

## Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I\*

FRIEDHELM WALDHAUSEN (Bonn)

Objekt dieser Arbeit sind orientierbare kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten,  $M$ , mit der Eigenschaft: Es gibt in  $\overset{\circ}{M}$  ein System disjunkter Tori,  $T$ , so daß jede Komponente von  $M - \overset{\circ}{U}(T)$  homöomorph ist zu einem Faserbündel mit  $S^1$  als Faser ( $U(T)$  bezeichnet eine reguläre Umgebung von  $T$ ). Wir bezeichnen  $T$  als eine *Graphenstruktur* für  $M$ , und  $M$  selbst als eine *Graphenmannigfaltigkeit* (als Anlaß dieser Namensgebung kann man §9 betrachten).

Es ist für unsere Zwecke notwendig, eine vorgegebene Graphenstruktur zunächst in bestimmter Weise zu vereinfachen (dabei wird i. a. die Mannigfaltigkeit in eine zusammenhängende Summe zerlegt). Eine Graphenstruktur, die sich nicht weiter vereinfachen läßt, heißt *reduzierte Graphenstruktur*, und eine Mannigfaltigkeit mit vorgegebener reduzierter Graphenstruktur heißt *reduzierte Graphenmannigfaltigkeit*.

Unser Hauptergebnis ist: Ein Homöomorphismus zwischen „hinreichend komplizierten“ reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten läßt sich so deformieren, daß er die eine Graphenstruktur auf die andere abbildet; (8.1).

Spezielle Graphenmannigfaltigkeiten sind die orientierbaren unter den von SEIFERT in [12] behandelten „gefaseren Räumen“ (Kenntnis der Seifertschen Arbeit [12] ist für das Verständnis dieser Arbeit nicht notwendig, aber nützlich); unser Ergebnis impliziert, daß jeder Homöomorphismus zwischen „hinreichend komplizierten“ orientierbaren gefaserten Räumen in einen fasertreuen Homöomorphismus deformiert werden kann; (10.1). Die von SEIFERT angegebene Klassifikation der gefaserten Räume gegenüber fasertreuen Homöomorphismen läßt sich übertragen auf die Klassifikation von reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten gegenüber solchen Homöomorphismen, die die Graphenstruktur respektieren (§9); nach dem genannten Ergebnis ist dies „i. a.“ zugleich die topologische Klassifikation.

Die Herleitung des Hauptsatzes beansprucht den größten Teil der Arbeit; man könnte sie bezeichnen als eine Anwendung der Theorie „inkompressibler Flächen“:

Sei  $F$  ein System von (orientierbaren kompakten) Flächen in der (orientierbaren kompakten) Mannigfaltigkeit  $M$  (so daß  $F \cap \partial M = \partial F$ );

\* Aus technischen Gründen ist die Arbeit in zwei Teile zerlegt. Der zweite Teil enthält die Paragraphen 6—10.

keine Komponente von  $F$  sei eine 2-Sphäre. Der Terminologie von W. HAKEN folgend nennen wir  $F$  *inkompressibel in  $M$* , wenn folgendes gilt: Ist  $D$  ein 2-Element in  $M$ , so daß  $D \cap F = \partial D$ , dann gibt es ein 2-Element in  $F$ , dessen Rand ebenfalls  $\partial D$  ist.

Es gilt der (fast triviale) Satz: Sei  $M$  eine irreduzible Mannigfaltigkeit. Seien  $F$  und  $G$  Flächensysteme in  $M$  (so daß  $F \cap \partial M = \partial F$  und  $G \cap \partial M = \partial G$ ); sei  $F$  isotop so deformiert worden, daß der Durchschnitt  $F \cap G$  möglichst klein ist. Sei  $U(G)$  eine (bezüglich  $F$  kleine) reguläre Umgebung von  $G$ , und sei  $\tilde{M} = (M - U(G))$ . Dann gilt: Ist  $F$  inkompressibel in  $M$ , dann ist  $F \cap \tilde{M}$  inkompressibel in  $\tilde{M}$ ; (1.9.1).

Wir benutzen diesen Satz, um inkompressible Flächen zu klassifizieren, insbesondere auch, um die Nicht-Existenz unerwünschter inkompressibler Flächen nachzuweisen; die Situation ist dabei folgende:  $M$  ist eine Mannigfaltigkeit, die uns interessiert. In  $M$  finden wir ein System von (nicht notwendig inkompressiblen) Flächen,  $G$ , so daß jede Komponente von  $\tilde{M} = (M - U(G))$  eine Mannigfaltigkeit ist, deren inkompressible Flächen wir bereits kennen. Es genügt dann, daß wir auf der Suche nach inkompressiblen Flächen in  $M$  überhaupt nur solche Flächen beachten, deren Durchschnitt mit  $\tilde{M}$  ein in  $\tilde{M}$  inkompressibles Flächensystem ist.

Typische Fälle sind folgende:

- a)  $M$  ist ein Vollring;  $G$  ist eine Meridianfläche;  $\tilde{M}$  ist ein 3-Element.
- b)  $M$  ist ein  $S^1$ -Bündel,  $\partial M \neq \emptyset$ ;  $G$  ist ein System von Kreisringen;  $\tilde{M}$  ist ein Vollring. (§ 2).
- c)  $M$  ist eine Graphenmannigfaltigkeit, von der wir bereits wissen, daß sie irreduzibel ist;  $G$  ist die Graphenstruktur; jede Komponente von  $\tilde{M}$  ist ein  $S^1$ -Bündel. (§ 7).

(Der Nachweis, daß eine gegebene Mannigfaltigkeit irreduzibel ist, ist per definitionem der Nachweis, daß es in dieser Mannigfaltigkeit keine inkompressible 2-Sphäre gibt; er wird mit ganz ähnlichen wie den soeben skizzierten Argumenten geführt.)

Seien nun  $M$  und  $N$  Graphenmannigfaltigkeiten, und sei  $\varphi: N \rightarrow M$  ein Homöomorphismus. Wir suchen in  $N$  eine inkompressible Fläche  $F$  (die eine Komponente der Graphenstruktur ist oder auch nur in enger Beziehung zu der Graphenstruktur steht). Es ist dann  $\varphi(F)$  eine inkompressible Fläche in  $M$ , und aus unserer Kenntnis der inkompressiblen Flächen in  $M$  können wir schließen, daß  $\varphi$  so deformiert werden kann, daß hinterher jedenfalls  $F$  „schön“ abgebildet wird. Der Beweis des Hauptsatzes besteht in einem induktiven Argument dieser Art. — Die soeben mit  $F$  bezeichnete inkompressible Fläche in  $N$  braucht nicht immer zu existieren; daß sie existiert, ist i. w. unsere Bedingung, daß  $N$  „hinreichend kompliziert“ sei.

Da eine Graphenmannigfaltigkeit als Randflächen nur Tori haben kann, gibt es sicherlich nur „sehr wenig“ Graphenmannigfaltigkeiten. Tatsächlich gibt es aber noch viel weniger: Sei z. B.  $k$  eine Knotenlinie in der 3-Sphäre;  $k$  habe keinen „Begleitknoten“ im Sinne von SCHUBERT [11]. Ist das Komplement einer offenen Umgebung von  $k$  eine Graphenmannigfaltigkeit, dann ist  $k$  ein Torusknoten.

Es sei noch auf eine Beziehung zur Funktionentheorie hingewiesen: Ist  $X$  ein komplexer Raum der komplexen Dimension 2, und ist  $x$  ein normaler singulärer Punkt in  $X$ , dann besitzt  $x$  eine Umgebung, die homöomorph ist zum Kegel über einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Diese 3-Mannigfaltigkeit ist eine Graphenmannigfaltigkeit, [8], [10].

Ich möchte Herrn Dr. EPSTEIN für Diskussionen danken, die für das Zustandekommen dieser Arbeit sehr nützlich waren.

### Inhaltsübersicht

0. Notationen und Verabredungen
1. Inkompressible Flächen
2. Inkompressible Flächen in  $S^1$ -Bündeln
3. Eine pathologische Darstellung des  $S^1$ -Bündels über dem Möbiusband
4. Charakterisierung der planaren unter den inkompressiblen Flächen in  $S^1$ -Bündeln
5. Homöomorphismen von  $S^1$ -Bündeln; „natürliche Koordinatensysteme“ in den Randflächen von  $S^1$ -Bündeln
6. Definition von Graphenmannigfaltigkeiten; Reduktion von Graphenstrukturen
7. Flächen in reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten
8. Homöomorphismen von reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten
9. Klassifikation von „hinreichend komplizierten“ reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten
10. Seifertsche Faserräume

### 0. Notationen und Verabredungen

*Semilinearer Standpunkt.* Mannigfaltigkeiten, Flächen, usw. haben eine feste semilineare Struktur. Homöomorphismen, Einbettungen, usw. sind semilineare Abbildungen. Zum Beispiel bezeichnen wir mit „einfachgeschlossene Kurve“ eine semilineare Einbettung der 1-Sphäre.

Eine *Mannigfaltigkeit* ist eine orientierbare kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Sie ist i. a. zusammenhängend; nur werden wir manchmal „System von Untermannigfaltigkeiten“ abkürzen durch „Mannigfaltigkeit“.

Eine *Fläche* ist eine zusammenhängende kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Sie ist i. a. orientierbar; die einzigen nicht-orientierbaren Flächen treten als Basisräume oder höchstens als Schnitte von Faserräumen auf. — Wird der Zusammenhang nicht behauptet, so sprechen wir von einem *System von Flächen*.

Untermannigfaltigkeiten und reguläre Umgebungen sind kompakt.

Eine *reguläre Umgebung* ist immer „hinreichend klein“; eine typische Konstruktion ist die folgende: Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit oder Fläche, und  $Y$  ein Unterraum von  $X$ . Seien  $Z_1, \dots, Z_n$  die sämtlichen (kompakten) Unterräume von  $X$ , die bereits in der Argumentation erwähnt wurden. Wir wählen eine (endliche) Triangulation von  $X$ , in der  $Y$  und  $Z_1, \dots, Z_n$  Unterkomplexe sind. Der geschlossene Stern von  $Y$  in der zweiten baryzentrischen Unterteilung dieser Triangulation ist dann eine reguläre Umgebung von  $Y$ .

Ist  $X$  ein System von  $n$ -Mannigfaltigkeiten, dann bezeichnet  $\partial X$  das System der Rand- $(n-1)$ -Mannigfaltigkeiten von  $X$ .

Wird von einer „Fläche  $F$  in der Mannigfaltigkeit  $M$ “ gesprochen, und geht nicht aus dem Zusammenhang das Gegenteil hervor, so ist  $F \cap \partial M = \partial F$ . Sprechen wir von einer „Fläche  $F$  in  $M$  oder  $\partial M$ “, so erlauben wir zusätzlich, daß  $F$  eine Randkomponente von  $M$  oder eine (zusammenhängende kompakte) 2-Untermannigfaltigkeit von  $\partial M$  ist.

Ein System von Flächen in  $M$  oder  $\partial M$  besteht aus endlich vielen paarweise punktfremden Komponenten.

Ein Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  ist surjektiv, sofern nicht ausdrücklich ein anderes Bild als  $Y$  angegeben wird.

Eine *isotope Deformation* von  $X$  ist eine niveauerhaltende Abbildung  $h: X \times I \rightarrow X \times I$ , so daß auf jedem Niveau  $h|X \times t = h_t$  ein Homöomorphismus von  $X$  auf  $X$  ist, und daß  $h_0 = \text{id}$ . Wir werden „isotope Deformation“ oft abkürzen durch „Deformation“.

Unterräume  $Y_1$  und  $Y_2$  in  $X$  heißen *isotop*, wenn es eine isotope Deformation von  $X$  gibt,  $h_t$ ,  $t \in I$ , so daß  $h_1(Y_1) = Y_2$ .

Seien  $F$  und  $G$  Flächen in  $M$  oder  $\partial M$ ; es sei  $F \cap G = \partial F = \partial G$ .  $F$  und  $G$  heißen *parallel*, wenn es eine Fläche  $H$  und eine Einbettung  $f: H \times I \rightarrow M$  gibt, so daß  $f(H \times 0) = F$  und  $f(H \times 1 \cup \partial H \times I) = G$ . (Sind  $F$  und  $G$  parallel, so gibt es auch eine Einbettung  $f': H \times I \rightarrow M$ , so daß  $f'(H \times 0 \cup \partial H \times I) = F$  und  $f'(H \times 1) = G$ .)

Eine Fläche  $F$  in  $M$  heißt *rand-parallel*, wenn es eine zu  $F$  parallele Fläche  $F'$  in  $\partial M$  gibt.

Für Kurven und Bögen in einer Fläche sind die Begriffe „parallel“ und „rand-parallel“ analog definiert.

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $F$  ein System von Flächen in  $M$ . Wir werden häufig die (möglicherweise nicht zusammenhängende) Mannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  zu betrachten haben, die entsteht, wenn „ $M$  an  $F$  aufgeschnitten“ wird. Wir können uns  $\tilde{M}$  vorstellen als eine Mannigfaltigkeit, die zwei Kopien von  $F$  in ihrem Rand enthält, so daß wir  $M$  erhalten, wenn wir diese beiden Kopien identifizieren; ( $F$  wird immer zweiseitig sein). Meistens ist es aber bequemer,  $\tilde{M}$  als Untermannigfaltigkeit von  $M$

anzusehen: Dazu setzen wir  $\tilde{M} = \overline{M - U(F)}$ ; dabei ist  $U(F)$  eine reguläre Umgebung von  $F$  in  $M$ .

Sei  $G$  ein weiteres System von Flächen in  $M$ .  $G$  sei in allgemeiner Lage bezüglich  $F$ , (d.h.  $F \cap G$  bestehe aus paarweise punktfremden einfachgeschlossenen Kurven und einfachen Bögen, deren Endpunkte in  $\partial M$  liegen; jede Schnittlinie sei Durchsetzungslinie. – Wir werden später häufig allgemeine Lage annehmen, auch ohne es explizit zu sagen: Allgemeine Lage läßt sich immer herstellen mit Hilfe einer beliebig kleinen Deformation eines der beiden Systeme.) Beim Aufschneiden von  $M$  an  $F$  zu  $\tilde{M}$  entsteht dann aus  $G$  ein Flächensystem  $\tilde{G}$  in  $\tilde{M}$ . (In der andern Formulierung: Die reguläre Umgebung  $U(F)$  wird klein bezüglich  $G$  gewählt; es ist dann  $\tilde{G} = G \cap \tilde{M}$ .) – Im Gegensatz zu  $\tilde{M}$  hängt natürlich  $\tilde{G}$  sehr stark davon ab, ob und wie  $F$  vor dem Aufschneiden deformiert wurde.

Eine Aussage wie „die Kurve  $k$  ist homolog zur Kurve  $l$ “ bezieht sich auf die von  $k$  und  $l$  repräsentierten Zyklen in der Homologie eines  $k$  und  $l$  enthaltenden Raumes (der angegeben wird, wenn ein Zweifel möglich ist); Koeffizienten sind ausnahmslos die ganzen Zahlen. Werden  $k$  und  $l$  nicht als orientierte Kurven angegeben und ist es nicht aus irgendeinem Grunde selbstverständlich, daß von orientierten Kurven die Rede ist, dann bedeutet „homolog“: homolog bis evtl. aufs Vorzeichen.

Es wird oft von „dem“  $S^1$ -Bündel über einer Fläche  $F$ ,  $\partial F \neq \emptyset$ , z.B. dem Möbiusband, die Rede sein: Wir betrachten nur solche  $S^1$ -Bündel, die orientierbaren Totalraum haben, und von diesen gibt es über einer berandeten Fläche bis auf Äquivalenz nur eines.

Die folgenden Symbole werden im angegebenen (und nur in diesem) Sinn benutzt:

$I = [0, 1]$	Einheitsintervall
$D$	2-Element
$E$	3-Element
$U(\dots)$	reguläre Umgebung von ...

„Abgeschlossene Hülle“ und „Inneres“ bezeichnen wir in der üblichen Weise; bei längeren Ausdrücken schreiben wir  $\overline{(\dots)}$  und  $\overset{\circ}{(\dots)}$ , bzw.  $\overset{\circ}{U}(\dots)$ .

Eckige Klammern bezeichnen abgeschlossene Intervalle, Literaturhinweise und Homologieklassen.

Die folgenden Begriffe sind an folgenden Stellen definiert: „vertikal“, „horizontal“ in (2.5); „irreduzibel“ in (1.7); „reduziert“ in (6.2).

## 1. Inkompressible Flächen

(1.1) Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit, und  $F$  ein System von Flächen in  $M$  oder  $\partial M$ .  $F$  heißt „*kompressibel* in  $M$ “, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

(1.1.1) Es gibt eine einfach-geschlossene Kurve  $k$  in  $\overset{\circ}{F}$ , die nicht ein 2-Element in  $F$  berandet, und eine Einbettung des 2-Elements  $D$  in  $M$ , so daß  $\overset{\circ}{D} \subset \overset{\circ}{M}$  und  $D \cap F = k$ .

(1.1.2) Es gibt eine Einbettung des 3-Elements  $E$  in  $M$ , so daß  $E \cap F = \partial E$ .

(1.2) Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $G$  ein System von Flächen in  $\partial M$ , und  $F$  ein System von Flächen in  $M$ .  $F$  heißt „rand-kompressibel in  $M$  bezüglich  $G$ “, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

(1.2.1) Es gibt einen Bogen  $l$  in  $F$ , der nicht zu einem Bogen in  $\partial F$  parallel ist, und eine Einbettung des 2-Elements  $D$  in  $M$ , so daß

$$D \cap (F \cup G) = \partial D,$$

und  $D \cap F = l$ .

(1.2.2) Es gibt eine Randkurve von  $F$ , die ein 2-Element in  $G$  berandet.

Ist  $F$  nicht kompressibel in  $M$ , so nennen wir  $F$  „inkompressibel in  $M$ “. Besteht kein Zweifel über die Mannigfaltigkeit, so werden wir statt „inkompressibel in  $M$ “ auch „inkompressibel“ sagen.

Ist  $F$  nicht rand-kompressibel in  $M$  bezüglich  $G$ , so nennen wir  $F$  „rand-inkompressibel in  $M$  bezüglich  $G$ “. Wenn  $G = \partial M$  ist, so werden wir dies abkürzen durch „rand-inkompressibel in  $M$ “. Besteht außerdem kein Zweifel über die Mannigfaltigkeit, so werden wir kurz „rand-inkompressibel“ sagen.

(1.3) **Lemma.** Sei  $F$  ein inkompressibles System von Flächen in  $M$  oder  $\partial M$ . Jede Randkurve von  $F$ , die ein 2-Element in  $\partial M$  berandet, berandet ein 2-Element in  $F$ .

*Beweis.* Seien  $D_1, D_2, \dots, D_n$  die sämtlichen Komponenten von  $F$ , die 2-Elemente sind. Auf dem Rande einer regulären Umgebung

$$U(\partial M \cup D_1 \cup \dots \cup D_n)$$

sei  $G$  die Teilfläche  $G = (\overset{\circ}{M} \cap \partial U)$ . Angenommen, es gäbe Randkurven von  $F$ , die in  $\partial M$ , aber nicht in  $F$  ein 2-Element beranden: Sei  $k$  eine innerste von diesen, und sei  $F'$  die  $k$  enthaltende Komponente von  $F$ . Es folgt, daß  $F$  kompressibel ist, da die nächst  $k$  liegende Schnittkurve aus  $F' \cap G$  auf  $G$  ein 2-Element berandet, das  $F$  sonst nicht trifft.

(1.4) **Lemma.** Sei  $F$  ein System von Flächen in dem 3-Element  $E$ . Jede Komponente von  $F$ , die ein 2-Element ist, ist parallel zu zwei 2-Elementen in  $\partial E$ , und ist insbesondere rand-kompressibel. Gibt es eine Komponente von  $F$ , die nicht ein 2-Element ist, dann ist  $F$  kompressibel.

*Beweis.* zu 1) Es folgt aus dem Schoenflies-Satz, [1], daß  $E$  von einem 2-Element in zwei 3-Elemente zerlegt wird. Die Behauptung folgt nun daraus, daß zwei 2-Elemente  $D$  und  $D'$  in  $\partial E$ , mit  $D \cap D' = \partial D = \partial D'$ , parallel sind.

zu 2) Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, daß keine Komponente von  $F$  ein 2-Element ist. — Ist jede Komponente von  $F$  eine 2-Sphäre, so folgt aus dem Schoenflies-Satz, daß es eine innerste gibt, auf die (1.1.2) zutrifft.

Sei also  $F'$  eine Komponente, die keine 2-Sphäre (und kein 2-Element) ist. Ist  $\partial F' \neq \emptyset$ , so ist  $F$  nach (1.3) kompressibel. Ist  $\partial F' = \emptyset$ , so ist nach dem verallgemeinerten Satz von Alexander, [4],  $F'$  kompressibel: Es gibt also ein 2-Element  $D$  in  $E$ , mit  $D \cap F' = \partial D$ , so daß  $\partial D$  nicht ein 2-Element auf  $F'$  berandet. Nach einer kleinen Deformation von  $D$ , falls notwendig, besteht  $D \cap F$  aus paarweise disjunkten einfach-geschlossenen Kurven. Gibt es 2-Elemente in  $F$ , deren Rand eine solche Schnittkurve ist, so sei  $D'$  ein innerstes von diesen: Wir ersetzen durch  $D'$  das von  $\partial D'$  auf  $D$  berandete 2-Element und heben  $D'$  von  $F$  ab; die Anzahl der Schnittkurven  $D \cap F$  wird dabei kleiner. — Ist keine der Schnittkurven Rand eines 2-Elements auf  $F$ , dann zeigt irgendeine auf  $D$  innerste, daß (1.1.1) zutrifft.

**(1.5) Lemma.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit, und sei  $F$  ein System von Flächen in  $M$  oder  $\partial M$ .  $F$  ist genau dann inkompressibel, wenn jede Komponente von  $F$  inkompressibel ist.*

*Beweis.* Eine Richtung ist trivial; wir beweisen die andere, indem wir die beiden Fälle (1.1.1) und (1.1.2) nachprüfen: Sei  $F'$  eine Komponente von  $F$ ;  $F'$  sei kompressibel. Zu zeigen ist, daß  $F$  kompressibel ist.

zu (1.1.1): Der Beweis ist identisch mit einem Argument aus dem Beweis von (1.4).

zu (1.1.2): Ist  $F' = \partial E$ , und  $\mathring{E} \cap F \neq \emptyset$ , so folgt die Behauptung aus (1.4).

Eine ähnliche Situation wie in dem folgenden Lemma werden wir noch oft antreffen: In der Mannigfaltigkeit  $M$  sind  $F$  und  $G$  zwei Systeme von Flächen, die einander in allgemeiner Lage schneiden.  $U(F)$  ist eine reguläre Umgebung von  $F$ , die klein ist bezüglich  $G$ .  $\tilde{M}$  ist die Untermannigfaltigkeit  $(M - U(F))$ , und in  $\tilde{M}$  ist  $\tilde{G}$  das Flächensystem  $\tilde{M} \cap G$ . (Um umständliche Formulierungen zu vermeiden, lassen wir hier zu, daß  $\tilde{M}$  unzusammenhängend ist.)

**(1.6) Lemma.** *In der Mannigfaltigkeit  $M$  sei  $F$  ein System von Flächen und  $S$  eine inkompressible 2-Sphäre.  $S$  sei so gewählt, daß die Anzahl der Schnittkurven  $S \cap F$  möglichst klein ist. Dann ist  $\tilde{S} = S \cap \tilde{M}$  inkompressibel in  $\tilde{M} = (M - U(F))$ .*

*Beweis.* Die Behauptung sei falsch: Dann gibt es ein 2-Element  $D$  in  $\tilde{M}$ , so daß  $D \cap \tilde{S} = \partial D$  kein 2-Element auf  $\tilde{S}$  berandet. Auf  $S$  berandet  $\partial D$  zwei 2-Elemente,  $D_1$  und  $D_2$ .  $D \cup D_j$ ,  $j=1, 2$ , ist eine 2-Sphäre, die kleineren Durchschnitt mit  $F$  hat, und daher nach Voraussetzung über

$S$  ein 3-Element  $E_j$  berandet. Es ist  $\partial E_1 \cap \partial E_2 = D$ , und entweder  $\overset{\circ}{E}_1 \cap \overset{\circ}{E}_2 = \emptyset$ , oder, etwa,  $E_1 \subset E_2$ . Es folgt, daß  $S$  entweder das 3-Element  $E_1 \cup E_2$  oder das 3-Element  $(E_2 - E_1)$  berandet.

(1.7) *Definition.* Die Mannigfaltigkeit  $M$  heißt „irreduzibel“, wenn es in  $M$  keine inkompressiblen 2-Sphären gibt.

(1.8) *Satz.* In der Mannigfaltigkeit  $M$  sei  $F$  ein System inkompressibler Flächen.  $\tilde{M} = (M - U(F))$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $M$  irreduzibel ist.

*Beweis.* 1)  $\tilde{M}$  sei nicht irreduzibel. Dann gibt es eine 2-Sphäre im Innern von  $\tilde{M}$ , die in  $\tilde{M}$  kein 3-Element berandet. Angenommen, sie berandete in  $M$  das 3-Element  $E$ : Das hieße aber, daß im Innern von  $E$  eine geschlossene Komponente von  $F$  läge, und nach (1.4) wäre  $F$  nicht inkompressibel. 2)  $M$  sei nicht irreduzibel. Es sei  $S$  eine inkompressible 2-Sphäre in  $M$ , deren Durchschnitt mit  $F$  aus möglichst wenig disjunkten einfach-geschlossenen Kurven besteht. Wir haben zu zeigen, daß  $S \cap F = \emptyset$ ; angenommen, es sei  $S \cap F \neq \emptyset$ . Unter den Schnittkurven gibt es solche, die auf  $S$  innerste Schnittkurven sind. Da  $F$  inkompressibel ist, gibt es also Schnittkurven, die auf  $F$  ein 2-Element beranden. Sei  $D$  ein 2-Element in  $F$ , das von einer Schnittkurve berandet wird, und in dessen Innern keine Schnittkurve liegt: Die Existenz von  $D$  führt zu einem ähnlichen Widerspruch wie in (1.6).

(1.9) *Satz.* Die Mannigfaltigkeit  $M$  sei irreduzibel.  $F$  und  $G$  seien zwei Systeme von Flächen in  $M$ .  $G$  sei inkompressibel in  $M$ , und  $G$  sei so deformiert, daß  $F \cap G$  aus möglichst wenig einfachen Kurven und Bögen besteht.

Es sei  $\tilde{M} = (M - U(F))$ , und  $\tilde{G} = G \cap \tilde{M}$ . Dann gilt:

(1.9.1)  $\tilde{G}$  ist inkompressibel in  $\tilde{M}$ .

(1.9.2) Keine berandete Komponente von  $\tilde{G}$  ist parallel zu einer Teilfläche von  $(\partial \tilde{M} - \partial M)$ .

(1.9.3) Es ist möglich, daß  $\tilde{G}$  rand-kompressibel bezüglich  $(\partial \tilde{M} - \partial M)$  ist: Aber wenn das so ist, dann liegen die beiden Endpunkte eines definierenden Bogens in derselben Randkurve von  $\tilde{G}$ .

*Beweis.* zu 1) Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es im Innern von  $\tilde{M}$  ein 2-Element  $D$ , so daß  $D \cap \tilde{G} = \partial D$  kein 2-Element in  $\tilde{G}$  berandet. Da  $G$  inkompressibel in  $M$  ist, berandet  $\partial D$  ein 2-Element  $D'$  in  $G$ . Die 2-Sphäre  $D \cup D'$  ist, da  $M$  irreduzibel ist, Rand eines 3-Elements  $E$  in  $\tilde{M}$ . Also können wir  $G$  so deformieren, daß alle auf  $D'$  liegenden Schnitte mit  $F$  verschwinden und daß neue nicht hinzukommen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

zu 2)  $F$  ist zweiseitig in  $M$ ; das Weitere ist offensichtlich.

zu 3) rand-kompressibel nach (1.2.2) führt auf den vorigen Fall, da  $F$  inkompressibel und  $M$  irreduzibel ist. — Also nehmen wir an, es gibt

ein 2-Element  $D$  in  $\tilde{M}$ , so daß  $D \cap (\tilde{G} \cup \partial \tilde{M}) = \partial D$  und daß  $D \cap \tilde{G} = l$  ein Bogen ist, dessen Endpunkte in verschiedenen Randkurven von  $\tilde{G}$  liegen. Es gibt dann eine Deformation von  $G$  in der Nähe von  $D$ , deren Effekt ist, daß  $l$  bei festgehaltenen Endpunkten über  $D$  nach  $D \cap \partial \tilde{M}$ , und noch ein bißchen weiter wandert; dabei wird die Anzahl der Schnittkurven  $G \cap \partial U(F)$  verringert. Da nach Voraussetzung  $F$  und  $G$  einander in allgemeiner Lage schneiden, und da  $U(F)$  klein ist bezüglich  $G$ , folgt, daß es eine Deformation von  $G$  gibt, so daß die Anzahl der Schnittkurven  $G \cap F$  verringert wird, im Widerspruch zur Voraussetzung.

**(1.10) Lemma.** *Sei  $M$  eine irreduzible Mannigfaltigkeit. Jede Randfläche von  $M$  sei ein Torus. In  $M$  sei  $G$  eine inkompressible Fläche;  $G$  sei nicht ein 2-Element;  $G$  sei rand-kompressibel. Dann ist  $G$  ein rand-paralleler Kreisring.*

*Beweis.* Da  $G$  inkompressibel ist und nicht ein 2-Element, ist keine der Randkurven von  $G$  auf  $\partial M$  zusammenziehbar. Sei also  $D$  ein 2-Element, so daß  $D \cap (G \cup \partial M) = \partial D$  und daß  $D \cap G = l$  ein nicht rand-paralleler Bogen in  $G$  ist.

*1. Fall.* Beide Endpunkte von  $l$  liegen in der Randkurve  $k$  von  $G$ . Seien  $k_1$  und  $k_2$  Kurven in  $G$ , so daß es eine Umgebung von  $k \cup l$  in  $G$  gibt, deren Rand  $k \cup k_1 \cup k_2$  ist, und seien  $k'_1$  und  $k'_2$  Kurven in  $\partial M$ , die analog durch  $k$  und  $D \cap \partial M$  definiert sind.  $k, k'_1, k'_2$  sind gegenseitig punktfremde Kurven auf einem Torus, die zusammen beranden: Es folgt, daß mindestens eine von ihnen, etwa  $k'_1$ , ein 2-Element  $D'_1$  auf  $\partial M$  berandet; es ist  $k \cap D'_1 = \emptyset$ , da  $k$  kein 2-Element berandet. — Indem wir, grob gesprochen,  $D'_1$  mit  $D$  zusammensetzen, finden wir ein 2-Element  $D_1$  im Innern von  $M$ , so daß  $D_1 \cap G = k_1$ . Da  $G$  inkompressibel ist, berandet  $k_1$  ein 2-Element auf  $G$ , und es folgt, daß im Gegensatz zu unserer Annahme  $l$  rand-parallel ist.

*2. Fall.* Die Endpunkte von  $l$  liegen in den Randkurven  $k$  und  $k'$ .  $k$  und  $k'$  sind disjunkt und nicht zusammenziehbar, sie beranden daher zwei Kreisringe auf  $\partial M$ ; sei  $G'$  derjenige, der  $D \cap \partial M$  enthält. Da keine Randkurve von  $G$  ein 2-Element auf  $\partial M$  berandet, ist  $G \cap G' = k \cup k'$ . Sei  $U(G' \cup D)$  eine reguläre Umgebung von  $G' \cup D$  in  $M$ . Der Durchschnitt  $\tilde{G} \cap \partial U(G' \cup D)$  besteht aus genau einer Kurve. Sie berandet ein 2-Element in  $\partial U$  und daher auch in  $G$ . Die Eulersche Charakteristik von  $G \cap U(G' \cup D)$  ist  $-1$ , also hat  $G$  die Charakteristik 0. Da  $G$  orientierbar ist, ist  $G$  folglich ein Kreisring. Sei nun  $U(D)$  eine reguläre Umgebung von  $D$  in  $M$ . Wir betrachten die 2-Sphäre, die zusammengesetzt ist aus dem Kreisring  $(G \cup G') - U(D)$  und den von seinen Randkurven auf  $\partial U(D)$  berandeten 2-Elementen. Da  $M$  irreduzibel ist, berandet diese 2-Sphäre ein 3-Element in  $M$ : Es folgt, daß  $G$  und  $G'$  parallel sind.

## 2. Inkompressible Flächen in $S^1$ -Bündeln

**(2.1) Definition.** Ein *Vollring* ist homöomorph zu  $D \times S^1$ . — Ein rand-inkompressibles 2-Element in einem Vollring heißt „*Meridianfläche*“.

Wird  $D \times S^1$  aufgeschnitten an  $D \times y$ ,  $y \in S^1$ , so entsteht ein 3-Element. Ein 2-Element ist inkompressibel: also folgt aus (1.8), daß ein Vollring irreduzibel ist.

**(2.2) Lemma.** *In dem Vollring  $M$  seien  $F$  und  $G$  zwei Systeme von Meridianflächen, die gleich viele Komponenten haben. Dann gibt es eine Deformation von  $M$ , die  $F$  in  $G$  überführt. Ist  $\partial F \subset F \cap G$ , dann kann die Deformation so gewählt werden, daß sie auf  $\partial M$  konstant ist.*

*Beweis.* 1) Seien  $F_1, \dots, F_n$  und  $G_1, \dots, G_n$  die Komponenten von  $F$  und  $G$ . Es ist  $\ker(H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M))$  frei zyklisch. Also folgt, daß die  $\partial F_j$  in  $\partial M$  paarweise parallel sind, ebenso die  $\partial G_j$ ; und die  $\partial F_j$  sind isotop in  $\partial M$  zu den  $\partial G_j$ . Daher gibt es eine Deformation von  $F$ , so daß hinterher  $\partial F \cap \partial G = \partial F = \partial G$ , daß ferner  $\dot{U}(\partial M) \cap F \cap G = \emptyset$  für eine Umgebung von  $\partial M$ , und daß  $F \cap G$  aus einfach-geschlossenen Kurven besteht. — War bereits zu Anfang  $\partial F \subset F \cap G$ , dann kann die Deformation so gewählt werden, daß sie auf  $\partial M$  konstant ist.

2) Sei  $k$  eine Schnittkurve aus  $F \cap G$ . Sei  $D$  das von  $k$  in  $G$  berandete 2-Element; sei  $k$  so gewählt, daß  $\dot{D} \cap F = \emptyset$ .  $k$  berandet ein 2-Element  $D'$  in  $F$ .  $D \cup D'$  ist eine 2-Sphäre und Rand eines 3-Elements  $E$  in  $M$ .

a)  $k \subset \dot{G}$ : Wir deformieren  $F$  so, daß  $D' = D$  wird, und heben dann ab; das geht mit einer Deformation in einer Umgebung von  $E$ . Dabei verschwinden die Schnitte von  $D'$  mit  $G$ , insbesondere  $k$ .

b)  $k \subset \partial G$ : Wir deformieren  $F$  so, daß  $D' = D$  wird. Das geht mit einer Deformation, die konstant ist auf  $\partial M$ , und die frühere Normierungen des Typs (b) nicht stört.

**(2.3) Lemma.** *Sei  $M$  ein Vollring.  $G$  sei eine inkompressible Fläche in  $M$ ;  $G$  sei nicht ein 2-Element. Dann ist  $G$  ein rand-paralleler Kreisring.*

*Beweis.* Sei  $F$  eine Meridianfläche in  $M$ . Da  $\partial M$  ein Torus ist, können wir  $G$  so deformieren, daß seine Randkurven  $\partial F$  „monoton“ schneiden, d. h. daß für eine Randkurve  $k$  von  $G$  die Anzahl der Schnittpunkte  $k \cap \partial F$  gleich ist dem Betrag der Schnittzahl von  $k$  und  $\partial F$  in  $\partial M$ . Anschließend deformieren wir  $G$  so, wie im Beweis von (1.9) beschrieben, daß  $G \cap F$  aus möglichst wenig einfachen Kurven und Bögen besteht. Das kann die Situation in  $\partial M$  nicht wesentlich ändern, da der Effekt wäre, die Anzahl der Schnittpunkte  $\partial G \cap \partial F$  zu verringern, was nicht geht. — Es ist nicht möglich, daß  $G \cap F = \emptyset$ , da dann  $G$  ein 2-Element sein müßte. Keiner der Schnitte  $G \cap F$  ist eine geschlossene Kurve, da eine auf  $F$  innerste nach (1.9.1) auf  $G$  ein von weiteren Schnitten freies 2-Element beranden müßte,

und da dies wiederum parallel wäre zu einem Teil von  $F$ , im Widerspruch zu (1.9.2). — Für eine Kurve in  $\partial M$  ist die Schnittzahl in  $M$  mit dem relativen 2-Zykel  $F$  bis evtl. aufs Vorzeichen gleich der Schnittzahl in  $\partial M$  mit  $\partial F$ : Also ist keiner der Bögen  $G \cap F$  rand-parallel in  $G$ . Ein auf dem 2-Element  $F$  äußerster dieser Bögen zeigt nun, daß  $G$  rand-kompressibel ist. Die Behauptung folgt aus (1.10).

**(2.4) Lemma.** *In dem Vollring  $M$  seien  $G_1, \dots, G_n$  und  $G'_1, \dots, G'_n$  zwei Systeme von Kreisringen. Es sei  $\partial G_j \subset G_j \cap G'_j, j=1, \dots, n$ . Eine Randkurve dieser Kreisringe habe mit der Randkurve einer Meridianfläche die Schnittzahl eins. Dann gibt es eine auf  $\partial M$  konstante Deformation, die die  $G_j$  in die  $G'_j$  überführt.*

*Beweis.* Sei  $F$  eine Meridianfläche. Ähnlich wie im vorangegangenen Beweis erreichen wir, daß die Durchschnitte  $F \cap G_j$  und  $F \cap G'_j$  je aus genau einem Bogen bestehen. Das kann so gemacht werden, daß in der Nähe von  $\partial M$  nur  $F$  bewegt wird und nicht die  $G_j$  und  $G'_j$ . Da es für jedes  $j$  nur je einen Bogen  $F \cap G_j$  und  $F \cap G'_j$  gibt, haben die Bögen  $F \cap G_j$  und  $F \cap G'_j$  dieselben Endpunkte (an dieser Stelle wird die Bedingung über die Schnittzahl wirklich ausgenutzt). Also können wir die  $G_j$  so deformieren, daß  $G_j \cap U(F) = G'_j \cap U(F)$  in einer Umgebung  $U(F)$  von  $F$  in  $M$ . Betrachten wir nun  $\tilde{M} = (M - U(F))$  und die  $\tilde{G}_j = G_j \cap \tilde{M}$  und  $\tilde{G}'_j = G'_j \cap \tilde{M}$ , so sehen wir, daß unsere Frage zurückgeführt ist auf die Frage, ob in einem 3-Element zwei Systeme von 2-Elementen mit gemeinsamem Rand ineinander übergeführt werden können mit Hilfe einer Deformation, die auf dem Rand konstant ist.

**(2.5) Definition.** Mit „ $p: M \rightarrow B$ “ bezeichnen wir eine Mannigfaltigkeit, die als  $S^1$ -Bündel mit  $B$  als Basisraum und  $p$  als Bündelprojektion gefasert ist.  $B$  ist eine kompakte, nicht notwendig orientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand.

Ein Unterraum  $X$  in  $M$  heißt „vertikal“, wenn  $X = p^{-1}(p(X))$ .

Ein Unterraum  $X$  in  $M$  heißt „horizontal“, wenn  $p|_X$  eine Einbettung ist.

**(2.6) Lemma.**  $p: M \rightarrow B$  sei ein  $S^1$ -Bündel.  $B$  sei nicht das 2-Element. Dann ist  $\partial M$  inkompressibel.

*Beweis.* Sei zunächst  $B$  orientierbar. Da  $\partial B \neq \emptyset$ , ist  $M$  ein Produktbündel,  $M = B \times S^1$ . Da  $B$  nicht das 2-Element ist, ist für eine Randkurve  $k$  von  $B$ ,  $\ker(H_1(k) \rightarrow H_1(B)) = 0$ , also ist für eine Randfläche  $K$  von  $M$  ebenfalls  $\ker(H_1(K) \rightarrow H_1(M)) = 0$ .  $K$  ist ein Torus, daher  $H_1(K) \approx \pi_1(K)$ ; also ist  $\ker(\pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M)) = 0$ .

Ist  $B$  nicht-orientierbar, dann sei  $B'$  die zweiblättrige orientierbare Überlagerungsfläche;  $B'$  ist kein 2-Element. Es gibt ein Bündel  $p': M' \rightarrow B'$ , so daß  $M'$  eine zweiblättrige Überlagerung von  $M$  ist und daß das offen-

sichtliche Diagramm kommutativ ist. Da ein rand-inkompressibles 2-Element in  $M$  geliftet würde zu einem rand-inkompressiblen 2-Element in  $M'$ , ist damit dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

**(2.7) Lemma.**  $p: M \rightarrow B$  sei ein  $S^1$ -Bündel.  $B$  sei nicht die 2-Sphäre oder projektive Ebene. Dann ist  $M$  irreduzibel.

*Beweis.* Sei zunächst  $M$  geschlossen, dann gibt es nach unserer Voraussetzung über  $B$  in  $B$  eine einfach-geschlossene zweiseitige Kurve  $k$ , die nicht ein 2-Element in  $B$  berandet. Es folgt aus (2.6), daß der Torus  $p^{-1}(k)$  inkompressibel in  $M$  ist. Mit (1.8) ist daher die Behauptung auf den Fall  $\partial M \neq \emptyset$  zurückgeführt.

Sei also  $\partial M \neq \emptyset$ . Seien  $c_1, \dots, c_n$  disjunkte Bögen in  $B$ , die  $B$  in ein (und nur ein) 2-Element aufschneiden, ( $c_j \cap \partial B = \partial c_j$ ). Sei  $C_j = p^{-1}(c_j)$ . Das System von vertikalen Kreisringen  $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$  ist inkompressibel in  $M$ . Denn sei etwa  $D$  ein 2-Element in  $\overset{\circ}{M}$  mit  $D \cap C = \partial D$  und, etwa,  $\partial D$  in  $C_n$ . Wäre  $\partial D$  nicht Rand eines 2-Elements auf  $C_n$ , dann wäre es parallel zu den Randkurven von  $C_n$ , also könnten wir  $D$  mit einem der Teile von  $C_n - \partial D$  zusammensetzen zu einem rand-inkompressiblen 2-Element in  $M$ , im Widerspruch zu (2.6). — Sei  $U(C)$  eine reguläre Umgebung von  $C$  in  $M$ ;  $U(C)$  sei vertikal. Dann ist  $\tilde{M} = \overline{M - U(C)}$  ein  $S^1$ -Bündel über dem 2-Element, also ein Vollring.  $\tilde{M}$  ist irreduzibel nach der Bemerkung (2.1), daher  $M$  nach (1.8).

**(2.8) Satz.**  $p: M \rightarrow B$  sei ein  $S^1$ -Bündel.  $B$  sei nicht die 2-Sphäre oder projektive Ebene.

$G$  sei ein System von inkompressiblen (orientierbaren) Flächen in  $M$ . Keine berandete Komponente von  $G$  sei rand-parallel.

Dann gibt es eine isotope Deformation, nach deren Ausführung entweder (2.8.1) oder (2.8.2) gilt:

**(2.8.1)**  $G$  ist vertikal. Insbesondere ist jede Komponente von  $G$  ein Kreisring oder Torus.

**(2.8.2)**  $p|G$  ist eine Überlagerungsabbildung.

*Beweis.* Wir behandeln zunächst den Fall  $\partial M \neq \emptyset$ . — Die Normierung von  $G$  geschieht in mehreren Schritten.

**1. Schritt.** In der Nähe von  $\partial M$  wird  $G$  so deformiert, daß  $\partial G$  straffgezogen wird; das Resultat können wir folgendermaßen beschreiben: Die Randfläche  $K$  von  $M$  sei dargestellt als Quotientenraum der Euklidischen  $x, y$ -Ebene nach dem Gitter mit ganzzahligen Koordinaten, und zwar so, daß die Projektion  $p|K$  überlagert wird von der Projektion auf die  $x$ -Achse. Dann wird jede Kurve  $G \cap K$  von einer Geraden überlagert.

**2. Schritt.** Sei  $C$  ein inkompressibles System von vertikalen Kreisringen wie im Beweis von (2.7); (wir nehmen im folgenden an, daß  $C \neq \emptyset$ ,

daß also  $M$  kein Vollring ist). Wir reduzieren den Durchschnitt  $G \cap C$  mit Hilfe der in (1.9) beschriebenen Deformationen. Da  $\partial G \cap \partial C$  sicher nicht mehr verkleinert werden kann, können diese Deformationen so gewählt werden, daß sie auf  $\partial M$  nichts ändern. Es folgt aus (1.9), daß es dann in  $G \cap C$  keine Schnittkurve gibt, die auf  $C$  oder  $G$  ein 2-Element berandet. Wir behaupten weiter:

*Ist  $l$  ein Bogen aus  $G \cap C$ , so liegen die Endpunkte von  $l$  in verschiedenen Randkurven von  $C$ .* — Denn sei die Behauptung falsch. Dann sei  $D$  das 2-Element in  $C$  mit  $\partial D \subset l \cup \partial C$ . Wenn nötig, gehen wir zu einem andern  $l$  und andern  $D$  über, es gilt dann  $D \cap G = l$ . Nach (1.10) und einer unserer Voraussetzungen ist  $G$  rand-inkompressibel in  $M$ . Daher gibt es ein 2-Element  $D'$  in  $G$  mit  $\partial D' \subset l \cup \partial G$ . Da  $D' \cap C$  keine geschlossenen Kurven enthält, gibt es ein 2-Element  $D''$  in  $D'$ , so daß  $D'' \cap (C \cup \partial M) = \partial D''$  und daß  $D'' \cap C$  ein einziger Bogen ist.  $D''$  kann nicht Meridianfläche sein in dem aus  $M$  durch Aufschneiden an  $C$  entstehenden Vollring, da es  $C$  nur in einem Bogen trifft: Das zeigt aber, daß die Normierung aus dem ersten Schritt nicht vollständig ist.

3. *Schritt.* Nach dem vorigen Schritt besteht  $G \cap C$  nur aus geschlossenen Kurven (im Innern von  $C$ ), die zu Randkurven von  $C$  parallel sind, und aus Bögen, die nicht rand-parallel sind. Also können wir  $G$  so deformieren, daß  $G \cap C$  bei festgehaltenem  $G \cap \partial C$  straffgezogen wird. Hinterher besteht  $G \cap C$  aus vertikalen geschlossenen Kurven und aus horizontalen Bögen.

4. *Schritt.* Sei  $U(C)$  eine (bezüglich  $G$  kleine) reguläre Umgebung von  $C$  in  $M$ .  $U(C)$  sei vertikal. Sei  $\tilde{M} = (M - U(C))$ , und sei  $\tilde{G} = G \cap \tilde{M}$ .

Die Normierung aus dem dritten Schritt sei auf  $U(C)$  ausgedehnt:  $G \cap U(C)$  besteht dann aus vertikalen Kreisringen und aus horizontalen 2-Elementen.

Nach (1.9) und (2.3) ist jede Komponente von  $\tilde{G}$  entweder ein 2-Element oder ein Kreisring. War jede Randkurve von  $G$  vertikal oder war  $G$  geschlossen, so ist jetzt jede Randkurve von  $\tilde{G}$  vertikal, und  $\tilde{G}$  besteht daher nur aus Kreisringen; da es in  $\tilde{M}$  sicher ein System vertikaler Kreisringe gibt zu vorgegebenem vertikalen Randsystem, ist in diesem Falle mit (2.4) die Behauptung bewiesen.

Wir nehmen also im folgenden an: es gibt eine Randkurve von  $G$ , die in  $\partial M$  nicht homolog ist zu einer vertikalen Kurve. Es gibt also eine Randkurve  $k$  von  $\tilde{G}$ , die nicht vertikal ist. Nach den Normierungen im ersten und dritten Schritt trifft  $k$  die Kreisringe  $\tilde{M} \cap U(C)$  und  $\partial \tilde{M} \cap \partial M$  nur in horizontalen Bögen. Daraus folgt, daß  $k$  nicht homolog null ist in  $\partial \tilde{M}$ . Dasselbe gilt für alle andern Randkurven von  $\tilde{G}$ , die nicht vertikal sind; da  $\partial \tilde{M}$  ein Torus ist und da die Randkurven einander nicht schnei-

den, gilt es für alle Randkurven von  $\tilde{G}$ . Folglich sind die Randkurven von  $\tilde{G}$  in  $\partial\tilde{M}$  sämtlich untereinander parallel. — Wir behaupten weiter:

*Jede Komponente von  $\tilde{G}$  ist ein 2-Element, also eine Meridianfläche in  $\tilde{M}$ .* — Denn sei etwa  $L$  ein Kreisring. Nach (2.3) ist  $L$  parallel zu einem Kreisring  $L'$  in  $\partial\tilde{M}$ . Sei  $\tilde{l}$  eine vertikale Kurve im Innern eines der Kreisringe  $\tilde{M} \cap U(C)$ , und sei  $l$  eine Komponente von  $\tilde{l} \cap L'$ ;  $l$  ist ein nicht randparalleler Bogen in  $L'$ . Da  $L$  und  $L'$  parallel sind, gibt es ein 2-Element  $D$  in  $\tilde{M}$  mit  $D \cap (L \cup L') = \partial D$  und  $D \cap L' = l$ . Gibt es unter den Schnitten  $D \cap \tilde{G}$  geschlossene Kurven, so sind sie zusammenziehbar auf  $\tilde{G}$ , also können wir eine auf  $\tilde{G}$  innerste aufsuchen und das von ihr auf  $D$  berandete 2-Element ersetzen durch das von ihr auf  $\tilde{G}$  berandete 2-Element; also dürfen wir annehmen, es gibt keine. Wegen der Wahl von  $l$  und der Normierung von  $\partial\tilde{G}$  kann kein Bogen  $D \cap \tilde{G}$  rand-parallel auf  $\tilde{G}$  sein: Wir suchen einen  $l$  zunächst liegenden dieser Bögen auf und finden, daß  $\tilde{G}$  rand-kompressibel bezüglich  $\tilde{M} \cap U(C)$  ist, im Widerspruch zu (1.9.3).

$p$  ist bereits lokal homöomorph auf  $G \cap (U(C) \cup \partial M)$ , insbesondere auf  $\partial\tilde{G}$ . Da eine vertikale Kurve auf  $\partial\tilde{M}$  mit der Randkurve einer Meridianfläche die Schnittzahl eins hat, müssen die Randkurven von  $\tilde{G}$  sogar horizontal sein. Also können wir ein System von horizontalen Meridianflächen finden, dessen Rand  $\partial\tilde{G}$  ist. Und nach (2.2) ist  $\tilde{G}$  isotop zu diesem System unter einer Deformation, die auf  $\partial\tilde{M}$  konstant ist.

*Sei nun  $M$  geschlossen.* Sei  $K$  ein inkompressibler vertikaler Torus in  $M$  wie in (2.7). Sei  $G$  so deformiert, daß  $G \cap K$  aus möglichst wenig einfachgeschlossenen Kurven besteht. Anschließend werde  $G$  so deformiert, daß dabei  $G \cap K$  in  $K$  straffgezogen wird, analog dem ersten Schritt oben.

Sei  $U(K)$  eine vertikale reguläre Umgebung von  $K$  in  $M$  (klein bezüglich  $G$ ). Sei  $\tilde{M} = (M - U(K))$ , und  $\tilde{G} = G \cap \tilde{M}$ .

Nach (1.9) sind wir mit  $\tilde{M}$  und  $\tilde{G}$  genau in den Voraussetzungen für den berandeten Fall. Da bei der Normierung von  $\tilde{G}$  in  $\tilde{M}$  jetzt der erste Schritt entfällt, bleibt  $\partial\tilde{G}$  bei den Deformationen von  $\tilde{G}$  fest, d.h. aber, daß wir gerade die gewünschte Normierung von  $G$  in  $M$  erhalten.

**(2.9) Satz.** *Sei  $p: M \rightarrow B$  ein  $S^1$ -Bündel. Sei  $B$  orientierbar.  $G$  sei ein System von Flächen in  $M$ . Es sei  $p|G$  lokal homöomorph.  $G'$  sei eine Komponente von  $G$ .  $p|G'$  habe die Blätterzahl  $\alpha$ .*

*Dann gibt es eine (semilineare) Abbildung  $H: M \times S^1 \rightarrow M$  mit folgenden Eigenschaften (dabei werde die 1-Sphäre  $S^1$  identifiziert mit den reellen Zahlen modulo den ganzen Zahlen):*

**(2.9.1)**  $H|x \times S^1$ , für  $x \in M$ , ist ein Homöomorphismus von  $S^1$  auf die  $x$  enthaltende Faser.

**(2.9.2)**  $H(y) = H|M \times y$ , für  $y \in S^1$ , ist ein Homöomorphismus von  $M$  auf  $M$ .

(2.9.3)  $H$  ist additiv in  $y$ , d.h.  $H(y_1 + y_2) = H(y_1) \circ H(y_2)$ .

(2.9.4)  $H(1/\alpha)|G'$  erzeugt die Decktransformationengruppe für  $p|G'$ .

(2.9.5) Eine Bündelprojektion von  $M$  auf die 1-Sphäre (die diesmal identifiziert wird mit den reellen Zahlen modulo  $1/\alpha$ ) ist dadurch definiert, daß einem Punkt  $x$  in  $M$  genau dann die Restklasse  $y \bmod. 1/\alpha$  zugeordnet wird, wenn  $x \in H(y)(G')$ .

(2.9.6) Sämtliche Komponenten von  $G$  sind Fasern der in (2.9.5) definierten Faserung.

*Beweis.* Sei  $\omega$  die Anzahl der Komponenten von  $G$ . Die Anzahl der in einer Faser liegenden Punkte von  $G$  hängt nicht von der Faser ab; sie ist  $=\omega\alpha$ . Wir orientieren  $M$  und  $B$ : Dann ist eine Orientierung der Fasern eindeutig definiert. Wir schneiden  $M$  an  $G$  auf;  $M$  zerfällt dadurch in Schichten, in denen die Faserung von  $M$  eine Faserung als Linienbündel mit orientierten Fasern, also als Produktbündel induziert.

Wir parametrisieren diese Linienbündel als  $G'' \times [0, (\omega\alpha)^{-1}]$ , wobei  $G'' \times 0$  die „untere“ Randfläche sei.

Für  $x \in G''$  und  $0 \leq y \leq (\omega\alpha)^{-1}$  definieren wir  $H(y)(x \times 0) = x \times y$ .

Wegen (2.9.3) ist dann  $H$  wohldefiniert. — Die übrigen Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Konstruktion.

(2.10) **Lemma.** Sei  $M$  das Produktbündel über einer gelochten 2-Sphäre.  $M$  habe  $m+1$  Randflächen.

$F$  und  $G$  seien inkompressible Flächensysteme in  $M$ , die zum Typ (2.8.2) gehören.

In jeder der ersten  $m$  Randflächen von  $M$  seien die darin liegenden Randkurven von  $F$  und  $G$  zueinander homolog.

Dann gibt es eine Deformation von  $F$ , nach deren Ausführung  $F \cap G = \emptyset$ .

(2.11) **Folgerung.** Jede Komponente von  $F$  ist isotop zu jeder Komponente von  $G$ . — Denn nach (2.10) dürfen wir annehmen, daß  $F$  und  $G$  disjunkt sind, daß also  $F \cup G$  ein Flächensystem vom Typ (2.8.2) ist: Die Deformation wurde in (2.9) angegeben.

*Beweis von (2.10).* Da die Komponenten von  $F$  bzw. die von  $G$  untereinander parallel sind, (2.9), können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $F$  und  $G$  nur je eine Komponente haben.

Ein Argument aus dem Beweis zu (4.2), („ $\alpha$  ist das kleinste gemeinsame Vielfache von je  $n-1$  der  $\alpha_j$ “), zeigt, daß die beiden Überlagerungen  $p|F$  und  $p|G$  von  $B$  gleiche Blätterzahl haben.

Wir gehen zurück in den Beweis von (2.8), nach dem dritten Normierungsschritt.  $T_1, \dots, T_{m+1}$  seien die Randflächen von  $M$ . Wir können uns das System der vertikalen Kreisringe  $C = C_1 \cup \dots \cup C_m$  so gewählt denken, daß je eine Randkurve von  $C_j$  in  $T_j$  und  $T_{j+1}$  liegt.

Sei nun  $F$  bereits so deformiert, daß

$$F \cap G \cap (T_1 \cup C_1 \cup T_2 \cup \dots \cup C_{j-2} \cup T_{j-1}) = \emptyset$$

für ein  $j \leq m$ , und daß in  $T_{j-1}$  je zwei benachbarte Randkurven von  $G$  durch eine Randkurve von  $F$  getrennt werden. Da  $T_j$  zu den ersten  $m$  Randflächen von  $M$  gehört, sind die in  $T_j$  liegenden Randkurven von  $F$  und  $G$  zueinander isotop; da  $F$  und  $G$  gleiche Blätterzahl über  $B$  haben, liegen in  $T_j$  also auch gleich viele Randkurven von  $F$  und  $G$ . Folglich können wir durch eine „vertikale“ Isotopie (d. h. eine solche, die jeden Punkt nur innerhalb seiner Faser bewegt) von  $F$  in der Nähe von  $C_{j-1} \cup T_j$  erreichen, daß (zusätzlich zur Induktionsvoraussetzung) gilt: Die in  $T_j$  liegenden Randkurven von  $F$  und  $G$  sind zueinander punktfremd und trennen sich gegenseitig, und einer der Bögen  $F \cap C_{j-1}$  ist punktfremd zu  $G$ . Mit einem „Kästchenargument“ folgt nun, daß die Endpunkte der übrigen Bögen  $F \cap C_{j-1}$  so liegen, daß wir eine vertikale Isotopie von  $F$  in der Nähe von  $C_{j-1}$ , aber konstant auf  $\partial C_{j-1}$ , finden können, so daß schließlich  $F \cap G \cap (T_1 \cup C_1 \cup T_2 \cup \dots \cup C_{j-1} \cup T_j) = \emptyset$ .

Mit demselben Argument können wir für  $T_{m+1}$  schließen, sobald wir wissen, daß eine in  $T_{m+1}$  liegende Randkurve  $k$  von  $F$  in  $T_{m+1}$  homolog ist zu einer in  $T_{m+1}$  liegenden Randkurve  $l$  von  $G$ . — Angenommen  $k$  und  $l$  seien nicht homolog, dann haben sie von null verschiedene Schnittzahl. Wir orientieren  $F$  und  $G$  und versehen die Randkurven mit der induzierten Orientierung. Da  $p|F$  und  $p|G$  Überlagerungen sind, sind die Homologieklassen  $[F \cap T_{m+1}]$  und  $[G \cap T_{m+1}]$  von null verschiedene Vielfache von  $[k]$  bzw.  $[l]$ , also  $[F \cap T_{m+1}] \cdot [G \cap T_{m+1}] \neq 0$ , (Schnittzahl in  $T_{m+1}$ ). Es folgt, daß auch die Schnittzahl in  $\partial M$ ,  $[F \cap T_{m+1}] \cdot [\partial G]$  nicht null ist; die ist aber bis höchstens aufs Vorzeichen gleich der Schnittzahl von  $[F \cap T_{m+1}] \in H_1(M)$  mit  $[G] \in H_2(M, \partial M)$ . Da für  $j \leq m$  der Durchschnitt  $F \cap G \cap T_j$  leer ist, ist die letzte Schnittzahl gleich der von  $[\partial F] \in H_1(M)$  mit  $[G] \in H_2(M, \partial M)$ , die ist aber gleich null.

Gehen wir wieder in den Beweis von (2.8) zurück, so sehen wir, daß unser Problem reduziert ist auf folgende Aufgabe:  $\tilde{F}$  und  $\tilde{G}$  seien Systeme von Meridianflächen in einem Vollring  $\tilde{M}$ ; es sei  $\partial \tilde{F} \cap \partial \tilde{G} = \emptyset$ . Dann sei  $\tilde{F}$  bei festgehaltenem Rand so zu deformieren, daß  $\tilde{G}$  nicht mehr getroffen wird. — Daß das geht, folgt aus (2.2).

### 3. Das $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband

In diesem Paragraphen ist  $p: M \rightarrow B$  das Produktbündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre. Die Randflächen von  $M$  bezeichnen wir mit  $T_1, T_2, T_3$ .

Sei  $\tilde{G}$  eine Fläche in  $M$  mit den Eigenschaften:  $p|_{\tilde{G}}$  ist eine zwei-blättrige Überlagerung; in  $T_1$  und  $T_2$  liegt je eine Randkurve von  $\tilde{G}$ ; in  $T_3$  liegen zwei Randkurven von  $\tilde{G}$ . (Es gibt unendlich viele, paarweise

nicht isotope Flächen dieser Art in  $M$ ; wir nehmen irgendeine.)  $\tilde{G}$  ist eine 4-fach gelochte 2-Sphäre.

Wir konstruieren die Mannigfaltigkeit  $Q$  folgendermaßen: Seien  $V_1$  und  $V_2$  Vollringe. Wir kleben  $V_1$  und  $V_2$  an  $M$  an, indem wir  $\partial V_j$  so mit  $T_j$ ,  $j=1, 2$ , identifizieren, daß die Kurve  $\tilde{G} \cap T_j$  zusammenfällt mit der Randkurve einer Meridianfläche von  $V_j$ .

Aus jedem der  $V_j$  kleben wir eine Meridianfläche an  $\tilde{G}$  an, und erhalten so die Fläche  $G$  in  $Q$ ;  $G$  ist ein Kreisring.

**(3.1) Lemma.**  $Q$  ist homöomorph zu dem  $S^1$ -Bündel mit orientierbarem Totalraum über dem Möbiusband.

*Beweis.* Nach (2.9) ist  $M$  ein Bündel über  $S^1$  mit  $\tilde{G}$  als typischer Faser. Diese Faserung induziert eine Faserung der  $\partial V_j$  durch Meridiankurven, und diese wiederum können wir erweitern zu einer Faserung der  $V_j$  durch Meridianflächen. Durch Zusammensetzen der Fasern erhalten wir eine Kreisring-Faserung von  $Q$  über  $S^1$  (mit  $G$  als typischer Faser). Es gibt nur zwei Kreisring-Bündel über  $S^1$  mit orientierbarem Totalraum: Das eine läßt sich in natürlicher Weise fasern als  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband, das andere als  $S^1$ -Bündel über dem Kreisring.  $Q$  ist nicht das letztere, da  $Q$  nur eine Randfläche hat.

In  $B$  sei  $k$  ein Bogen, dessen Endpunkte in  $p(T_3)$  liegen, und der  $p(T_1)$  und  $p(T_2)$  trennt. Sei  $K$  der Kreisring  $K=p^{-1}(k)$  in  $M$ . Bei der Einbettung von  $M$  in  $Q$  wird  $K$  zu einem Kreisring in  $Q$ .

**(3.2) Lemma.** Sei  $F$  eine inkompressible Fläche in  $Q$ ;  $F$  sei nicht randparallel. Dann ist  $F$  ein Kreisring, und  $F$  ist entweder isotop zu dem Kreisring  $K$  oder zu dem Kreisring  $G$ .

*Beweis.* Nach (3.1) und (2.7) ist  $Q$  irreduzibel. Daher können wir (1.9) anwenden, indem wir annehmen, daß  $F \cap (T_1 \cup T_2)$  aus möglichst wenig Kurven besteht.

1. Fall.  $F$  liegt in  $M$ . Da  $F$  nicht alle Randflächen von  $M$  trifft, ist es vom Typ (2.8.1), also in  $M$  isotop zu einem vertikalen Torus oder Kreisring. Ein vertikaler Torus in  $M$  ist parallel zu  $T_1$  oder  $T_2$  oder  $T_3$ : Die beiden ersten Typen sind kompressibel in  $Q$ , der dritte Typ ist randparallel in  $Q$ . Ein vertikaler Kreisring in  $M$ , dessen Rand in  $T_3$  liegt, ist entweder isotop zu  $K$  oder randparallel in  $M$  und a fortiori in  $Q$ .

2. Fall.  $F \cap (T_1 \cup T_2) \neq \emptyset$ . Nach (1.9) sind die Flächensysteme  $F \cap V_1$  in  $V_1$  und  $F \cap V_2$  in  $V_2$  inkompressibel und nicht randparallel, sie bestehen nach (2.3) aus Meridianflächen. Es ist also einerseits  $\tilde{F} = F \cap M$  zusammenhängend, andererseits jede Kurve  $\tilde{F} \cap T_j$  in  $T_j$  homolog zu einer Kurve  $\tilde{G} \cap T_j$ , für  $j=1, 2$ . Nach (2.11) ist also  $\tilde{F}$  in  $M$  isotop zu  $\tilde{G}$ : Wir führen die Deformation aus, und können sie dann wegen (2.2) auf die  $F \cap V_j$  ausdehnen.

**(3.3) Lemma.** Sei  $p': M' \rightarrow B'$  das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. Bis auf Isotopie gibt es genau zwei inkompressible und nicht rand-parallele Flächen,  $F_1$  und  $F_2$ , in  $M'$ .

$F_1$  ist ein vertikaler Kreisring;  $F_1$  zerlegt  $M'$  nicht.

$p'|F_2$  ist eine zweiblättrige Überlagerung; die Randkurven von  $F_2$  sind horizontal;  $F_2$  zerlegt  $M'$ .

Unter dem Homöomorphismus (3.1) entspricht  $F_1$  dem Kreisring  $G$  aus (3.2), und  $F_2$  dem Kreisring  $K$  aus (3.2).

Es gibt eine Einbettung von  $B'$  als Schnitt in  $M'$ . Dabei ist  $\partial B'$  bis auf Isotopie eindeutig bestimmt, (unabhängig auch davon, wie  $M'$  als  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband gefasert ist).  $\partial B'$  ist isotop zu den Randkurven von  $F_2$ .

*Beweis.* Wegen (3.2) genügt es, die Existenz von  $F_1$  und  $F_2$  nachzuweisen. — Der inkompressible vertikale Kreisring  $F_1$  wurde im Beweis zu (2.7) angegeben; er ist nicht rand-parallel, da er nicht zerlegt. — Man konstruiert  $M'$  am bequemsten aus dem cartesischen Produkt eines Streifens mit der 1-Sphäre, indem man den Streifen zum Möbiusband schließt und dabei den  $S^1$ -Faktor spiegelt: Das liefert den Schnitt gleich mit. Sei also  $B'$  als Schnitt in  $M'$  eingebettet. Sei  $U(B')$  eine reguläre Umgebung von  $B'$  in  $M'$ . Es sei dann  $F_2 = (\partial U(B') - \partial M')$ .  $F_2$  ist inkompressibel nach dem Argument aus dem Beweis zu (2.7). Wäre  $F_2$  parallel zu einem Kreisring in  $\partial M'$ , dann berandete  $F_2$  zusammen mit diesem Kreisring einen Vollring, und es gäbe in diesem Vollring eine Meridianfläche, die  $F_2$  in nur einem Bogen trafe: Das ist aber hier nicht möglich, da die Inklusionen  $H_1(F_2) \rightarrow H_1(U(B'))$  und  $H_1(F_2) \rightarrow H_1(\overline{M' - U(B')})$  beide den Index 2 haben. — Eine Faser in  $\partial M'$  trifft  $\partial F_2$  in zwei Punkten; da sie beide Randkurven trifft, sind die Randkurven horizontal.

Daß  $F_1$  dem Kreisring  $G$  aus (3.2) und  $F_2$  dem Kreisring  $K$  aus (3.2) entspricht, folgt daraus, daß  $F_1$  und  $G$  nicht zerlegen, und daß  $F_2$  und  $K$  zerlegen.

Nach Konstruktion von  $F_2$  ist  $\partial B'$  in  $\partial M'$  isotop zu den Randkurven von  $F_2$ . Da jede Einbettung von  $B'$  als Schnitt in  $M'$  (auch als Schnitt zu einer andern Faserung) einen Kreisring vom Typ  $F_2$  liefert, und da  $F_2$  bis auf Isotopie eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung über  $\partial B'$ . (Aber es gibt zwei Einbettungen von  $B'$  als Schnitt in  $M'$ , die nicht einmal homotop sind.)

#### 4. Planare Flächen in $S^1$ -Bündeln

**(4.1) Definition.** Eine Fläche heißt „planar“, wenn sie das Geschlecht 0 hat, d. h. wenn sie in die 2-Sphäre eingebettet werden kann.

**(4.2) Lemma.**  $p: M \rightarrow B$  sei ein  $S^1$ -Bündel. Es sei  $B$  nicht die 2-Sphäre, die projektive Ebene oder das 2-Element.

*F sei eine inkompressible und nicht rand-parallele Fläche in M. F sei planar. Dann gibt es eine Deformation von F, so daß hinterher einer der drei folgenden Fälle vorliegt:*

**(4.2.1)** *F ist ein vertikaler Kreisring.*

**(4.2.2)** *B ist die (mehrfach) gelochte 2-Sphäre. M hat n Randflächen, und es gibt n-2 Randflächen von M, so daß die darin liegenden Randkurven von F horizontal sind.*

**(4.2.3)** *B ist die (mehrfach) gelochte projektive Ebene, und jede Randkurve von F ist horizontal.*

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, daß *F* von einer der beiden in Satz (2.8) beschriebenen Formen ist. Die erste ist oben aufgeführt, also nehmen wir an,  $p|F: F \rightarrow B$  ist eine Überlagerung.

$p|F$  hat endliche Blätterzahl.  $H_1(\partial F) \rightarrow H_1(F)$  ist surjektiv, da *F* planar ist. Also hat  $H_1(\partial B) \rightarrow H_1(B)$  endlichen Cokern; mit anderen Worten: Die Fläche, die aus *B* durch Ausfüllen der Löcher mit 2-Elementen entsteht, hat endliche 1. Homologiegruppe; sie ist daher eine 2-Sphäre oder projektive Ebene.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß *B* eine mindestens dreifach gelochte 2-Sphäre ist.

Die Überlagerung  $p|F: F \rightarrow B$  ist regulär. Die Decktransformationen-Gruppe ist zyklisch,  $\alpha$  sei die Ordnung. Da  $Z_\alpha$ , die zyklische Gruppe der Ordnung  $\alpha$ , eine abelsche Gruppe ist, ist  $p|F: F \rightarrow B$  bis auf Äquivalenz gekennzeichnet durch den Homomorphismus  $H_1(B) \rightarrow Z_\alpha$ , den wir durch Faktorisieren von  $\pi_1(B) \rightarrow Z_\alpha$  erhalten; dieser Homomorphismus ist surjektiv.

Mit  $a_j$  bezeichnen wir die *j*-te Randkurve von *B*,  $j=1, \dots, n$ , und mit demselben Symbol das von  $a_j$  repräsentierte Element von  $H_1(B)$ . Bei geeigneter Orientierung der  $a_j$  gilt dann:

$$H_1(B) \approx \{a_1, \dots, a_n; a_1 + \dots + a_n = 0\}.$$

Mit  $\gamma_j$  bezeichnen wir die Anzahl der über  $a_j$  liegenden Randkurven von *F*.  $\gamma_j$  teilt  $\alpha$ , und  $\alpha_j = \alpha/\gamma_j$  ist die Ordnung, mit der  $a_j$  von einer darüberliegenden Randkurve von *F* überlagert wird.

Sei  $\bar{a}_j$  das Bild von  $a_j$  unter dem Homomorphismus  $H_1(B) \rightarrow Z_\alpha$ . Die von  $\bar{a}_j$  erzeugte Untergruppe hat die Ordnung  $\alpha_j$  und den Index  $\gamma_j$ .

$H_1(B)$  wird von je  $n-1$  der  $a_j$  erzeugt, daher  $Z_\alpha$  von je  $n-1$  der  $\bar{a}_j$ . Daher haben keine  $n-1$  der  $\gamma_j$  einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler, oder mit anderen Worten:  $\alpha$  ist das kleinste gemeinsame Vielfache von je  $n-1$  der  $\alpha_j$ .

Unsere Behauptung ist zunächst, daß für mindestens eine Randfläche von *M* die darin liegenden Randkurven von *F* horizontal sind; das ist äquivalent zu der Behauptung, daß  $\alpha_j = 1$  für mindestens ein *j*.

Bezeichne  $\chi$  die Eulersche Charakteristik. Es ist  $\chi(F) = \alpha\chi(B) = \alpha(2-n)$ , andererseits  $\chi(F) = 2 - (\text{Anzahl der Randkurven von } F) = 2 - (\gamma_1 + \dots + \gamma_n)$ , also  $\alpha(n-2) + 2 - \sum \gamma_j = 0$ .

Sei zunächst  $n \geq 4$ , und es werde angenommen, daß  $\alpha_j > 1$ , also  $\gamma_j \leq \alpha/2$  für alle  $j$ . Es folgte, daß  $\alpha(n-2) + 2 - \sum \gamma_j \geq \alpha(n-2) + 2 - n\alpha/2 = \alpha(n/2 - 2) + 2 > 0$ , was der obigen Gleichung widerspricht.

Für  $n=3$  lautet die Gleichung:  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha + 2$ . Nach dem oben Gezeigten sind die  $\gamma_j$  paarweise teilerfremd. Da  $\gamma_j$  Teiler von  $\alpha$  ist, folgt  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \leq \alpha$ , und schließlich  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + 2$ . Nachprüfen zeigt, daß diese Ungleichung nur erfüllbar ist, wenn mindestens zwei der  $\gamma_j$ , etwa  $\gamma_1$  und  $\gamma_2 = 1$  sind. Es ist also  $1 + 1 + \gamma_3 = \alpha + 2$ ; daher  $\alpha_3 = \alpha/\gamma_3 = 1$ .

Die vollständige Behauptung folgt jetzt durch Induktion über die Anzahl der Randflächen: indem wir die Randfläche, deren Existenz wir soeben nachgewiesen haben, in der richtigen Weise mit einem Vollring verschließen,  $F$  durch Meridianflächen aus diesem Vollring ergänzen, und nun die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Sei nun  $B$  die gelochte projektive Ebene. Hat  $M$  nur eine Randfläche, so ist unsere Behauptung bereits in (3.3) bewiesen.  $M$  habe also die Randflächen  $T_1, \dots, T_n$ ,  $n \geq 2$ . Seien  $C_1, \dots, C_{n-1}$  disjunkte vertikale Kreisringe in  $M$ , so daß je eine Randkurve von  $C_j$  in  $T_j$  und  $T_{j+1}$  liegt. Sei

$$N = U(T_1 \cup C_1 \cup T_2 \cup \dots \cup C_{n-1} \cup T_n)$$

eine vertikale reguläre Umgebung.  $N$ , mit der von  $M$  induzierten Faserung, ist das Produktbündel über der  $(n+1)$ -fach gelochten 2-Sphäre;  $(\bar{M} - N)$  ist das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband.

Wir wenden Satz (1.9) auf  $F$  an, indem wir annehmen, daß der Durchschnitt mit der Fläche  $N \cap \bar{M} - N = \partial(\bar{M} - N)$  aus möglichst wenig Kurven besteht. Nach (3.3) besteht dann  $F \cap \bar{M} - N$  aus Kreisringen, deren Randkurven in  $\partial(\bar{M} - N)$  entweder isotop zu vertikalen oder zu horizontalen Kurven sind. Sind diese Kurven isotop zu vertikalen Kurven, so zeigt eine Anwendung von (2.8) auf  $F \cap N$ , daß die  $\partial F$  in  $\partial M$  isotop zu vertikalen Kurven sind, und Nachschauen in (2.8) zeigt, daß  $F$  in  $M$  isotop zu einem vertikalen Kreisring ist.

Also nehmen wir an, die  $F \cap \partial(\bar{M} - N)$  sind horizontal: Ist nun eine Komponente von  $F \cap N$  nicht isotop in  $N$  zu einer horizontalen Fläche, so trifft das auch für alle andern zu, da  $F \cap N$  in  $N$  ein Flächensystem vom Typ (2.8.2) ist; also hat in diesem Falle jede Komponente von  $F \cap N$  mindestens zwei in  $N \cap \bar{M} - N$  liegende Randkurven.

Schauen wir nun nach, wie  $F$  aus den Teilen  $F \cap N$  und den Kreisringen  $F \cap \bar{M} - N$  zusammengesetzt ist, so finden wir zwei Möglichkeiten: Entweder wir beginnen mit einer Komponente aus  $F \cap N$ , hängen an sie einen Kreisring aus  $F \cap \bar{M} - N$  an, an diesen wieder eine andere Komponente

aus  $F \cap N$ , daran einen andern Kreisring aus  $F \cap (\bar{M} - N)$ , usw. ohne Ende: Oder aber, irgendwann sind alle in  $N \cap (\bar{M} - N)$  liegenden Randkurven der benutzten Teile wirklich aufgebraucht, dann hat aber  $F$  sicher nicht das Geschlecht 0.

### 5. Homöomorphismen von $S^1$ -Bündeln

**(5.1) Lemma.** *Sei  $C$  ein Kreisring.  $C$  sei auf zwei Arten als  $S^1$ -Bündel gefasert, d.h. es seien Bündelprojektionen  $p_j: C \rightarrow I$  gegeben,  $j=1, 2$ . Dann gibt es eine isotope Deformation  $\psi_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , von  $C$ , die die eine Faserung in die andere überführt; die Deformation kann so gewählt werden, daß sie auf  $\partial C$  konstant ist.*

*Beweis.* Da es nur ein  $S^1$ -Bündel über  $I$  gibt, gibt es einen Homöomorphismus  $\varphi: C \rightarrow C$ , der die eine Faserung in die andere überführt;  $p_1 \circ \varphi = p_2$ . Wir können  $\varphi$  so wählen, daß  $\varphi|_{\partial C} = \text{id}|_{\partial C}$ . Unter der Bedingung  $\varphi|_{\partial C} = \text{id}|_{\partial C}$  ist für einen Bogen  $l$ , der die beiden Randkurven von  $C$  verbindet, eine „Schnittzahl“ von  $l$  mit  $\varphi(l)$  definiert. Wir können  $\varphi$  so wählen, daß diese Schnittzahl null ist.  $\varphi$  ist dann in die Identität deformierbar mit einer Deformation, die auf  $\partial C$  konstant ist. Wir setzen  $\psi_1 = \varphi$ , und nehmen als  $\psi_\tau$  die inverse der soeben erwähnten Deformation.

**(5.2) Lemma.** *Ist ein Torus auf zwei Arten gefasert, und ist eine Faser  $k$  der einen Faserung homolog zu einer Faser  $k'$  der andern Faserung, so gibt es eine Deformation des Torus, die die eine Faserung in die andere überführt.*

*Beweis.* Wir deformieren die zweite Faserung so, daß  $k = k'$ , schneiden dann an  $k$  auf, und wenden (5.1) an.

**(5.3) Lemma.** *Sei der Vollring  $V$  auf zwei Arten als  $S^1$ -Bündel gefasert, aber so, daß die induzierten Faserungen auf  $\partial V$  übereinstimmen. Dann gibt es eine auf  $\partial V$  konstante isotope Deformation von  $V$ , die die eine Faserung in die andere überführt.*

*Beweis.* Es gibt einen Homöomorphismus  $\varphi: V \rightarrow V$ , der die eine Faserung in die andere überführt.  $\varphi$  kann so gewählt werden, daß  $\varphi|_{\partial V} = \text{id}|_{\partial V}$ . (\*) Es gibt dann eine auf  $\partial V$  konstante isotope Deformation von  $\varphi$  in die Identität. Mit dieser Deformation führen wir die zweite Faserung in die erste über.

*Beweis von (\*).* Sei  $F$  eine Meridianfläche in  $V$ . Nach (2.2) gibt es eine auf  $\partial V$  konstante Deformation von  $\varphi$ , so daß  $\varphi(F) = F$ . Es gibt dann weiter eine auf  $\partial V$  konstante Deformation von  $\varphi$ , die auf  $F$  eine Deformation von  $\varphi|_F$  nach  $\text{id}|_F$  induziert. — Schneiden wir nun  $V$  an  $F$  auf, so ist unser Problem darauf zurückgeführt, ob ein Homöomorphismus eines 3-Elements auf sich, der auf dem Rande die Identität ist, in die

Identität deformierbar ist mit einer auf dem Rande konstanten Deformation.

**(5.4) Bemerkung.** Lemma (5.3) bleibt richtig, wenn man die Worte „als  $S^1$ -Bündel“ ersetzt durch „im Seifertschen Sinne“. – Im Beweis hat man nur die Klassifikation von  $S^1$ -Bündeln über dem 2-Element zu ersetzen durch die Tatsache, daß im Seifertschen Sinne gefaserte Vollringe dann fasertreu homöomorph sind, wenn es einen Homöomorphismus der Randflächen aufeinander gibt, der Fasern in Fasern und Meridiankurven in Meridiankurven überführt, [12], S. 153–154.

**(5.5) Satz.**  $p: M \rightarrow B$  und  $p': M' \rightarrow B'$  seien  $S^1$ -Bündel.  $B$  oder  $B'$  sei nicht: 2-Sphäre, projektive Ebene, 2-Element oder Kreisring. Von den Bündeln über dem Torus sei  $S^1 \times S^1 \times S^1$  ausgeschlossen, und von den Bündeln über dem Kleinschen Schlauch dasjenige, das einen Schnitt besitzt.

$\varphi: M \rightarrow M'$  sei ein Homöomorphismus.

Dann gibt es einen Homöomorphismus  $\psi: M \rightarrow M'$  mit den Eigenschaften

a)  $\psi$  ist isotop zu  $\varphi$ .

b) Es gibt einen Homöomorphismus  $p(\psi): B \rightarrow B'$ , so daß  $p' \circ \psi = p(\psi) \circ p$ ; mit anderen Worten:  $\psi$  bildet jede Faser auf eine Faser ab.

*Beweis.* Sei zunächst  $\partial M \neq \emptyset$ .

Sei  $C$  ein System vertikaler Kreisringe, so daß  $M$  von  $C$  in einen Vollring aufgeschnitten wird. Keine Komponente von  $C$  ist kompressibel oder rand-parallel (das erste im Beweis zu (2.7) gezeigt, das zweite ist klar, da  $C$  nicht zerlegt). Also ist auch keine Komponente von  $\varphi(C)$  kompressibel oder rand-parallel in  $M'$ . Daher können wir  $\varphi$  so deformieren, daß  $\varphi(C)$  vertikal wird: Ist  $M'$  nicht das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband, so folgt das unmittelbar aus (4.2); ist  $M'$  dieses Bündel (und dann aus Homologiegründen auch  $M$ ), so zeigt (3.3), daß ein vertikaler Kreisring nur auf einen zu einem vertikalen isotopen abgebildet werden kann.

Wir wenden nun (5.1) an auf die Kreisringe  $\varphi(C)$  und auf die Kreisringe, in die  $\partial M'$  durch  $\varphi(\partial C)$  zerschnitten wird, und finden, daß die durch  $\varphi$  übertragene Faserung deformiert werden kann in die durch die Einbettung induzierte Faserung, durch eine Deformation dieser Kreisringe, die auf  $\varphi(\partial C)$  konstant ist.

Da es eine Deformation von  $\varphi$  gibt, die die gerade beschriebene Deformation von  $\varphi(C \cup \partial M)$  induziert, und da wir die Normierung auf eine Umgebung erweitern können, haben wir: Es gibt eine Deformation von  $\varphi$ , nach deren Ausführung  $\varphi$  jede Faser aus einer vertikalen Umgebung  $U(C \cup \partial M)$  auf eine Faser abbildet (d. h. auf eine Faser der durch die Einbettung von  $\varphi(U(C \cup \partial M))$  in  $M'$  induzierten Faserung).

Zum Schluß wenden wir (5.3) an und absorbieren die Isotopie in eine Deformation von  $\varphi$ .

Sei  $M$  geschlossen. Da  $B$  nicht die 2-Sphäre oder projektive Ebene ist, gibt es in  $M$  einen nicht-zerlegenden vertikalen Torus  $T$ ; nach (2.6) ist  $T$  inkompressibel.

1. Fall.  $\varphi(T)$  ist in  $M'$  nicht isotop zu einem vertikalen Torus. Nach (2.8) dürfen wir annehmen, daß  $p'|\varphi(T)$  eine Überlagerung ist. Folglich ist  $B'$  ein Torus oder Kleinscher Schlauch.

Sei  $T'$  ein nicht-zerlegender vertikaler Torus in  $M'$ . Von den Kreisringen, in die  $\varphi(T)$  durch  $T'$  zerschnitten wird, sei  $F$  einer. Die Kurven  $\partial F$  sind parallel in  $T'$ ; sie sind nicht vertikal.

Das Bündel  $M'$  können wir beschreiben durch eine Verklebung der Randflächen von  $T' \times I$ , also durch einen Isomorphismus  $H_1(T') \rightarrow H_1(T')$ . Sei  $z_1, z_2$  ein Erzeugendensystem von  $H_1(T')$ , dabei sei  $z_1$  die Homologieklass einer orientierten Faser. Dann hat der Isomorphismus die Form  $(z_1, z_2) \rightarrow (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2 + b z_1)$ , mit  $\varepsilon = +1$ , bzw.  $-1$ , wenn  $B'$  der Torus bzw. der Kleinsche Schlauch ist;  $b$  ist eine ganze Zahl. Die Existenz des Kreisrings  $F$  zeigt, daß  $b=0$ , daß also  $M'$  eines der ausgeschlossenen Bündel ist. — Um  $M$  zu bestimmen, betrachten wir  $\varphi^{-1}(T')$ , und schließen (möglicherweise erst im 2. Fall), daß auch  $M$  eines der ausgeschlossenen Bündel ist.

2. Fall.  $\varphi(T)$  ist in  $M'$  isotop zu einem vertikalen Torus. Wir führen die Deformation aus. Ist die durch  $\varphi$  nach  $\varphi(T)$  transportierte Faserung nicht isotop zu der von  $M'$  induzierten, so folgt aus der für berandete Bündel bereits bewiesenen Behauptung, daß die aus  $M'$  durch Aufschneiden an  $\varphi(T)$  erhaltene Mannigfaltigkeit nur Torus  $\times$  Intervall sein kann. Wie im ersten Fall folgt, daß  $M'$  eines der verbotenen Bündel ist.

Also nehmen wir an, daß die beiden Faserungen auf  $\varphi(T)$  übereinstimmen. Wir schneiden  $M$  und  $M'$  an  $T$  und  $\varphi(T)$  auf zu  $M_1$  und  $M'_1$ . Nach dem ersten Teil können wir den induzierten Homöomorphismus  $\varphi_1: M_1 \rightarrow M'_1$  in einen faserstreuen Homöomorphismus deformieren, und zwar geht das auch noch für den oben nicht erfaßten Fall, daß  $M_1$  homöomorph ist zu Torus  $\times$  Intervall, da wir ja hier in die Voraussetzungen mit aufnehmen können, daß  $\varphi_1|\partial M_1$  faserstreu ist. — Nachprüfen der Argumente aus dem ersten Teil zeigt, daß wir die Deformation von  $\varphi_1$  so wählen können, daß sie auf  $\partial M_1$  konstant ist: Also existiert die gesuchte Deformation von  $\varphi$ .

(5.6) *Definition.* Sei  $p: M \rightarrow B$  ein  $S^1$ -Bündel.  $M$  sei orientiert.  $T_1, \dots, T_n$  seien die Randflächen von  $M$ ; wir versehen die  $T_j$  mit der von  $M$  induzierten Orientierung.

(5.6.1) Ein *Koordinatensystem in  $T_j$*  ist ein Paar von Homologieklassen  $[a_j]$  und  $[b_j]$  in  $H_1(T_j)$ , so daß  $[a_j]$  und  $[b_j]$  von orientierten Kurven  $a_j$  und  $b_j$  in  $T_j$  repräsentiert werden, und so daß gilt:

$a_j$  ist horizontal;  $b_j$  ist vertikal;  $b_j$  und  $a_j$  haben – in dieser Reihenfolge – die Schnittzahl  $+1$  in  $T_j$  (oder, was dasselbe ist: Schneiden wir  $T_j$  an  $b_j \cup a_j$  auf, so erhalten wir ein 2-Element, dessen von  $T_j$  induzierte Orientierung auf seinem Rand die Orientierung  $b_j a_j b_j^{-1} a_j^{-1}$  induziert.)

**(5.6.2)** Sind Koordinatensysteme in allen Randflächen von  $M$  gegeben, so heißen sie ein *Koordinatensystem für  $\partial M$* , wenn folgendes gilt:

**a)** Es gibt eine Einbettung der Basis als Schnitt in  $M$ , so daß (als Punktmenge)  $\partial B = \bigcup a_j$ .

**b)** Ist  $B$  orientierbar, dann sind die  $b_j$  „gleich orientiert“, d.h. in  $M$  homolog.

**(5.7) Lemma.** Zu den unten angegebenen Änderungen eines Koordinatensystems gibt es Homöomorphismen von  $M$  auf sich (orientierungsumkehrend in den beiden ersten Fällen, orientierungserhaltend in den übrigen), die diese Änderungen induzieren.

**(5.7.1)**  $b_j \rightarrow -b_j$ ;  $a_j \rightarrow +a_j$ ; für alle  $j$ .

**(5.7.2)**  $b_j \rightarrow +b_j$ ;  $a_j \rightarrow -a_j$ ; für alle  $j$ .

**(5.7.3)**  $b_j \rightarrow -b_j$ ;  $a_j \rightarrow -a_j$ ; für alle  $j$ .

**(5.7.4)** Wenn  $B$  nicht-orientierbar ist,  $b_1 \rightarrow -b_1$ ;  $a_1 \rightarrow -a_1$ ;  $b_j \rightarrow +b_j$ ;  $a_j \rightarrow +a_j$ ; für  $j \geq 2$ .

**(5.7.5)**  $b_1 \rightarrow b_2$ ;  $a_1 \rightarrow a_2$ ;  $b_2 \rightarrow b_1$ ;  $a_2 \rightarrow a_1$ ;  $b_j \rightarrow b_j$ ;  $a_j \rightarrow a_j$ ; für  $j \geq 3$ .

**(5.7.6)**  $b_j \rightarrow b_j$ ; für alle  $j$ ;  $[a_1] \rightarrow [a_1] + [b_1]$ ;  $[a_2] \rightarrow [a_2] - [b_2]$ ;  $a_j \rightarrow a_j$ ; für  $j \geq 3$ .

*Beweis.* zu 1) Wir betten die Basis als Schnitt in  $M$  ein. Sei  $U(B)$  eine reguläre Umgebung von  $B$  in  $M$ , deren Durchschnitt mit jeder Faser aus einem Bogen besteht. Sei  $F = (\partial U(B) - \partial M)$ . Wir können  $B$  und  $U(B)$  so wählen, daß jede der Kurven  $a_j$  eine Randkurve von  $F$  ist: Der gesuchte Homöomorphismus spiegelt jede Faser so, daß ihr Durchschnitt mit  $F$  fest bleibt.

zu 2, 3, 4, 5) Zu einem gegebenen Homöomorphismus von  $B$  auf sich gibt es einen Homöomorphismus von  $M$  auf sich, der diesen induziert: dazu genügt es zu bemerken, daß sich über einem Weg von  $B$  die Faserorientierung genau dann umkehrt, wenn sich längs dieses Weges die lokale Orientierung von  $B$  umkehrt.

Sei  $B'$  eine geschlossene Fläche, und seien  $D_1, \dots, D_n$  2-Elemente in  $B'$ , so daß  $B' - \bigcup \overset{\circ}{D}_j$  homöomorph ist zu  $B$ . Ist  $B$  orientierbar, dann sei  $B$  so orientiert, daß in jedem der  $a_j$  die richtige Orientierung induziert wird; das ist möglich nach den Bedingungen aus (5.6). Ist  $B$  nicht-orientierbar, so sei jedes der  $D_j$  so orientiert, daß es in  $a_j$  die falsche Orientierung induziert.

Sei  $M'$  ein  $S^1$ -Bündel über  $B'$  (mit orientierbarem Totalraum), in das  $B'$  als Schnitt eingebettet ist; ein solches existiert. Es ist  $M' - p'^{-1}(\cup \overset{\circ}{D}_j) = M$ .

zu 5) Wir wählen eine fasertreue Isotopie von  $M'$ , die  $B'$  in sich bewegt, und deren Beschränkung auf  $B'$ ,  $D_1$  und  $D_2$  vertauscht. Wenn  $B'$  nicht-orientierbar ist, können wir das so einrichten, daß der Endzustand auf  $D_1 \cup D_2$  einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus induziert. — Die Beschränkung des Endzustandes der Isotopie von  $M'$  auf  $M$  ist der gesuchte Homöomorphismus.

zu 4) Sei  $k$  eine Kurve in  $B'$ , die  $D_1$  in einem Bogen und kein anderes der  $D_j$  trifft, so daß sich längs  $k$  die lokale Orientierung von  $B'$  umkehrt. Wir wählen eine Isotopie von  $B'$ , die  $D_1$  einmal längs  $k$  herumführt und die übrigen  $D_j$  festläßt, und eine fasertreue Isotopie von  $M'$ , die die angegebene Isotopie von  $B'$  induziert: Deren Endzustand induziert auf  $M$  den gesuchten Homöomorphismus.

zu 2, 3) Ist  $B$  nicht-orientierbar, dann ergibt Anwenden von (4) auf alle Randflächen (3); (3) und (1) ergibt (2).

Ist  $B$  orientierbar, dann sei  $\varphi$  ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus von  $B'$ . Wir dürfen annehmen, daß  $\varphi(D_j) = D_j$ , da wir das durch eine Deformation erreichen können. Sei  $\psi: M \rightarrow M$  ein fasertreuer Homöomorphismus, der  $B$  in sich überführt, so daß  $\psi|_B = \varphi|_B$ . Je nachdem  $\psi$  die Orientierung erhält oder nicht, haben wir (3) oder (2).

zu 6) Sei  $l$  ein Bogen in  $B$ , der  $p(T_1)$  und  $p(T_2)$  verbindet. Sei  $l \times I$  eine reguläre Umgebung von  $l$  in  $B$ ;  $l \times I \cap \partial B = \partial l \times I$ ;  $l = l \times 1/2$ ; für  $x = l \cap p(T_1)$  sei  $x \times 0 \rightarrow x \times 1$  die Richtung von  $a_1$ . Wir parametrisieren  $p^{-1}(l \times I) = l \times I \times S^1$  durch  $(x, y, z)$ ,  $x \in l$ ,  $y \in I$ ,  $z \in 2\pi I$ , so daß wachsendes  $z$  die Orientierung von  $b_1$  liefert.

Der Homöomorphismus ist  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 2\pi y)$  auf  $p^{-1}(l \times I)$ , und die Identität außerhalb. Nach Konstruktion ist  $[a_1] \rightarrow [a_1] + [b_1]$ ; wegen der Orientierungsbedingung aus (5.6.1) ist  $\varepsilon[a_2] \rightarrow \varepsilon[a_2] - \varepsilon[b_2]$ , mit  $\varepsilon = +1$  oder  $-1$ .

**(5.8) Lemma.** Sei  $p: M \rightarrow B$  ein  $S^1$ -Bündel.  $B$  sei nicht das 2-Element oder der Kreisring.

**(5.8.1)** Ein Homöomorphismus von  $M$  auf sich führt ein Koordinatensystem für  $\partial M$  wieder in ein solches über.

**(5.8.2)** Ein beliebiges Koordinatensystem für  $\partial M$  kann aus einem vorgegeben durch Anwendung der in (5.7) angegebenen Homöomorphismen erhalten werden. Gehören die beiden Koordinatensysteme zur gleichen Orientierung von  $M$ , so braucht man nur orientierungserhaltende Homöomorphismen anzuwenden.

*Beweis.* zu (5.8.1) Wegen (5.5) genügt es, die Behauptung für faser-treue Homöomorphismen nachzuweisen: dafür ist sie aber nahezu trivial. (Ist der Homöomorphismus orientierungsumkehrend, dann gehört natürlich das zweite Koordinatensystem zur umgekehrt orientierten Mannigfaltigkeit.)

zu (5.8.2) Sei  $[a_j], [b_j]$  das vorgegebene Koordinatensystem und  $[a'_j], [b'_j]$  das andere. — Da der Homöomorphismus (5.7.5) Randflächen vertauscht, dürfen wir annehmen, daß gleich numerierte Paare in derselben Randfläche liegen.

Es ist  $[b'_j] = \varepsilon_j [b_j]$  (diese und die folgenden Homologien sind Homologien in  $T_j$ ). Ist  $B$  orientierbar, dann ist  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n$ ; also dürfen wir nach (5.7.3) annehmen, daß  $\varepsilon_j = 1$  für alle  $j$ . Ist  $B$  nicht-orientierbar, dann dürfen wir nach (5.7.4) dasselbe annehmen.

Es ist  $[a'_j] = \alpha_j [a_j] + \beta_j [b_j]$ ; da sowohl  $[a'_j]$  als auch  $[a_j]$  mit  $[b'_j] = [b_j]$  die Schnittzahl  $\pm 1$  haben, ist  $\alpha_j = \pm 1$ . Ist eines der  $\alpha_j = -1$ , dann auch alle ändern, und die beiden Koordinatensysteme gehören zu verschiedenen Orientierungen von  $M$ ; wir wenden dann (5.7.2) an. Also nehmen wir an,  $[a'_j] = [a_j] + \beta_j [b_j]$ .

Mit Homöomorphismen (5.7.6), die wir jeweils an der  $j$ -ten,  $j \neq 1$ , und 1-ten Randfläche ausführen, erreichen wir, daß  $\beta_j = 0$  für  $j \geq 2$ . Wir behaupten, daß dann automatisch auch  $\beta_1 = 0$  ist: Wir konstruieren  $M'$  aus  $M$  dadurch, daß wir an  $T_2, \dots, T_n$  Vollringe  $V_2, \dots, V_n$  so ankleben, daß  $a_j$  Meridiankurve auf  $\partial V_j$  wird,  $j = 2, \dots, n$ ; dann ist auch  $a'_j$  Meridiankurve auf  $\partial V_j$ . Also gibt es eine solche Einbettung der Basis als Schnitt in  $M'$ , daß  $a_1$ , und eine solche, daß  $a'_1$  ihre Randkurve ist. — Ist die Basis von  $M'$  orientierbar, dann ist  $\ker(H_1(\partial M') \rightarrow H_1(M'))$  frei zyklisch und wird erzeugt von  $a_1$  bzw.  $a'_1$ .

Ist die Basis von  $M'$  nicht-orientierbar, dann sei  $M''$  die zweiblättrige Überlagerung von  $M'$ , mit orientierbarer Basis. Über  $(a_1, b_1)$  liegt ein Koordinatensystem für  $\partial M''$ :  $(c_1, d_1), (c_2, d_2)$ ; von der Decktransformation wird  $(c_1, d_1)$  auf  $(-c_2, -d_2)$  abgebildet. Entsprechend liegt über  $(a'_1, b_1)$  ein Koordinatensystem für  $\partial M''$ :  $(c'_1, d_1), (c'_2, d_2)$ . Es ist  $[c'_1] = [c_1] + \beta_1 [d_1]$  und  $[c'_2] = [c_2] + \beta_1 [d_2]$ . Mit Homöomorphismen (5.7.6) konstruieren wir ein Koordinatensystem  $(c''_1, d_1), (c''_2, d_2)$ , so daß

$$[c''_1] = [c'_1] + \beta_1 [d_1] = [c_1] + 2\beta_1 [d_1]$$

$$[c''_2] = [c'_2] - \beta_1 [d_2] = [c_2].$$

Es folgt, daß  $\beta_1 = 0$ .

Das Literaturverzeichnis folgt in Teil II dieser Arbeit, der im Band 4, Heft 2 erscheinen wird.

(Eingegangen am 24. Februar 1967)

## Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II\*

FRIEDHELM WALDHAUSEN (Bonn)

### 6. Graphenmannigfaltigkeiten

$M$  sei eine Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand (orientierbar, kompakt, dreidimensional – wie immer in dieser Arbeit).

$T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ ,  $n \geq 0$ , sei ein System Tori im Innern von  $M$ .  $U(T)$  sei eine reguläre Umgebung von  $T$  in  $M$ .

**(6.1) Definition.** Ist jede Komponente von  $M - \overset{\circ}{U}(T)$  homöomorph zu einem Faserbündel mit  $S^1$  als Faser, dann heißt  $T$  eine „Graphenstruktur“ für  $M$ . – Eine Mannigfaltigkeit, die eine Graphenstruktur besitzt, heißt eine „Graphenmannigfaltigkeit“.

**(6.2) Definition.** Eine Graphenstruktur heißt „reduziert“, wenn jede der folgenden Aussagen (6.2.1)–(6.2.10) falsch ist. – Eine Mannigfaltigkeit, die mit einer reduzierten Graphenstruktur gegeben ist, heißt eine „reduzierte Graphenmannigfaltigkeit“.

(Vorsicht: „reduziert“ ist nicht zu verwechseln mit „irreduzibel“).

Es bezeichnet  $T_1$  eine beliebige, aber fest herausgegriffene Komponente von  $T$ .  $U(T_1)$  ist die  $T_1$  enthaltende Komponente von  $U(T)$ .  $U(T_1)$  ist homöomorph zu Torus  $\times$  Intervall.  $T'$  und  $T''$  sind die Randflächen von  $U(T_1)$ . Die an  $T'$  anstoßende Komponente von  $M - \overset{\circ}{U}(T)$  heißt  $M_1$ , die an  $T''$  anstoßende  $M_2$ . – Wir können Homologieklassen von Kurven aus  $T'$  und  $T''$  vergleichen mit Hilfe des natürlichen Isomorphismus  $H_1(T') \leftrightarrow H_1(U(T_1)) \leftrightarrow H_1(T'')$ ; insbesondere beziehen wir uns mit „Schnittzahl“ auf die Schnittzahl in  $H_1(T')$  und den angegebenen natürlichen Isomorphismus.

**(6.2.1)**  $M_1$  ist nicht identisch mit  $M_2$ , und  $M_1$  ist das Bündel über dem Kreisring.

**(6.2.2)** Die Faser von  $M_1$  ist homolog zur Faser von  $M_2$ .

**(6.2.3)**  $M_1$  ist ein Vollring, und eine Meridiankurve hat mit der Faser von  $M_2$  die Schnittzahl eins.

\* Dies ist der zweite Teil einer aus technischen Gründen aufgeteilten Arbeit. Kenntnis des ersten Teils ([13]) ist notwendig für die Lektüre des zweiten Teils. Hinweise der Art „( $\alpha, \beta$ )“, mit  $\alpha \leq 5$ , beziehen sich auf den ersten Teil.

(6.2.4)  $M_1$  ist ein Vollring, und eine Meridiankurve ist homolog zur Faser von  $M_2$ .

(6.2.5)  $M_1$  ist das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband; wird das Möbiusband als Schnitt in  $M_1$  eingebettet, so ist seine Randkurve homolog zur Faser von  $M_2$ .

(6.2.6) Sowohl  $M_1$  als auch  $M_2$  ist das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband; wird in  $M_1$  und  $M_2$  das Möbiusband als Schnitt eingebettet, so sind die Randkurven homolog.

(6.2.7)  $M - \mathring{U}(T_1)$  hat zwei Komponenten; von denen ist eine die in § 3 definierte Graphenmannigfaltigkeit  $Q$ , und die andere ist (als Graphenmannigfaltigkeit) nicht ein Vollring.

(6.2.8)  $M_1$  und  $M_2$  sind identisch und homöomorph zu  $\text{Torus} \times \text{Intervall}$ , und die Zusammensetzung der natürlichen Isomorphismen  $H_1(T') \rightarrow H_1(U(T_1)) \rightarrow H_1(T'') \rightarrow H_1(M_1) \rightarrow H_1(T')$  bildet ein Element auf sich oder sein Inverses ab.

(6.2.9)  $M_1$  und  $M_2$  sind Vollringe.

(6.2.10) Es ist  $T = \emptyset$ , und  $M$  ist ein  $S^1$ -Bündel über der 2-Sphäre oder projektiven Ebene.

(6.3) **Satz.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einer Graphenstruktur  $T$ .*

(6.3.1) *Ob  $T$  reduziert ist, hängt nicht davon ab, welche Homöomorphismen von den Komponenten von  $M - \mathring{U}(T)$  zu  $S^1$ -Bündeln gewählt werden.*

(6.3.2) *Ist für jede Komponente von  $M - \mathring{U}(T)$  ein Homöomorphismus zu einem  $S^1$ -Bündel gegeben, dann läßt sich feststellen, ob  $T$  reduziert ist.*

(6.3.3) *Sei für jede Komponente von  $M - \mathring{U}(T)$  ein Homöomorphismus zu einem  $S^1$ -Bündel gegeben. Dann lassen sich in endlich vielen Schritten Mannigfaltigkeiten  $N_1, \dots, N_m$  konstruieren, so daß  $M$  homöomorph ist zur zusammenhängenden Summe  $N_1 \# \dots \# N_m$ , und so daß jedes der  $N_j$  entweder eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit ist, oder ein Linsenraum oder  $S^1 \times S^2$ .*

*Bemerkung.* Die Voraussetzung zu (6.3.2) läßt sich abschwächen wie folgt (entsprechendes gilt für (6.3.3)):

Weiß man, daß  $T$  eine Graphenstruktur ist, daß also jede Komponente von  $M - \mathring{U}(T)$  homöomorph ist zu einem  $S^1$ -Bündel, dann läßt sich mit homologischen Mitteln feststellen, zu welchem  $S^1$ -Bündel eine solche Komponente homöomorph ist.

Man kann ferner die in den Reduktionsforderungen vorkommenden Kurven auffinden; denn sei  $M_1$  eine Komponente von  $M - \mathring{U}(T)$ , und

sei  $k$  eine nicht nullhomologe einfach-geschlossene Kurve auf  $\partial M_1$ : Ist  $M_1$  ein Vollring, dann ist  $k$  genau dann eine Meridiankurve, wenn  $k$  in  $M_1$  nullhomolog ist. — Ist  $M_1$  ein Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche, so gibt es genau dann eine Faserung mit  $k$  als Faser, wenn  $2[k]=0$  in  $H_1(M_1)$ .

Ist  $M_1$  ein Bündel über einer orientierbaren Fläche, das verschieden ist von Vollring und Torus  $\times$  Intervall, und hat  $M_1$  mindestens zwei Randflächen, so gibt es genau dann eine Faserung mit  $k$  als Faser, wenn  $k$  homolog ist zu einer Kurve auf einer andern Randfläche. — Die Situation ist aber wesentlich komplizierter, wenn  $M_1$  nur eine Randfläche hat: Es kommt zwar  $k$  genau dann als Faser in Frage, wenn  $k$  eine Erzeugende des (frei zyklischen) Zentrums von  $\pi_1(M_1)$  repräsentiert, aber dafür gibt es kein Entscheidungsverfahren: Um eine Faser auf  $\partial M_1$  zu finden, muß man mit der Hakenschen Normalflächenmethode einen inkompressiblen und nicht rand-parallelen Kreisring in  $M_1$  konstruieren. — Ist  $M_1$  das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband, so gilt Ähnliches wie das zuletzt Gesagte für die Aufgabe, in  $\partial M_1$  den Rand des eingebetteten Möbiusbandes aufzufinden.

*Beweis von (6.3) zu (6.3.1) a)* Nach (5.5) ist in der Randfläche eines  $S^1$ -Bündels die Homologieklassse einer Faser unabhängig von der Faserung, wenn die Basis des Bündels nicht das 2-Element oder der Kreisring ist.

b) Für  $M_1 = \text{Torus} \times \text{Intervall}$  sind (6.2.1) und (6.2.8) unabhängig von der Faserung.

c) Auf dem Rande eines Vollrings ist die Homologieklassse einer Meridiankurve invariant gegenüber Homöomorphismen; wir haben also nur noch die Punkte nachzuprüfen, in denen von Fasern die Rede ist: Ist in (6.2.2)  $M_1$  oder  $M_2$  ein Vollring, so sind wir in (6.2.3); ist in (6.2.3) oder (6.2.4) auch  $M_2$  ein Vollring, so sind wir in (6.2.9); (6.2.9) ist invariant.

zu (6.3.2): Der einzige Punkt, für den die Behauptung nicht trivial ist, ist (6.2.8): Wir tensorieren  $H_1(T')$  mit den reellen Zahlen: Der Isomorphismus  $H_1(T') \rightarrow H_1(T')$  definiert dann eine homogene lineare Transformation der euklidischen Ebene. Der Isomorphismus bildet genau dann ein Element auf sich oder sein Inverses ab, wenn diese Transformation einen Eigenvektor besitzt, dessen Koordinaten in einem rationalen Verhältnis stehen: Und das läßt sich nachprüfen.

zu (6.3.3): Von den Reduktionsforderungen nehmen wir der Reihe nach an, daß sie nicht erfüllt sind, und geben die zugehörige Änderung an. Die zu (6.2.4) gehörende Reduktion ist die Aufspaltung in eine zusammenhängende Summe; die übrigen betreffen nur die Graphenstruktur. Daß das Verfahren abbricht, zeigen wir zum Schluß.

zu (6.2.1):  $M_1 \cup U(T_1) \cup M_2$  ist homöomorph zu  $M_2$ : Wir vergessen  $T_1$ .

zu (6.2.2): Mit Hilfe der Produktstruktur  $U(T_1) = T' \times I$  werfen wir die Faserung von  $T''$  nach  $T'$ . Nach (5.2) gibt es eine Isotopie von  $T''$ , die die  $T'$ -Faserung in die  $T''$ -Faserung überführt: Diese Isotopie definiert eine Faserung von  $T' \times I$ , die auf  $\partial(T' \times I)$  mit den vorgegebenen Faserungen übereinstimmt. Wir vergessen  $T_1$ .

zu (6.2.3): Ist auf dem Rande eines Vollrings eine Kurve vorgegeben, die mit einem Meridian die Schnitzzahl eins hat, dann gibt es eine Faserung des Vollrings, in der die vorgegebene Kurve eine Faser ist. Damit sind wir im vorigen Fall.

zu (6.2.4): Sei  $p: M_2 \rightarrow B$  die Bündelprojektion.

Für den Fall, daß  $B$  ein Kreisring ist, haben wir schon früher eine Vereinfachung angegeben; den Fall, daß  $B$  ein 2-Element ist, behandeln wir in (6.2.9). — In allen andern Fällen gibt es in  $B$  einen nicht randparallelen Bogen  $l$ , dessen Endpunkte in der Randkurve  $p(T'')$  von  $B$  liegen. Nach unserer Voraussetzung über die Verklebung von  $M_1$  und  $M_2$  gibt es in  $M$  eine 2-Sphäre  $S$ , die aus dem vertikalen Kreisring  $p^{-1}(l)$  in  $M_2$ , zwei Kreisringen in  $U(T_1)$  und zwei Meridianflächen in  $M_1$  besteht. Sei  $U(S)$  eine reguläre Umgebung von  $S$  in  $M$ , so daß  $U(S) \cap M_2$  vertikal in  $M_2$  ist. Wir ersetzen  $M$  durch  $M' = M - U(S) +$  zwei 3-Elemente. War  $S$  nicht-zerlegend in  $M$ , dann ist  $M \approx M' \# S^1 \times S^2$ ; zerlegte  $S$ , dann ist  $M$  homöomorph zur zusammenhängenden Summe der beiden Komponenten von  $M'$ .

Wir erhalten eine Graphenstruktur von  $M'$ , bzw. der beiden Komponenten von  $M'$  wie folgt: Statt ein 3-Element an die Randkomponente  $S_1$  von  $M - \overset{\circ}{U}(S)$  anzukleben, bilden wir den Quotientenraum von  $M - \overset{\circ}{U}(S)$  nach einem geeigneten involutorischen Homöomorphismus  $h: S_1 \rightarrow S_1$ ;  $h$  vertauscht die Kurven jedes der Paare  $S_1 \cap T'$ ,  $S_1 \cap T_1$ ,  $S_1 \cap T''$ , und  $h|_{S_1 \cap M_2}$  bildet Fasern in Fasern ab; die Fixpunktmenge von  $h$  besteht aus einer Kurve, die Faser in  $\overset{\circ}{S}_1 \cap M_2$  ist. — Analog für die andere Randsphäre von  $M - \overset{\circ}{U}(S)$ .

Wir modifizieren das Verfahren noch folgendermaßen: Statt des einen Bogens  $l$  in  $B = p(M_2)$  nehmen wir ein System von Bögen, deren Endpunkte in  $p(T'')$  liegen, so daß  $B$  von diesen Bögen aufgeschnitten wird: in ein 2-Element, wenn  $\partial B = p(T'')$ , und andernfalls in Kreisringe, je einen für jede von  $p(T'')$  verschiedene Randkurve von  $B$ . Wir schneiden dann  $M$  auf an einem System von 2-Sphären, das mit Hilfe dieser Bögen genau so gebildet ist wie  $S$  aus  $l$ , und verfahren weiter wie oben.

Wir bezeichnen die zum Schluß erhaltene Graphenmannigfaltigkeit mit  $M'$ .

War  $\partial B = p(T'')$ , dann ist  $M'$  eine Graphenmannigfaltigkeit, die aus zwei Vollringen besteht, und es ist  $M$  gleich der zusammenhängenden Summe von  $M'$  mit einer Anzahl  $S^1 \times S^2$ ; diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Bögen, an denen  $B$  aufgeschnitten wurde.

War  $\partial B \neq p(T'')$ , dann können wir jetzt die Reduktion (6.2.1) ausführen, und zwar je einmal mit jedem der Teile, die den Kreisringen entsprechen, in die  $B$  aufgeschnitten wurde. Die schließlich erhaltene Graphenstruktur hat eine Komponente weniger als die Graphenstruktur  $T$ . — Wir können  $M'$  so beschreiben: Aus  $M$  wird  $M_1 \cup U(T_1) \cup M_2$  fortgelassen und stattdessen wird an jedes von  $U(T_1)$  verschiedene  $U(T_j)$ , das  $M_2$  traf, in der richtigen Weise ein Vollring angeheftet; für jede in  $M_2$  gelegene Randfläche von  $M$  resultiert eine Komponente von  $M'$ , die ein Vollring ist.  $M$  ist homöomorph zur zusammenhängenden Summe der Komponenten von  $M'$  und einer Anzahl  $S^1 \times S^2$ ; diese Anzahl ist bestimmt durch die Charakteristik und den Orientierbarkeitscharakter von  $B$  und die Anzahl der Komponenten von  $M'$ .

*Bemerkung.* Mit Hilfe einer Konstruktion, die im wesentlichen die Umkehrung der gerade beschriebenen Reduktion ist, läßt sich für die zusammenhängende Summe zweier Graphenmannigfaltigkeiten wieder eine Graphenstruktur angeben. Eine solche Graphenstruktur ist aber wertlos, denn für sie (und allgemein für eine nicht reduzierte Graphenstruktur) werden die zu den Ergebnissen der folgenden Paragraphen analogen Behauptungen beliebig falsch.

zu (6.2.5): Wir ersetzen  $M_1$  durch die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3, und führen hinterher die Reduktion (6.2.2) aus; daß das geht, ist gerade die Voraussetzung von (6.2.5).

zu (6.2.6): Wir ersetzen sowohl  $M_1$  als auch  $M_2$  durch die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3, und führen hinterher die Reduktion (6.2.2) aus; daß das geht, ist gerade die Voraussetzung von (6.2.6).

zu (6.2.7): Wir ersetzen die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  durch das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband.

zu (6.2.8): Wenn es überhaupt eine Kurve in  $T'$  gibt, deren Homologieklassse unter dem Isomorphismus  $H_1(T') \rightarrow H_1(T)$  auf sich oder ihr Inverses abgebildet wird, dann gibt es auch eine einfach-geschlossene Kurve mit dieser Eigenschaft. Wir fasn  $M_1$  so, daß diese Kurve Faser wird: Die Reduktion (6.2.2) liefert dann eine Faserung von  $M$  als  $S^1$ -Bündel über dem Torus oder Kleinschen Schlauch.

zu (6.2.9): Unter dieser Voraussetzung ist  $M$  ein Linsenraum (insbesondere möglicherweise die 3-Sphäre) oder  $S^1 \times S^2$ . — Wir rechnen diese Mannigfaltigkeiten nicht zu den reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten. Unsere Methode liefert für sie gar nichts, und sie würden deshalb nur überflüssige Disjunktionen verursachen.

zu (6.2.10): Aus demselben Grund wie im letzten Punkt rechnen wir diese Bündel nicht zu den reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten. — Ein Bündel über der 2-Sphäre ist ein Linsenraum oder  $S^1 \times S^2$ . — Der Vollständigkeit halber geben wir für die Bündel über der projektiven Ebene eine andere Graphenstruktur an: Sei  $M$  ein solches Bündel; wir erhalten  $M$ , wenn wir einen Vollring und das Bündel über dem Möbiusband in geeigneter Weise verkleben. Wir ersetzen dann das Bündel über dem Möbiusband durch die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3. Bis auf genau eine Ausnahme sind die so erhaltenen Graphenmannigfaltigkeiten reduziert. Die Ausnahme wird nach (6.2.4) vereinfacht und zerfällt dabei in die zusammenhängende Summe zweier projektiver Räume.

Die Behauptung, daß das Reduktionsverfahren abbricht, ist trivial für solche Graphenstrukturen, auf die (6.2.9) oder (6.2.10) Anwendung findet oder der erste Fall aus (6.2.4), („ $M'$  ist eine Mannigfaltigkeit, die aus zwei Vollringen besteht“); diese Graphenstrukturen seien im folgenden ausgeschlossen.

Sei  $\rho$  die Anzahl der Komponenten von  $T$ . Sei  $\sigma$  die Anzahl derjenigen Komponenten von  $M - \mathring{U}(T)$ , die homöomorph sind zu einem  $S^1$ -Bündel über einer gelochten projektiven Ebene. Dann ist  $(\rho + 2\sigma, \rho)$ , in lexikographischer Anordnung, ein Kompliziertheitsgrad für  $M$ , bzw. für die Mannigfaltigkeiten, deren zusammenhängende Summe  $M$  ist, der bei jeder Reduktion kleiner wird:

Bei (6.2.1)–(6.2.4) und (6.2.8) wird  $\rho$  kleiner und  $\sigma$  nicht größer. (Bei (6.2.2) kann ein Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche neu hinzukommen, nämlich eventuell dann, wenn  $M_1 = M_2$ ; in einem solchen Falle hat aber die Basis des neuen Bündels höheres Geschlecht als die projektive Ebene.)

Bei (6.2.5) wird  $\rho$  um 1 größer und  $\sigma$  um 1 kleiner.

Bei (6.2.6) wird  $\rho$  um 3 größer und  $\sigma$  um 2 kleiner.

Bei (6.2.7) wird  $\rho$  um 2 kleiner und  $\sigma$  um 1 größer.

## 7. Flächen in reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten

**(7.1) Satz.** *Eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit ist irreduzibel.*

*Beweis.* Sei  $M$  eine solche, und sei  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  ihre Graphenstruktur. — Ist  $T = \emptyset$ , dann ist wegen (6.2.10)  $M$  eine Mannigfaltigkeit, für die die Behauptung in (2.7) bewiesen ist. Sei also  $T \neq \emptyset$ . — Ist  $T = T_1$ , und  $M - \mathring{U}(T)$  homöomorph zu Torus  $\times$  Intervall, dann ist  $T$  inkompressibel in  $M$ , und die Behauptung folgt aus (1.8) und (2.7). Wir schließen im folgenden diesen Fall aus; wegen (6.2.1) ist dann keine Komponente von  $M - \mathring{U}(T)$  das  $S^1$ -Bündel über dem Kreisring.

Sei im Widerspruch zur Behauptung  $S$  eine 2-Sphäre in  $M$ , die kein 3-Element berandet; sei  $S$  so gewählt, daß  $S \cap T$  aus möglichst wenig Kurven besteht. Es ist  $S \cap T \neq \emptyset$  nach (2.7). Sei  $U(T)$  eine reguläre Umgebung von  $T$ , sei  $\tilde{M} = M - \overset{\circ}{U}(T)$ , sei  $\tilde{S} = S \cap \tilde{M}$ . Nach (1.6) ist  $\tilde{S}$  inkompressibel in  $\tilde{M}$ , und keine Komponente ist randparallel in  $\tilde{M}$ .

Ist die Komponente  $M_1$  von  $\tilde{M}$  ein Vollring, dann besteht  $\tilde{S} \cap M_1$  aus Meridianflächen.

Sei  $M_2$  eine Komponente von  $\tilde{M}$ , die kein Vollring ist. Da  $S \cap T \neq \emptyset$ , gibt es wegen (6.2.9) eine solche, daß  $\tilde{S} \cap M_2 \neq \emptyset$ ; sei  $F$  eine Komponente von  $\tilde{S} \cap M_2$ . Nach (4.2) ist  $F$  in  $M_2$  entweder isotop zu einem vertikalen Kreisring oder zu einer Fläche, die mindestens zwei horizontale Randkurven hat (da wir ja den Fall, daß  $M_2$  Torus  $\times$  Intervall ist, schon erledigt haben). An eine vertikale bzw. horizontale Randkurve von  $F$  kann nicht von außerhalb  $M_2$ , etwa in  $M_1$ , eine Komponente von  $\tilde{S}$  anstoßen, die ein 2-Element ist: Dann müßte  $M_1$  ein Vollring sein und dieses 2-Element eine Meridianfläche in  $M_1$ . Damit hätten wir aber einen Widerspruch zu der Reduktionsforderung (6.2.4) bzw. (6.2.3).

Hängen wir nun jeden der Kreisringe  $S \cap U(T)$  mit einer Randkurve an  $\tilde{S}$  an, so haben wir folgende seltsame Zerlegung von  $S$  konstruiert:

- 1)  $S$  ist in endlich viele Teile zerlegt.
- 2) Mindestens einer dieser Teile ist nicht ein 2-Element.
- 3) Jeder Teil, der nicht ein 2-Element ist, hat mindestens zwei Randkurven, an die ein Teil anstößt, der nicht ein 2-Element ist.

**(7.2) Lemma.** *Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur  $T$ . Ist  $\partial M$  kompressibel, dann ist  $T = \emptyset$ , und  $M$  ist ein Vollring.*

*Beweis:* Unter der Voraussetzung  $T = \emptyset$ , ist die Behauptung in (2.6) bewiesen. Sei also  $T \neq \emptyset$ .

Sei im Widerspruch zur Behauptung  $D$  ein rand-inkompressibles 2-Element in  $M$ . Sei  $D$  bereits so deformiert, daß  $D \cap T$  aus möglichst wenig Kurven besteht. Es ist  $D \cap T \neq \emptyset$  wegen (2.6). Sei  $U(T)$  eine reguläre Umgebung von  $T$ , sei  $\tilde{M} = M - \overset{\circ}{U}(T)$ , sei  $\tilde{D} = D \cap \tilde{M}$ . Nach (1.9) und (7.1) ist  $\tilde{D}$  inkompressibel in  $\tilde{M}$ , und keine Komponente von  $\tilde{D}$  ist randparallel in  $\tilde{M}$ . — Die weitere Argumentation ist nahezu identisch mit der aus (7.1).

**(7.3) Lemma.** *Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ .*

*$T_1$  ist genau dann kompressibel in  $M$ , wenn einer der an  $U(T_1)$  anstoßenden Teile von  $M - \overset{\circ}{U}(T)$  ein Vollring ist.*

*Beweis.* Die eine Richtung ist trivial. Um die andere zu beweisen, wenden wir (7.2) an auf  $M' = M - \overset{\circ}{U}(T_1)$ .

**(7.4) Lemma.** *Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur  $T$ . Der Kreisring  $F$  in  $M$  sei enthalten in  $\tilde{M} = M - \dot{U}(T)$ .  $F$  sei inkompressibel und nicht rand-parallel in  $\tilde{M}$ . Dann ist  $F$  inkompressibel und nicht rand-parallel in  $M$ .*

*Beweis.* Sei  $M_1$  die Komponente von  $\tilde{M}$ , die  $F$  enthält. Ist  $M_1 = M$ , so ist nichts zu beweisen: Wäre  $M_1$  das Bündel über dem 2-Element oder dem Kreisring oder dem Möbiusband, so kämen wir gerade auf diesen Fall; also nehmen wir an,  $M_1$  ist nicht eines dieser Bündel. Nach (2.8) dürfen wir deshalb annehmen, daß  $F$  in  $M_1$  vertikal ist.

1) Gäbe es ein 2-Element  $D$  in  $\overset{\circ}{M}$  mit  $D \cap F = \partial D$ , so daß  $\partial D$  nicht ein 2-Element auf  $F$  berandete, dann könnten wir  $D$  zusammensetzen mit einem der Kreisringe, in die  $F$  von  $\partial D$  zerlegt würde, zu einem rand-inkompressiblen 2-Element in  $M$ , im Widerspruch zu (7.2).

2) Wir nehmen an,  $F$  sei parallel zu dem Kreisring  $F'$  in  $\partial M$ . Dann gibt es einen Vollring  $V$  in  $M$ , so daß  $\partial V = F \cup F'$ . Nach Voraussetzung ist  $T \cap V = T \cap \overset{\circ}{V} \neq \emptyset$ .

Die von  $M$  in  $V$  induzierte Graphenstruktur kann nicht reduziert sein, da wir sonst einen Widerspruch zu (7.2) hätten. Aber die einzige Reduktionsforderung, die möglicherweise nicht erfüllt ist, ist (6.2.1). Also ist  $\partial V$  parallel zu einer Komponente von  $T$ , etwa  $T_1$ . Als Torus in einem Vollring ist  $T_1$  kompressibel, also folgt aus (7.3), daß  $T_1$  die einzige in  $V$  liegende Komponente von  $T$  ist, und daß die von  $M_1$  verschiedene an  $U(T_1)$  anstoßende Komponente von  $\tilde{M}$  ein Vollring ist, (der im Innern von  $V$  liegt). — Aus der Annahme,  $F$  sei parallel zu  $F'$ , folgt, daß es eine Meridianfläche von  $V$  gibt, deren Rand  $F$  in genau einem Bogen trifft, also jede der beiden vertikalen Randkurven von  $F$  in je einem Punkt: Es folgt, daß die Verklebung an  $T_1$  die Reduktionsforderung (6.2.3) verletzt.

**(7.5) Lemma.** *Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur  $T$ . Sei  $F$  ein inkompressibler und nicht rand-paralleler Kreisring in  $M$ . Sei  $F$  so deformiert, daß  $F \cap T$  aus möglichst wenig Kurven besteht.*

*Ist  $F \cap T \neq \emptyset$ , dann ist  $M$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3.*

*Beweis.* Sei  $\tilde{M} = M - \dot{U}(T)$ , und sei  $\tilde{F} = F \cap \tilde{M}$ .

1. Fall.  $\tilde{F}$  besteht nur aus Kreisringen. Sei  $M_1$  eine Komponente von  $\tilde{M}$ , und  $F_1$  eine in  $M_1$  liegende Komponente von  $\tilde{F}$ ;  $F_1$  ist nach (1.9) inkompressibel und nicht rand-parallel in  $M_1$ . Also ist  $M_1$  kein Vollring; da  $T \neq \emptyset$  und  $\partial M \neq \emptyset$ , ist wegen (6.2.1)  $M_1$  auch nicht Torus  $\times$  Intervall. Daher ist nach (2.8)  $F$  isotop zu einem vertikalen Kreisring, wenn  $M_1$  nicht das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband ist. Ist  $M_1$  dieses Bündel,

dann ist entweder  $F$  isotop zu einem vertikalen Kreisring oder aber die Randkurven von  $F$  sind isotop in  $\partial M_1$  zum Rand des als Schnitt eingebetteten Möbiusbandes, (3.3). — Aber die Reduktionsforderungen (6.2.1) und (6.2.5) verbieten, daß  $F$  nur aus solchen Teilen wie  $F_1$  zusammengesetzt ist.

2. Fall. Die Komponente  $F_1$  von  $\tilde{F}$  sei ein 2-Element; sie liege in der Komponente  $M_1$  von  $\tilde{M}$ . Nach (2.8) muß  $M_1$  ein Vollring sein;  $F_1$  ist Meridianfläche in  $M_1$ .

$M_1$  stoße an  $M_2$  an, und  $F_1$  an  $F_2$  aus  $M_2$ . Wegen (6.2.9) und (6.2.1) ist  $M_2$  weder ein Vollring noch Torus  $\times$  Intervall. Wegen (6.2.4) ist  $F_2$  nicht isotop zu einem vertikalen Kreisring in  $M_2$ . Und schließlich kann  $F_2$  wegen (6.2.3) nicht lauter horizontale Randkurven haben: Es folgt mit (4.2), daß  $M_2$  das Produktbündel über einer mindestens 3-fach gelochten 2-Sphäre ist, und daß  $F_2$  in  $M_2$  isotop ist zu einer  $\alpha$ -blättrigen Überlagerung der Basis von  $M_2$ , mit  $\alpha \geq 2$ .

Jede Randkurve von  $F_2$ , die auf  $F$  ein 2-Element berandet, liegt auf einem  $U(T_j)$ , an das auf der andern Seite ein Vollring anstößt: Denn sei  $k$  eine solche Randkurve; sie liege in  $\partial U(T_1)$ ;  $D$  sei das von ihr auf  $F$  berandete 2-Element. Es gibt dann ein 2-Element  $D'$  in  $D$  mit  $D' \cap T_1 = \partial D'$ . Da  $F$  so deformiert war, daß die Anzahl der Schnitte  $F \cap T$  möglichst klein ist, und da  $M$  irreduzibel ist, folgt, daß  $\partial D'$  auf  $T_1$  nicht ein 2-Element berandet: Mit (7.3) folgt die Behauptung.

$M_2$  habe  $r$  Randflächen. Nach (4.2) liegen in  $r-2$  Randflächen von  $M_2$  lauter horizontale Randkurven von  $F_2$ ; d.h.  $F_2$  hat (mindestens)  $\alpha(r-2)$  horizontale Randkurven und insgesamt (mindestens)  $\alpha(r-2) + 2$  Randkurven. Eine solche horizontale Randkurve darf nach dem oben Gesagten und wegen (6.2.3) nicht ein 2-Element auf  $F$  beranden. Andererseits hat  $F_2$  höchstens zwei Randkurven, die auf dem Kreisring  $F$  nicht ein 2-Element beranden: Also ist  $\alpha(r-2) \leq 2$ , daher genau  $\alpha=2$  und  $r=3$ .

Von den (mindestens) vier Randkurven von  $F_2$  beranden (mindestens) zwei auf  $F$  ein 2-Element. Da diese Kurven nicht horizontal sein dürfen, und da  $\alpha=2$ , liegen sie auf verschiedenen Randflächen von  $M_2$ . Und an diese beiden Randflächen stoßen tatsächlich Vollringe an: Wir kommen also genau auf die Konstruktion von  $Q$  aus § 3. An die dritte Randfläche von  $M_2$  kann nicht ein Vollring anstoßen, da  $\partial M \neq \emptyset$  ist; an diese Randfläche kann aber auch nichts anderes anstoßen, wegen (6.2.7). Also ist  $M=Q$ .

**(7.6) Lemma.** Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur  $T$ . Sei  $M$  homöomorph zu Torus  $\times$  Intervall. Dann ist  $T = \emptyset$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, daß  $T \neq \emptyset$ . Sei  $M_1$  eine Komponente von  $M - \dot{U}(T)$ , so daß  $M_1 \cap \partial M \neq \emptyset$ . Sei  $F$  ein inkompressibler und nicht rand-paralleler Kreisring in  $M$ , so daß (mindestens) eine Randkurve in  $\partial M_1$  nicht isotop zu einer vertikalen Kurve ist.  $F$  werde so deformiert, daß  $F \cap T$  aus möglichst wenig Kurven besteht. Es kann nicht  $F \cap T = \emptyset$  sein, da sonst aus (2.8) folgte, daß jede Komponente von  $F \cap M_1$  in  $M_1$  isotop zu einem vertikalen Kreisring wäre, was nach Wahl von  $F$  nicht möglich ist. — Aber  $F \cap T \neq \emptyset$  widerspricht (7.5).

**(7.7) Lemma.** *Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit. Sei  $M$  homöomorph zu dem  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. Dann ist  $M$  entweder das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband oder die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3.*

*Beweis.* Sei  $T$  die Graphenstruktur von  $M$ . Ist  $T = \emptyset$ , dann ist die Behauptung in (5.5) bewiesen. Ist  $T \neq \emptyset$ , dann folgt die Behauptung auf die gleiche Weise wie (7.6) aus (7.5), denn es gibt in  $M$  zwei inkompressible und nicht rand-parallele Kreisringe, deren Randkurven nicht zueinander isotop sind.

**(7.8)** Wir definieren zwei Graphenmannigfaltigkeiten  $Q_1$  und  $Q_2$  wie folgt:

**(7.8.1)** Sei sowohl  $M_1$  als auch  $M_2$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3. Sei  $h: M_1 \rightarrow M_2$  ein Homöomorphismus. Der Homöomorphismus  $h|_{\partial M_1} \rightarrow \partial M_2$  definiert eine Verklebung von  $M_1$  und  $M_2$  an ihren Randflächen. Wir führen die Verklebung aus und vergessen den von  $\partial M_1$  herrührenden Torus (Reduktion (6.2.2)). Es entsteht dann eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit, die wir mit  $Q_1$  bezeichnen. —  $Q_1$  ist homöomorph zu dem  $S^1$ -Bündel über dem Kleinschen Schlauch, das einen Schnitt besitzt; (dies ist das Bündel, das durch „Verdoppeln“ des  $S^1$ -Bündels über dem Möbiusband entsteht).

**(7.8.2)** Sei sowohl  $N_1$  als auch  $N_2$  das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. Sei  $h: N_1 \rightarrow N_2$  ein Homöomorphismus. Sei  $f: \partial N_1 \rightarrow \partial N_1$  ein involutorischer Homöomorphismus, der die beiden ausgezeichneten Kurvenklassen auf  $\partial N_1$  vertauscht; nämlich die Klasse der zu einer vertikalen isotopen und die Klasse der zum Rand des als Schnitt eingebetteten Möbiusbandes isotopen Kurven. Wir verkleben  $N_1$  und  $N_2$  an ihren Randflächen mit Hilfe des Homöomorphismus  $h|_{\partial N_1} \circ f: \partial N_1 \rightarrow \partial N_2$ . Die entstehende Graphenmannigfaltigkeit ist nicht reduziert. Die Reduktion (6.2.5) ist ausführbar, und zwar auf zwei Arten: Wir können sowohl den von  $N_1$  als auch den von  $N_2$  herrührenden Teil durch die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  ersetzen und dann nach (6.2.2) reduzieren. Aber die beiden schließlich erhaltenen Graphenstrukturen sind äquivalent in dem Sinne, daß es einen Homöomorphismus gibt, der die eine auf die

andere abbildet. — Wir bezeichnen die konstruierte Graphenmannigfaltigkeit mit  $Q_2$ .

**(7.9) Lemma.** *Sei  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur  $T$ . Sei  $F$  ein inkompressibler Torus in  $M$ .  $F$  sei so deformiert, daß  $F \cap T$  aus möglichst wenig Kurven besteht. Es sei  $F \cap T \neq \emptyset$ . Dann liegt einer der folgenden drei Fälle vor:*

**(7.9.1)**  $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$  hat als Komponenten das  $S^1$ -Bündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre und 3 Vollringe.  $M - \mathring{U}(F)$  ist homöomorph zu Torus  $\times$  Intervall.

**(7.9.2)**  $M$  ist die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_1$  aus (7.8.1).  $M - \mathring{U}(F)$  ist homöomorph zu Torus  $\times$  Intervall.

**(7.9.3)**  $M$  ist die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_2$  aus (7.8.2).  $M - \mathring{U}(F)$  besteht aus zwei Komponenten, deren jede homöomorph ist zu dem  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband.

*Beweis.* Sei  $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$ , und  $\tilde{F} = F \cap \tilde{M}$ .

Aus ähnlichen Gründen wie im ersten Fall des Beweises von (7.5) (und zusätzlich wegen der Reduktionsforderungen (6.2.6) und (6.2.8)) sind nicht alle Komponenten von  $\tilde{F}$  Kreisringe.

Sei  $M_1$  eine Komponente von  $\tilde{M}$ , die nicht ein Vollring ist, und so daß  $F \cap M_1$  nicht nur aus Kreisringen besteht;  $M_1$  ist nicht Torus  $\times$  Intervall. Nach (2.8) dürfen wir annehmen, daß die Beschränkung der Bündelprojektion von  $M_1$  auf  $F \cap M_1$  eine Überlagerungsprojektion ist.

Falls dies möglich ist, werde in  $M_1$  ein vertikaler Torus  $T^*$  gewählt, der inkompressibel in  $M_1$  ist, und der nicht parallel ist zu einer Randfläche von  $M_1$ . Existiert  $T^*$ , dann folgt aus (7.2), daß  $T^*$  inkompressibel in  $M$  ist, da wir beim Aufschneiden an  $T^*$  eine (möglicherweise nicht zusammenhängende) reduzierte Graphenmannigfaltigkeit erhalten.

Ist jeder inkompressible Torus in  $M_1$  rand-parallel, dann ist die Basis von  $M_1$  das Möbiusband oder die 3-fach gelochte 2-Sphäre. — Sei  $M_1$  das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. Wäre die Randfläche von  $M_1$  kompressibel in  $M$ , dann folgte, daß  $M - \mathring{M}_1$  ein Vollring wäre, und daß  $F$  aus einem Kreisring in  $M_1$  und zwei 2-Elementen in  $M - \mathring{M}_1$  bestände, was nicht geht: Wir nehmen als  $T^*$  die Komponente von  $T$ , deren  $U(T^*)$  an  $M_1$  anstößt;  $T^*$  ist inkompressibel in  $M$ .

*1. Fall.*  $M_1$  ist das Bündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre, und  $M - \mathring{M}_1$  besteht aus drei Vollringen: Dann besteht  $F \cap (M - \mathring{M}_1)$  aus 2-Elementen, die Meridianflächen in diesen Vollringen sind.  $F \cap M_1$  ist zusammenhängend. Nach (2.9) gibt es eine solche Faserung von  $M_1$  über der 1-Sphäre, daß  $F \cap M_1$  eine Faser ist. Diese Faserung induziert

eine Faserung von  $\partial M_1$  durch Meridiankurven der anstoßenden Vollringe, und diese Faserung wiederum können wir fortsetzen zu einer Faserung der Vollringe durch Meridianflächen in solcher Weise, daß die  $F \cap (M - \dot{M}_1)$  Fasern sind. Also ist  $M$  ein Torus-Bündel über der 1-Sphäre, und wir sind in (7.9.1).

2. *Fall. Der erste Fall tritt nicht ein:* Ist  $M_1$  das Bündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre, dann gibt es nach (7.3) mindestens eine Komponente  $T^*$  von  $T$ , so daß  $U(T^*)$  an  $M_1$  anstößt, und daß  $T^*$  inkompressibel in  $M$  ist.

$T^*$  ist also jetzt in allen Fällen definiert. Es ist  $T^* \cap F \neq \emptyset$ . Da  $T^*$  inkompressibel ist, wird  $F$  von  $T^* \cap F$  in Kreisringe aufgeschnitten; keiner dieser Kreisringe ist parallel zu einem Teil von  $T^*$ , da andernfalls folgte, daß die Anzahl der Schnitte  $F \cap T$  verringert werden könnte.

Wir schneiden  $M$  an  $T^*$  auf: Dadurch entstehen reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten  $N_1$  und  $N_2$  ( $N_1$  ist möglicherweise identisch mit  $N_2$ ). Wir bezeichnen ihre Graphenstrukturen mit  $T_{(1)}$  und  $T_{(2)}$ . Es ist, etwa,  $F \cap T_{(1)} \neq \emptyset$ , (insbesondere  $T_{(1)} \neq \emptyset$ ), da sonst entweder  $T \cap F = \emptyset$  sein müßte oder  $\tilde{F} = F \cap (M - \dot{U}(T))$  nur aus Kreisringen bestände. Also ist nach (7.5)  $N_1$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3 (insbesondere muß  $N_1 \neq N_2$  sein). Wegen (6.2.7) ist es gar nicht möglich, daß  $T^*$  als Komponente von  $T$  gewählt wurde, d. h. es ist  $N_2 \cap M_1 \neq \emptyset$ , und  $N_2 \cap M_1$  ist ein  $S^1$ -Bündel, das nicht  $\text{Torus} \times \text{Intervall}$  ist. Die Schnittkurven  $F \cap T^*$  sind nicht isotop zu vertikalen Kurven in  $\partial(N_2 \cap M_1)$ . Also ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder ist  $T_{(2)} = \emptyset$ , (und daher  $N_2 \subset M_1$ ) und  $N_2$  ist das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband; oder es ist  $T_{(2)} \neq \emptyset$ , dann ist notwendig  $F \cap T_{(2)} \neq \emptyset$ , daher nach (7.5)  $N_2$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3.

Beide Möglichkeiten für  $M$  haben Folgendes gemeinsam: Die beiden ausgezeichneten Isotopieklassen derjenigen Kurven auf  $\partial N_1$ , die als Randkurven von inkompressiblen, nicht rand-parallelen Kreisringen in  $N_1$  auftreten, fallen in  $T^*$  zusammen mit den beiden ausgezeichneten Kurvenklassen auf  $\partial N_2$ . (Es sind dies auf  $T^*$  einerseits die Isotopieklasse, die die in  $M_1$  vertikalen Kurven enthält, und andererseits die Isotopieklasse, die  $F \cap T^*$  enthält). — Dadurch, und daß die Graphenstruktur nicht trivial ist, sind aber gerade  $Q_1$  und  $Q_2$  aus (7.8) gekennzeichnet.

Ist  $M$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_1$ , dann besteht  $M - \dot{U}(T)$  aus dem  $S^1$ -Bündel über der 4-fach gelochten 2-Sphäre und 4 Vollringen.  $M_1$  wird von  $F \cap M_1$  nicht zerlegt. Die Faserung von  $M_1$  induziert auf der durch Aufschneiden von  $M_1$  an  $F \cap M_1$  entstehenden Mannigfaltigkeit eine Faserung als Linienbündel. Diese Faserung läßt sich fortsetzen auf die Teile, in die die Vollringe  $M - \dot{M}_1$  durch die darin liegenden Meridianflächen  $F \cap (M - \dot{M}_1)$  aufgeschnitten werden, zu einer Faserung

der aus  $M$  durch Aufschneiden an  $F$  entstehenden Mannigfaltigkeit. Da  $M$  von  $F$  nicht zerlegt wird, hat dieses Linienbündel zwei Randflächen, ist also  $\text{Torus} \times \text{Intervall}$ .

Ist  $M$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_2$ , dann besteht  $M - \mathring{U}(T)$  aus dem  $S^1$ -Bündel  $M_1$  über der 2-fach gelochten projektiven Ebene und zwei Vollringen. Wie oben finden wir eine Faserung der aus  $M$  durch Aufschneiden an  $F$  entstehenden Mannigfaltigkeit als Linienbündel. Diesmal ist aber diese Mannigfaltigkeit nicht zusammenhängend: Also hat jede Komponente eine Randfläche, ist daher das Linienbündel über dem Kleinschen Schlauch und homöomorph zu dem  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband.

### 8. Homöomorphismen von reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten

**(8.1) Satz.**  $M$  und  $N$  seien reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten mit den Graphenstrukturen  $T = T_1 \cup \dots \cup T_m$ , bzw.  $T' = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$ . Das Paar  $(M, N)$  sei nicht eine der unten beschriebenen Ausnahmen.

Es gebe einen Homöomorphismus  $\varphi: M \rightarrow N$ .

Dann gibt es einen zu  $\varphi$  isotopen Homöomorphismus  $\psi$ , so daß  $\psi(T) = T'$ .

*Ausnahmen:*

**(8.1.1)**  $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$  besteht aus einem Bündel über der  $m$ -fach gelochten 2-Sphäre und (genau)  $m$  Vollringen, und es ist  $m \leq 3$ ; oder  $\tilde{M}$  besteht aus einem Bündel über der  $m$ -fach gelochten projektiven Ebene und (genau)  $m$  Vollringen, und es ist  $m \leq 1$ . Und dasselbe gilt für  $\tilde{N} = N - \mathring{U}(T')$ .

**(8.1.2)**  $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$  ist  $\text{Torus} \times \text{Intervall}$ ; und  $\tilde{N} = N - \mathring{U}(T')$  besteht aus einem Bündel über der  $n$ -fach gelochten 2-Sphäre und  $n$  Vollringen, und es ist  $n \leq 3$ . Oder umgekehrt.

**(8.1.3)**  $M$  ist die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3; und  $N$  ist das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. Oder umgekehrt.

**(8.1.4)**  $M$  ist die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_1$  aus (7.7); und  $N$  ist das  $S^1$ -Bündel über dem Kleinschen Schlauch, das einen Schnitt besitzt. Oder umgekehrt.

**(8.1.5)**  $M$  und  $N$  sind beide die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_2$  aus (7.7).

Die Behauptung von (8.1) ist trivial, wenn  $m = n = 0$ ; also nehmen wir an, daß  $m + n > 0$ . Zum Beweis unterscheiden wir die folgenden drei Fälle:

(8.2) Es ist  $\partial M \neq \emptyset$ ; und alle  $T_j$  und  $T'_j$  sind kompressibel.

(8.3) Unter den Tori  $T_j$  und  $T'_j$  gibt es mindestens einen, etwa  $T_1$ , der inkompressibel ist.

(8.4) Es ist  $\partial M = \emptyset$ ; und alle  $T_j$  und  $T'_j$  sind kompressibel.

(8.2) *Beweis von (8.1) für den Fall, daß  $\partial M \neq \emptyset$  und daß alle  $T_j$  und  $T'_j$  kompressibel sind.*

Nach (7.3) wird  $M$  von den  $T_j$  aufgeschnitten in das  $S^1$ -Bündel  $M^*$  und die Vollringe  $V_1, \dots, V_m$ ; es ist  $m \geq 1$ ;  $M^*$  hat mehr als  $m$  Randflächen.  $N$  wird von den  $T'_j$  aufgeschnitten in das  $S^1$ -Bündel  $N^*$  und die Vollringe  $W_1, \dots, W_n$ ; es ist  $n \geq 0$ .

Sei  $C_1$  ein vertikaler Kreisring in  $M^*$ , dessen eine Randkurve in  $T_1$  und dessen andere Randkurve in  $\partial M$  liegt. Sei  $V_1$  der an  $T_1$  anstoßende Vollring. Sei  $U(C_1 \cup V_1)$  eine reguläre Umgebung, so daß  $M^* \cap U(C_1 \cup V_1)$  vertikal ist. Sei  $F = (\partial U(C_1 \cup V_1) - \partial M)$ ;  $F$  ist ein vertikaler Kreisring in  $M^*$ , der, grob gesprochen,  $V_1$  von  $M$  abtrennt. Nach (7.4) ist  $F$  inkompressibel und nicht rand-parallel in  $M$ . Deshalb gilt dasselbe für  $\varphi(F)$  in  $N$ . Wir deformieren den Homöomorphismus  $\varphi$  so, daß  $\varphi(F) \cap T'$  aus möglichst wenig Kurven besteht. Da  $N$  irreduzibel ist, (7.1), zeigt (1.9), daß  $\varphi(F) \cap N^*$  inkompressibel in  $N^*$  ist und daß keine Komponente von  $\varphi(F) \cap N^*$  parallel ist zu einem Teil von  $\partial N^* - \partial N$ . Daß eine Komponente von  $\varphi(F) \cap N^*$  parallel ist in  $N^*$  zu einem Teil von  $\partial N$ , ist nur möglich, wenn  $\varphi(F) \subset N^*$ ; es ist also nicht möglich, da  $\varphi(F)$  nicht randparallel in  $N$  ist. Wir können also in (2.8) nachschauen, wie  $\varphi(F) \cap N^*$  aussieht:

1. *Fall. Die Randkurven  $\varphi(\partial F)$  sind in  $\partial N^*$  nicht homolog zu vertikalen Kurven.* Dann ist die Basis von  $N^*$  eine nicht-orientierbare Fläche. Denn die Randkurven von  $F$  liegen in einer Randfläche von  $M$ , und eine Orientierung von  $F$  induziert in ihnen entgegengesetzte Orientierung. Daher gilt dasselbe für die beiden Randkurven  $\varphi(\partial F)$  von  $\varphi(F) \cap N^*$ . Andererseits ist  $\varphi(F) \cap N^*$  zusammenhängend, und ist isotop zu einer Überlagerung der Basis von  $N^*$ : Das führte zu einem Widerspruch, wenn die Basis von  $N^*$  orientierbar wäre. — Nach (4.2.3) hat nun  $\varphi(F) \cap N^*$  nur Randkurven, die in  $\partial N^*$  isotop sind zu horizontalen Kurven. Daher kann wegen (6.2.3) an  $N^*$  gar kein Vollring  $W_j$  anstoßen. Es ist also  $N = N^*$ , und  $N$  ist notwendig das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband.

Sei nun  $C'$  ein vertikaler Kreisring in  $N$ , der inkompressibel und nicht rand-parallel ist. Da die  $\varphi(\partial F)$  nicht homolog zu vertikalen Kurven in  $\partial N$  sind, können die  $\varphi^{-1}(\partial C')$  nicht homolog zu vertikalen Kurven in  $\partial M^*$  sein. Wird also  $\varphi$  so deformiert, daß  $\varphi^{-1}(C') \cap T$  aus möglichst wenig Kurven besteht, dann wird  $\varphi^{-1}(C') \cap M^*$  ein Flächensystem vom Typ (2.8.2), d.h. es ist dann  $\varphi^{-1}(C') \cap T \neq \emptyset$ . Also ist nach (7.5)  $M$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$ . —  $(M, N)$  ist die Ausnahme (8.1.3).

2. *Fall. Die Randkurven  $\varphi(\partial F)$  sind in  $\partial N^*$  homolog zu vertikalen Kurven.* Dann liegt  $\varphi(F)$  bereits in  $N^*$  und ist in  $N^*$  isotop zu einem vertikalen Kreisring; wir nehmen daher an, daß  $\varphi(F)$  vertikal ist in  $N^*$ .  $\varphi(F)$  zerlegt  $N$ , und eine der Komponenten, nämlich  $\varphi(U(C_1 \cup V_1))$ ,

ist ein Vollring. Läge dieser Vollring in  $N^*$ , dann wäre sein Durchschnitt mit einer als Schnitt in  $N^*$  eingebetteten Basis eine Meridianfläche, die  $\varphi(F)$  in genau einem Bogen träge, und es folgte, daß  $\varphi(F)$  in  $N^*$  randparallel wäre, was nicht stimmt. Also enthält dieser Vollring mindestens einen der Tori  $T_j$ ; er enthält auch höchstens einen, da im andern Falle  $\varphi(U(C_1 \cup V_1))$ , mit der von  $N$  induzierten Graphenstruktur, eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit wäre (der einzige kritische Punkt ist (6.2.1)), aber kompressiblen Rand hätte, im Widerspruch zu (7.2). Da sicherlich  $\partial N \not\subset \varphi(U(C_1 \cup V_1))$ , enthält also  $\varphi(U(C_1 \cup V_1))$  genau einen der Vollringe  $W_j$ , etwa  $W_1$ . — Die Tori  $\varphi(\partial V_1)$  und  $\partial W_1$  sind beide parallel zu  $\varphi(\partial U(C_1 \cup V_1))$ , und beide liegen im Innern von  $N$ ; sie sind daher isotop. Also können wir  $\varphi$  so deformieren, daß  $\varphi(V_1) = W_1$ .

Die Behauptung folgt nun rekursiv über die Vollringe  $V_j$ : Der nächste Schritt ist,  $V_1$  und  $W_1$  zu „entfernen“ und die Beschränkung  $\varphi|(M - \overset{\circ}{V}_1)$  zu untersuchen, usw. Bei dieser Rekursion stört die im ersten Fall aufgetretene Ausnahme nicht, da die weiterhin vorkommenden Mannigfaltigkeiten alle mindestens zwei Randflächen haben.

**(8.3) Beweis von (8.1) für den Fall, daß  $T_1$  inkompressibel ist.**

Sei  $v$  die Anzahl der inkompressiblen Komponenten von  $T$ , und  $w$  die Anzahl der inkompressiblen Komponenten von  $T'$ . Um die Behauptung für das gegebene Paar  $(M, N)$  nachzuweisen, nehmen wir an, sie sei bereits bewiesen für alle Paare  $(M', N')$ , die nicht die Ausnahme (8.1.3) sind, und für die  $\partial M' \neq \emptyset$ , und  $v' + w' < v + w$ . Der Induktionsanfang ist nach (8.2) richtig.

Sei  $\varphi$  so deformiert, daß  $\varphi(T_1) \cap T'$  aus möglichst wenig Kurven besteht.

**(8.3.1) Es ist  $\varphi(T_1) \cap T' = \emptyset$ .** — Zum Beweis prüfen wir die Möglichkeiten nach, die (7.9) noch offenläßt. (Die hier mit „ $N^*$ “ bezeichnete Mannigfaltigkeit heißt dort „ $M^*$ “; „ $\varphi(T_1)$ “ heißt dort „ $F^*$ “.)

(7.9.1) beschreibt wegen (7.6) gerade die Ausnahme (8.1.2).

zu (7.9.2). Sei  $T^*$  ein Torus in  $N$ , der dem in (7.9) mit  $T^*$  bezeichneten Torus entspricht (vgl. Schluß des Beweises von (7.9)). Die Existenz von  $\varphi^{-1}(T^*)$  in  $M$  zeigt, daß die Reduktionsforderung (6.2.8) verletzt ist für die Verklebung an  $T_1$ .

zu (7.9.3). Sei  $T^*$  in  $N$  gewählt wie oben. Die Existenz von  $\varphi^{-1}(T^*)$  in  $M$  zeigt, daß für die Verklebung an  $T_1$  eine der Reduktionsforderungen (6.2.5), (6.2.6) oder (6.2.7) verletzt ist.

**(8.3.2) Unter den Komponenten von  $\tilde{N} = N - \overset{\circ}{U}(T')$  sei  $N^*$  diejenige, die  $\varphi(T_1)$  enthält.  $\varphi(T_1)$  ist isotop zu einem vertikalen Torus in  $N^*$ .**

*Beweis.* Nach (2.8) ist die einzige Alternative die, daß  $N^*$  ein  $S^1$ -Bündel über dem Torus oder Kleinschen Schlauch ist, (insbesondere

$N^* = N$ ), und es läßt sich dann  $\varphi$  so deformieren, daß die Beschränkung der Bündelprojektion von  $N^*$  auf  $\varphi(T_1)$  eine Überlagerungsprojektion ist.

Es folgt wie am Schluß von (7.9), daß  $M - \mathring{U}(T_1)$  homöomorph ist zu einem Linienbündel, und zwar zu  $\text{Torus} \times \text{Intervall}$  im ersten Fall, und zu zwei Exemplaren des  $S^1$ -Bündels über dem Möbiusband im zweiten Fall. — Das Weitere geht ganz analog zum zweiten und dritten Fall von (8.3.1).

*Wir nehmen also an, daß  $\varphi(T_1)$  in  $N^*$  vertikal ist.*

1. *Fall.*  $\varphi(T_1)$  ist parallel zu einer Randfläche von  $N^*$ . — Diese Randfläche kann nicht eine Randfläche von  $N$  sein, denn sonst folgte aus (7.6), daß die Reduktionsforderung (6.2.1) für  $M$  verletzt wäre. Also ist  $\varphi(T_1)$  parallel zu einer Komponente von  $T'$ , etwa  $T'_1$ ; die beiden Tori liegen im Innern von  $N$  und sind daher isotop: Wir deformieren  $\varphi$  so, daß  $\varphi(T_1) = T'_1$ , und schneiden dann  $M$  und  $N$  an  $T_1$  und  $T'_1$  auf zu  $M'$  und  $N'$ .  $M'$  und  $N'$  sind (möglicherweise nicht zusammenhängende) reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten. Wegen (6.2.7) ist keine von ihnen (bzw. keine ihrer Komponenten) die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3. Daher können wir nach der Induktionsvoraussetzung  $\varphi|_{M'}$  so deformieren, daß  $\varphi|_{M'}: M' \rightarrow N'$  die Graphenstruktur respektiert. Die Deformation kann auf  $\partial M'$ , insbesondere auf  $T_1$ , konstant gehalten werden. Also folgt die Behauptung.

2. *Fall.*  $\varphi(T_1)$  ist nicht parallel zu einer Randfläche von  $N^*$ . (Wir werden sehen, daß das nicht geht.) — Wir schneiden  $M$  und  $N$  an  $T_1$  und  $\varphi(T_1)$  auf zu  $M'$  und  $N'$ ;  $M'$  und  $N'$  sind reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten ( $M'$  trivialerweise,  $N'$  deshalb, weil  $\varphi(T_1)$  nicht parallel war zu einer Komponente von  $T'$ ). Seien  $M_1$  und  $M_2$  die Komponenten von  $M'$  (es ist eventuell  $M_1 = M_2$ ) und  $N_1$  und  $N_2$  die von  $N'$ . Wegen (6.2.7) ist weder  $M_1$  noch  $M_2$  die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3. Wir nehmen zunächst an, daß dasselbe auch für  $N_1$  und  $N_2$  gelte. Nach der Induktionsvoraussetzung können wir dann  $\varphi$  so deformieren, daß  $\varphi|_{M_1}$  und  $\varphi|_{M_2}$  die Graphenstruktur respektieren. Sowohl auf  $T_1$  als auch auf  $\varphi(T_1)$  gibt es zwei ausgezeichnete Isotopieklassen von Kurven, nämlich die der vertikalen Kurven in den anstoßenden Bündeln. Auf  $\varphi(T_1)$  sind diese beiden Klassen identisch. Wegen der bereits erreichten Normierung von  $\varphi$  werden die an  $\varphi(T_1)$  anstoßenden Bündel durch  $\varphi^{-1}$  auf die an  $T_1$  anstoßenden Bündel abgebildet. Daher wird nach (5.5) eine ausgezeichnete Kurvenklasse auf  $\varphi(T_1)$  durch  $\varphi^{-1}$  auf eine ausgezeichnete Kurvenklasse auf  $T_1$  abgebildet. Es folgt, daß die beiden ausgezeichneten Kurvenklassen auf  $T_1$  identisch sind, im Widerspruch zu (6.2.2).

Ist  $N_1$  (bzw.  $N_1$  und  $N_2$ ) die Graphenmannigfaltigkeit  $Q$ , dann schließen wir ähnlich: Nach (7.7) und (6.2.7) ist  $M_1$  (bzw.  $M_1$  und  $M_2$ )

das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. Unter dem Homöomorphismus  $\varphi^{-1}$  geht die durch  $N_1$  bestimmte ausgezeichnete Kurvenklasse auf  $\varphi(T_1)$  über in die Klasse derjenigen Kurven auf  $T_1$ , die isotop sind zum Rand des als Schnitt in  $M_1$  eingebetteten Möbiusbandes (und eventuell analog für  $N_2$  und  $M_2$ ). Also ist die Reduktionsforderung (6.2.5) (bzw. (6.2.6)) für die Verklebung an  $T_1$  verletzt.

**(8.4) Beweis von (8.1) für den Fall, daß  $\partial M = \emptyset$  und daß alle  $T_j$  und  $T'_j$  kompressibel sind.**

$M$  wird von  $T$  aufgeschnitten in das  $S^1$ -Bündel  $M^*$  und Vollringe  $V_1, \dots, V_m$ ; es ist  $m \geq 0$ ;  $N$  wird von  $T'$  aufgeschnitten in das  $S^1$ -Bündel  $N^*$  und Vollringe  $W_1, \dots, W_n$ ; es ist  $n \geq 1$ .

Sei  $p^*$  die Bündelprojektion von  $M^*$ . In  $M^*$  sei ein vertikaler Torus  $F$  folgendermaßen definiert:

Ist  $B^* = p^*(M^*)$  orientierbar und ist das Geschlecht von  $B^*$  nicht 0, dann sei  $p^*(F)$  eine nichtzerlegende Kurve in  $B^*$ .

Ist  $B^*$  nichtorientierbar, dann berande  $p^*(F)$  ein Möbiusband auf  $B^*$ .

Ist  $B^*$  eine gelochte 2-Sphäre, dann werde  $B^*$  von  $p^*(F)$  in zwei Teile zerschnitten, deren einer genau drei Randkurven hat ( $p^*(F)$  eingeschlossen).

Ist  $M^*$  das Bündel über einer 3-fach gelochten 2-Sphäre oder einer 1-fach gelochten projektiven Ebene (da  $M$  eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit ist, kann  $B^*$  nicht eine Teilfläche der 2-Sphäre oder projektiven Ebene mit weniger Randkurven sein), dann trifft nach Voraussetzung für  $N^*$  nicht dasselbe zu. Also können wir, indem wir notfalls  $M$  und  $N$  vertauschen, annehmen, daß dieser Fall nicht eintritt.  $F$  ist dann nicht rand-parallel in  $M^*$ , und es folgt aus (7.2) (durch Aufschneiden an  $F$ ), daß  $F$  inkompressibel in  $M$  ist.

Wir deformieren  $\varphi$  so, daß  $\varphi(F) \cap T'$  aus möglichst wenig Kurven besteht.

1. Fall. Es ist  $\varphi(F) \cap T' = \emptyset$ . — Da  $T' \neq \emptyset$ , dürfen wir nach (2.8) annehmen, daß  $\varphi(F)$  in  $N^*$  vertikal ist. Wir zerschneiden  $M$  und  $N$  an  $F$  bzw.  $\varphi(F)$  zu  $M_1$  und  $M_2$ , bzw.  $N_1$  und  $N_2$  (wobei möglicherweise  $M_1 = M_2$  und  $N_1 = N_2$ ).  $M_1$  und  $M_2$  sind reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten. Dasselbe gilt für  $N_1$  und  $N_2$ , denn das Gegenteil wäre nur dadurch möglich, daß für eine von ihnen die Reduktionsforderung (6.2.1) verletzt, daß also  $\varphi(F)$  parallel zu einer Randfläche von  $N^*$  wäre, und das geht nicht, da  $\varphi(F)$  inkompressibel in  $N$  ist.

Wir haben auf  $F$  und  $\varphi(F)$  je eine ausgezeichnete Kurvenklasse, nämlich die der Faserung von  $M^*$  bzw.  $N^*$ .

1a)  $\varphi$  führt die eine ausgezeichnete Kurvenklasse in die andere über: Nach (8.2) können wir den Homöomorphismus  $\varphi|_{M_1}$  deformieren in

einen Homöomorphismus, der die Graphenstruktur respektiert, wenn nicht  $(M_1, N_1)$  das Ausnahmepaar aus (8.2) ist: Aber  $(M_1, N_1)$  kann nicht dieses Ausnahmepaar sein wegen unserer Annahme über die ausgezeichneten Kurvenklassen. Entsprechendes gilt für  $\varphi|M_2$ . Die Deformationen können auf  $\partial M_1$  und  $\partial M_2$  konstant gehalten werden; also folgt die Behauptung.

1b)  $\varphi$  führt die eine ausgezeichnete Kurvenklasse nicht in die andere über: Das ist mit (8.2) nur dann verträglich, wenn beide Paare  $(M_1, N_1)$  und  $(M_2, N_2)$  das Ausnahmepaar ( $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband,  $Q$ ) sind. Um nachzuweisen, daß  $(M, N)$  eines der Paare (8.1.4) oder (8.1.5) ist, genügt es nachzuweisen, daß bei der Verklebung von  $M_1$  und  $M_2$  zu  $M$  eine Kurve auf  $\partial M_1$ , die als Randkurve eines inkompressiblen, nicht rand-parallelen Kreisrings in  $M_1$  in Frage kommt, zusammenfällt mit einer ebensolchen Kurve in  $\partial M_2$ . Daß das so ist, folgt aber gerade aus unserer Annahme über  $\varphi$ : Denn eine auf  $F$  liegende, in  $M^*$  vertikale Kurve liefert ein solches Kurvenpaar, und eine auf  $\varphi(F)$  liegende, in  $N^*$  vertikale Kurve liefert ein anderes.

2. Fall. Es ist  $\varphi(F) \cap T' \neq \emptyset$ . — Wir prüfen die Fälle nach, die (7.9) noch offen läßt.

2a) (zu (7.9.1) und (7.9.2))  $N^*$  ist das Bündel über der 3- oder 4-fach gelochten 2-Sphäre, und  $N$  wird von  $\varphi(F)$  aufgeschnitten in  $\text{Torus} \times \text{Intervall}$ .

Nach (7.6) kann in unserem Falle  $M$  nur ein Bündel über dem Torus oder Kleinschen Schlauch sein (mit trivialer Graphenstruktur).  $M$  kann nicht ein Bündel über dem Kleinschen Schlauch sein, da wir für solche Bündel  $F$  als zerlegende Fläche gewählt hatten. — Also gibt es in  $M$  einen vertikalen inkompressiblen Torus  $F'$ , der  $M$  nicht zerlegt und der nicht isotop zu  $F$  ist. Wir deformieren  $\varphi$  so, daß  $\varphi(F') \cap T'$  möglichst klein ist: Ist  $\varphi(F') \cap T' = \emptyset$ , liegt also  $\varphi(F')$  in  $N^*$ , dann wird  $N$  von  $\varphi(F')$  zerlegt, was nicht stimmt. Ist  $\varphi(F') \cap T' \neq \emptyset$ , dann folgt aus (2.11), daß  $\varphi(F')$  isotop ist zu  $\varphi(F)$ , was auch nicht stimmt.

2b) (zu (7.9.3); dieser Fall kann eintreten)  $N$  ist die Graphenmannigfaltigkeit  $Q_2$  aus (7.8.2).  $M$  ist noch zu bestimmen.

Wir zerlegen  $N$  durch einen vertikalen Torus in zwei Teile  $N_1$  und  $N_2$ , so daß die induzierte Graphenstruktur auf  $N_1$  die des  $S^1$ -Bündels über dem Möbiusband ist und die von  $N_2$  die der Graphenmannigfaltigkeit  $Q$  aus § 3. Wir konstruieren nun eine neue Graphenstruktur für  $N$  dadurch, daß wir  $N_1$  die Graphenstruktur von  $Q$  geben und  $N_2$  die des Bündels über dem Möbiusband. Die neue Graphenstruktur von  $N$  ist homöomorph zur ursprünglichen, (7.8.2).

Nach unserer Voraussetzung über  $\varphi(F)$  konnten wir  $\varphi$  so deformieren, daß die Beschränkung der Bündelprojektion von  $N^*$  auf  $\varphi(F) \cap N^*$  eine

Überlagerungsprojektion war. Für die neue Graphenstruktur heißt das aber gerade:  $\varphi$  kann so deformiert werden, daß der Durchschnitt  $\varphi(F) \cap N_1$  aus Kreisringen besteht, und daß diese Kreisringe die in  $N_1$  liegenden neuen  $W_j$  nicht treffen. Also sind wir mit der neuen Graphenstruktur für  $N$  im schon behandelten Fall, daß  $\varphi(F) \cap T' = \emptyset$ .

### 9. Klassifikation der „meisten“ reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten

(9.1) Wir betrachten in diesem Paragraphen nur reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten, und schließen von diesen noch die folgenden aus:

(9.1.1)  $M - \mathring{U}(T)$  besteht aus dem Bündel über der dreifach gelochten 2-Sphäre und drei Vollringen.

(9.1.2)  $M - \mathring{U}(T)$  besteht aus dem Bündel über dem Möbiusband und einem Vollring

(9.1.3)  $T \neq \emptyset$ , und  $M - \mathring{U}(T)$  ist Torus  $\times$  Intervall.

(Die Mannigfaltigkeiten (9.1.3) ordnen sich den folgenden Überlegungen nicht unter. Ihre Klassifikation läßt sich zurückführen auf das (gelöste) Konjugationsproblem in  $\text{Aut}_+(Z \times Z) = \text{Gruppe der zwei-reihigen unimodularen Matrizen mit Determinante } +1$ .)

Einer reduzierten Graphenmannigfaltigkeit  $M$ , die nicht eine der ausgeschlossenen ist, und die mit einer festen Orientierung versehen sei, werden wir in kanonischer Weise einen bewerteten Graphen  $A(M)$  zuordnen. Wir geben zuerst eine „axiomatische Beschreibung“ der auftretenden Graphen.

(9.2.1)  $A(M)$  hat endlich viele Punkte  $\mu_1, \mu_2, \dots$  und endlich viele Strecken  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . Die Strecken sind orientiert. Jeder Endpunkt einer Strecke ist mit einem Punkt inzident.  $A(M)$  ist zusammenhängend.

(9.2.2) Jedem Punkt  $\mu_j$  wird ein Tripel ganzer Zahlen,  $(g_j, r_j, s_j)$  zugeordnet. Darin ist  $g_j$  beliebig;  $r_j$  nicht negativ; wenn  $r_j = 0$ , dann ist  $s_j$  beliebig, wenn  $r_j > 0$ , dann ist  $s_j$  durch einen Strich zu ersetzen.

(9.2.3) Ist einem Punkt der Ordnung 1 das Tripel  $(0, 0, s_j)$  zugeordnet, so wird es durch einen Strich ersetzt.

(9.2.4) a) Hat  $A(M)$  nur zwei Punkte, so sind nicht beide mit einem Strich bewertet.

b) Einem Punkt der Ordnung 0 wird nicht das Tripel  $(0, 0, s_1)$  oder  $(-1, 0, s_1)$  zugeordnet.

c) Einem Punkt der Ordnung 2 wird nicht das Tripel  $(0, 0, s_j)$  zugeordnet.

d) Einem Punkt der Ordnung 1 wird nicht das Tripel  $(0, 1, -)$  zugeordnet.

e) Hat  $A(M)$  drei Punkte, die mit einem Strich bewertet sind, und nur drei Strecken, so ist dem vierten Punkt nicht das Tripel  $(0, 0, s_j)$  zugeordnet.

f) Hat  $A(M)$  einen Punkt, der mit einem Strich bewertet ist, und nur eine Strecke, so ist dem zweiten Punkt nicht das Tripel  $(-1, 0, s_j)$  zugeordnet.

(9.2.5) Sei die Strecke  $\tau_i$  mit einem Punkt inzident, der mit einem Strich bewertet ist:

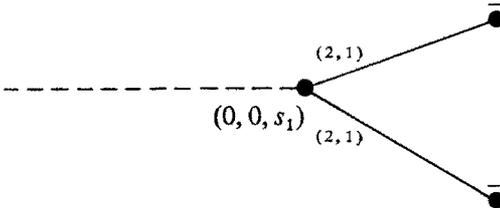
Dann ist  $\tau_i$  zu diesem Punkt hin orientiert. Und  $\tau_i$  wird mit einem Paar  $(\alpha_i, \beta_i)$  bewertet; darin sind  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  teilerfremde ganze Zahlen, und es ist  $1 \leq \beta_i < \alpha_i$ .

(9.2.6) Sei keiner der Punkte, mit denen  $\tau_i$  inzident ist, mit einem Strich bewertet:

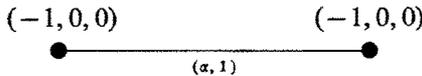
Dann wird die (orientierte) Strecke  $\tau_i$  mit einem Paar  $(\alpha_i, \beta_i)$  bewertet; darin sind  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  teilerfremde ganze Zahlen, und es ist  $0 \leq \beta_i < \alpha_i$ .

(9.2.7) Folgende Graphen oder Teilgraphen kommen nicht vor:

a)



b)



c)



(9.2.8) Sei  $A^*$  der (möglicherweise nicht zusammenhängende) Teilgraph, der aus  $A(M)$  entsteht, wenn alle Punkte, deren zugeordnetes  $g_j < 0$  ist, und die mit ihnen inzidenten Strecken entfernt werden. Die Homologiegruppe  $H_1(A^*)$  wird mit einem Homomorphismus nach  $Z_2$  bewertet.

(9.3) Seien  $A_1$  und  $A_2$  Graphen mit den Eigenschaften (9.2.1)–(9.2.8).  $A_1$  und  $A_2$  heißen äquivalent, wenn es eine eindeutige inzidenzerhaltende Abbildung  $\Phi: A_1 \rightarrow A_2$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

(9.3.1)  $\Phi$  führt jeden Punkt in einen ebenso bewerteten Punkt über.

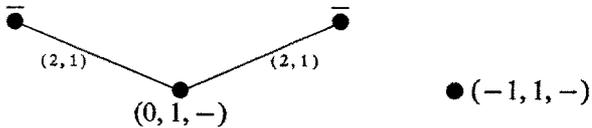
(9.3.2)  $\Phi$  führt eine mit  $(\alpha, \beta)$  bewertete Strecke über in eine mit  $(\alpha, \beta^\omega)$  bewertete Strecke; darin ist  $\omega = +1$  oder  $-1$ , je nachdem die Streckenorientierung (dieser einen Strecke) erhalten bleibt oder nicht. Es ist  $\beta^{+1} = \beta$ ; und  $\beta^{-1}$  ist der normierte Repräsentant der zur Restklasse mod  $\alpha$  von  $\beta$  inversen Restklasse; mit der Konvention  $0^{-1} = 0$ .

(9.3.3) Der durch  $\Phi$  induzierte Homöomorphismus  $A_1^* \rightarrow A_2^*$  induziert ein kommutatives Diagramm

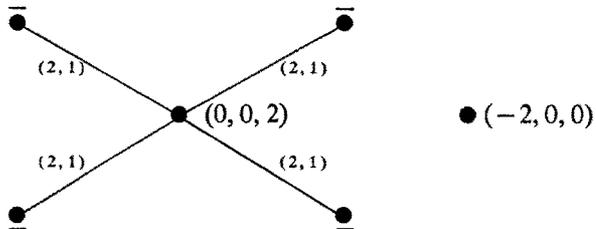
$$\begin{array}{ccc} H_1(A_1^*) & \longleftrightarrow & H_1(A_2^*) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Z_2 & \end{array}$$

(9.3.4) Folgende beiden Paare von Graphen sind äquivalent:

a)



b)



(9.4) Satz. Eine orientierte reduzierte Graphenmannigfaltigkeit, die nicht eine der in (9.1) genannten ist, bestimmt einen bewerteten Graphen mit den Eigenschaften (9.2). Davon gilt auch die Umkehrung.

Zwei orientierte Mannigfaltigkeiten sind genau dann orientierungserhaltend homöomorph, wenn die zugeordneten Graphen äquivalent im Sinne von (9.3) sind.

Sind  $M$  und  $N$  reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten, die nicht zu den in (9.1) ausgeschlossenen gehören, und ist  $\varphi: M \rightarrow N$  ein Homöo-

morphismus, so gibt es nach (8.1), wenn nicht  $(M, N)$  eines der Paare (8.1.3), (8.1.4) oder (8.1.5) ist, einen zu  $\varphi$  isotopen Homöomorphismus, der die Graphenstruktur respektiert.

Im Falle (8.1.5) gibt es einen Homöomorphismus  $\varphi': M \rightarrow N$ , der die Graphenstruktur respektiert.

Daß die aus dem Paar (8.1.3), bzw. (8.1.4) resultierenden Graphen äquivalent sind, ist in die Definition der Äquivalenz mit aufgenommen, (9.3.4).

*Es genügt daher zum Beweis des Satzes, daß wir nicht einer Graphenmannigfaltigkeit, sondern einer Graphenstruktur einen bewerteten Graphen zuordnen, und daß die in dieser Zuordnung enthaltene Willkür gerade von der in (9.3.1)–(9.3.3) beschriebenen Äquivalenz erfaßt wird.*

Wir merken an, daß die Verabredungen (9.1) und die Reduktionsforderungen (6.2.1) und (6.2.5)–(6.2.10) in (9.2.4) und (9.2.7) auftauchen. Die Reduktionsforderung (6.2.3) tritt implizit in (9.2.5) auf, („ $1 \leq \beta_i$ “). Wir kommen hierauf später nicht mehr zurück.

Die folgenden Argumente sind im wesentlichen die, mit denen SEIFERT die „gefaseren Räume“ gegenüber „faserstreuen Homöomorphismen“ klassifiziert hat [12]. Von unseren Reduktionsforderungen (6.2) sind die meisten dabei unwesentlich; nur (6.2.2) und (6.2.4) sind notwendig.

Sei  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  die Graphenstruktur von  $M$ . Sei  $U(T)$  eine reguläre Umgebung von  $T$ , und sei  $U(T_i)$  die  $T_i$  enthaltende Komponente. Wir bezeichnen die Randflächen von  $U(T_i)$  mit  $T_i^-$  und  $T_i^+$ . Wir orientieren  $T_i^-$  und  $T_i^+$  mit der von der Inklusion  $T_i^- \subset M - \overset{\circ}{U}(T)$  bzw.  $T_i^+ \subset M - \overset{\circ}{U}(T)$  induzierten Orientierung. Die (fest gewählte) Produktstruktur  $U(T_i) = T_i \times I$  definiert Homöomorphismen  $T_i^- \rightarrow T_i$  und  $T_i^+ \rightarrow T_i$ ; der zusammengesetzte Homöomorphismus  $T_i^- \rightarrow T_i^+$  ist orientierungsumkehrend.

Seien  $M_1, \dots, M_n$  die Komponenten von  $M - \overset{\circ}{U}(T)$ .

Der  $M$  zugeordnete Graph  $A = A(M)$  besteht aus Punkten  $\mu_1, \dots, \mu_n$  und orientierten Strecken  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Der Punkt  $\mu_j$  ist der Komponente  $M_j$  zugeordnet. Die Strecke  $\tau_i$  ist dem Paar  $T_i^-, T_i^+$  zugeordnet; der Anfangspunkt von  $\tau_i$  entspricht  $T_i^-$ , der Endpunkt  $T_i^+$ .  $\mu_j$  ist genau dann mit  $\tau_i$  inzident, und zwar am Anfangspunkt, bzw. am Endpunkt, bzw. an beiden, wenn  $T_i^- \subset \partial M_j$ , bzw.  $T_i^+ \subset \partial M_j$ , bzw.  $T_i^- \cup T_i^+ \subset \partial M_j$ . – Es braucht nicht (und es darf sogar nicht) vermerkt werden, die „wievielte“ Randfläche von  $M_j$   $T_i^-$ , etc., ist, da es zu zwei Randflächen von  $M_j$  einen Homöomorphismus gibt, der sie vertauscht.

Ist  $M_j$  nicht ein Vollring, so wird  $\mu_j$  mit dem Tripel  $(g_j, r_j, s_j)$  bewertet. Das Vorzeichen von  $g_j$  sagt aus, ob die Basis von  $M_j$  orientierbar

ist, der Betrag von  $g_j$  bezeichnet ihr Geschlecht, (Torus: +1; 2-Sphäre: 0; projektive Ebene: -1).  $r_j$  ist die Anzahl der in  $M_j$  liegenden Randflächen von  $M$ .  $s_j$  wird später definiert werden;  $s_j$  ist nur erklärt, wenn  $r_j = 0$ .

Ist  $M_j$  ein Vollring, dann wird  $\mu_j$  mit einem Strich bewertet.

**(9.5) Bewertung der  $\tau_i$ .**

Es liege  $T_i^-$  in  $M_1$  und  $T_i^+$  in  $M_2$ . Notfalls werden  $T_i^-$  und  $T_i^+$  umnumeriert, daher nehmen wir an, daß  $M_1$  nicht ein Vollring ist.

Es sei  $k$  eine orientierte Kurve in  $T_i^+$ , und zwar: Ist  $M_2$  ein Vollring, dann sei  $k$  eine Meridiankurve. Ist  $M_2$  nicht ein Vollring, dann sei  $k$  eine vertikale Kurve; da wir ausgeschlossen haben, daß  $M_2$  Torus  $\times$  Intervall ist, ist auch in diesem Falle  $k$  bis auf Umorientierung und Isotopie ohne Bezug auf die Faserung von  $M_2$  festgelegt, (5.5).

Wir wählen ein Koordinatensystem  $a_1, b_1$  in der Randfläche  $T_i^-$  von  $M_1$ , (5.6.1);  $b_1$ , als vertikale Kurve in der Randfläche eines Bündels, das weder ein Vollring noch Torus  $\times$  Intervall ist, ist bis auf Umorientierung und Isotopie ohne Bezug auf die Faserung festgelegt. Die Orientierung von  $a_1$  ist durch die von  $b_1$  (und die von  $T_i^-$ ) festgelegt; die Homologieklassse von  $a_1$  ist aber nur bis auf Vielfache von  $b_1$  bestimmt.

In  $U(T_i)$  besteht eine Homologie  $\varepsilon_i^- k \sim \alpha_i^- a_1 + \beta_i^- b_1$ , mit  $\varepsilon_i^- = +1$  oder  $-1$ , und  $\alpha_i^- \geq 0$ . Da  $k$  eine einfach-geschlossene Kurve ist, sind  $\alpha_i^-$  und  $\beta_i^-$  teilerfremd.

Es ist  $\alpha_i^- > 0$ : Denn wäre  $\alpha_i^- = 0$ , dann wäre  $\beta_i^- = \pm 1$ , und es folgte, daß die Reduktionsforderung (6.2.4) bzw. (6.2.2) verletzt wäre. — Also können wir durch Addition eines geeigneten Vielfachen von  $b_1$  zu einer neuen horizontalen Koordinate  $a_1$  übergehen, so daß  $\varepsilon_i^- k \sim \alpha_i^- a_1 + \beta_i^- b_1$ , mit  $0 \leq \beta_i^- < \alpha_i^-$ . Durch diese Normierung ist die Homologieklassse von  $a_1$  (bis auf gemeinsame Umorientierung von  $b_1$  und  $a_1$ ) eindeutig bestimmt.  $\alpha_i^-$  und  $\beta_i^-$  hängen nicht ab von der Orientierung von  $k$  oder von der Orientierung von  $b_1$  und  $a_1$ . (Dagegen hängt  $\beta_i^-$  ab von der Orientierung von  $T_i^-$ , d.h. von der Orientierung von  $M$ , und wäre bei Umorientierung von  $M$  durch  $\alpha_i^- - \beta_i^-$  zu ersetzen, wenn  $\beta_i^- \neq 0$ .)

**(9.5.1)  $M_2$  ist ein Vollring.**

$\tau_i$  wird so orientiert, daß  $\mu_1$  mit dem Anfangspunkt und  $\mu_2$  mit dem Endpunkt von  $\tau_i$  inzident ist.  $\tau_i$  wird mit  $(\alpha_i^-, \beta_i^-)$  bewertet. — Wegen der Reduktionsforderung (6.2.3) ist  $\alpha_i^- > 1$ , daher  $\beta_i^- > 0$ .

**(9.5.2)  $M_2$  ist kein Vollring.**

Sei  $[a_2], [b_2]$  das bis auf gemeinsame Umorientierung eindeutig bestimmte Koordinatensystem in der Randfläche  $T_i^+$  von  $M_2$ , für das

gilt  $\varepsilon_i^+ b_1 \sim \alpha_i^+ a_2 + \beta_i^+ b_2$ , mit  $0 \leq \beta_i^+ < \alpha_i^+$ , (diese und die folgenden Homologien in  $U(T_i)$ ).

Wir können jedes der beiden Koordinatensysteme durch das andere ausdrücken, wir haben also in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \sim \varepsilon_i^- \begin{pmatrix} \gamma_i^- & \delta_i^- \\ \alpha_i^- & \beta_i^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \sim \varepsilon_i^+ \begin{pmatrix} \gamma_i^+ & \delta_i^+ \\ \alpha_i^+ & \beta_i^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen sind zueinander invers; da die natürliche Projektion  $T_i^- \rightarrow T_i^+$  orientierungsumkehrend ist, haben sie die Determinante  $-1$ . Ausrechnen zeigt, daß  $\alpha_i^- = \alpha_i^+$ ;  $\delta_i^- = \delta_i^+$ ;  $\gamma_i^- = -\beta_i^+$ ;  $\gamma_i^+ = -\beta_i^-$ . (Dabei haben wir benutzt, daß  $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$ , s. u.)

Also können wir die beiden Matrizen schreiben als:

$$\begin{pmatrix} -\beta_i^+ & \delta_i^- \\ \alpha_i^- & \beta_i^- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\beta_i^- & \delta_i^+ \\ \alpha_i^+ & \beta_i^+ \end{pmatrix}.$$

Die Determinantengleichung ist  $\alpha_i^- \delta_i^- + \beta_i^- \beta_i^+ = 1$ . Hieraus und aus den Beziehungen  $0 \leq \beta_i^- < \alpha_i^-$  und  $0 \leq \beta_i^+ < \alpha_i^+$  folgt:

Ist  $\alpha_i^- = 1$ , so ist  $\beta_i^- = \beta_i^+ = 0$  und  $\delta_i^- = 1$ .

Ist  $\alpha_i^- > 1$ , so ist  $\beta_i^- \neq 0$  und  $\beta_i^+ \neq 0$ , und die Determinantengleichung wird äquivalent zu der Gleichung für inverse prime Restklassen  $\beta_i^-$  und  $\beta_i^+$  modulo  $\alpha_i^-$ .

Daher ist die Verklebung entlang der gerichteten Strecke  $\tau_i$  (die Homologie am „Endpunkt“  $T_i^+$  ausgedrückt durch die Homologie am „Anfangspunkt“  $T_i^-$ ) eindeutig gekennzeichnet durch das Paar  $(\alpha_i^-, \beta_i^-)$ . Wird die Richtung der Strecke  $\tau_i$  geändert, so bleibt  $\alpha_i^-$  ungeändert, und  $\beta_i^-$  ist durch  $\beta_i^+$  zu ersetzen, also durch den normierten Repräsentanten der inversen Restklasse modulo  $\alpha_i^-$ .

Wir haben noch zu zeigen, daß  $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$ . Daß diese Gleichung stimmt, zeigt folgende Interpretation: Wir projizieren die Kurve  $b_2$  nach  $T_i^-$ , es folgt dann aus der Homologie  $\varepsilon_i^- b_2 = \alpha_i^- a_1 + \beta_i^- b_1$ , daß  $\varepsilon_i^- \alpha_i^-$  die Schnittzahl von  $b_1$  mit  $b_2$  – in dieser Reihenfolge – ist, (5.6.1). Andererseits ist  $\varepsilon_i^+ \alpha_i^+$  die entsprechende Schnittzahl von  $b_2$  mit  $b_1$ . Um von einer Schnittzahl zur andern überzugehen, müssen wir einerseits die Faktoren vertauschen und zum andern von der Orientierung von  $T_i^-$  zu der von  $T_i^+$  übergehen: das ergibt zwei Minuszeichen.

(9.6) Definition von  $H_1(A^*) \rightarrow Z_2$ .

Sei  $M^*$  die (möglicherweise unzusammenhängende) Teilmannigfaltigkeit von  $M$ , die entsteht, wenn wir aus  $M = U(T) \cup M_1 \cup \dots \cup M_m$  alle

$S^1$ -Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche und die daran anstoßenden  $U(T_i)$  fortlassen.  $H_1(M^*) \rightarrow H_1(A^*)$  ist surjektiv; der Kern wird erzeugt von den  $H_1(M_j)$ .

Gehört  $M_j$  zu  $M^*$ , dann ist es sinnvoll, zu sagen, daß zwei vertikale Kurven in verschiedenen Randflächen von  $M_j$  gleich orientiert seien. Wir nehmen nun nachträglich an, daß die Koordinatensysteme in (9.5) so gewählt worden seien, daß die vertikalen Koordinaten in einem  $M_j$ , dessen Basis orientierbar ist, sämtlich gleich orientiert sind.

Für einen geschlossenen Weg  $l$  in  $M^*$  werde  $\rho'(l)$  definiert als

$$\rho'(l) = \sum_i \sigma(l, T_i) \varepsilon_i;$$

dabei ist  $\sigma(l, T_i)$  die Schnittzahl mod 2 von  $l$  und  $T_i$ , und  $\varepsilon_i \in Z_2$  der „Logarithmus“ von  $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$ , (9.5), also  $\varepsilon_i = 1$  oder 0, je nachdem  $\varepsilon_i^- = -1$  oder  $+1$ .

$\rho: H_1(A^*) \rightarrow Z_2$  wird definiert als Ergänzung in dem untenstehenden kommutativen Diagramm;  $\rho$  existiert.

$$\begin{array}{ccc} H_1(M^*) & \longrightarrow & H_1(A^*) \\ & \searrow \rho' & \swarrow \rho \\ & & Z_2 \end{array}$$

Der Homomorphismus  $\rho$  beschreibt die Abhängigkeiten zwischen den Orientierungen der vertikalen Koordinaten in den Randflächen der  $M_j$ : Ist  $M_j$  ein  $S^1$ -Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche, dann sind diese Orientierungen wegen der Existenz des Homöomorphismus (5.7.4) irrelevant; also genügt es, wenn wir uns auf die Teilmannigfaltigkeit  $M^*$  beschränken. Und hier kommt es, wegen des Homöomorphismus (5.7.3), auch nicht eigentlich auf die Orientierung der vertikalen Koordinaten an, sondern nur darauf, ob bei der Verklebung  $T_i$  die vertikalen Koordinaten „kohärent“ orientiert sind oder nicht, d. h. ob  $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+ + 1$  ist oder  $-1$ .

Bezeichnen wir für den Moment als einen „Zykel“ eine geschlossene Kurve in  $A^*$ , die jeden Punkt und jede Strecke höchstens einmal durchläuft, so erreichen wir mit Hilfe von Homöomorphismen des Typs (5.7.3), (nur solche stehen uns nach (5.8) zur Verfügung), daß entlang einem vorgegebenen Zykel entweder an genau keiner oder an genau einer Verklebung die vertikalen Koordinaten nicht kohärent orientiert sind; im zweiten Falle kann noch die Verklebung vorgegeben werden, an der die vertikalen Koordinaten nicht kohärent orientiert sind. Die beiden Möglichkeiten sind dadurch charakterisiert, daß das Bild des Zyklus unter  $\rho: H_1(A^*) \rightarrow Z_2$  das triviale Element oder nicht das triviale Element ist.

(9.7) *Definition der  $s_j$ .*

Sei  $M_j$  nicht ein Vollring. Wir definieren  $s_j$  als Hindernis, die Basis von  $M_j$  so als Schnitt in  $M_j$  einzubetten, daß die in (9.5) konstruierten horizontalen Kurven Randkurven werden; ist  $\partial M_j = \emptyset$ , dann ist  $s_j$  das übliche Hindernis für einen Schnitt.

Seien  $R_1, \dots, R_t$  die Randflächen von  $M_j$ ,  $t \geq 0$ ; von diesen mögen die ersten  $t'$  in  $U(T)$  liegen,  $t' \leq t$ , und die übrigen in  $\partial M$ .

Wir bezeichnen die in (9.5) konstruierten Koordinaten mit  $a_1, b_1, \dots, a_{t'}, b_{t'}$ .

Wir wählen ein Koordinatensystem für  $\partial M_j$ , (5.6.2), und bezeichnen die einzelnen Koordinaten mit  $a'_1, b'_1, \dots, a'_t, b'_t$ .

(9.7.1) *Es ist  $t > t'$ .* — Wir dürfen annehmen, daß  $b_1 = b'_1, b_2 = b'_2$ , usw. (vgl. die analoge Argumentation in (5.8.2)); und wir können dann erreichen, daß  $a_i = a'_i$  für  $i \leq t'$ , indem wir Homöomorphismen vom Typ (5.7.6) jeweils mit der  $i$ -ten und  $t$ -ten Randfläche ausführen. — Ein Hindernis existiert in diesem Falle nicht, und  $s_j$  wird nicht erklärt.

(9.7.2) *Es ist  $t = t'$ .* — Sei  $V$  ein vertikaler Vollring in  $M_j$ , und sei  $v$  eine orientierte Meridiankurve auf  $\partial V$ . Sei  $M'_j = M_j - \overset{\circ}{V}$ . Da uns jetzt die zusätzliche Randfläche  $\partial V$  in  $M'_j$  zur Verfügung steht, können wir wie in (9.7.1) ein Koordinatensystem für  $\partial M'_j$  finden, so daß die in den Randflächen  $R_1, \dots, R_t$  liegenden Koordinaten gerade die ursprünglich vorgegebenen sind. Seien  $a_0, b_0$  die zu diesem Koordinatensystem für  $\partial M'_j$  gehörenden Koordinaten, die in  $\partial V$  liegen. Nach (5.8) gehen alle Koordinatensysteme aus einem vorgegebenen durch Homöomorphismen vom Typ (5.7) hervor: Nachschauen zeigt (da die Orientierung vorgegeben ist und da Homöomorphismen vom Typ (5.7.6) jetzt verboten sind), daß gleichzeitiges Umorientieren von  $a_0$  und  $b_0$  die einzige allenfalls noch mögliche Abänderung von  $a_0, b_0$  ist.

Wir definieren  $s_j$  als das Produkt der Schnittzahlen von  $v$  mit  $b_0$  und von  $v$  mit  $a_0$  — beide in der angegebenen Reihenfolge.  $s_j$  bleibt ungeändert, sowohl wenn  $v$  umorientiert wird, als auch wenn (gleichzeitig)  $b_0$  und  $a_0$  umorientiert werden.

In der Definition von  $s_j$  steckt noch die Wahl eines vertikalen Vollrings in  $M_j$ , also die Wahl der Isotopieklasse einer Faser: Nach (5.5) gibt es, von wenigen Ausnahmen abgesehen, in  $M_j$  nur eine solche Isotopieklasse. Von den Ausnahmen kommen hier nur zwei in Frage, nämlich die Bündel über dem Torus bzw. Kleinschen Schlauch, die einen Schnitt besitzen. In diesen Fällen sind aber je zwei Faserungen der unterliegenden Mannigfaltigkeit äquivalent als Faserbündel, und  $s_j$  hängt hier nur von dieser Äquivalenzklasse ab, da gar keine Randflächen vorhanden sind.

### 10. Seifertsche Faserräume

Ein orientierbarer *gefaserter Raum* im Sinne von SEIFERT [12], ist eine orientierbare (kompakte, zusammenhängende) 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte so auf 1-Sphären („Fasern“) verteilt sind, daß jede Faser eine ganz aus Fasern bestehende Umgebung besitzt, die fasertreu homöomorph einem *gefasernten Vollring* ist. — Mit „homöomorph“ meinen wir auch hier „semilinear homöomorph“. SEIFERT macht diese Annahme nicht; aber er konstruiert auf einer gefaserten topologischen Mannigfaltigkeit eine semilineare Struktur, so daß jede Faser semilinear eingebettet ist.

Ein *gefaserter Vollring* ist wie folgt definiert: Das 2-Element  $D$  sei identifiziert mit den komplexen Zahlen vom Betrag  $\leq 1$ ; die 1-Sphäre  $S^1$  mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1. Seien  $\mu, \nu$  teilerfremde ganze Zahlen,  $0 \leq \nu < \mu$ . Sei  $z$  eine Erzeugende von  $Z_\mu$ , der zyklischen Gruppe der Ordnung  $\mu$ .  $z$  operiere auf  $D$  durch Multiplikation mit  $\exp(2\pi i \nu/\mu)$  und auf  $S^1$  durch Multiplikation mit  $\exp(2\pi i 1/\mu)$ . Dann sei  $V(\mu, \nu)$  der Quotientenraum  $(D \times S^1)/Z_\mu$ ;  $V(\mu, \nu)$  ist ein Vollring;  $V(\mu, \nu)$  ist auf natürliche Weise gefasert durch die Bilder der  $d \times S^1$ ,  $d \in D$ . — Die mittlere Faser von  $V(\mu, \nu)$  hat mit einer Meridianfläche von  $V(\mu, \nu)$  die Schnittzahl  $\pm 1$ ; jede andere Faser aber die Schnittzahl  $\pm \mu$ . Ist  $\mu > 1$ , so heißt die mittlere Faser von  $V(\mu, \nu)$  eine *Ausnahmefaser der Ordnung  $\mu$* ; ist  $\mu = 1$ , so heißt sie eine *gewöhnliche Faser*. —  $V(\mu, \nu)$  hat eine solche semilineare Struktur, daß jede Faser semilinear eingebettet ist.

Sei  $M$  ein im Seifertschen Sinne gefasertes Raum. Der Quotientenraum von  $M$  nach den Fasern ist eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit  $F$ , die *Zerlegungsfläche*. Wir können  $F$  eine solche semilineare Struktur aufprägen, daß die Projektion  $P: M \rightarrow F$  semilinear ist. Da  $M$  kompakt ist, gibt es in  $M$  höchstens endlich viele Ausnahmefasern; wir bezeichnen ihre Bilder unter  $P$  als *Ausnahmepunkte* von  $F$ . — Auf  $\partial M$  liegen keine Ausnahmefasern.

**(10.1) Satz.** *Seien  $M$  und  $N$  orientierbare Seifertsche Faserräume. Weder  $M$  noch  $N$  sei eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.3).  $M$  sei nicht eine der Ausnahmen (10.1.4).  $(M, N)$  sei nicht eines der Paare (10.1.5)–(10.1.10).*

$\varphi: M \rightarrow N$  sei ein Homöomorphismus.

Dann gibt es einen Homöomorphismus  $\psi: M \rightarrow N$  mit den Eigenschaften:

- a)  $\psi$  bildet jede Faser von  $M$  auf eine Faser von  $N$  ab.
- b)  $\psi$  ist isotop zu  $\varphi$ .

*Bemerkung.* Es ist nicht schwierig, aber lästig, „Weder  $M$  noch  $N$  sei eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.3)“ zu ersetzen durch „ $M$  sei nicht eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.4)“.

*Ausnahmen:*

**(10.1.1)**  $V(\mu, \nu)$ .

**(10.1.2)** Geschlossene Seifertsche Faserräume mit der 2-Sphäre als Zerlegungsfläche und mit höchstens zwei Ausnahmefasern. — Jeder solche ist homöomorph einem Linsenraum (bzw.  $S^3$  oder  $S^1 \times S^2$ ). Zu jedem gibt es unendlich viele homöomorphe, die paarweise nicht fasertreu homöomorph sind.

**(10.1.3)** Geschlossene Seifertsche Faserräume mit der projektiven Ebene als Zerlegungsfläche und mit höchstens einer Ausnahmefaser. — Einer von ihnen ist homöomorph zur zusammenhängenden Summe zweier projektiver Räume. Jeder andere ist homöomorph zu einem (geeigneten) Faserraum aus (10.1.4), (vgl. im Beweis von (6.3.3) „zu (6.2.10)“).

**(10.1.4)** Geschlossene Seifertsche Faserräume mit der 2-Sphäre als Zerlegungsfläche und mit genau drei Ausnahmefasern.

**(10.1.5)**  $S^1 \times S^1 \times I$ .

**(10.1.6)**  $S^1 \times S^1 \times S^1$ .

**(10.1.7)** Das Bündel über dem Kleinschen Schlauch, das einen Schnitt besitzt.

**(10.1.8)** Der Seifertsche Faserraum mit dem 2-Element als Zerlegungsfläche und mit zwei Ausnahmefasern der Ordnung 2. Und das  $S^1$ -Bündel über dem Möbiusband. — Diese beiden sind homöomorph; denn wir können (in der Notation von § 3)  $V_1$  und  $V_2$  als  $V(2, 1)$  fasern, und zwar so, daß die auf den  $\partial V_j$  induzierten Faserungen übereinstimmen mit den von der Produktfaserung  $S^1 \times B \rightarrow B$  induzierten Faserungen.

**(10.1.9)** Bilden wir die Verdopplung der beiden Seifertschen Faserräume (10.1.8), so erhalten wir zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten, deren eine ein Seifertscher Faserraum über der 2-Sphäre mit vier Ausnahmefasern der Ordnung 2 ist, und deren andere ein  $S^1$ -Bündel über dem Kleinschen Schlauch (und zwar dasjenige, das einen Schnitt besitzt).

**(10.1.10)** Die beiden Seifert-Faserungen der Mannigfaltigkeit (10.1.8) lassen sich so wählen, daß auf dem Rande jede Faser der einen Faserung jede Faser der andern Faserung genau einmal schneidet. Es gibt also einen involutorischen Homöomorphismus der Randfläche auf sich, der die beiden Faserungen vertauscht. Bilden wir mit Hilfe dieses Homöomorphismus die „schiefe Verdopplung“ der Mannigfaltigkeit, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit, die auf natürliche Weise als Seifertscher Faserraum mit der projektiven Ebene als Zerlegungsfläche und mit zwei Ausnahmefasern der Ordnung 2 gefasert ist: aber auf zwei Arten. Die

beiden Seifert-Faserungen sind homöomorph, aber nicht isotop, (vgl. (7.8.2)).

*Bemerkung.* Das Ergebnis von (10.1) – mit (a) statt (a+b) – wurde auf anderem Wege von ORLIK, VOGT und ZIESCHANG erhalten [9]. Sie zeigen: Wenn es einen Isomorphismus des Gruppensystems von  $M$  auf das von  $N$  gibt, dann gibt es – von Ausnahmen abgesehen – einen fasertreuen Homöomorphismus von  $M$  auf  $N$ . (Das Gruppensystem ist die Fundamentalgruppe zusammen mit einer Klasse konjugierter Untergruppen für jede Randfläche. Ein Isomorphismus des Gruppensystems ist ein Isomorphismus der Fundamentalgruppen, der die Klassen konjugierter Untergruppen aufeinander abbildet. – Ein Homöomorphismus induziert natürlich immer einen Isomorphismus des Gruppensystems.) Die in [9] ausgeschlossenen Fälle sind „minimal“, d. h. es sind genau die, von denen man explizit zeigen kann, daß (10.1.a) für sie nicht stimmt. Insbesondere passiert in (10.1.3) und (10.1.4) genau das, was dort angegeben ist.

Es ist in Spezialfällen schon seit längerem bekannt, daß eine Seifert-Faserung „i. a.“ eine topologische Invariante ist: SEIFERT [12] gibt einen Beweis für Homologiesphären ( $\neq S^3$ ). BRODY [2] behandelt Faserräume mit höchstens zwei Ausnahmefasern.

*Beweis von (10.1):* Sei  $P: M \rightarrow F$  die Projektion des Seifertschen Faserraumes  $M$  auf seine Zerlegungsfläche  $F$ . Seien  $D_1, \dots, D_m$  disjunkte 2-Elemente im Innern von  $F$ , deren jedes genau einen Ausnahmepunkt im Innern enthält, und so daß jeder Ausnahmepunkt in einem von ihnen enthalten ist. Sei  $M' = P^{-1}(F - \bigcup \overset{\circ}{D}_j)$ ; sei  $V_j = P^{-1}(D_j)$ .  $M'$  mit der Projektion  $P|_{M'}$  ist ein  $S_1$ -Bündel; die  $V_j$  sind Vollringe. Damit ist eine Graphenstruktur für  $M$  definiert.

**(10.2) Lemma.** *Ist  $M$  nicht eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.3), dann ist diese Graphenstruktur reduziert.*

*Beweis.* Das ist trivial für die Punkte (6.2.1) und (6.2.5)–(6.2.10). – Sei  $V(\mu, \nu)$  die ausgebohrte Umgebung einer Ausnahmefaser: Daß für die Verklebung an  $\partial V(\mu, \nu)$  die verbotene Situation (6.2.4) vorliegt, ist nicht möglich, da  $\mu \neq 0$ . Hätten wir die verbotene Situation (6.2.3), dann folgte  $\mu = 1$ , was nicht stimmt, da wir eine Ausnahmefaser und nicht eine gewöhnliche Faser ausgebohrt haben; mit (6.2.3) ist auch (6.2.2) erledigt.

Auf die gleiche Weise konstruieren wir zu  $N$  eine Graphenstruktur; wir schreiben analog  $N = N' \cup W_1 \cup \dots \cup W_n$ .

Nach einer der Voraussetzungen von (10.1) und nach (10.2) sind die  $M$  und  $N$  zugeordneten Graphenstrukturen reduziert. Also ist entweder  $(M, N)$  eines der Ausnahmepaare aus (8.1), oder wir können nach (8.1)  $\varphi$  so deformieren, daß  $\varphi(M') = N'$ .

Wir behandeln zuerst den zweiten Fall: Es sei also  $\varphi(M') = N'$ . Wir wenden (5.5) an auf den Homöomorphismus  $\varphi|_{M'}$ . Die in (5.5) aufgeführten Ausnahmen sind auch in (10.1) aufgeführt, also dürfen wir annehmen, daß der Homöomorphismus  $\varphi|_{M'}$  fasertreu ist. Zum Schluß wenden wir (5.4) an auf die Homöomorphismen  $\varphi|_{V_j}$ .

Nun zu dem Fall, daß die  $M$  und  $N$  zugeordneten Graphenstrukturen auf eine der Ausnahmen zu (8.1) führen: Wir kommen auf ein Paar (8.1.1) genau dann, wenn sowohl der Faserraum  $M$  als auch der Faserraum  $N$  zu (10.1.3) oder (10.1.4) gehört. — (8.1.2) kann nicht vorkommen.

Die Paare (8.1.3)–(8.1.5) entsprechen genau den Paaren (10.1.8)–(10.1.10).

**(10.3)** Es sei noch vermerkt, daß sich (2.8) und (2.9) mit einigen kleinen Änderungen auf Seifertsche Faserräume übertragen lassen.

Die Änderungen sind folgende:

An die Stelle der Bündelprojektion tritt die natürliche Projektion auf die Zerlegungsfläche,  $P: M \rightarrow F$ .

In (2.8.1) ist „ $G$  ist vertikal“ zu interpretieren als:  $G$  besteht aus Fasern, enthält aber keine Ausnahmefaser.

In (2.8.2) ist „Überlagerung“ zu ersetzen durch „verzweigte Überlagerung“; die Überlagerung ist verzweigt über den Ausnahmepunkten der Zerlegungsfläche.

In der Voraussetzung von (2.9) wird „ $p|G$  lokal homöomorph“ formuliert als „ $G$  vom Typ (2.8.2)“.

In (2.9.1) ist „Homöomorphismus“ zu ersetzen durch „Überlagerung der Blätterzahl  $\mu$ “; dabei ist  $\mu$  die Ordnung der  $x$  enthaltenden Ausnahmefaser, bzw.  $\mu = 1$ , wenn diese Faser eine gewöhnliche Faser ist.

Wir geben keinen Beweis; ein solcher wäre i. w. eine Zusammenstellung bereits früher gegebener Details. Einige Spezialfälle sind auch schon behandelt worden (vgl. die Beweise zu (3.1), (3.2), (7.9.3)).

### Literatur

- [1] ALEXANDER, J. W.: On the subdivision of 3-space by a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sc. **10**, 6–8 (1924).
- [2] BRODY, E. J.: On the fibred spaces of SEIFERT. Quart. J. Oxford **13**, 161–171 (1962).
- [3] EPSTEIN, D. B. A.: Curves on 2-manifolds and isotopies. Acta Math. **115**, 83–107 (1966).
- [4] FOX, R. H.: On the imbedding of polyhedra in 3-space. Ann. of Math. **49**, 462–470 (1948).
- [5] GRAEB, W.: Die semilinearen Abbildungen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1950, math.-nat. Klasse, 4. Abh.
- [6] GUGENHEIM, V. K. A. M.: Piecewise linear isotopy and embedding of elements and spheres, I, II, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, **3**, 29–53, 129–152 (1953).

- [7] HAKEN, W.: Theorie der Normalflächen. Acta Math. **105**, 245—375 (1961).
- [8] MUMFORD, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Inst. Hautes Etudes Scient., Publ. Math. No. 9 (1961).
- [9] ORLIK, P., E. VOGT u. H. ZIESCHANG: Zur Topologie gefaserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Topology **6**, 49—64 (1967)
- [10] RANDOW, R. von: Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten, Dissertation, Bonner Mathematische Schriften 1962.
- [11] SCHUBERT, H.: Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 131—286 (1953).
- [12] SEIFERT, H.: Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume. Acta Math. **60**, 147—238 (1933).
- [13] WALDHAUSEN, F.: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I. Inventiones math. **3**, 308—333 (1967).

*(Eingegangen am 24. Februar 1967)*