\partial F) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^{n-j}(F, \partial F) \\ & & \downarrow \cap [\partial F] & & \downarrow \cap [F, \partial F] \\ & & \mathcal{H}_j(\partial F) & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{H}_j(F) \end{array}$$

bei dem die senkrechten Abbildungen Isomorphismen sind.

Da außerdem die obere Zeile ein Ausschnitt der exakten Sequenz von $(\tilde{F}, \partial\tilde{F})$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker}(i_* : \mathcal{H}_j(\partial F) \rightarrow \mathcal{H}_j(F)) &\cong \text{Ker}(\delta : \mathcal{H}^{n-1-j}(\partial F) \rightarrow \mathcal{H}^{n-j}(F)) \\ &= \text{Im}(i^* : \mathcal{H}^{n-1-j}(F) \rightarrow \mathcal{H}^{n-1-j}(\partial F)). \end{aligned}$$

Die Abbildungen $i^* : \mathcal{H}^j(F) \rightarrow \mathcal{H}^j(\partial F)$ und $i_* : \mathcal{H}_j(\partial F) \rightarrow \mathcal{H}_j(F)$ sind zueinander dual; das impliziert

$$\text{Im}(i_* : \mathcal{H}_j(\partial F) \rightarrow \mathcal{H}_j(F)) \cong \text{Im}(i^* : \mathcal{H}^j(F) \rightarrow \mathcal{H}^j(\partial F)).$$

Durch Einsetzen folgt aus

$$\text{Im}(i_* : \mathcal{H}_j(\partial F) \rightarrow \mathcal{H}_j(F)) \oplus \text{Ker}(i_* : \mathcal{H}_j(\partial F) \rightarrow \mathcal{H}_j(F)) \cong \mathcal{H}_j(\partial F) \cong \mathcal{H}^j(\partial F)$$

die Isomorphie

$$\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^j(F) \rightarrow \mathcal{H}^j(\partial F)) \oplus \text{Im}(i^* : \mathcal{H}^{n-1-j}(F) \rightarrow \mathcal{H}^{n-1-j}(\partial F)) \cong \mathcal{H}^j(\partial F).$$

□

Korollar. Sei $\tilde{F}$ ein orientiertes, kompaktes Mannigfaltigkeitenbündel mit zusammenhängendem Rand $\partial\tilde{F}$ und Faserdimension $\dim F = 2k + 1$.

Die Orientierung des Randes sei so gewählt, daß $\delta[F, \partial F] = [\partial F]$ ist.

Dann ist das Bündel $\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^k(F) \rightarrow \mathcal{H}^k(\partial F))$ mit $i : \partial F \hookrightarrow F$ ein isotropes Unterbündel von $\mathcal{H}^k(\partial F)$ der Dimension $\frac{1}{2} \dim H^k(\partial F)$.

Daher gilt:

$$\text{Im}(i^* : \mathcal{H}^k(F) \rightarrow \mathcal{H}^k(\partial F)) = \text{Im}(i^* : \mathcal{H}^k(F) \rightarrow \mathcal{H}^k(\partial F))^\perp.$$

□

Mit 3.1.2, Satz 2, folgt, daß das Signaturbündel eines nullbordanten Mannigfaltigkeitenbündels verschwindet.

4 Der Signaturdefekt

4.1 Die Situation

Wird eine Mannigfaltigkeit ohne Rand durch eine Hyperfläche in zwei topologische Mannigfaltigkeiten geteilt, so ist ihre Signatur die Summe der Signaturen der beiden Teile, denn sie läßt sich als Integral einer Form über die Mannigfaltigkeit darstellen (s. 1.2.4).

Für die Signatur einer Mannigfaltigkeit mit Rand gilt dies nicht mehr. Zusätzlich zu den Signaturen der beiden Untermannigfaltigkeiten tritt deswegen ein Term auf, der von den Rändern der Untermannigfaltigkeiten abhängt. Er wurde von Wall bestimmt, an dessen Artikel [13] sich der folgende Abschnitt orientiert.

Genauer betrachtete er folgende Situation:

Sei Y eine kompakte, orientierte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $2k$ mit Rand und $X_0 \subset Y$ eine Hyperfläche mit Rand $Z := \partial X_0 \subset \partial Y$, die Y in zwei Hälften Y_+ und Y_- teilt und ∂Y in X_+ und X_- . Die Teile seien auch topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Es gelte also

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial Y_+ \cap \partial Y_- \\ Y &= Y_+ \cup_{X_0} Y_- \\ \partial Y_+ &= X_+ \cup_Z X_0 \\ \partial Y_- &= X_- \cup_Z X_0. \end{aligned}$$

Auf Y_+ und Y_- werden Orientierungen durch die Orientierung von Y induziert. Damit sind die Signaturen der Mannigfaltigkeiten bestimmt.

Wall führte folgendes Beispiel an, bei dem ein Korrekturterm auftaucht:

4.2 Ein Beispiel für $\text{sign}(Y) \neq \text{sign}(Y_+) + \text{sign}(Y_-)$

Sei Y das Hopfscheibenbündel über S^2 :

$$\begin{array}{c} Y = S^3 \times_{\rho} D^2 \\ \downarrow S^1 \\ S^2. \end{array}$$

Dabei wirke S^1 auf D^2 durch die Multiplikation, wenn S^1 und D^2 als Teilmen-gen von $\mathbb{C}$ aufgefaßt werden.

Über die Inklusionen $i_+ : S_+^2 \rightarrow S^2$, $i_- : S_-^2 \rightarrow S^2$ der oberen und unteren Hemisphäre werde das Hopfscheibenbündel auf S_+^2 und S_-^2 zurückgezogen. Dies definiere die Räume Y_+ und Y_- . Das auf den Schnitt S^1 anhand von $i_0 : S^1 \rightarrow S^2$ zurückgezogene Bündel sei X_0 . Durch Verkleben an X_0 erhält man das Hopfscheibenbündel zurück:

$$Y = i_+^* Y \cup_{i_0^* Y} i_-^* Y = Y_+ \cup_{X_0} Y_-.$$

Die Räume Y_+ und Y_- sind zusammenziehbar, ihre Signatur verschwindet also. Gezeigt werden soll nun, daß $\text{sign}(Y) = \pm 1$ ist je nach Wahl der Orientierung.

Dazu wird die Kohomologie von Y berechnet:

Da die Faser D^2 von Y zusammenziehbar ist, ist die Projektion $\pi : Y \rightarrow S^2$ eine Homotopieäquivalenz und liefert einen Isomorphismus in der Kohomologie.

Nach dem Satz von Thom gibt es ein Element $\tau \in H^2(Y, \partial Y) \cong \mathbb{R}$, so daß

$$H^i(Y) \cong H^i(S^2) \xrightarrow{-\cup \tau} H^{i+2}(Y, \partial Y)$$

ein Isomorphismus ist.

Außerdem ist $\partial Y = S^3$, also $H^1(\partial Y) = 0$. Aus der langen exakten Sequenz des Paares $(Y, \partial Y)$ folgt dann, daß auch $j^* : H^2(Y, \partial Y) \rightarrow H^2(Y)$ ein Isomorphismus ist.

Daher ist $j^* \tau \neq 0$, und auch das Bild von $j^* \tau$ unter dem Thomisomorphismus verschwindet nicht. Dies ist aber gerade $j^* \tau \cup \tau$, also ist $(j^* \tau \cup \tau)[Y, \partial Y] \neq 0$. Da $H^2(Y, \partial Y)$ eindimensional ist, ist die Signaturform damit schon vollständig bestimmt und insbesondere nicht Null, d.h. die Signatur ist ± 1 .

4.3 Der Signaturdefekt für Mannigfaltigkeiten

Wall bewies, daß die Differenz $\text{sign}(Y) - \text{sign}(Y_+) - \text{sign}(Y_-)$ mit der Signatur einer Form auf einem Unterraum von $H^{k-1}(Z)$ übereinstimmt, die durch die Inklusionen $i_{Z, X_j} : Z \rightarrow X_j$, $j = +, 0, -$, festgelegt ist. Diese Form soll nun definiert werden.

Dazu werden die Orientierungen von X_j so gewählt, daß $[Y_-, \partial Y_-]$ unter

$$\begin{aligned} H_{2k}(Y_-, \partial Y_-) &\xrightarrow{\delta} H_{2k-1}(\partial Y_-) \\ &\rightarrow H_{2k-1}(\partial Y_-, X_-) \oplus H_{2k-1}(\partial Y_-, X_0) \\ &\cong H_{2k-1}(X_0, Z) \oplus H_{2k-1}(X_+, Z) \quad (\text{Ausschneidung}). \end{aligned}$$

auf $[X_0, Z] - [X_-, Z]$ abgebildet wird und $[Y_+, \partial Y_+]$ unter der entsprechenden Abbildung auf $[X_+, Z] - [X_0, Z]$.

Für die Orientierung von Z soll gelten:

$$\delta[X_-, Z] = \delta[X_0, Z] = \delta[X_+, Z] = [Z].$$

Die Untermannigfaltigkeiten X_j , $j = -, 0, +$, haben Z als gemeinsamen Rand. Nach dem Korollar in 3.3.5 sind die Vektorräume $A_j := i_{Z, X_j}^* H^{k-1}(X_j)$ daher Unterräume von $H^{k-1}(Z)$ der Dimension $\frac{1}{2} \dim H^{k-1}(Z)$, und es gilt bzgl. der Schnittform auf $H^{k-1}(Z)$:

$$A_j = A_j^\perp, \quad j = +, 0, -.$$

Auf $A_0 \cap (A_+ + A_-)$ wird folgendermaßen eine Form konstruiert:

Zwei Vektoren $a, a' \in (A_0 \cap (A_+ + A_-))$ werden zerlegt in $a = a_+ + a_-$ bzw. $a' = a'_+ + a'_-$ mit $a_+, a'_+ \in A_+$ und $a_-, a'_- \in A_-$. Die Summanden sind dabei nicht eindeutig bestimmt, falls der Schnitt $A_+ \cap A_-$ nicht leer ist.

Da die Räume A_j isotrop sind, ist

$$t : (a, a') \mapsto (a_+ \cup a'_-)[Z]$$

unabhängig von der Wahl der Summanden und definiert daher eine Form auf $A_0 \cap (A_+ + A_-)$.

Diese ist symmetrisch, wenn die Schnittform auf $H^{k-1}(Z)$ schiefssymmetrisch ist, also für $k = 0 \bmod 2$, und im anderen Fall schiefssymmetrisch:

$$\begin{aligned} t(a, a') &= (a_+ \cup a'_-)[Z] \\ &= ((a_+ + a_-) \cup (a'_+ + a'_-))[Z] - (a_- \cup a'_+)[Z] \quad (\text{Isotropie von } A_+ \text{ und } A_-) \\ &= -(a_- \cup a'_+)[Z] \quad (\text{Isotropie von } A_0) \\ &= (-1)^{(k-1)^2+1} (a'_+ \cup a_-)[Z] \\ &= (-1)^k t(a, a'). \end{aligned}$$

Die Form t kann entartet sein:

Ein Element a' aus dem Radikal von t muß der Gleichung

$$(a_+ \cup a'_-)[Z] = 0 \quad \forall a \in A_0 \cap (A_+ + A_-)$$

genügen. Da A_- bzgl. der Schnittform isotrop ist, ist dies gleichbedeutend mit

$$(a \cup a'_-)[Z] = 0 \quad \forall a \in A_0 \cap (A_+ + A_-).$$

Diese Bedingung erfüllt a' genau dann, wenn $a'_- \in A_0^\perp = A_0$ ist. Damit ist auch $a'_+ = a' - a'_- \in A_0$ und folglich $a' \in A_+ \cap A_0 + A_- \cap A_0$.

Das Radikal der Form ist also

$$\text{Rad}(t) = A_+ \cap A_0 + A_- \cap A_0.$$

Die Form t induziert daher eine nicht entartete Form auf $A_0 \cap (A_+ + A_-) / (A_+ \cap A_0 + A_- \cap A_0)$.

Satz (Wall). *Sei τ die Signatur der eben definierten Form t . Dann gilt für die Ausgangssituation:*

$$\text{sign}(Y) = \text{sign}(Y_+) + \text{sign}(Y_-) + \tau$$

Der Korrekturterm τ hängt nur von der Einbettung von Z in die Räume X_j , $j = +, 0, -$, ab.

Die von Wall in [13] definierte Form stimmt übrigens mit t nur bis auf Vorzeichen überein.

4.4 Die Verallgemeinerung für Faserbündel

Die gleiche Situation soll nun für Faserbündel untersucht werden: Sei also $\tilde{Y}$ ein orientiertes Faserbündel über B , dessen Faser Y eine kompakte, orientierte, topologische Mannigfaltigkeit sei. Seien $\tilde{Y}_\pm, \tilde{Z}$ und $\tilde{X}_j$, $j = +, 0, -$, Unterfaserbündel von $\tilde{Y}$, für deren Fasern $Y_\pm, Z$ und X_j die unter 4.1 aufgeführten Bedingungen gelten.

Anders gesagt: Die Wirkung der Strukturgruppe $G \subset \text{Diff}(Y)$ von $\tilde{Y}$ auf Y erhält $Y_\pm, Z$ und X_j und induziert damit Wirkungen von G auf ihnen. Die Unterfaserbündel $\tilde{Y}_\pm, \tilde{Z}$ und $\tilde{X}_j$, $j = +, 0, -$, sind dann die entsprechenden zum Strukturbündel von $\tilde{Y}$ assoziierten Bündel.

Die Orientierungen seien wie unter 4.3 gewählt.

Nach 3.3.1 sind auf $\mathcal{H}^k(Y)$, $\mathcal{H}^k(Y_\pm)$ und $\mathcal{H}^{k-1}(Z)$ Schnittformen definiert und die entsprechenden Signaturbündel existieren.

Die in 4.3 auf $A_0 \cap (A_+ + A_-)/(A_+ \cap A_0 + A_- \cap A_0)$ konstruierte Form t ist invariant unter der Wirkung der Gruppe G und definiert daher eine nicht entartete Form auf $\mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)/(\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_- \cap \mathcal{A}_0)$ mit $\mathcal{A}_i := i_{Z, X_i}^* \mathcal{H}^{k-1}(X_i) \subset \mathcal{H}^{k-1}(Z)$ ist.

Das Signaturbündel zu dieser Form wird mit T bezeichnet und Korrekturterm genannt.

Da Z nullbordant ist, hat $\tilde{Z}$ ein triviales Signaturbündel, das Bündel T ist jedoch i.a. nicht trivial. Ein Beispiel dazu wird später geliefert werden.

Die Dimension von T ist τ . Der zitierte Satz von Wall zeigt, daß für $\dim Y = 0 \bmod 4$ dann

$$\dim(\text{Sign}(Y)) = \dim(\text{Sign}(Y_+)) + \dim(\text{Sign}(Y_-)) + \dim(T)$$

gilt.

In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, daß dieser Zusammenhang nicht nur für die Dimensionen, sondern für die Bündel selbst gilt:

Satz. In der eben beschriebenen Situation gilt mit $\dim Y = 2k$:

$$\text{Sign}(Y) = \text{Sign}(Y_+) + \text{Sign}(Y_-) + (-1)^k T \in K_0(B)$$

Der Korrekturterm T hängt nur von der Einbettung von $\tilde{Z}$ in die Räume $\tilde{X}_j$, $j = +, 0, -$, ab.

Beweis.

Vorweg: Durchschnitte und Summen von Vektorbündeln und Kerne und Bilder von Vektorbündelmorphismen bilden genau dann wieder Vektorbündel, wenn die Dimension ihrer Fasern konstant ist. In den hier auftretenden Fällen trifft dies immer zu, wie im einzelnen leicht nachgeprüft werden kann.

Noch etwas zur Notation: Ein orthogonales Komplement eines Unterbündels V bzgl. einer Metrik wird mit V^c bezeichnet, um es von einem orthogonalen Komplement $V^\perp$ bzgl. einer Schnittform auf einem Kohomologiebündel zu unterscheiden. Begriffe wie „isometrisch, senkrecht ...“ beziehen sich, falls es nicht explizit anders erwähnt wird, immer auf die Schnittform.

Auf den Bündeln $\mathcal{H}^k(Y_\pm, \partial Y_\pm)$ werden Metriken gewählt, um die Unterbündel $\mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm) := \text{Rad}(s_\pm)^c$ zu definieren, auf denen die Schnittformen $s_\pm$ nicht entartet sind.

Hilfssatz 1. Für die durch die Inklusionen $j_\pm : (Y, \partial Y) \rightarrow (Y, Y_\mp \cup \partial Y)$ induzierten Abbildungen $j_\pm^* : \mathcal{H}^k(Y_\pm, \partial Y_\pm) \cong \mathcal{H}^k(Y, Y_\mp \cup \partial Y) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y, \partial Y)$ gilt:

- (i) Sie sind Isometrien bzgl. der entsprechenden Schnittformen.
- (ii) Die Bilder stehen senkrecht aufeinander.
- (iii) Eingeschränkt auf $\mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm)$ sind sie injektiv.

Beweis. (i) folgt aus der Natürlichkeit des Cupprodukts.

- (ii) Entlang eines Kragens ihres Randes können $(Y_+, \partial Y_+)$ und $(Y_-, \partial Y_-)$ in Y homotop so verformt werden, daß ihr Schnitt leer ist. Das Cupprodukt zwischen Elementen aus $H^*(Y_+, \partial Y_+)$ und $H^*(Y_-)$ verschwindet daher. Deshalb stehen die entsprechenden Bündel als Unterbündel von $\mathcal{H}^k(Y, \partial Y)$ senkrecht aufeinander.

- (iii) Aufgrund der Isometrie der Abbildungen gilt

$$\text{Ker } j_\pm^* \cap \mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm) \subset \text{Rad}(s_\pm) \cap \mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm).$$

Aber nach der Definition von $\mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm)$ enthält dies nur den Nullschnitt.

Daher sind die Einschränkungen auf $\mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm)$ injektiv.

□

Punkt (iii) des Hilfssatzes rechtfertigt, daß die Bündel $\mathcal{G}(Y_{\pm}, \partial Y_{\pm})$ im folgenden als Unterbündel von $\mathcal{H}^k(Y, \partial Y)$ aufgefaßt werden.

(i) und (ii) zeigen, daß die Schnittform s von $\mathcal{H}^k(Y, \partial Y)$ auf $\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-)$ nicht entartet ist. Daher kann eine Metrik auf $\mathcal{H}^k(Y, \partial Y)$ so gewählt werden, daß $\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-)$ in $\mathcal{G}(Y, \partial Y) := \text{Rad}(s)^c$ enthalten ist und außerdem $(\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-))^\perp = (\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-))^c$ gilt.

Da das Signaturbündel einer direkten Summe die Summe der einzelnen Bündel ist (s. 3.1.2, Satz 1 (i)), entspricht das gesuchte Bündel $\text{Sign}(Y) - \text{Sign}(Y_+) - \text{Sign}(Y_-)$ dem Signaturbündel der auf

$$R := (\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-))^\perp \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y)$$

eingeschränkten Form.

Deswegen reicht es, diese weiter zu untersuchen.

Die orthogonalen Komplemente bzgl. der Einschränkung der Schnittform auf R werden mit $^\circ$ gekennzeichnet.

Hilfssatz 2. *Das zu $j_+^* \mathcal{H}^k(Y_+, \partial Y_+) \oplus j_-^* \mathcal{H}^k(Y_-, \partial Y_-)$ orthogonale Bündel ist $(j^*)^{-1} \delta \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$, wobei $\delta : \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y)$ der verbindende Homomorphismus in der Mayer-Vietoris-Sequenz von Y_+ und Y_- sei:*

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\mathcal{H}^{k-1}(Y_+ \cap Y_-)}_{=X_0} \xrightarrow{\delta} \underbrace{\mathcal{H}^k(Y_+ \cup Y_-)}_{=Y} \xrightarrow{i_{Y_+,Y}^* \oplus i_{Y_-,Y}^*} \mathcal{H}^k(Y_+) \oplus \mathcal{H}^k(Y_-) \longrightarrow \dots$$

Diese Sequenz existiert, da Y_+ und Y_- in einer Tubenumgebung von X_0 homotop so verformt werden können, daß Y die Vereinigung des Inneren von Y_+ und Y_- ist.

Beweis. Es reicht, den Beweis auf der Faser zu führen.

Wegen der Natürlichkeit des Cupprodukts kommutiert folgendes Diagramm für $i_+ : (Y_+, \partial Y_+) \rightarrow (Y, Y_- \cup \partial Y)$:

$$\begin{array}{ccccc} H^k(Y, \partial Y) \times H^k(Y) & \xleftarrow{j_+^*} & H^k(Y, Y_- \cup \partial Y) \times H^k(Y) & \xrightarrow{i_+^*} & H^k(Y_+, \partial Y_+) \times H^k(Y_+) \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\ H^{2k}(Y, \partial Y) & \xleftarrow{j_+^*} & H^{2k}(Y, Y \cup \partial Y_-) & \xrightarrow{\cong} & H^{2k}(Y_+, \partial Y_+) \\ \downarrow [Y, \partial Y] & & & & \downarrow [Y_+, \partial Y_+] \\ \mathbb{R} & & = & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Für $a \in H^k(Y)$ und $b \in H^k(Y_+, \partial Y_+)$ gilt daher:

$$(b \cup i_{Y_+,Y}^* a)[Y_+, \partial Y_+] = (j_+^* b \cup a)[Y, \partial Y].$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (j_+^* H^k(Y_+, \partial Y_+))^\perp &= \{a \in H^k(Y, \partial Y) \mid (j_+^* b \cup j^* a)[Y, \partial Y] = 0 \ \forall b \in H^k(Y_+, Y_+)\} \\ &= \{a \in H^k(Y, \partial Y) \mid (b \cup i_{Y_+, Y}^* j^* a)[Y_+, \partial Y_+] = 0 \ \forall b \in H^k(Y_+, \partial Y_+)\}. \end{aligned}$$

Die Paarung durch das Cupprodukt $H^k(Y_+) \times H^k(Y_+, \partial Y_+) \rightarrow H^{2k}(Y_+, \partial Y_+) \cong \mathbb{R}$ ist nicht entartet, da sie der kanonischen Paarung zweier zueinander dualer Bündel entspricht. Deshalb folgt weiter:

$$(j_+^* H^k(Y_+, \partial Y_+))^\perp = \text{Ker} i_{Y_+, Y}^* j^* = (j^*)^{-1} \text{Ker} i_{Y_+, Y}^*.$$

Insgesamt gilt dann also:

$$\begin{aligned} (j_+^* H^k(Y_+, \partial Y_+) \oplus j_-^* H^k(Y_-, \partial Y_-))^\perp &= (j^*)^{-1} (\text{Ker} i_{Y_+, Y}^* \cap \text{Ker} i_{Y_-, Y}^*) \\ &= (j^*)^{-1} \text{Ker} (i_{Y_+, Y}^* \oplus i_{Y_-, Y}^*). \end{aligned}$$

Die lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(X_0) \xrightarrow{\delta} H^k(Y) \xrightarrow{i_{Y_+, Y}^* \oplus i_{Y_-, Y}^*} H^k(Y_+) \oplus H^k(Y_-) \longrightarrow \dots$$

liefert die Behauptung. □

Sei

$$S := \left(j_+^* \text{Rad}(s_+) + j_-^* \text{Rad}(s_-) \right) \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y).$$

Dies liegt in R .

Mit

$$j_\pm^* \mathcal{H}^k(Y_\pm, \partial Y_\pm) = \mathcal{G}(Y_\pm, \partial Y_\pm) \oplus j_\pm^* \text{Rad}(s_\pm)$$

ergibt sich nach dem ersten Hilfssatz:

$$\begin{aligned} S^\circ &= (\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-))^\perp \cap S^\perp \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y) \\ &= \left(\mathcal{G}(Y_+, \partial Y_+) \oplus \mathcal{G}(Y_-, \partial Y_-) \oplus S \right)^\perp \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y) \\ &= (j_+^* \mathcal{H}^k(Y_+, \partial Y_+) + j_-^* \mathcal{H}^k(Y_-, \partial Y_-))^\perp \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y). \end{aligned}$$

Nach dem letzten Hilfssatz ist der erste Term gerade $(j^*)^{-1} \delta \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$.

Also gilt:

$$S^\circ = j^{*-1} \text{Im}(\delta : \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y)) \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y).$$

Andererseits läßt sich S nach 3.3.1 mit

$$\text{Rad}(s_\pm) = \text{Im} \left(\mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_\pm) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y_\pm, \partial Y_\pm) \right)$$

ausdrücken als

$$S = \bigoplus_{i=\pm} \text{Im} \left(\mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_i) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y_i, \partial Y_i) \xrightarrow{j_i^*} \mathcal{H}^k(Y, \partial Y) \right) \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y).$$

Hilfssatz 3. Für das orthogonale Komplement S° zu S in R gilt:

$$S \subset S^\circ.$$

Beweis. Folgendes Diagramm kommutiert – die nicht beschrifteten Abbildungen sind entweder die verbindenden Homomorphismen der exakten Sequenzen der Paare $(Y_\pm, \partial Y_\pm)$ bzw. $(Y_\pm, X_0)$ oder von Inklusionen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_\pm) & \longrightarrow & \mathcal{H}^k(Y_\pm, \partial Y_\pm) & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{H}^k(Y, Y_\mp \cup \partial Y) & \xrightarrow{j_\pm^*} & \mathcal{H}^k(Y, \partial Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j^* \\ \mathcal{H}^{k-1}(X_0) & \longrightarrow & \mathcal{H}^k(Y_\pm, X_0) & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{H}^k(Y, Y_\mp) & \longrightarrow & \mathcal{H}^k(Y). \end{array}$$

Die Verknüpfung der Abbildungen der unteren Zeile ergibt gerade den Homomorphismus $\delta : \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y)$.

Da die Einschränkung von j^* auf $\mathcal{G}(Y, \partial Y)$ injektiv ist, liefert das Diagramm

$$S = j^{*-1} \bigoplus_{i=\pm} \text{Im}(\mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_i) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^k(Y)) \cap \mathcal{G}(Y, \partial Y).$$

Dies zeigt $S \subset S^\circ$. □

Sei L das bzgl. der Metrik auf $\mathcal{H}^k(Y, \partial Y)$ orthogonale Komplement von S in S° . Darauf eingeschränkt ist die Schnittform nicht entartet; daher gilt für das bzgl. der Schnittform orthogonale Komplement L° von L in R :

$$L \cap L^\circ = \emptyset \text{ und } L \oplus L^\circ = R$$

Die Schnittform ist also auch eingeschränkt auf L° nicht entartet. Aus $S \subset L^\circ$ folgt außerdem $S = S^\circ \cap L^\circ$, d.h. S stimmt mit seinem orthogonalen Komplement in L° überein und ist daher ein isotropes Untervektorbündel von L° der Dimension $\frac{1}{2} \dim L^\circ$.

Nach 3.3.5, Satz 2, verschwindet das Signaturbündel der Einschränkung der Form auf L° , und eine erneute Anwendung von 3.3.5, Satz 1 (i), zeigt, daß das Signaturbündel der auf L eingeschränkten Form der gesuchte Korrekturterm ist.

Behauptung. A) Es gibt einen Bündelmorphismus $f : S^\circ \rightarrow \mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)/(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_-)$, dessen Einschränkung auf L ein Isomorphismus ist.

B) Der Bündelmorphismus f ist eine Isometrie bzgl. der Schnittform auf S^o und der Form $(-1)^k t$ auf $\mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)/(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_-)$.

Zu A):

Die Einschränkung von $j^* : \mathcal{H}^k(Y, \partial Y) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y)$ auf $\mathcal{G}(Y, \partial Y)$ ist ein Isomorphismus auf das Bild. Daher können S, S^o und L auch als Unterbündel von $\mathcal{H}^k(Y)$ aufgefaßt werden. In dieser Weise gilt:

$$\begin{aligned} S &= \bigoplus_{i=\pm} \text{Im} \left(\mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_i) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y_i, \partial Y_i) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y, \partial Y) \rightarrow \mathcal{H}^k(Y) \right) \\ S^o &= \text{Im}(\mathcal{H}^k(Y, \partial Y) \xrightarrow{j^*} \mathcal{H}^k(Y)) \cap \text{Im}(\mathcal{H}^{k-1}(X_0) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^k(Y)). \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathcal{H}^{k-1}(X_0) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^k(Y)$ der verbindende Homomorphismus der Mayer-Vietoris-Sequenz von Y_+ und Y_- .

Eine Abbildung

$$f : S^o \rightarrow \mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)/(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_-),$$

deren Einschränkung auf L ein Isomorphismus sein soll, wird folgendermaßen konstruiert:

Sei $x \in S^o \subset \mathcal{H}^k(Y)$.

Dann kann x geliftet werden auf ein Element $x' \in \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$.

Weiter werde x' mit $i_{Z, X_0}^* : \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(Z)$ auf x'' abgebildet und dann auf $\overline{x''} \in \mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)/(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_-)$ projiziert.

Insgesamt sei $f(x) := \overline{x''}$.

Zunächst einmal ist nachzuweisen, daß f wohldefiniert ist. Dies ist an mehreren Stellen fragwürdig:

(i) Der Lift x' von x ist nicht eindeutig: Die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(Y_+) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(Y_-) \xrightarrow{i_{X_0, Y_+}^* - i_{X_0, Y_-}^*} \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^k(Y) \rightarrow \dots$$

besagt, daß x' bis auf einen Summanden aus dem Bild von $i_{X_0, Y_+}^* - i_{X_0, Y_-}^*$ bestimmt ist.

Zu zeigen ist also, daß $\text{Im}(i_{X_0, Y_+}^* - i_{X_0, Y_-}^*)$ unter i_{Z, X_0}^* nach $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_-$ abgebildet wird. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{k-1}(Y_+) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(Y_-) & \xrightarrow{i_{X_0, Y_+}^* + i_{X_0, Y_-}^*} & \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \\ \downarrow i_{X_+, Y_+}^* \oplus i_{X_-, Y_-}^* & & \downarrow i_{Z, X_0}^* \\ \mathcal{H}^{k-1}(X_+) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(X_-) & \xrightarrow{i_{Z, X_+}^* + i_{Z, X_-}^*} & \mathcal{H}^{k-1}(Z). \end{array}$$

- (ii) Zu zeigen ist, daß das oben konstruierte Element $x'' \in \mathcal{H}^{k-1}(Z)$ in $\mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)$ liegt.

Aufgrund der Definition von x'' ist $x'' \in \mathcal{A}_0$. Wegen der Natürlichkeit des verbindenden Homomorphismus δ kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathcal{H}^k(Y, \partial Y) \\
 & & & & \downarrow j^* \\
 & & \mathcal{H}^{k-1}(X_0) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^k(Y) \\
 & & \downarrow i_{Z, X_0}^* & & \downarrow i_{\partial Y, Y}^* \\
 \mathcal{H}^{k-1}(X_+) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(X_-) & \xrightarrow{i_{Z, X_+}^* - i_{Z, X_-}^*} & \mathcal{H}^{k-1}(Z) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}^k(\partial Y),
 \end{array}$$

und die letzte Zeile und Spalte sind exakt.

Nach Definition ist $S^o = \text{Ker } i_{\partial Y, Y}^* \cap \text{Im } \delta \subset \mathcal{H}^k(Y)$. Daher gilt für das oben definierte Element $x' \in \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$:

$$\delta x' \in S^o \Leftrightarrow i_{\partial Y, Y}^* \delta x' = 0.$$

Daraus folgt für $x'' = i_{Z, X_0}^* x'$:

$$\delta x' \in S^o \Leftrightarrow \delta x'' = \delta i_{Z, X_0}^* x' = i_{Z, X_0}^* \delta x' = 0.$$

Da die untere Zeile exakt ist, gilt also:

$$\delta x' \in S^o \Leftrightarrow i_{Z, X_0}^* x' = x'' \in \text{Im}(i_{Z, X_+}^* - i_{Z, X_-}^*) = \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-.$$

Die Richtung „ $\Rightarrow$ “ zeigt die Wohldefiniertheit der Abbildung und die Gegenrichtung die Surjektivität: Sei $x'' \in \mathcal{A}_0 \cap (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)$; dann gibt es $x' \in \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$ mit $i_{Z, X_0}^* x' = x''$. Aus der letzten Äquivalenz folgt, daß $x := \delta x'$ in S^o liegt, und nach Definition ist $f(x) = \overline{x''}$.

Die Surjektivität von f wurde soeben mitbewiesen.

Als nächstes wird gezeigt, daß $\text{Ker } f = S$ ist. Daraus folgt dann, daß die Einschränkung von f auf L ein Isomorphismus ist.

Sei $x \in S^o$ und $x' \in \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$ mit $\delta x' = x$. Nach der Definition von S ist $x \in S$ genau dann, wenn für ein $x' \in \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$ mit $\delta x' = x$ eine Zerlegung $x' = x_+ + x_-$ mit $x_\pm \in \text{Im}(i_{X_0, \partial Y_\pm}^* \mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_\pm) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(X_0))$ existiert.

Zu $S \subset \text{Ker} f$:

Sei also $x \in S$ und $\delta x' = x_+ + x_-$ wie eben beschrieben.

Die Mayer-Vietoris-Sequenz von X_+ und X_0

$$\mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_+) \xrightarrow{i_{X_+, \partial Y_+}^* \oplus i_{X_0, \partial Y_+}^*} \mathcal{H}^{k-1}(X_+) \oplus \mathcal{H}^{k-1}(X_0) \xrightarrow{i_{Z, X_+}^* - i_{Z, X_0}^*} \mathcal{H}^{k-1}(Z)$$

zeigt, daß für x_+ gilt:

$$i_{Z, X_0}^* x_+ \in \text{Im}(i_{Z, X_+}^* : \mathcal{H}^{k-1}(X_+) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(Z)).$$

Daher liegt $i_{Z, X_0}^* x_+$ also in $\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_0$.

Genauso ist $i_{Z, X_0}^* x_- \in \mathcal{A}_- \cap \mathcal{A}_0$, also insgesamt

$$i_{Z, X_0}^* x' \in (\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_0) + (\mathcal{A}_- \cap \mathcal{A}_0).$$

Daher ist $f(x) = 0$ für $x \in S$.

Zu $\text{Ker} f \subset S$:

Wird umgekehrt davon ausgegangen, daß $f(x)$ verschwindet, dann ist

$$i_{Z, X_0}^* x' \in (\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_0) + (\mathcal{A}_- \cap \mathcal{A}_0),$$

d.h. $i_{Z, X_0}^* x'$ läßt sich ausdrücken als

$$i_{Z, X_0}^* x' = i_{Z, X_0}^* (x_+ + x_-)$$

mit $x_{\pm} \in \mathcal{H}^{k-1}(X_0)$ und $i_{Z, X_0}^* x_{\pm} \in \mathcal{A}_{\pm}$.

Es gibt also $y_+ \in \mathcal{H}^{k-1}(X_+)$ mit

$$i_{Z, X_+}^* y_+ = i_{Z, X_0}^* x_+,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$(y_+, x_+) \in \text{Ker}(i_{Z, X_+}^* - i_{Z, X_0}^*).$$

Nach der Mayer-Vietoris-Sequenz von X_+ und X_0 (s.o.) ist dann

$$x_+ \in \text{Im}(i_{X_0, \partial Y_+}^* : \mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_+) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(X_0))$$

und daher $\delta x_+ \in S$.

Es gilt nicht unbedingt $\delta x' = \delta(x_+ + x_-)$; deshalb reicht es nicht, dasselbe Argument auf x_- anzuwenden. Es kann aber gezeigt werden, daß

$$\delta(x' - x_+ - x_-) \in S$$

ist:

Da nämlich $i_{Z,X_0}^*(x' - x_+ - x_-) = 0$ ist, gilt nach der Mayer-Vietoris-Sequenz von X_+ und X_0

$$\begin{aligned} (0, x' - x_+ - x_-) &\in \text{Ker}(i_{Z,X_+}^* - i_{Z,X_0}^*) \\ &= \text{Im}(i_{X_+, \partial Y_+}^* \oplus i_{X_0, \partial Y_+}^*). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß

$$(x' - x_+ - x_-) \in \text{Im}(i_{X_0, \partial Y_+}^* : \mathcal{H}^{k-1}(\partial Y_+) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(X_0))$$

ist, also $\delta(x' - x_+ - x_-) \in S$. Insgesamt ist damit $\delta x' = x \in S$.

Zu B): Die Faser von S^o kann identifiziert werden mit $\text{Im}(H^k(Y, \partial Y) \xrightarrow{j^*} H^k(Y)) \cap \text{Im}(H^{k-1}(X_0) \xrightarrow{\delta} H^k(Y))$. Aus der Konstruktion von f folgt, daß f eine unter der Wirkung der Strukturgruppe äquivariante Abbildung auf der Faser induziert. Da die Schnittform und die Form t auf der Faser $\text{Diff}(Y)$ -invariant sind, reicht es, den Beweis auf der Faser zu führen.

Dieser Beweis wird mit Vertretern der de-Rham-Kohomologie, also mit glatten Formen, geführt. Die zugehörigen Äquivalenzklassen der Kohomologie werden mit eckigen Klammern bezeichnet.

Zwei beliebige Elemente aus der Faser von S^o in $H^k(Y)$ lassen sich darstellen als $\delta[\omega_1]$ und $\delta[\omega_2]$ mit $\omega_1, \omega_2 \in C^\infty(\Lambda^{k-1}T^*X_0)$.

Zur Konstruktion von Repräsentanten von $\delta[\omega_i]$, $i = 1, 2$, in $C^\infty(\Lambda^{k-1}T^*Y)$ wird eine Tubenumgebung U_{X_0} von X_0 gewählt, die diffeomorph zu $X_0 \times]\varepsilon, \varepsilon[$ ist. Dies ist möglich, denn X_0 ist ein Randstück von Y_+ und Y_- . Auf diese Umgebung werden die Formen ω_i , $i = 1, 2$ so fortgesetzt, daß sie geschlossen bleiben.

Sei $\{\rho_i | i = +, -\}$ eine Partition der Eins auf Y mit $\rho_\pm|_{Y-(Y_\mp \cup U_{X_0})} = 0$.

Die mit 0 auf Y fortgesetzten Formen

$$\alpha_i = d\rho_+ \wedge \omega_i \quad i = 1, 2,$$

sind in $\delta[\omega_i] \in H^k(Y)$. Die Fortsetzung existiert, da der Träger von $d\rho_+$ in U_{X_0} liegt.

Um die Schnittform auf $\delta[\omega_1]$ und $\delta[\omega_2]$ in $H^k(Y)$ auszuwerten, muß eines der beiden Elemente nach $H^k(Y, \partial Y)$ hochgehoben werden. Einer der Repräsentanten muß also durch Addition einer exakten Form so modifiziert werden, daß er auf dem Rand exakt ist.

Dazu wird eine weitere Eigenschaft der Form ω_1 ausgenutzt: Nach der Definition von S^o gibt es $\omega_{1+} \in C^\infty(\Lambda T^*X_+)$ und $\omega_{1-} \in C^\infty(\Lambda T^*X_-)$ mit

$$H^{k-1}(Z) \ni [\omega_1|_Z] - [\omega_{1+}|_Z] - [\omega_{1-}|_Z] = 0.$$

Über die Wahl einer Metrik auf Y können nach der relativen Hodgetheorie die Kohomologiegruppen mit Unterräumen der glatten Formen identifiziert werden (s.[9] §4.1.). Dies legt eindeutige Vertreter der Äquivalenzklassen fest. Für solche Vertreter ω_1, ω_{1+} und ω_{1-} folgt aus der vorigen Gleichung:

$$\omega_1|_Z - \omega_{1+}|_Z - \omega_{1-}|_Z = 0.$$

Sei $U_{\partial U}$ ein zu $\partial Y \times [0, \varepsilon[$ diffeomorpher Kragen von ∂Y und U_{X_+} und U_{X_-} die Urbilder von $X_{\pm} \times [0, \varepsilon[$, auf denen ω_{1+} und ω_{1-} nach innen konstant fortgesetzt werden, so daß die Fortsetzungen geschlossen sind. Sei $\rho_{\partial Y}$ eine glatte Funktion auf Y mit $\rho_{\partial Y}|_{\partial Y} = 1$ und Träger in $U_{\partial Y}$.

Dann lassen sich $\rho_{\partial Y} \rho_{\pm} \omega_{\pm}$ mit 0 auf Y fortsetzen. Die Form

$$\tilde{\alpha} := \alpha_1 - d(\rho_{\partial Y} \rho_+ \omega_{1+} - \rho_{\partial Y} \rho_- \omega_{1-})$$

ist in $H^k(Y)$ in derselben Äquivalenzklasse wie α_1 , da der zweite Summand exakt ist. Ihre Einschränkung auf ∂Y ergibt mit $\rho_{\partial Y}|_{\partial Y} = 1$ und $d\rho_+ = -d\rho_-$ gerade $d\rho_+|_{\partial Y} \wedge (\omega - \omega_{1+} - \omega_{1-})$. Dies ist definiert, da die Form $d\rho_+|_{\partial Y}$ außerhalb von $U_Z := U_{\partial Y} \cap U_{X_0}$ verschwindet.

Auf U_Z selbst verschwindet aber der hintere Faktor – das bedeutet, daß $\tilde{\alpha}_1|_{\partial Y}$ verschwindet und $\tilde{\alpha}_1$ ein Element in $H^k(Y, \partial Y)$ definiert, das unter $j^* : H^k(Y, \partial Y) \rightarrow H^k(Y)$ auf α_1 abgebildet wird.

Analog kann eine Hochhebung $\tilde{\alpha}_2$ konstruiert werden. Die Schnittform angewendet auf $[\tilde{\alpha}_1]$ und $[\tilde{\alpha}_2]$ aus $H^k(Y, \partial Y)$ ergibt:

$$s([\tilde{\alpha}_1], [\tilde{\alpha}_2]) = \int_Y \tilde{\alpha}_1 \wedge \alpha_2.$$

Unter dem Isomorphismus f wird $[\alpha_i]$, $i = 1, 2$ auf

$$f[\alpha_i] = [\omega_i|_Z] \in H^{k-1}(Z)$$

abgebildet.

Dann ist

$$\begin{aligned} t(f[\alpha_1], f[\alpha_2]) &= \left([\omega_{1+}|_Z] \cup [\omega_{2-}|_Z] \right) [Z] \\ &= \left([\omega_{1+}|_Z] \cup [\omega_{2+}|_Z] \right) [Z] \quad (\text{Isotropie von } i_{Z, X_+}^* H^k(X_+)) \\ &= \int_Z \omega_{1+} \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

wobei ω_{2-} analog zu ω_{1-} definiert ist.

Die Behauptung ist also, daß gilt:

$$\int_Y \tilde{\alpha}_1 \wedge \alpha_2 = (-1)^k \int_Z \omega_{1+} \wedge \omega_2.$$

Da dieses Integral nicht von den zur Definition von $\tilde{\alpha}_1$ und α_2 getroffenen Wahlen abhängt, sondern nur von den Äquivalenzklassen $\delta[\omega_{1,2}]$, kann zur Konstruktion von $\alpha_2 \in \delta[\omega_2]$ eine andere Partition der Eins $\bar{\rho}_+$ verwendet werden. Diese soll so beschaffen sein, daß für den Träger $\text{Tr} d\bar{\rho}_+ \in U_{X_0}$ gilt:

$$\rho_+|_{\text{Tr} d\bar{\rho}_\pm} = 1$$

und damit auch

$$\rho_-|_{\text{Tr} d\bar{\rho}_\pm} = 0.$$

Für $\alpha_2 := d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_2$ folgt also

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \wedge \alpha_2 &= \left(d\rho_+ \wedge \omega_1 - d(\rho_{\partial Y} \rho_+ \omega_{1+}) - d(\rho_{\partial Y} \rho_- \omega_{1-}) \right) \wedge (d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_2) \\ &= -d\rho_{\partial Y} \wedge \omega_{1+} \wedge d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_2 \\ &= (-1)^k d\rho_{\partial Y} \wedge d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_{1+} \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Da diese Form außerhalb von U_Z verschwindet, gilt:

$$\int_Y \tilde{\alpha}_1 \wedge \alpha_2 = (-1)^k \int_{U_Z} d\rho_{\partial Y} \wedge d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_{1+} \wedge \omega_2$$

Da alle auftretenden Formen geschlossen sind, läßt sich das Integral durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration und des Satzes von Stokes vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \int_{U_Z} d(\rho_{\partial Y} \wedge d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_{1+} \wedge \omega_2) &= \int_{\partial U_Z} \rho_{\partial Y} d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_{1+} \wedge \omega_2 \\ &= \int_{\partial U_Z \cap \partial Y} d\bar{\rho}_+ \wedge \omega_{1+} \wedge \omega_2 \\ &= \int_{\partial(\partial U_Z \cap \partial Y)} \bar{\rho}_+ \omega_{1+} \wedge \omega_2 \\ &= \int_Z \omega_{1+} \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Dabei wurden auch die oben festgesetzten Eigenschaften der Funktionen $\bar{\rho}_+$ und $\rho_{\partial Y}$ ausgenutzt. $\square$

Die Definition des Korrekturterms $T \in K_0(B)$ ist in Hinblick auf den Indexsatz interessant, sobald Beispiele existieren, bei denen der Cherncharakter von T Komponenten in der höheren Kohomologie von B hat.

Eines soll zum Schluß vorgestellt werden:

4.5 Ein Beispiel für einen nichttrivialen Korrekturterm

Sei $Z_A \xrightarrow{M_A} B_A$ das von Atiyah konstruierte Faserbündel (s. 3.3.4) mit

$$\text{ch}(\text{Sign} Z_A) \notin H^0(B)$$

und $Y^W = Y_+^W \cup_{X_0^W} Y_-^W$ das unter 4.2 besprochene Beispiel, für das gilt:

$$\text{sign}(Y^W) - \text{sign}(Y_+^W) - \text{sign}(Y_-^W) \neq 0.$$

Das triviale Faserbündel

$$\tilde{Y}^W := Y^W \times B$$

über B hat ein triviales, (bis auf Vorzeichen) eindimensionales Signaturbündel.

Hingegen verschwinden die Signaturbündel von $\tilde{Y}_\pm^W := Y_\pm^W \times B$: Da die Fasern zusammenziehbar sind, ist ihre mittlere Kohomologie der Nullvektorraum.

Das Faserprodukt $Z_A \times_B \tilde{Y}^W$ läßt sich zerlegen in $Z_A \times_B \tilde{Y}_+^W \cup_{Z_A \times_B \tilde{X}_0^W} Z_A \times_B \tilde{Y}_-^W$.

Seine Fasern sind sechsdimensional, d.h. für den Korrekturterm T dieser Zerlegung gilt:

$$\begin{aligned} T &= -\text{Sign}(Z_A \times_B \tilde{Y}^W) + \text{Sign}(Z_A \times_B \tilde{Y}_+^W) + \text{Sign}(Z_A \times_B \tilde{Y}_-^W) \\ &= -\text{Sign}(Z_A) \otimes (\text{Sign}(\tilde{Y}^W) + \text{Sign}(\tilde{Y}_+^W) + \text{Sign}(\tilde{Y}_-^W)) \\ &= -\text{Sign}(Z_A) \otimes \text{Sign}(\tilde{Y}^W). \end{aligned}$$

Die Dimensionen der Signaturbündel und des Korrekturterms verschwinden.

Für den Cherncharakter von T gilt allerdings:

$$\begin{aligned} \text{ch } T &= -\text{ch}(\text{Sign}(Z_A)) \cup \text{ch}(\text{Sign}(\tilde{Y}^W)) \\ &= -\dim(\text{Sign}(\tilde{Y}^W)) \cdot \text{ch}(\text{Sign}(Z_A)) \\ &= \pm \text{ch}(\text{Sign}(Z_A)). \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß der Cherncharakter von T nicht trivial ist.

Außerdem folgt daraus auch, daß sich analog zur Signatur auch der Korrekturterm $\text{sign}(\tilde{Y}) - \text{sign}(\tilde{Y}_+) - \text{sign}(\tilde{Y}_-)$ der Totalräume i.a. nicht als Produkt $\text{sign}(B) \cdot \dim T$ aus dem Korrekturterm der Fasern berechnen läßt.

5 Der Korrekturterm und die Etainvarianten

Die im vorigen Abschnitt hergeleitete Verallgemeinerung der Signaturdefektsatzes auf Bündel kann nun wieder in den Indexsatz eingesetzt werden.

Aus dem dort bewiesenen Satz folgt nämlich:

$$\text{ch}(\text{Sign}(Y)) - \text{ch}(\text{Sign}(Y_+)) - \text{ch}(\text{Sign}(Y_-)) = (-1)^k \text{ch } T$$

Läßt sich der Familienindexsatz anwenden, so gilt also:

$$\left[\int_Y L(T_p \tilde{Y}) - \int_{Y_+} L(T_p \tilde{Y}_+) - \int_{Y_-} L(T_p \tilde{Y}_-) - \eta_{\partial \tilde{Y}} + \eta_{\partial \tilde{Y}_+} + \eta_{\partial \tilde{Y}_-} \right] = (-1)^k \text{ch } T$$

Werden die Metriken passend gewählt, so heben sich die ersten drei Terme gegenseitig auf und man erhält einen Zusammenhang zwischen den η -Formen und dem Korrekturterm, der den in [8] für Mannigfaltigkeiten bewiesenen verallgemeinert.

Zunächst noch einige Worte zur Situation:

Sei nun auch der Totalraum von $\tilde{Y}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Auf dem vertikalen Tangentialraum $T_p \tilde{Y}$ werde eine Metrik gewählt, die in der Nähe von $\partial \tilde{Y}$ Produktstruktur hat (s. 2.4).

Es wird daran erinnert, daß Begriffe wie Metrik, Isometrien... im Sinne von Faserbündeln gemeint sind (s. 2.2).

Die Wahl der Metriken auf $\tilde{Y}$, $\tilde{Y}_+$ und $\tilde{Y}_-$ legt die L -Formen und η -Invarianten fest.

Damit diese miteinander verglichen werden können, wäre es wünschenswert, wenn die Metriken auf $\tilde{Y}_\pm$ von der Metrik auf $\tilde{Y}$ induziert werden. Damit sie in der Nähe des Randes Produktstruktur haben, wird von der Metrik auf $\tilde{Y}$ zusätzlich verlangt, daß es eine Umgebung $U_{\tilde{X}_0}$ von $\tilde{X}_0$ gibt, die isometrisch auf $\tilde{X}_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ abgebildet werden kann, wobei $\tilde{X}_0 \times \{0\}$ das Bild von $\tilde{X}_0$ sei und $\tilde{X}_0 \times [0, \varepsilon[$ das von $\tilde{Y}_+ \cap U_{\tilde{X}_0}$.

Da $\tilde{X}_0 - \tilde{Z}$ ein Randstück von $\tilde{Y}_\pm$ ist, läßt sich eine solche Metrik mit Hilfe eines Kragens an $\tilde{X}_0$ konstruieren.

Allerdings erzeugt die $\tilde{Y}$ auf $\tilde{Y}_+$ eingeschränkte Metrik auf bei $\tilde{Z}$ einen „Knick“ im Rand von $\tilde{Y}_+$. Außerdem ist $\tilde{Y}_+$ nicht einmal eine Mannigfaltigkeit mit Rand im differenzierbaren Sinne. Die differenzierbare Struktur und die Metrik müssen also auf $\tilde{Y}_+$ verschieden von der auf $\tilde{Y}$ sein, damit die L -Form auf $\tilde{Y}_+$ definiert werden kann.

Für die L -Form, die aus der Krümmung berechnet wird und daher von der Metrik abhängt, bedeutet dies i.a.:

$$L(T_p \tilde{Y})|_{\tilde{Y}_+} \neq L(T_p \tilde{Y}_+).$$

Die von $\tilde{Y}$ auf $\tilde{Y}_+$ eingeschränkte Metrik kann jedoch auf einer Umgebung von $\tilde{Z}$ in $\tilde{Y}_+$ so geändert werden, daß $\tilde{Y}_+$ den Voraussetzungen des Indexsatzes genügt. Dann unterscheiden sich die L -Formen nur auf dieser Umgebung.

Daß die Umgebung bei der Integration über die Faser keinen Beitrag liefert, ist das Ergebnis des folgenden Satzes:

Satz. *Sei $\tilde{Y}$ mit einer Metrik versehen, wie sie eben beschrieben wurde. Der Totalraum von $\tilde{Y}$ sei differenzierbar.*

Dann gibt es differenzierbare Strukturen auf $\tilde{Y}_\pm$, die auf $\tilde{Y}_\pm - \tilde{Z}$ mit der auf $\tilde{Y}$ übereinstimmen.

Außerdem existieren Metriken auf $\tilde{Y}_\pm$ mit Produktstruktur in der Nähe des Randes, die auf dem Komplement einer Umgebung von $\tilde{Z}$ die Einschränkungen der Metrik auf $\tilde{Y}$ sind, und es gilt dann:

$$\int_Y L(T_p \tilde{Y}) = \int_{Y_+} L(T_p \tilde{Y}_+) + \int_{Y_-} L(T_p \tilde{Y}_-).$$

Daraus folgt:

$$[-\eta_{\partial \tilde{Y}} + \eta_{\partial \tilde{Y}_+} + \eta_{\partial \tilde{Y}_-}] = (-1)^k \text{ch}.$$

Beweis. Modifikation der Metrik auf $T_p \tilde{Y}_+$

Nach den Voraussetzungen an die Metrik auf $T_p \tilde{Y}$ gibt es für eine offene Menge $U \supset \tilde{Z}$ und ein $\varepsilon > 0$ eine Isometrie $\phi : U \rightarrow \tilde{Z} \times (]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)$ mit $\phi(U \cap \tilde{Y}_+) = \tilde{Z} \times ([0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)$.

Um die verlangte Metrik auf $\tilde{Y}_+$ zu erhalten, wird die Metrik auf $U_+ := U \cap \tilde{Y}_+$ nun so geändert, daß eine Umgebung von $\tilde{Z}$ in U_+ isometrisch zu $\tilde{Z} \times (]-\nu, \nu[\times [0, \nu[)$ für ein $\nu > 0$ ist.

Analog wird für $\tilde{Y}_-$ vorgegangen.

Dazu wird auf $\tilde{Z} \times [0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ eine differenzierbare und Riemannsche Struktur definiert werden, so daß eine Umgebung des Randes dieser Menge isometrisch auf $\tilde{Z} \times (]-\nu, \nu[\times [0, \nu[)$ abgebildet werden kann. Diese Struktur wird dann über den Homöomorphismus ϕ nach U_+ transportiert. Sie soll außerdem so beschaffen sein, daß sie sich dann mit der schon existierenden Struktur auf $\tilde{Y}_+ - U_+$ zusammensetzt zu einer Struktur auf $\tilde{Y}_+$.

Da die Metrik auf $\tilde{Z} \times ([0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)$ die Produktmetrik ist, reicht es, die Metrik auf $[0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ entsprechend zu ändern. Dies geschieht folgendermaßen:

Sei Δ ein rechtwinkliges Dreieck der mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik versehenen Sphäre $S_{\varepsilon/2}^2$ mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$, bei dem an allen Seiten Krägen angefügt wurden, so daß die Seitenlänge ε ist. Die Metrik wird auf den Krägen durch die euklidische Metrik fortgesetzt und an den Klebestellen durch eine Partition der Eins geglättet.

Damit sind die Umgebungen der drei Seiten von Δ isometrisch zu $[0, \varepsilon[\times [0, \nu[$ für ein $\nu > 0$.

Auf Δ wird $[0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ homöomorph und außer bei $(0, 0)$ diffeomorph so abgebildet, daß das Bild von zwei der drei Seiten von Δ gerade $\{\varepsilon\} \times [0, \varepsilon[\cup [0, \varepsilon[\times \{\varepsilon\}$ ist und die Abbildung auf den angefügten Krägen isometrisch. Mit dieser Abbildung wird die Riemannsche Struktur von Δ auf $[0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ zurückgezogen. In der Nähe des Randes ist $[0, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ damit isometrisch zu $] - \nu, \nu[\times [0, \nu[$.

Diese Struktur wird über ϕ weiter nach U_+ transportiert.

Die so definierte Riemannsche Struktur auf U_+ läßt sich dann durch die von $\tilde{Y}$ induzierte Metrik auf ganz $\tilde{Y}_+$ fortsetzen.

Mit dieser Struktur wird $\tilde{Y}_+$ – und auf analoge Weise auch $\tilde{Y}_-$ – zu einem Mannigfaltigkeitenbündel mit Rand, dessen Metrik die für den Indexsatz verlangten Eigenschaften hat. Damit sind die Formen $L(T_p \tilde{Y}_+)$, $L(T_p \tilde{Y}_-)$, $\eta_{\partial \tilde{Y}_+}$ und $\eta_{\partial \tilde{Y}_-}$ definiert.

Berechnung der Integrale

Gezeigt werden soll nun, daß

$$\int_Y L(T_p \tilde{Y}) = \int_{Y_+} L(T_p \tilde{Y}_+) + \int_{Y_-} L(T_p \tilde{Y}_-)$$

gilt.

Da die Metrik von $\tilde{Y}_+$ auf $\tilde{Y}_+ - U_+$ mit der Metrik von $\tilde{Y}$ übereinstimmt, gilt

$$L(T_p \tilde{Y})|_{\tilde{Y}_+ - U_+} = L(T_p \tilde{Y}_+)|_{\tilde{Y}_+ - U_+}.$$

Es folgt also:

$$\int_{Y_+} L(T_p \tilde{Y}_+) - \int_{Y_+} L(T_p \tilde{Y}) = \int_{U_+} L(T_p \tilde{Y}_+) - \int_{U_+} L(T_p \tilde{Y}).$$

Die Terme $\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y}_+)$ und $\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y})$ werden weiter berechnet:

Zu $\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y}_+)$:

Der Konstruktion nach gibt es eine Isometrie $\psi : U_+ \rightarrow \tilde{Z} \times \Delta$.

Da die Metrik auf $T_p U_+ \cong T_p(\tilde{Z} \times \Delta) = T_p \tilde{Z} \oplus T\Delta$ von den Metriken auf $T_p \tilde{Z}$ und $T\Delta$ induziert wird, gilt mit den Eigenschaften der L-Form:

$$\begin{aligned} L(T_p \tilde{Y}_+)|_{U_+} &= (\psi^{-1})^*(L(T_p \tilde{Z} \oplus T\Delta)) \\ &= (\psi^{-1})^*(L(T_p \tilde{Z}) \wedge L(T\Delta)) \\ &= (\psi^{-1})^*(L(T_p \tilde{Z}) \wedge (L(T\Delta))). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y}_+) = \int_Z L(T_p \tilde{Z}) \cdot \int_{\Delta} L(T \Delta).$$

Acht zu Δ isometrische Dreiecke können an den Kanten verklebt werden zu einem Gebilde, das diffeomorph zu S^2 ist. Da die Metrik in der Nähe des Randes von Δ die euklidische ist, setzten sich die Metriken der acht Dreiecke zusammen zu einer glatten Metrik auf S^2 , die allerdings nicht mit der üblichen übereinstimmt.

Das Integral über die L -Form ist jedoch für geschlossene Mannigfaltigkeiten unabhängig von der Metrik; daher gilt:

$$\begin{aligned} 8 \int_{\Delta} L(T \Delta) &= \int_{S^2} L(T S^2) \\ &= \text{sign}(S^2) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß das Integral über U_+ verschwindet.

Zu $\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y})$:

Mit der von $\tilde{Y}$ induzierten Metrik ist U_+ isometrisch zu $\tilde{Z} \times (] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)$, wobei $(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)$ mit der euklidischen Metrik versehen sei. Daher gilt:

$$\begin{aligned} L(T_p \tilde{Y}_+)|_{U_+} &= (\phi^{-1})^* L(T_p \tilde{Z} \oplus T(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)) \\ &= (\phi^{-1})^* (L(T_p \tilde{Z}) \wedge L(T(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[))). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y}) = \int_Z L(T_p \tilde{Z}) \cdot \int_{]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[} L(T(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)).$$

Da aber $] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ flach ist, ist

$$L(T(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[)) = 1 \in C^\infty(\Lambda^0(T^*(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[))).$$

Deswegen verschwindet $\int_{]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[} L(T(] - \varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon[))$ und damit auch $\int_{U_+} L(T_p \tilde{Y})$.

□

Um den Korrekturterm zu definieren und diesen Zusammenhang zu gewinnen, wurden die Ergebnisse der Algebraische Topologie über die Signatur ausgenutzt. Deswegen können – wie in der Einführung erwähnt wurde – die hier gewonnenen Ergebnisse nur als Beispiel für eine Verallgemeinerung eines Defektsatzes für die Familienindizes elliptischer Operatoren dienen, für den Beweis eines solchen müssen andere Wege eingeschlagen werden.

Literatur

- [1] M.F.Atiyah, *The signature of fibre-bundles* in Collected Mathematical Papers in Honor of K.Kodaira, Tokyo Univ. Press, 1969
- [2] M.F.Atiyah & I.M.Singer, *The index of elliptic operators: III*, Ann. of Math. **87** (1968), 546-604
- [3] M.F.Atiyah & I.M.Singer, *The index of elliptic operators: IV*, Ann. of Math. **93** (1971), 119-138
- [4] M.F.Atiyah, V.K.Patodi & I.M.Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry. I*, Math. Proc. Camb. Phil.Soc. **77** (1975), 43-69
- [5] J.-M.Bismut & J.Cheeger, *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones I and II*, J. Funct. Anal. **89** (1990) 313-363 and **90** (1990) 306-354
- [6] J.-M.Bismut & J.Cheeger, *Remarks on the index theorem for families of Dirac operators on manifolds with boundary* in Differential Geometry, A symposium in honour of Manfredo de Carmo, herausgegeben von B.Lawson & K.Teneblat, Longman Scientific & Technical, New York 1991
- [7] T.Bröcker & K.Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberg Taschenbücher Bd.143, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973
- [8] U.Bunke, *On the gluing problem for the η -invariant*, J. Diff. Geom. **41** (1995) 397-448
- [9] P.B.Gilkey, *Invariance Theory, The Heat Equation, And the Atiyah-Singer Index Theorem*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware (U.S.A.), 1984
- [10] D.Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill Inc., 1966
- [11] J.A.Leslie, *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*, Topology **6** (1967), 263-271
- [12] R.B.Melrose & P.Piazza, *Families of Dirac operators, boundaries and the B-calculus*, J. Diff. Geom. **46** (1997) 99-180
- [13] C.T.C.Wall, *Non-additivity of the signature*, Invent. Math. **7** (1969) 269-274