

Análisis situs combinatorio

Revista Matematica Hispano-Americana 5, 43 p. (1923)

§ 1. Aritmética de las ecuaciones lineales.

A la exposición general del Análisis Situs conviene hacer preceder las principales proposiciones de la Aritmética de las ecuaciones lineales; es decir, el estudio de las soluciones en números enteros de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros y n incógnitas. Un sistema de valores de $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ será designado con el nombre de *vector*; la adición y la multiplicación por un número λ determinado seguirá las leyes expresadas por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(x^1, x^2, \dots, x^n) + (y^1, y^2, \dots, y^n) &= (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n) \\ \lambda (x^1, x^2, \dots, x^n) &= (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n).\end{aligned}$$

Los *vectores enteros*, esto es, aquellos cuyas componentes x^i son números enteros, forman una *red*, como dicen los geómetras, y un *módulo*, como dicen los analistas. Un sistema Σ de vectores se llama *red* si

- 1) El vector $O = (0, 0, \dots, 0)$ pertenece a él.
- 2) Σ contiene además del vector $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, su opuesto $-\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$.
- 3) La suma de dos vectores cualesquiera de Σ pertenece también a Σ .

El concepto de red es, pues, el mismo que el de «grupo respecto a la adición». No nos ocuparemos más que de redes formadas exclusivamente por vectores enteros; la red de todos los vectores enteros se designará por Σ_0 ; esta red es n -dimensional, o lo que es lo mismo, entre $n + 1$ vectores de la misma existe siempre una

relación homogénea lineal con coeficientes enteros no todos nulos, y pueden hallarse (en modo infinito) n vectores de Σ_0 entre los cuales no haya relación de esta clase. Un cierto número finito de vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de una red forman una *base* de la misma cuando son independientes y todo vector \mathbf{x} de la misma puede componerse linealmente con ellos multiplicándolos por enteros convenientes.

Si una base de éstas contiene n vectores, la red es n dimensional, siendo n independiente de la elección de *base*. Para Σ_0 los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

forman una base.

El paso de una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de la red a otra cualquiera $\mathbf{e}^*_1, \mathbf{e}^*_2, \dots, \mathbf{e}^*_n$ se hace por una sustitución unimodular, esto es, lineal entera con determinante ± 1 . Por hipótesis se satisfacen ecuaciones de la forma

$$(1) \quad \mathbf{e}^*_i = \sum_k \alpha_i^k \mathbf{e}^k \qquad (1^*) \quad \mathbf{e}_i = \sum_k \beta_i^k \mathbf{e}^*_k$$

donde las α y β son números enteros. La composición de las matrices (α_i^k) y (β_i^k) conduce a la matriz unidad y, por consiguiente, se tiene

$$\det. (\alpha_i^k) \cdot \det. (\beta_i^k) = 1;$$

los únicos divisores de 1 son ± 1 , por consiguiente, el $\det. (\alpha_i^k)$ debe ser igual a ± 1 . Recíprocamente, si α_i^k son enteros cualesquiera de determinante ± 1 , las ecuaciones (1) transforman la base \mathbf{e}_i en otra \mathbf{e}^*_i , pues con estas condiciones los coeficientes de la sustitución inversa (1*) son también enteros. En el paso a una nueva base mediante la (1), las «componentes» del vector arbitrario

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n = x^*_1 \mathbf{e}^*_1 + x^*_2 \mathbf{e}^*_2 + \dots + x^*_n \mathbf{e}^*_n$$

se transforman por la ecuación

$$x^i = \sum_k \alpha_k^i x_*^k.$$

En una forma más axiomática podemos definir una red como un sistema de magnitudes \mathbf{x} que admiten una adición y sustracción consecuentes con los axiomas ordinarios. Una red posee una base si entre sus magnitudes pueden encontrarse unas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$, de tal modo que toda \mathbf{x} pueda expresarse de un modo único en la forma

$$(2) \quad \mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$$

donde x^i son números enteros. De este modo se llega a la red n dimensional \mathfrak{M}_0 ; sin embargo, sacaremos más partido para nuestras aplicaciones del punto de vista de la teoría de invariantes, pues ninguna base es privilegiada frente a las otras y todas las bases de la red han de considerarse como equivalentes.

Un sistema de m formas lineales de las n variables x

$$y^i = L^i(x) = l_1^i x^1 + l_2^i x^2 + \dots + l_n^i x^n \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

con coeficientes enteros, efectúa una representación \mathbf{L} de la red \mathfrak{M}_0 sobre la red \mathfrak{T}_0 de los vectores enteros en el espacio m dimensional determinado por las y . Si se eligen oportunamente las bases de \mathfrak{M}_0 y \mathfrak{T}_0 , se puede llevar la representación a la forma canónica (*)

$$(3) \quad y^1 = c_1 x^1 \dots \quad y^h = c_h x^h \quad y^{h+1} = 0 \dots \quad y^m = 0,$$

o lo que es lo mismo en lenguaje aritmético: por oportunas transformaciones unimodulares de las variables independientes x y del sistema de formas y .

El «orden» h es un número $\leq m$ y $\leq n$; en la serie de los enteros positivos c_1, c_2, \dots, c_h (los llamados divisores *elementales*), cada uno es divisor de los precedentes.

(*) Kronecker. «Reduktion der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen». *Journal f. d. reine u. angew. Mathematik*, 107 (1891), pág. 135. V. Bachmann. «Arithmetik der quadratischen Formen.

El sistema de las ecuaciones lineales *homogéneas*

$$(4) \quad L^1(x) = 0, \quad L^2(x) = 0, \dots, \quad L^m(x) = 0$$

plantea la cuestión, qué vectores enteros \mathbf{x} se corresponden al origen de \top_0 en la representación \mathbf{L} ? Estos x forman evidentemente una red Ξ . Nuestro teorema dice que se puede adoptar para Ξ_0 una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tal que un vector entero (2) pertenezca a Ξ sólo cuando x^1, x^2, \dots, x^h se anulen. Ξ posee entonces una base formada por los $g = n - h$ vectores $\mathbf{e}_{h+1}, \dots, \mathbf{e}_n$, y, por consiguiente, es una red g -dimensional. Diremos que dos vectores \mathbf{x} y \mathbf{x}' son *congruentes mód. Ξ* cuando su diferencia $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ pertenece a Ξ ; de este modo, a cada vector entero \mathbf{x} hay una y sólo una combinación lineal entera de los vectores fundamentales e_1, e_2, \dots, e_h que sea congruente con él mód. Σ

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^h \mathbf{e}_h \quad (\text{mód. } \Xi).$$

Por proyección desde Ξ , esto es, si no consideramos como distintos los vectores congruentes mód. Ξ , los vectores enteros \mathbf{x} forman una red h dimensional con la base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h$. En el sentido de nuestras consideraciones invariantivas, el número h es el único invariante característico de las ecuaciones (4), pues éste, por sustituciones unimodulares, puede ser llevado siempre a la forma normal

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \dots, \quad x^h = 0.$$

Ocupémonos ahora de las ecuaciones *no homogéneas*

$$(5) \quad L^1(x) = y^1, \quad L^2(x) = y^2, \dots, \quad L^m(x) = y^m$$

y averigüemos qué vectores enteros del espacio y son representables por enteros \mathbf{x} mediante la representación \mathbf{L} . En el espacio y estos vectores forman una red \top . La forma normal (3) nos dice que se puede determinar una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ de \top_0 , tal que

$$\mathbf{y} = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + \dots + y^m \mathbf{e}_m$$

pertenece a \top solamente si: 1) y^{h+1}, \dots, y^m se anulan. 2) y^1 es divisible por c_1 , y^2 por c_2 , y^h por c_h . $c_1 \mathbf{e}_1, c_2 \mathbf{e}_2, \dots, c_h \mathbf{e}_h$ forman una base de la red \top , $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_h$ una base della red \top' de todos los vectores y enteros, los cuales admiten una representación (5) mediante x racionales, o lo que es lo mismo, los que multiplicados por enteros convenientes se convierten en vectores de \top . Si los r primeros números c_1, \dots, c_h son mayores que 1, todo vector entero \mathbf{y} es congruente, módulo \top con una sola combinación lineal

$$(6) \quad (y^{h+1} \mathbf{e}_{h+1} + \dots + y^m \mathbf{e}_m) + (y^1 \mathbf{e}_1 + \dots + y^r \mathbf{e}_r)$$

donde y^{h+1}, \dots, y^m recorren con independencia todos los enteros, mientras y^1, \dots, y^r solamente recorren un sistema completo de restos mód. c_1, \dots mód. c_r respectivamente. Una expresión de la forma (6) es sólo $\equiv 0$ (mód. \top) si y^{h+1}, \dots, y^m se anulan, y^1 es divisible por c_1, \dots, y^r divisible por c_r .

En las relaciones de \top_0 con la red \top contenida en ella, no sólo es invariante el número $p = m - h$, el cual da el número de vectores independientes mód. \top que hay en \top_0 , sino que también lo son los números c_1, \dots, c_r . El número de vectores independientes módulo \top de la red \top' es finito, a saber: $= d = c_1 c_2 \dots c_r$. De aquí sale el significado invariante del producto d ; para probar la misma propiedad de los factores c_1, \dots, c_r hay que resolver la cuestión: Siendo a un entero $\neq 0$ y determinado y recorriendo \mathbf{y} todos los vectores de \top' , $a \mathbf{y}$ recorre una red $a \top'$, cuántos vectores independientes mód. \top hay en ella? Llamemos N_a al número de tales vectores. Evidentemente, $N_1 = d$, por otra parte, $N_a = 1$ si $a = c_1$ y sólo entonces. En general, si $(a, b) = m. c. d. (a, b)$

$$(7) \quad N_a = \frac{c_1 c_2 \dots c_r}{(a, c_1) (a, c_2) \dots (a, c_r)}$$

Pues un vector

$$a y^1 \mathbf{e}_1 + a y^2 \mathbf{e}_2 + \dots + a y^r \mathbf{e}_r \quad (\text{las } y \text{ son enteros})$$

pertenece a \top sólo cuando

$$a y^i \text{ es divisible por } c_i \text{ esto es, } y^i \text{ divisible por } \frac{c_i}{(a, c_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

La fórmula (7) dice:

1) $N_a = 1$ sólo cuando a es múltiplo de c_1 .

2) Si a recorre todos los divisores de c_1 , N_a será igual a $\frac{c_1}{a}$

solamente si $a = \dot{c}_2$.

Si a recorre todos los divisores de c_2 , entonces N_a es igual a $\frac{c_1 c_2}{a^2}$ sólo cuando $a = \dot{c}_3$.

Y así sucesivamente

$r+1$) si a recorre los divisores de c_r se tiene siempre $N_a = \frac{c_1 c_2 \dots c_r}{a^r}$

Esta tabla permite reconocer paso por paso que los números c_1, \dots, c_r están determinados *unívocamente* por la relación entre \top y \top_0 ; juntos al número p describen completamente el modo cómo \top está contenido en \top_0 .

§ 2. Concepto de complejo n dimensional.

El complejo de segmentos más sencillo, la línea cerrada o el ciclo unidimensional, se compone de una sucesión ciclica en la cual a un punto sigue un segmento y a un segmento un punto, cada segmento está limitado por el punto que le precede y el que le sigue. Utilizando este concepto se puede pasar al de *complejo bidimensional*, bajo cuyo nombre designamos un número finito de elementos de órdenes 0, 1 y 2 (puntos, segmentos y trozos de superficie). Cada elemento de primer orden e_1 está limitado por elementos de orden nulo e_0 , cada e_2 está limitado por ciertos e_1 ; los datos que tengamos sobre ello constituyen el esquema del complejo. Si e_2 está limitado por e_1 y e_1 por e_0 , diremos que e_0 pertenece indirectamente al contorno de e_2 . En el esquema hay que cumplir siempre las condiciones:

1) Cada elemento de 1.^{er} orden está limitado por dos de orden nulo.

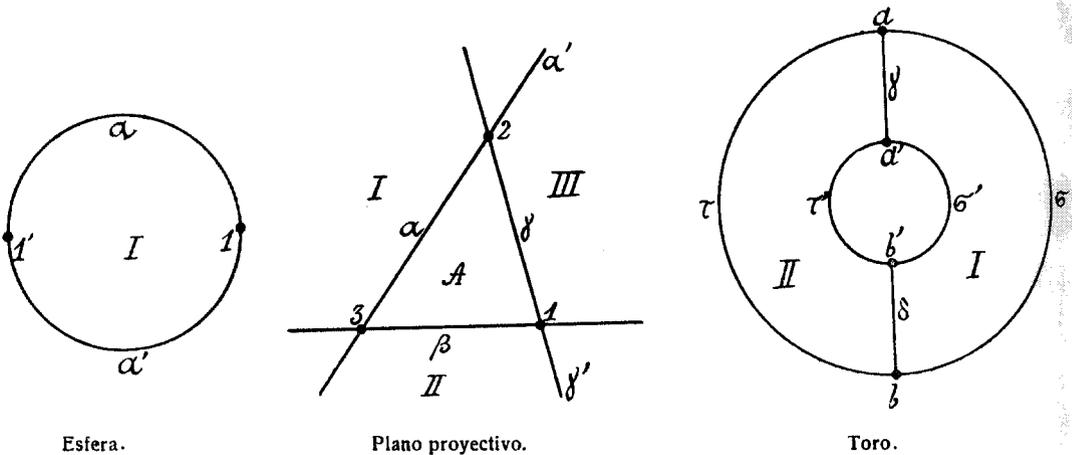
2) Los elementos de órdenes 1 y 0 que directa o indirectamente pertenecen al contorno de un e_2 dado, forman un ciclo unidimensional.

El par de puntos que limita a e_1 hace respecto a él, el mismo papel que el ciclo unidimensional que limita un e_2 respecto a éste. Por ésto sería conveniente considerar un par de puntos como un ciclo de dimensión cero (y en general un sistema finito de puntos, como complejo de dimensión cero). Un complejo de superficies se dirá no ramificado si aparte de las condiciones 1) y 2), se cumplen las correlativas:

1*) Cada e_1 sirve de contorno sólo a dos e_2 .

2*) Los elementos 1 y 2 orden, a cuyo contorno directa o indirectamente pertenece un e_0 dado, forman (si su orden se rebaja mentalmente en una unidad), un ciclo unidimensional.

Como ejemplo daremos el esquema de la *esfera*, del *plano proyectivo* y del *toro*, con la división indicada en la figura. En la esfera



Esfera.

Plano proyectivo.

Toro.

se asocia al hemisferio I colocado sobre el plano del dibujo, el I' colocado debajo, asimismo en el toro a las porciones superiores I, II las I', II', a los segmentos γ, δ , los γ', δ' .

$$\begin{array}{l}
 \text{Esfera} \\
 \alpha \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1' \end{array} \right. \quad \alpha' \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1' \end{array} \right. \\
 I \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha' \end{array} \right. \quad I' \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha' \end{array} \right.
 \end{array}$$

Plano proyectivo

$$\gamma \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \beta \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}, \alpha \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}; \gamma' \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \beta' \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}, \alpha' \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases},$$

$$I \begin{cases} \alpha \\ \beta' \\ \gamma' \end{cases} \quad II \begin{cases} \beta \\ \gamma' \\ \alpha' \end{cases} \quad III \begin{cases} \gamma \\ \alpha' \\ \beta' \end{cases} \quad A \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$$

Toro

$$\sigma \begin{cases} a \\ b \end{cases} \quad \sigma' \begin{cases} a' \\ b' \end{cases} \quad \tau \begin{cases} a \\ b \end{cases} \quad \tau' \begin{cases} a' \\ b' \end{cases}$$

$$\gamma \begin{cases} a \\ a' \end{cases} \quad \delta \begin{cases} b \\ b' \end{cases} \quad \gamma' \begin{cases} a \\ a' \end{cases} \quad \delta' \begin{cases} b \\ b' \end{cases}$$

$$I \begin{cases} \sigma \\ \sigma' \\ \gamma \\ \delta \end{cases} \quad II \begin{cases} \tau \\ \alpha' \\ \gamma \\ \delta \end{cases} \quad I' \begin{cases} \sigma \\ \sigma' \\ \gamma' \\ \delta' \end{cases} \quad II' \begin{cases} \tau \\ \tau' \\ \gamma' \\ \delta' \end{cases}$$

Al pasar a los complejos tridimensionales cada elemento de tercer orden ha de ser limitado por un ciclo bidimensional, es decir, por un complejo bidimensional como el que se obtiene dividiendo la esfera en porciones simplemente conexas. Es seguro que no todo complejo bidimensional conexo y no ramificado es un ciclo en el sentido expuesto; la investigación de los esquemas que son realizables por división de la esfera en porciones de superficie simplemente conexas, se salen evidentemente del cuadro del Análisis situs combinatorio. Nosotros procederemos del modo siguiente: tomaremos como fundamento el concepto de ciclo no bien definido, y en el curso de nuestras investigaciones se obtendrán ciertas propiedades combinatorias del concepto que sea necesario postular, y que entonces enunciaremos como *axiomas*. Los teoremas de análisis situs combinatorio son válidos sea el que quiera el concepto de ciclo que se adopte, con tal que satisfaga a dichos axiomas. De este modo vencemos las dificultades fundamentales de nuestra disciplina y aseguramos inmediatamente a sus teoremas el más extenso contenido imaginable. Hechas estas observaciones, podemos pasar a las definiciones generales.

El complejo n dimensional es un sistema finito de elementos de órdenes 0, 1, ..., n. Cada elemento de orden i (1 ≤ i ≤ n) está limitado por ciertos elementos de orden (i - 1); los datos que tengamos

sobre ello constituyen el esquema de complejo. Los elementos de órdenes 0 a $i - 1$ que limitan directa o indirectamente un elemento e_i forman un ciclo $i - 1$ dimensional. (La definición utiliza el concepto de ciclo para número de dimensiones inferior a n).

En todo complejo n dimensional C_n hay contenidos complejos de órdenes $0, 1, \dots, n - 1$, C_0, C_1, \dots, C_{n-1} ; C_i ($0 \leq i \leq n - 1$) está formado por todos los elementos de C_n cuyo orden no sea superior a i .

AXIOMA 0. *El ciclo de dimensión 0 está formado por dos puntos.* (Elementos de dimensión cero).

Un sistema parcial C'_n de C_n se llama *aislado* si para cada elemento e de C'_n tanto los elementos que limitan a e como los limitados por él pertenecen a C'_n ; C'_n es, por su parte, un complejo. *Conexo* es el complejo C_n cuyos elementos no pueden en modo alguno distribuirse en dos complejos parciales aislados. Análogamente a lo que ocurre en los complejos unidimensionales, se demuestra que todo complejo se puede descomponer de modo unívoco en un cierto número de complejos parciales conexos y aislados. Este número se designará siempre con t .

AXIOMA I. *El ciclo n dimensional es (para $n \geq 1$) un complejo conexo.*

TEOREMA 1. *Los complejos de dimensiones inferiores C_{n-1}, \dots, C_1 contenidos en un C_n conexo, son también conexos.*

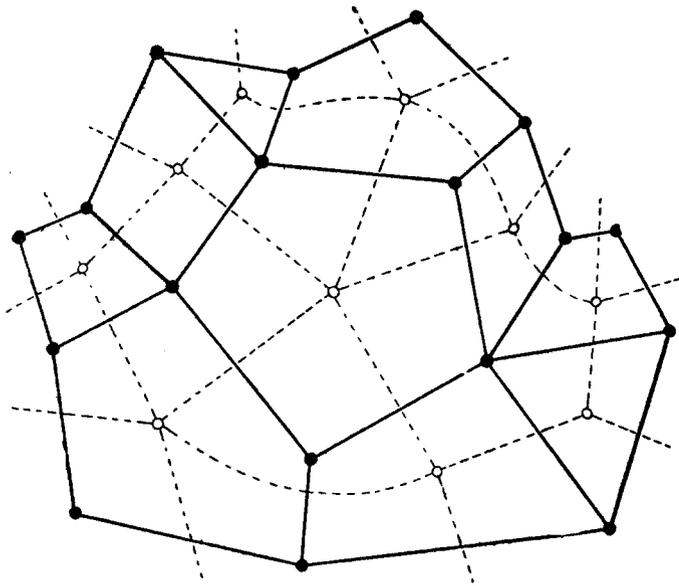
Basta demostrarlo para C_{n-1} , pues cuando apliquemos a C_{n-1} el teorema de que el C_{n-1} contenido en C_n conexo es también conexo, resultará que C_{n-2} es conexo, y así sucesivamente. Si C_{n-1} no fuese conexo, se podría resolver en dos partes aisladas C' y C'' . El contorno de un e_n de C_n está formado por un ciclo $(n - 1)$ dimensional K_n ; como éste es conexo pertenece con todos sus elementos a C' o a C'' . Según que se verifique una u otra cosa, incluimos el e_n de C' o C'' . De este modo se obtiene una división de C_n en dos partes aisladas C' y C'' . De ser C_1 conexo se sigue

TEOREMA 2. *En un complejo conexo C_n ($n \geq 1$) se puede pasar de un punto a otro mediante una cadena de puntos en la cual dos consecutivos están unidos por un segmento.*

Un complejo se dice *no ramificado* si se cumple la condición dual de que aquellos elementos que directa o indirectamente pertenecen al contorno de un e_{i-1} forman un ciclo $n - i$ -dimensional cuando se rebaja el orden en i unidades. Un complejo no ramificado y conexo, se le designa brevemente con el nombre de superficie n -dimensional.

AXIOMA II. *El ciclo n-dimensional no es ramificado.*

De todo complejo no ramificado C_n se deduce otro análogo C_n^* cuando los elementos de orden $(n - i)$ de C_n se tomen como elementos de orden i de C_n^* ($0 \leq i \leq n$) $e_{n-i} = e_i^*$ y se convenga en que si en C_n e está limitado por e' , en C_n^* sea al contrario, e' limitado por e . El orden y la relación de contorno resulta invertida en el paso



Complejo C_2 y su dual C_2^*

• ——— Puntos y segmentos de C_2
 o - - - - " y " de C_2^*

de C_n a C_n^* . Los complejos C_n y C_n^* se llaman *recíprocos* o *duales* (*). Si C_n es conexo, lo es también C_n^* . Aplicando el teorema 2 a C_n^* , resulta

TEOREMA 3. *Sobre una superficie n-dimensional, se puede pasar de un elemento de orden n a otro por una cadena de elementos de orden n, en la cual cada dos sucesivos son adyacentes. Se llaman adyacentes dos e_n que están limitados por un mismo e_{n-1} .*

(*) La figura resulta del modo más claro imaginando que C_2 y C_2^* están dibujados cada uno en una hoja y las hojas se colocan una sobre otra, de modo que cada e_0^* cae sobre el correspondiente e_2 , y recíprocamente, mientras e_1^* cruza a su correspondiente e_1 .

§ 3.—Indicatriz. Cadena.

Lo mismo que un segmento en un complejo unidimensional puede ser recorrido en dos sentidos opuestos, puede atribuirse un sentido a un elemento de segundo orden. Y esto se logra dando un sentido de recorrido al ciclo que le sirve de contorno; esto es, se recorre cada e_1 del ciclo de tal modo que los segmentos dirigidos formen una cadena cerrada. En un complejo unidimensional una cadena estaba determinada cuando se daba el número de veces que recorría en uno u otro sentido los segmentos del complejo, con el convenio de que el recorrido de un segmento en un sentido y luego en el opuesto se reducen. De modo análogo podemos considerar *recorridos* en un complejo bidimensional, en particular en una superficie C_2 ; esto es, una especie de superficie de Riemann, la cual viene a colocarse sobre C_2 y está formada por parcelas orientadas, las cuales recorren (cubren) los e_2 de la superficie dada. Los e_0 pueden presentarse como puntos de ramificación y las e_1 como líneas de pliegue (Faltungslinien). Dos parcelas orientadas no pueden estar conexas por la misma e_1 si una de ellas no da a e_1 sentido opuesto al que le da la otra. Los recorridos particularmente importantes son los cerrados; los no cerrados están limitados por una cadena unidimensional que es un *recorrido* del complejo C_1 contenido en C_2 . Si extendemos el significado vulgar de la palabra cadena cuyo concepto hace referencia a las unidimensionales, podremos llamar *cadena bidimensional* al *recorrido* de C_2 que acabamos de definir.

Evidentemente también aquí nos será conveniente descender a la dimensión cero. El recorrido de un segmento $\sigma = ab$ de a a b queda caracterizado asignando a a el número -1 y a b el $+1$. Recorrido ν veces en ese sentido, a toma el índice $-\nu$ y b el $+\nu$. La *indicatriz* de un segmento σ consta de los números ν_a y ν_b asociados a sus extremos a y b y tales que $\nu_a + \nu_b = 0$; una cadena unidimensional de C_1 está definida cuando a cada segmento de C_1 se le asigna una indicatriz. Asimismo un e_2 tiene una indicatriz en cuanto se den indicatrices a los e_1 que lo limitan, de tal modo, que formen una cadena cerrada; una cadena bidimensional estará definida en un C_2 por las indicatrices de todos los e_2 que pertenecen al complejo. La analogía es completa si convenimos en entender por

indicatriz de un punto un entero y definimos por la ecuación $v_a + v_b = 0$ la cadena cerrada 0-dimensional sobre el ciclo 0-dimensional ab que limita el segmento σ .

Entre las indicatrices de un segmento $\sigma = ab$, las cuales evidentemente forman un *módulo*, hay una primitiva; esto es, tal que no es nula y de la cual se deducen las otras multiplicándola por números enteros. Una indicatriz primitiva es la definida por $v_a = -1$, $v_b = +1$ o su opuesta $v_a = +1$, $v_b = -1$. Estas son las únicas indicatrices primitivas. El concepto de sentido de recorrido coincide evidentemente con el de indicatriz primitiva. Algo análogo ocurre en un e_2 . Ahora daremos algunas definiciones a que nos conducen los anteriores razonamientos.

V. *Una cadena n-dimensional está definida en un C_n por la correspondencia de una indicatriz a cada e_n . La cadena es 0 si lo son todas las indicatrices. Dos cadenas resultan sumadas cuando para cada elemento se suman las respectivas indicatrices.*

Sobre lo que es la indicatriz de e_n , la suma de tales indicatrices y la indicatriz cero, nos podemos formar una idea mediante el proceso de inducción completa partiendo de la dimensión cero

O. *Indicatriz de un punto es un número entero.*—Lo que sean el cero y la adición en el campo de los números enteros, no es necesario repetirlo aquí. *Una cadena 0-dimensional en un C_0 se llama cerrada, si la suma de las indicatrices, que ella hace corresponder a los puntos de C_0 , es nula.* De aquí que la suma de dos cadenas cerradas 0-dimensionales sea otra cadena cerrada 0-dimensional (las cadenas cerradas 0-dimensionales forman una red).

I_n . *Decir que un elemento de n^0 grado e_n está provisto de una indicatriz v , significa que atribuye indicatrices v_{n-1} a todos los e_{n-1} componentes del ciclo K_{n-1} que lo limita, tales que formen una cadena cerrada en K_{n-1} .* Diremos que la indicatriz v induce la indicatriz v_{n-1} en cada e_{n-1} del contorno (y la indicatriz 0 en los e_{n-1} que no son del contorno). *La indicatriz v es cero si induce en todos los e_{n-1} del contorno indicatrices nulas. Dos indicatrices del mismo e_n se suman cuando se sumen las cadenas cerradas inducidas en K_{n-1} .*

Esta definición supone para un número de dimensiones $< n$ el concepto de *cadena cerrada* y el hecho de que las cadenas cerradas forman una red. Para completar es, pues, preciso, transportar este hecho y este concepto a n dimensiones. Toda cadena n -dimensional V_n está limitada por una $(n-1)$ -dimensional ($n \geq 1$): si V_n da a un e_n arbitrario la indicatriz v_n , entonces la indicatriz que V_{n-1}

comunica a un e_{n-1} es la suma de todas las indicatrices inducidas en e_{n-1} por las indicatrices ι_n de todos los elementos de grado n (solamente los elementos de grado n que están limitados por e_{n-1} contribuyen a esta suma). Usaremos los símbolos $\iota \rightarrow \iota'$, $V_n \rightarrow V_{n-1}$ que significan, la indicatriz ι de un e_n induce la ι' en un e_{n-1} que lo limita; la cadena n dimensional V_n está limitada por la V_{n-1} $(n - 1)$ -dimensional.

G_n . La cadena n -dimensional V_n es cerrada ($n \geq 1$) si está limitada por la cadena nula $(n - 1)$ -dimensional.

De la circunstancia de que la indicatriz de un e_n induce sobre el K_{n-1} que lo limita una cadena cerrada $(n - 1)$ -dimensional, se sigue inmediatamente:

TEOREMA 4. Una cadena $(n - 1)$ -dimensional que limita a una n -dimensional es cerrada.

El concepto de cadena se convierte en el de corriente (V. Introducción), si se modifican las definiciones de modo que como indicatriz de un punto se tome cualquier número real en vez de un entero. Entonces, en vez de la palabra *contorno*, se adoptaría la de manantial o fuente (Quelle), más en armonía con la terminología de la Física; una corriente unidimensional tiene una fuente de dimensión cero. Una corriente cerrada es tal, que carece de fuente; las leyes de Kirchhoff, sobre repartición de corrientes, dicen que la corriente eléctrica estacionaria es cerrada.

Ahora sentamos la siguiente proposición: Entre las cadenas n dimensionales cerradas en un ciclo n dimensional K_n , hay una primitiva V_n^0 de la siguiente especie: 1) Toda indicatriz posible de un e_n perteneciente a K_n , es un múltiplo entero de la indicatriz no nula que V_n^0 comunica a este elemento. 2) Toda cadena cerrada n dimensional en K_n es un múltiplo entero de V_n^0 . Este teorema S_n es válido para $n = 0$, vamos a demostrarlo para un n cualquiera en la hipótesis de que sea válido para todos los órdenes de dimensión $< n$. S_{n-1} dice que entre las indicatrices de un e_n hay una primitiva distinta de cero, la cual induce una indicatriz primitiva en cada e_{n-1} del contorno. Una indicatriz de e_n es nula apenas induce indicatriz nula en un sólo e_{n-1} del contorno, y si ι_{n-1} es una indicatriz de e_{n-1} hay sobre el e_n que limita e_{n-1} una sola indicatriz ι que induce la ι_{n-1} .

Sean e_n y e'_n dos elementos adyacentes de un complejo n -dimensional que tienen común un e_{n-1} del contorno. Dando a cada uno de estos elementos de orden n una indicatriz, diremos que son

coherentes (a través de e_{n-1}) si las indicatrices inducidas por ellos en el e_{n-1} común dan suma nula. De las circunstancias enumeradas se desprende que para cada indicatriz de e_n hay una sola de e'_n que sea coherente con ella; si la primera es primitiva, también lo es la segunda. Por consiguiente, la indicatriz de un e_n puede ser prolongada a través de un e_{n-1} sobre un e'_n adyacente, merced a la condición de coherencia. Sobre una superficie C_n n -dimensional hay siempre sólo dos elementos de orden n que tengan común un elemento e_{n-1} . Una cadena n -dimensional cerrada situada sobre una superficie C_n comunica siempre indicatrices coherentes a dos elementos de orden n adyacentes. Recordando todavía que sobre una superficie se pasa de un e_n a otro mediante una cadena de elementos e_n cada dos adyacentes, se deduce que sólo hay las dos posibilidades: o en la superficie C_n no hay más cadena n -dimensional cerrada que la nula o hay una cadena n -dimensional cerrada V_n^0 que comunica a cada elemento de orden n una indicatriz primitiva distinta de cero, y de la cual toda V_n cerrada es un múltiplo. En el primer caso, la superficie se llama unilateral (*einseitig*), y en el segundo, bilateral (*zweiseitig*) u orientable. Sobre las superficies bilaterales C_n las cadenas cerradas n -dimensionales forman una red de dimensión 1, sobre las unilaterales de dimensión cero. La demostración por inducción que vamos exponiendo no concluye, si no se admite expresamente que el ciclo n dimensional no es una superficie unilateral, por lo tanto,

AXIOMA III. *El ciclo n -dimensional es bilateral.*

§ 4.—Números de Betti. Coeficientes de torsión.

Habiendo definido aritméticamente los conceptos con tal claridad, las expresiones formales no presentarán dificultad. Con N_0, N_1, \dots, N_n designaremos el número de elementos de órdenes $0, 1, \dots, n$, respectivamente, contenidos en un complejo C_n . Lo que particularmente nos interesa, son las superficies n -dimensionales y no los complejos de naturaleza general; sin embargo, no podemos excluir éstos de nuestras consideraciones, pues el complejo $n - 1$ dimensional contenido en una superficie n -dimensional, estará casi siempre ramificado. A cada elemento de orden 1 a n le damos arbitrariamente una de sus indicatrices primitivas y la designamos por 1. Toda indicatriz de un elemento puede entonces

ser caracterizada por un número entero x . e recorre los elementos de orden n , e' los de orden $n - 1$; con $\varepsilon_{e'e}$ designamos la indicatriz inducida en e' por la indicatriz 1 de e ; por consiguiente, $\varepsilon_{e'e} = \pm 1$ si e' pertenece al contorno de e y $\varepsilon_{e'e} = 0$ en caso contrario. Lo mismo que la matriz

$$E = (\varepsilon_{e'e}) = E_n$$

de N_{n-1} filas y N_n columnas pertenece a C_n , la E_{n-1} con N_{n-2} filas y N_{n-1} columnas pertenece a C_{n-1} contenido en C_n , etcétera; finalmente, una matriz E_1 con N_0 filas y N_1 columnas pertenece al complejo C_1 contenido en C_n . En estas matrices puede leerse la posición relativa de todos los elementos.

Sea e un elemento de orden n . La condición de que formen cadena cerrada las indicatrices $\varepsilon_{e'e}$ correspondientes a los elementos e' de orden $n - 1$, o sea, que induzcan sobre cada elemento e'' de orden $n - 2$, en suma la indicatriz cero ($n \geq 2$) se expresa por las ecuaciones

$$\sum_{e'} \varepsilon_{e''e'} \cdot \varepsilon_{e'e} = 0 \quad \text{o sea} \quad E_{n-1} E_n = 0$$

Si $n = 1$, la afirmación subsiste a condición de designar con E_0 la matriz de una fila formada con N_0 unos:

$$E_0 = \| 1, 1, \dots, 1 \|$$

Por consiguiente, son válidas las ecuaciones

$$(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}) \quad E_0 E_1 = 0, \quad E_1 E_2, \dots, \quad E_{n-1} E_n = 0.$$

Si se trata en particular de una superficie bilateral y se eligen las indicatrices 1 de los elementos de orden n de tal modo que formen en conjunto una cadena cerrada n dimensional, además es válida la ecuación

$$(\delta_n) \quad E_n E_{n+1} = 0$$

donde la matriz E_{n+1} consta de una columna de N_n unos.

Una cadena n dimensional $V_n = (x_e)$, en la cual los elementos e de grado n tienen las indicatrices x_e será cerrada si los N_n ente-

ros x_e satisfacen las ecuaciones lineales homogéneas

$$\sum_e \varepsilon_{e'e} x_e = 0 \quad \text{o sea} \quad E x = 0$$

y sólo entonces. Una cadena $n - 1$ dimensional V_{n-1} de nuestro complejo, la cual a cada elemento de orden $n - 1$, e' , da una indicatriz $y_{e'}$ limita una cadena n dimensional V_n , o sea, es $\simeq 0$ (homóloga a cero, según Poincaré), si las ecuaciones no homogéneas

$$y_{e'} = \sum_e \varepsilon_{e'e} x_e \quad \text{o sea} \quad y = E x$$

admiten una solución en números enteros x_e [$V_n = (x_e)$] y sólo entonces. Ahora entra en acción la teoría de ecuaciones lineales enteras, y de ella deducimos los hechos siguientes.

Las cadenas n dimensionales cerradas poseen una base, esto es, hay g cadenas cerradas de las cuales, mediante coeficientes enteros, pueden deducirse todas las cadenas cerradas. El número g es independiente de la elección de base: entre $g + 1$ cadenas cerradas $V', V'', \dots, V^{(g+1)}$ hay siempre una relación lineal homogénea

$$m' V' + m'' V'' + \dots + m^{(g+1)} V^{(g+1)} = 0$$

(las m son números enteros no todos nulos); por el contrario, hay sistemas de g cadenas entre las cuales no puede establecerse una relación de esa especie. La misma significación que $g = g_n$ para las cadenas n dimensionales tienen g_{n-1}, \dots, g_0 para las $n - 1, \dots, 0$ -dimensionales. Se tiene $g_0 = N_0 - 1$ y para una superficie n -dimensional $g_n = 0$ ó 1 , según que la superficie sea uni o bilateral.

Sean $V', V'', \dots, V^{(m)}$ varias cadenas cerradas $n - 1$ -dimensionales, la expresión

$$(V', V'', \dots, V^{(m)}) \simeq 0$$

significa que son dependientes entre sí en sentido de la homología; esto es, hay números enteros $l', l'', \dots, l^{(m)}$ para los cuales

$$l' V' + l'' V'' + \dots + l^{(m)} V^{(m)} \simeq 0$$

sin que todas las l sean nulas. En particular $V \simeq 0$ quiere decir que para un número $l \neq 0$ apropiado la cadena $lV \simeq 0$. Las cadenas $(n-1)$ dimensionales $\simeq 0$ poseen una base $V', V'', \dots, V^{(h)}$ que está constituida por $h = h_{n-1}$ cadenas, h es el rango de la matriz E y se tiene

$$g_n = N_n - h_{n-1}.$$

La base puede ser elegida de modo que $c' V', c'' V'', \dots, c^{(h)} V^{(h)}$ formen una base de las cadenas que son $\simeq 0$; $c', c'', \dots, c^{(h)}$ son una serie de enteros positivos en la cual cada uno es divisor del inmediato anterior.

Es particularmente interesante el *número de Betti* (*)

$$p_{n-1} = g_{n-1} - h_{n-1}$$

que indica cuantas cadenas independientes en el sentido de la homología hay entre las cadenas cerradas $(n-1)$ dimensionales. Entre más de $p = p_{n-1}$ cadenas cerradas $(n-1)$ dimensionales V', V'', \dots , hay siempre una homología

$$m' V' + m'' V'' + \dots \simeq 0$$

con coeficientes enteros m no todos nulos; por el contrario, hay sistemas de p cadenas cerradas entre las cuales no existe tal homología. Junto a los números de Betti aparecen los *coeficientes de torsión*, o sea aquellos de entre los números $c', c'', \dots, c^{(h)}$ que son > 1 , su número se designará por r .

Los *coeficientes de torsión*, junto con los *números de Betti*, definen completamente el modo y manera cómo la serie de las cadenas $(n-1)$ -dimensionales, que son $\simeq 0$, están contenidas en la red más extensa de las cadenas $(n-1)$ -dimensionales cerradas. Pues existen p cadenas cerradas $(n-1)$ -dimensionales $V', V'', \dots, V^{(p)}$ y otras r $W', \dots, W^{(r)}$ tales que para cada $V_{n-1} = V$ cerrada vale una y sólo una homología

$$(9) \quad V \simeq (l' V' + \dots + l^{(p)} V^{(p)}) + (m' W' + \dots + m^{(r)} W^{(r)})$$

donde las l recorren todos los valores enteros, mientras $m', \dots, m^{(r)}$

(*) Por razones históricas (referentes a la definición riemanniana de conexión), Poincaré llamaba número de Betti a $p+1$ en vez de p .

recorren un sistema completo de restos mod. $c', \dots, c^{(r)}$ respectivamente. Una combinación lineal de las cadenas $V', V'', \dots, V^{(p)}$; $W', \dots, W^{(r)}$ como (9) es $\simeq 0$ sólo si las l son cero y m' divisible por $c', \dots, m^{(r)}$ divisible por $c^{(r)}$. La fórmula (7) enseña que los coeficientes de torsión están unívocamente determinados.

Lo mismo que

$$h_{n-1}, p_{n-1}; \quad c', c'', \dots, c^{(r)}$$

se refieren a las cadenas $(n - 1)$ -dimensionales, los números

$$h_i, p_i; \quad c_i', c_i'', \dots, c_i^{(r)}$$

pueden hacerse corresponder a las cadenas i -dimensionales, siendo

$$0 \leq i \leq n - 1.$$

Se tiene

$$(10) \quad p_i = g_i - h_i \qquad (11) \quad g_{i+1} + h_i = N_{i+1}.$$

Puesto que en un complejo conexo cada dos puntos a, b pueden ser unidos mediante una cadena unidimensional, esto es, puesto que la cadena 0-dimensional es $\simeq 0$, la cual hace corresponder al punto a el número -1 , al b el $+1$ y a todos los demás puntos la indicatriz 0, por consiguiente, en un complejo de esta naturaleza sucede que toda cadena 0-dimensional cerrada es $\simeq 0$. Si C_n se descompone en t complejos parciales, la condición necesaria y suficiente para que una cadena 0-dimensional, que da a un punto a la indicatriz x_a , limite otra unidimensional, es que cada una de las sumas $\sum_a x_a$ se anule aisladamente, siendo extendidas estas sumas a los puntos a de cada uno de los t complejos parciales. Por consiguiente, se tiene

$$h_0 = N_0 - t, \qquad p_0 = t - 1.$$

y no existen coeficientes de torsión de orden 0 ($r_0 = 0$). Para un complejo conexo, en particular, se tiene $p_0 = 0$, y por tanto, únicamente entran en consideración los números de Betti p_1, p_2, \dots, p_{n-1} .

Entre los números de Betti hay una importante relación que se

obtiene sumando las ecuaciones (10) con signos alternados y haciendo uso de los segundos miembros de las (11):

$$\begin{aligned} p_0 - p_1 + p_2 - \dots \pm p_{n-1} &= \\ &= g_0 - (h_0 + g_1) + (h_1 + g_2) - \dots \mp (h_{n-1} + g_n) \pm g_n = \\ &= (N - N_1 + N_2 - \dots \mp N_n) - (1 \mp g_n), \end{aligned}$$

en particular para una superficie

$$-p_1 + p_2 - \dots \pm p_{n-1} = (N_0 - N_1 + N_2 - \dots \pm N_n) - \mu$$

donde $\mu = 1$, si la superficie es unilateral; $\mu = 2$, si la superficie es bilateral y su número n de dimensiones par; $\mu = 0$, si la superficie es bilateral con número impar de dimensiones. Esta es la generalización de la *relación de Euler*, la cual dice que el grado de conexión $p = p_1$ de un poliedro bilateral cerrado y bidimensional (el orden de conexión en el sentido de Riemann disminuido en una unidad), se deduce de los números N_0, N_1, N_2 de vértices, aristas y caras mediante la fórmula

$$p = (-N_0 + N_1 - N_2) + 2.$$

Una superficie n -dimensional bilateral se llamará de una hoja (schlicht) si en ella toda cadena cerrada $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ -dimensional es $\supseteq 0$; los números de Betti de una superficie de una hoja son todos nulos y no posee coeficientes de torsión. A esta especie, la más sencilla, de superficies, pertenecen los ciclos.

AXIOMA IV. *El ciclo n -dimensional es de una hoja.*

§ 5.—Partición.

El sentido del esquema combinatorio para el estudio de un continuo dado, por ejemplo: una superficie bidimensional ordinaria, es tal que admite una posible construcción de la superficie mediante porciones de superficie simplemente conexas. Por una división continuada de las porciones de superficie se completa el paso, del esquema que contiene un número finito de elementos, al continuo infinito. El ejemplo más sencillo es la circunferencia; por una primera división se la descompone en dos semicircunferencias,

y en cada división sucesiva deben ser bisecados los arcos correspondientes. Un punto de la circunferencia puede ser encerrado en una sucesión indefinida de tales arcos circulares, los cuales nacen en las divisiones sucesivas y están contenidos unos en otros. La relación lógica fundamental sobre la cual ha de basarse el concepto matemático del Continuo, es la del todo a la parte (y no la de conjunto a uno de sus elementos); el punto en el Continuo es un concepto límite; sólo es posible aproximarse a él por un proceso de división repetida indefinidamente.

A consecuencia de lo dicho, el *Análisis Situs* se interesa sólo por aquellas propiedades del esquema del complejo que no varían en la partición. Un continuo bidimensional puede ser construido de muchas maneras por medio de parcelas elementales de superficie; los esquemas de unas y otras construcciones serán equivalentes (homeomorfos, según Poincaré) en el sentido de que las dos, cada una por una partición apropiada, pueden ser reducidas a un mismo tercer esquema. Los problemas importantes que de aquí deriva el análisis situs son: 1.º Definir rigurosamente el concepto de partición. 2.º Desarrollar las condiciones necesarias para la equivalencia de dos esquemas. Por partición, un elemento de segundo orden se convierte en un complejo bidimensional de naturaleza especial; su carácter particular, el cual estriba en que el esquema del complejo debe dar nuevamente la partición de una parcela elemental de superficies en parcelas elementales, puede ser expresado con ayuda del concepto de ciclo bidimensional; es un complejo el cual sale de un ciclo de segundo orden por supresión de un elemento de segundo orden. *De este modo el concepto de partición queda enlazado en nuestra construcción axiomática al de ciclo.*

DEFINICIÓN. Si se suprime un elemento e_n de un ciclo n -dimensional, queda una *parcela* E_n n -dimensional. Los elementos del ciclo K_{n-1} que limita al e_n suprimido, forman los *elementos de contorno* de E_n .

Aquellos elementos de E_n a cuyo límite pertenece directa o indirectamente un e_{i-1} dado ($1 \leq i \leq n$), forman (rebajando el orden de los índices en i) un *ciclo* $(n - i)$ -dimensional si e_{i-1} es interior a E_n y una *parcela* $(n - i)$ -dimensional si e_{i-1} es elemento del contorno de E_n . De este modo pueden distinguirse los elementos del contorno de los elementos interiores. Una parcela n -dimensional es conexa; la supresión de un elemento de n° orden

e_n en el ciclo n -dimensional K_n , no rompe la conexión. También permanece válido para la parcela n -dimensional E_n el hecho de que toda cadena cerrada $(i-1)$ -dimensional limita sobre ella otra i -dimensional ($1 \leq i \leq n$). Esto es preciso demostrarlo sólo para $i = n$. La cadena cerrada $(n-1)$ -dimensional V_{n-1} limita una cadena cerrada W_n sobre K_n . Si W_n comunica al e_n que separamos una indicatriz ι se puede, como sabemos, dar a todos los elementos e'_n, e''_n, \dots de grado n de K_n indicatrices ι', ι'', \dots de modo que juntas con la indicatriz ι de e_n formen una cadena cerrada V^n sobre K_n . Entonces $V_n = W_n - V^n$ tiene el mismo límite V_{n-1} que W_n y está en E_n porque da al elemento e_n suprimido la indicatriz cero. La cadena n -dimensional definida en E_n por las indicatrices $-\iota', -\iota'', \dots$ tiene como límite sobre el K_{n-1} contorneante, la misma cadena $(n-1)$ -dimensional que induce sobre K_{n-1} la indicatriz ι de e_n .

DEFINICIÓN. Sea e_n un elemento de n° orden del complejo C_n y k_n un ciclo cualquiera que contiene a e_n y en el cual e_n está limitado por el mismo ciclo k_{n-1} de elementos de órdenes $(n-1)\dots$ hasta 0 que en C_n ; y excepto k_{n-1} y e_n supongamos que k_n no tiene elemento común con C_n . Sea E_n la parcela que sale de k_n por supresión de e_n . La *partición* de e_n (efectuada por el ciclo k_n) se produce por la sustitución de E_n a e_n . De modo más exacto: a los elementos de órdenes 0 a $(n-1)$ de C_n se añaden los elementos interiores de E_n ; e_n viene excluido y en su lugar entran los elementos de orden n de E_n ; los nuevos elementos introducidos en C_n tienen en él los mismos elementos limítrofes que en E_n . El proceso de *partición de n° grado* de C_n consiste en que cada elemento de n° orden de C_n experimenta una partición en el sentido indicado. Es claro que C_n se transforma nuevamente en un complejo.

A la partición de n° grado puede preceder una partición de $(n-1)^\circ$ grado, la cual se efectúa del modo siguiente: se da al complejo $(n-1)$ dimensional C_{n-1} contenido en C_n una partición de $(n-1)^\circ$ grado y se agregan nuevamente a los elementos del C_{n-1} partido los elementos de n° grado de C_n ; de tal modo, que un e_n esté limitado por todos los elementos de grado $n-1$, y sólo por ellos, que en la partición proceden de los e_{n-1} que limitan a e_n en C_n . A la partición de $(n-1)^\circ$ grado puede preceder una *partición de $(n-2)^\circ$ grado*, etc. *Partir un complejo, es efectuar sobre él, sucesivamente y por orden numérico, particiones de grados 1, 2, 3, n.*

Aquí necesitamos el siguiente

AXIOMA A. *Un ciclo n -dimensional se transforma por partición en otro ciclo n -dimensional.*

Su validez para número de dimensiones inferior a n , es necesaria a fin de que por particiones de grados 1 a $n - 1$, de un complejo n -dimensional, salga nuevamente otro complejo; por lo demás, este axioma debe postularse, porque el concepto de ciclo debe ser un invariante en sentido del Análisis situs. Aunque no hemos de usarlo en nuestro trabajo, basándonos en idéntica razón, añadiremos el

AXIOMA B. *Un complejo n -dimensional, que por partición se transforma en un ciclo, es también un ciclo.*

Además, buscaremos la condición para que siguiendo el proceso general de partición, se obtenga de un complejo no ramificado C_n otro complejo \bar{C}_n también no ramificado. Sea e_0 un punto de C_n ; los elementos de C_n a cuyo contorno pertenece e_0 forman, rebajando el grado en una unidad, un ciclo $(n - 1)$ -dimensional; esta propiedad queda inalterada en la partición, como se prueba aplicando el axioma A a la dimensión $n - 1$. Sea \bar{e}_0 un punto de \bar{C}_n que aparece por primera vez en la partición de grado i , y consideremos en primer lugar el complejo $C_n^{(i)}$ que se obtiene de C_n por las particiones de grado 1 a i , debemos demostrar que \bar{e}_0 limita sobre $C_n^{(i)}$ un ciclo $(n - 1)$ -dimensional. Según lo que hemos hecho notar, esta propiedad se conserva a través de las restantes particiones de grados $i + 1$ hasta n , las cuales transforman $C_n^{(i)}$ en \bar{C}_n . \bar{e}_0 nace de la partición de un cierto elemento e_i de C_n y limita sobre $C_n^{(i)}$ directa o indirectamente: 1), los mismos elementos de órdenes 1 a i que limita sobre la parcela E_i que proviene de la partición de i^o grado de e_i ; 2), los elementos de orden $i + 1$ a n que en C_n son limitados directa o indirectamente por e_i . Los primeros forman, rebajando una unidad a su orden, un ciclo $(i - 1)$ -dimensional; los últimos, rebajando en $i + 1$ unidades su orden, otro ciclo $(n - i - 1)$ -dimensional. Aquí se hace ya evidente la siguiente construcción. Sean K_{i-1} un ciclo $(i - 1)$ -dimensional, K'_j un ciclo j -dimensional. Reuniremos los elementos de ambos ciclos en $K_{i-1} | K'_j$, con las condiciones siguientes: el orden de los elementos de K'_j se aumenta en i (K'_j se *apila* sobre K_{i-1}) y cada elemento de orden i obtenido así está limitado por todos los de orden $i - 1$ (del ciclo K_{i-1}). Postulamos

AXIOMA C. Si $i + j = n$ y K_{i-1}, K'_j son dos ciclos de dimensiones $i - 1, j$ respectivamente, $K_{i-1} | K'_j$ es un ciclo n -dimensional.

Este axioma, si lo aplicamos no a n -dimensiones, sino a cualquier número $< n$, nos garantiza que por partición de un complejo no ramificado C_n se obtiene otro \bar{C}_n también no ramificado. Del axioma C conviene poner en evidencia el caso $j = 0$. K'_0 consta de dos puntos; $K_{n-1} | K'_0 = K_n$ nace, por consiguiente, del ciclo $(n - 1)$ -dimensional K_{n-1} por agregación de dos elementos de orden n, e_n, e'_n cada uno de los cuales está limitado por todo el ciclo K_{n-1} . El hecho de que el complejo K_n obtenido así es un ciclo, trae consigo que la sustitución de un elemento e_n en un complejo cualquiera C_n por el mismo e_n , la conservación de e_n , sea en el sentido aceptado por nosotros una particular partición de e_n ; la *identidad*, la cual deja a C_n invariante, cae dentro del concepto de partición. Se ve además, fácilmente, que llevando a cabo, una después de otra, dos particiones de C_n , se obtiene una nueva partición de C_n .

Nuestro fin inmediato es demostrar el

TEOREMA 5.º (TEOREMA PRINCIPAL). *El número t de los complejos parciales aislados y conexos, el $g = g_n$ de las cadenas n -dimensionales cerradas independientes, los números de Betti p_1, p_2, \dots, p_{n-1} y los coeficientes de torsión de órdenes $1, a, n - 1$, referentes a un complejo C_n , no varían cuando sobre el complejo se lleva a cabo una partición arbitraria.*

La afirmación referente a t es evidente.

Con V_i indicaremos una cadena i -dimensional de C_n y con V_i otra i -dimensional del \bar{C}_n obtenido por partición de C_n . Si C_n se transforma en \bar{C}_n por una *partición de grado n* (luego consideraremos particiones de grados inferiores), a cada indicatriz ι de un elemento e_n de orden n de C_n corresponde una indicatriz *equivalente* I de aquella parcela E_n que en la partición se deduce de e_n ; es decir, aquella cadena de E_n que está limitada por la misma cadena en el ciclo contornante k_{n-1} , la cual induce en él la indicatriz ι . De una V_n podemos deducir una cadena en \bar{C}_n sin más que sustituir la indicatriz ι de cada elemento e_n de C_n por la indicatriz equivalente I de la parcela E_n que por la partición se origina de e_n . Todas las cadenas V_n son en este sentido al mismo tiempo cadenas de \bar{C}_n . Una cadena V_n está limitada por la misma V_{n-1} , ya se la considere como de C_n o de \bar{C}_n . Naturalmente, no

toda \bar{V}_n es V_n ; sin embargo, resulta evidente para $n > 1$ el hecho siguiente:

(α) Toda \bar{V}_n cerrada es V_n .

Las indicatrices que comunican una cadena cerrada \bar{V}_n a los elementos de orden n de la parcela E_n , definen una cadena n -dimensional I en E_n . La cadena $(n - 1)$ -dimensional v_{n-1} que le sirve de límite está íntegramente contenida en el ciclo k_{n-1} del contorno; v_{n-1} define una indicatriz ι del elemento no partido e_n a la cual es equivalente la indicatriz I de E_n . Un razonamiento análogo permite comprobar el hecho algo más general.

(β) Toda \bar{V}_n , que está limitada por una V_{n-1} , es V_n .

En segundo lugar nos ocuparemos de una *partición de grado* $n - 1$, y sin temor a confusiones, designaremos nuevamente con \bar{C}_n el complejo que sale de C_n por una partición de grado $n - 1$. Sea e_n un elemento de orden n de C_n , limitado por el ciclo $(n - 1)$ -dimensional k_{n-1} , y ι una indicatriz de e_n , la cual induce en k_{n-1} la cadena cerrada v_{n-1} .

A consecuencia de la partición, k_{n-1} según el axioma A, se transforma en un ciclo \bar{k}_{n-1} ; como v_{n-1} al mismo tiempo puede ser considerada como una cadena cerrada en \bar{k}_{n-1} , nos define una indicatriz $\bar{\iota}$, «coincidente con ι » para el elemento e_n de \bar{C}_n . El recíproco es también cierto; pues si $\bar{\iota}$ es una indicatriz de e_n en \bar{C}_n que induce la cadena cerrada \bar{v}_{n-1} sobre \bar{k}_{n-1} , por aplicación del teorema (α) a los complejos k_{n-1}, \bar{k}_{n-1} en vez de los C_n, \bar{C}_n , se concluye que \bar{v}_{n-1} coincide con una cadena cerrada v_{n-1} sobre el ciclo k_{n-1} no partido. Por consiguiente, puede hablarse de indicatriz de un elemento e_n sin fijar atención en si pertenece al complejo partido o no partido. Toda V_{n-1} es al mismo tiempo \bar{V}_{n-1} . Si la V_{n-1} cerrada limita la cadena n -dimensional V_n sobre C_n , lo mismo ocurre en \bar{C}_n (V_n se transforma naturalmente de una cadena de C_n en otra cadena de \bar{C}_n mediante la sustitución de las indicatrices por las equivalentes).

Reuniendo las consideraciones hechas respecto a las particiones de grados n y $n - 1$, se comprende en qué sentido una cadena V_i de C_n puede ser considerada al mismo tiempo como cadena i -dimensional de \bar{C}_n , cuando \bar{C}_n se obtenga por una *partición cualquiera* de C_n . Si V_{i-1} limita la cadena V_i sobre C_n , lo mismo ocurre en \bar{C}_n . Mientras se consideren particiones de órdenes infe-

riores al i , no es preciso hacer distinción entre las cadenas i -dimensionales pertenecientes al complejo partido y al no partido.

La última observación, aplicada a $i = n$, permite expresar el teorema (α) para una partición cualquiera, con lo que a la partición de grado n preceden las de grado inferior. De aquí se sigue la invariancia de $g = g_n$.

Si, pues, ahora C_n se transforma por una partición cualquiera en \bar{C}_n , podemos afirmar además

(Y) *Para cada \bar{V}_i ($1 \leq i \leq n$) cerrada, existe una V_i tal que sea $\simeq \bar{V}_i$ sobre \bar{C}_n . En el caso límite $i = n$ aparece el signo $=$ en lugar de \simeq .*

El teorema está ya demostrado para $n = i$, por inducción de $n - 1$ a n procederemos a las dimensiones $n = i + 1, i + 2, \dots$. Sea $n - 1 \geq i$. Supongamos que C_n por particiones de grados 1 a $n - 1$ se transforma en C'_n , el complejo C_{n-1} contenido en él se transforma en C'_{n-1} , y que por una partición de grado n se transforme C'_n en \bar{C}_n . Sea e_n un elemento de orden n de C_n y con esto de C'_n , limitado en C'_n por el ciclo k_{n-1} , y tal que por partición de grado n se transforma en la parcela E_n . La porción de la cadena \bar{V}_i que recorre elementos interiores a E_n se designará por \bar{v}_i . Como \bar{V}_i es cerrada, \bar{v}_i estará limitada por una cadena $(i - 1)$ -dimensional y cerrada v_{i-1} , la cual recorre íntegramente sobre k_{n-1} . La cadena v_{i-1} limita una cierta cadena v_i i -dimensional sobre k_{n-1} , pues k_{n-1} es de una hoja. Y éste es el punto decisivo en que el axioma IV entra en acción; $\bar{v}_i - v_i$ es una cadena cerrada en E_n y, por tanto, $\simeq 0$ en E_n . Si se sustituye \bar{v}_i por v_i y se efectúa esta construcción para cada parcela E_n , \bar{V}_i se transforma en una cadena cerrada V'_i sobre C'_n (ó C'_{n-1}), la cual es $\simeq \bar{V}_i$ sobre \bar{C}_n . Según la hipótesis de nuestro proceso inductivo, la cadena V'_i es homóloga de una V_i sobre C'_{n-1} ; y *a fortiori* sobre \bar{C}_n .

La conclusión puede ser extendida igualmente de las cadenas cerradas \bar{V}_i a las \bar{V}_i tales que estén limitadas por una V_{i-1} . En este caso, nos interesa solamente el hecho de que existe una V_i , para la cual $\bar{V}_i - V_i$ es cerrada (contenido en $\bar{V}_i - V_i \simeq 0$). Entonces V_i está limitada por la misma cadena $(i - 1)$ -dimensional V_{i-1} que \bar{V}_i . Lo cual significa:

(δ) *Si $V_{i-1} \simeq 0$ en \bar{C}_n también lo es en C_n .*

Por consiguiente, para $1 \leq i \leq n - 1$, se verifica el

TEOREMA 6. *Toda cadena cerrada \bar{V}_i es homóloga a una V_i en \bar{C}_n (toda \bar{V}_n cerrada es una V_n).*

Si \bar{U}_i, \bar{V}_i son dos cadenas cerradas i -dimensionales de \bar{C}_n, U_i, V_i otras en C_n ; si además

$$\bar{U}_i \supseteq \bar{V}_i, \bar{U}_i \supseteq U_i, \bar{V}_i \supseteq V_i \text{ en } \bar{C}_n,$$

la homología $U_i \supseteq V_i$ es válida en C_n (no sólo en \bar{C}_n).

De aquí se siguen la invariancia de los números de Betti y de los coeficientes de torsión respecto a la partición.

Análisis situs combinatorio (continuación)

Revista Matematica Hispano-Americana 6, 1—9 und 33—41 (1924)

§ 6.—Concepto de ciclo.

Los axiomas I-IV exigen la validez de *ciertas propiedades de un complejo*, cuya verificación caracteriza al *ciclo*. Por el contrario, *A, B, C* son axiomas *genéticos* que no se refieren a un ciclo sólo, sino que enseñan cómo con varios ciclos puede construirse otro. El axioma *C* da el medio para obtener de dos ciclos dados otro de número superior de dimensiones. El axioma *A* enseña cómo de un ciclo n -dimensional K_n y de ciertos ciclos n -dimensionales auxiliares k'_n, k''_n, \dots , los cuales corresponden a los elementos e'_n, e''_n, \dots de orden n de K_n y son utilizados para su partición, se puede formar un nuevo ciclo \bar{K}_n (partición de grado n). Recíprocamente, según el axioma *B*, de \bar{K}_n y mediante los ciclos auxiliares k'_n, k''_n, \dots se vuelve a obtener el ciclo K_n . Los axiomas cualitativos I-IV limitan, por decirlo así, el concepto de ciclo *hacia arriba*; dicen, que es de menor amplitud que el de superficie de *una hoja*. Por el contrario, los axiomas genéticos limitan el concepto *hacia abajo*: un complejo obtenido desde el punto de partida fijado por el axioma 0, mediante los principios constructivos *A, B, C*, es seguramente un ciclo. La no contradicción de los axiomas queda garantizada cuando se demuestre:

(Q) *Dando al concepto tanta comprensión como permiten los axiomas cualitativos, esto es, entendiendo bajo el nombre ciclo toda superficie de una hoja, los axiomas genéticos conservan su validez.*

Entonces resulta recíprocamente que la construcción basada sobre los axiomas genéticos no nos conduce fuera del dominio de

las superficies de una hoja. La demostración de (\mathcal{Q}) es fácil de exponer. En primer lugar, por el convenio de (\mathcal{Q}) es evidente la validez del axioma C; ahora bien, admito que mi afirmación (\mathcal{Q}) es válida para menos de n -dimensiones y veo de concluir para n . A este fin, nótese que en la demostración del teorema fundamental del § anterior han sido utilizados los axiomas I-IV para dimensiones $\leq n$ y el A sólo para dimensiones en número $< n$ (mientras el axioma B no ha sido utilizado). Por consiguiente, podemos utilizarlo aquí, y de él obtendremos en particular que si C_n es una superficie de una hoja, lo es también \bar{C}_n , y reciprocamente.

El fin último de la axiomática es restringir el concepto de ciclo *superiormente* por los axiomas que expresan propiedades e *inferiormente* por los axiomas genéticos, de tal modo que resulte unívocamente determinado. Por el momento estamos todavía bastante lejos de ello. De los axiomas genéticos expuestos hasta ahora no se puede concluir más sino que un complejo n -dimensional es un ciclo, el cual consta de dos elementos de orden 0, dos de orden 1, ..., dos de orden n y en el cual ambos elementos de orden i ($1 \leq i \leq n$) están limitados por los dos elementos de orden $i - 1$. Salimos inmediatamente de este dominio completamente restringido, si exigimos que el triángulo sea un ciclo unidimensional (lo cual hace posible la partición ilimitada del complejo unidimensional), que el tetraedro sea un ciclo bidimensional, etc.

El *simple n-dimensional* S_n ($S_0 =$ par de puntos, $S_1 =$ triángulo, $S_2 =$ tetraedro, etc.) posee $n + 2$ vértices α ; cada agrupación de $i + 1$ vértices distintos ($\alpha, \alpha', \dots, \alpha^i$) define un elemento e_i de orden i ($0 \leq i \leq n$); e_i estará limitado por aquellos elementos de orden $i - 1$ que se obtiene cuando se suprime una de las α en la agrupación que define el e_i . El método constructivo que conduce del par de puntos al triángulo, del triángulo al tetraedro, etcétera, y en general amplía el ciclo $(n - 1)$ -dimensional K_{n-1} a otro n -dimensional πK_n (la *pirámide* erigida sobre K_{n-1}) es el siguiente:

A los elementos de orden 0 de K_{n-1} se agrega otro o (el vértice de la pirámide); cada elemento e_{i-1} ($1 \leq i \leq n$) de K_{n-1} engendra un nuevo elemento $(e_{i-1} o)$ de orden i (por *proyección* de e_{i-1} desde el vértice o); finalmente, a los elementos de orden n de πK_n obtenidos por este procedimiento de los e_{n-1} de K_{n-1} se agrega un nuevo elemento e_n^o (la *base* de la pirámide). El elemento $(e_0 o)$ está limitado por e_0 y o ; (e_i, o) [$1 \leq i \leq n - 1$] está limitado por e_i y

aquellos elementos (e_{i-1}, o) , cuyo correspondiente e_{i-1} en K_{n-1} pertenece al contorno de e_i ; la base e'_n estará limitada por todos los elementos de orden $(n-1)$ del ciclo K_{n-1} .

Esto sentado, ampliaremos el sistema de axiomas genéticos con el

AXIOMA D. *La construcción de pirámides engendra un ciclo n -dimensional πK_n de uno $(n-1)$ -dimensional K_{n-1} .*

Es necesario entonces extender la demostración de (Ω) al nuevo axioma; encontramos por tanto de nuevo el convenio ciclo = superficie de una hoja; y hemos de demostrar que K_{n-1} y la pirámide πK_n erigida sobre él, son a la vez superficies de una hoja. En estas condiciones es preciso admitir que $n \geq 2$ y que la afirmación es válida para órdenes inferiores de dimensiones.

1) Los elementos que limitan directa o indirectamente un elemento de orden n de πK_n , forman un ciclo $(n-1)$ -dimensional. Para la base e'_n esto es evidente; para un elemento (e_{n-1}, o) , se sigue de que los elementos de su contorno forman la pirámide erigida sobre el ciclo $(n-2)$ -dimensional que limite a e_{n-1} .

2) Los elementos a cuyo contorno pertenece directa o indirectamente un elemento de orden 0 de πK_n forman, cuando se rebaja el número de dimensiones en una unidad, un ciclo $(n-1)$ -dimensional. Demostración: Como en 1).

3) πK_n es conexo, porque como nuevo punto sólo se agrega el o a los e_0 de K_{n-1} y éste resulta unido a ellos por los segmentos (e_0, o) .

4) πK_n es bilateral. Demos a cada elemento de K_{n-1} una indicatriz 1 primitiva; las de los elementos de orden $(n-1)$ deben formar una cadena cerrada en K_{n-1} . Por indicatriz 1 de un elemento (e_{i-1}, o) debe entenderse la que induce la indicatriz 1 en el elemento generador e_{i-1} [perteneciente al contorno de (e_{i-1}, o)]; por indicatriz 1 de la base e'_n la que induce la indicatriz 1 en todos los e_{n-1} de K_{n-1} . Si a cada elemento le agregamos como factor su indicatriz, se tiene

$$(12) \quad (e_i, o) \rightarrow e_i + \sum \varepsilon (e_{i-1}, o) \quad (1 \leq i \leq n-1); \quad e'_n \rightarrow \sum e_{n-1}$$

Una cadena i -dimensional que consta exclusivamente de elementos de la forma (e_{i-1}, o) , sólo puede ser cerrada si es $= 0$. Pues una cadena tal como la $V_i = \sum v (e_{i-1}, o)$ tiene como contorno una V_{i-1} ,

la cual da la indicatriz ν al elemento e_{i-1} ; si V_i ha de ser cerrada, todas las ν deben anularse. Si se aplica la primera fórmula (12) a $i = n - 1$ y se extiende la sumación a todos los e_{n-1} , restando la segunda ecuación queda

$$\Sigma (e_{n-1}, o) - e_n^0 \rightarrow \Sigma \Sigma \varepsilon (e_{n-2}, o)$$

En el segundo miembro hay una cadena $(n - 1)$ -dimensional que debe ser cerrada porque limita. Como está compuesta exclusivamente de elementos de la forma (e_{n-2}, o) es $= 0$; luego la cadena n -dimensional del primer miembro es cerrada.

5) πK_n es una superficie de una hoja. Sea

$$\Sigma \mu e_i + \Sigma \nu (e_{i-1}, o)$$

una cadena *cerrada* i -dimensional V_i situada en πK_n ($1 \leq i \leq n - 1$); vamos a demostrar que limita a la cadena $(i + 1)$ -dimensional $V_{i+1} = \Sigma \mu (e_i, 0)$. De (12) se deduce

$$(13) \quad V_{i+1} \rightarrow V'_i = \Sigma \mu e_i + \Sigma \{ \mu \Sigma \varepsilon (e_{i-1}, o) \}$$

V'_i es cerrada por ser cadena contorno, por consiguiente también

$$V'_i - V_i = \Sigma \{ \mu \Sigma \varepsilon (e_{i-1}, o) \} - \Sigma \nu (e_{i-1}, o).$$

Como está formada por elementos (e_{i-1}, o) exclusivamente, debe ser $= 0$, por tanto $V'_i = V_i$ y en virtud de la (13): $V_{i+1} \rightarrow V_i$.

Es fácil convencerse de que para $n = 1, 2$ se alcanza el fin propuesto de fijar unívocamente el concepto de ciclo mediante los axiomas expuestos hasta aquí. Para número mayor de dimensiones existe una laguna entre los axiomas genéticos y los cualitativos. Poincaré construyó un complejo especial de tres dimensiones que es superficie de una hoja, y, sin embargo, no se puede obtener con los principios constructivos A, B, C, D (*). Esta laguna se irá reduciendo cada vez más, como es de esperar, con el desarrollo progresivo del análisis situs.

(*) Rendiconti Circolo Mat di Palermo **18** (1904), pág. 45.

§ 7. Ley de reciprocidad.

En íntima dependencia con el principio D está un modo de partición de un complejo C_n , la *partición normal*, que describo aplicándola primero a un C_2 . Cada segmento se descompone en otros parciales mediante uno de sus puntos interiores, en cada elemento de superficie se toma un punto y se le divide en otros por medio de segmentos que van de este punto a los vértices del contorno (a los antiguos y a los introducidos por la partición) (fig. 3.^a).

In abstracto, el proceso de partición normal que transforma C_n en \tilde{C}_n puede resumirse así: Cada $i + 1$ elementos de orden distinto $e, e', \dots, e^{(i)}$ de C_n que se limitan mutuamente engendran un elemento de orden i ($e, e', \dots, e^{(i)}$) de \tilde{C}_n , el cual está limitado por aquellos elementos de orden $i - 1$ en \hat{C}_n que se obtiene cuando en la serie de los generadores $e, e', \dots, e^{(i)}$ se suprime uno de ellos:

$$(e', e'' \dots e^{(i)}) \quad (e, e'' \dots e^{(i)}), \dots, (e, e' \dots e^{(i-1)})$$

Según lo dicho, la partición normal puede efectuarse mediante particiones sucesivas de grados 1 a n ; la partición de grado i de un e_i se obtiene mediante la pirámide πk_i erigida según el axioma D sobre el ciclo k_{i-1} que limita a e_i . Este axioma nos asegura que la partición normal es un proceso que cae dentro del concepto de partición antes expuesto. Ante todo es importante, porque por iteración *in infinitum* de este proceso se pasa del esquema de partición del Continuo al Continuo mismo. Aquí nos interesa, además, por otra razón: Si C_n es un complejo no ramificado y C_n^* su reci-

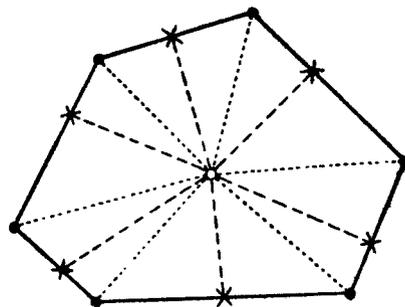


Fig. 3.^a
Partición normal de un e_2 .

proco según la definición (t. V, pág. 10), se deduce inmediatamente

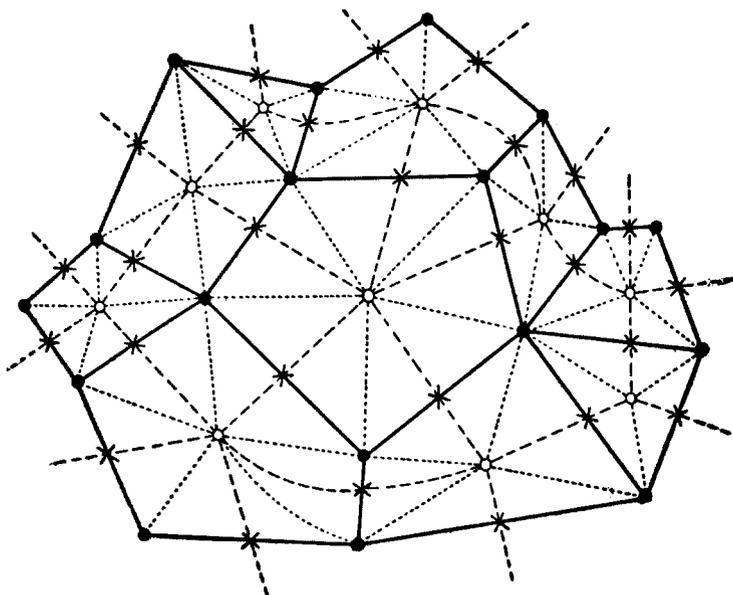


Fig. 4.ª

Partición normal de los de los C_2 y C_2^* duales de la figura 2.ª

(v. fig. 4.ª) que C_n y C_n^* se transforman por partición normal en el mismo complejo \tilde{C}_n . De aquí se deduce el

TEOREMA 7. *Los números de Betti y los coeficientes de torsión de dos superficies recíprocas coinciden.*

Nos ocuparemos, en particular, con las superficies bilaterales. Supongamos que un tal C_n esté en una *orientación* ω ; esto dice que a los elementos de orden n de C_n corresponden indicatrices primitivas 1 tales que formen en conjunto una cadena cerrada sobre C_n . Para los elementos de órdenes 1 a $n-1$ representa 1 una de las dos indicatrices primitivas posibles 1. Las matrices $E_0, E_1, \dots, E_n, E_{n+1}$ satisfacen las relaciones (8).

Si el elemento e' de orden $i-1$ limita en C_n al elemento e de orden i , recíprocamente e limita a e' ; sobre la superficie dual C_n^* , utilizaremos la locución e , y e' se limitan mutuamente. Asimismo debemos hacer notar que las indicatrices de e y e' se engendran mutuamente. Pues en C_n una indicatriz ι de e induce una indicatriz ι' de e' y recíprocamente a cada indicatriz ι' de e' corresponde una y sólo una indicatriz ι de e que la induce; si una es primitiva

también lo es la otra. Las matrices

$$E_{n+1}, E_n, \dots, E_1, E_0$$

pueden transformarse por transposición o cambio de líneas en columnas en las

$$E^*_{0}, E^*_{1}, \dots, E^*_{n}, E^*_{n+1}.$$

Entonces, en virtud de las (8), son válidas las relaciones

$$(8^*) \quad E^*_{0} E^*_{1} = 0, \quad E^*_{1} E^*_{2} = 0, \dots, \quad E^*_{n} E^*_{n+1} = 0$$

siendo E^*_0 la E_0 correspondiente a C^*_n . Si e_{n-1} es un elemento de orden $n-1$ de C_n , el cual establece contacto entre e_n y \bar{e}_n , las indicatrices ε y $\bar{\varepsilon}$ de e_n y \bar{e}_n que inducen la indicatriz 1 en e_{n-1} son iguales y opuestas: $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$. En C^*_n entran e_n y \bar{e}_n como dos elementos de orden cero e^*_0, \bar{e}^*_0 y e_{n-1} como un e^*_1 que une e^*_0 con \bar{e}^*_0 . Los números $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ unidos a los puntos e^*_0, \bar{e}^*_0 , determinan una indicatriz primitiva de e^*_1 , la cual designaremos con 1. Con este convenio E^*_1 es la matriz E_1 correspondiente a C_n . Si $e^*_2 = e_{n-2}$ es un elemento de segundo orden de C^*_n y se dan a los e^*_1 que lo limitan las indicatrices dadas por la columna correspondiente a e^*_2 en la matriz E^*_2 , la segunda ecuación (8*) dice entonces que estas indicatrices forman una cadena cerrada; determinan, por tanto, una indicatriz primitiva de e^*_2 sobre C^*_n , la cual designaremos con 1. Entonces E^*_2 es evidentemente la matriz E_2 correspondiente a C^*_n y así sucesivamente. Se ve que con la orientación marcada en ω a cada indicatriz de e_{n-i} en C_n corresponde una unívocamente definida para el elemento correspondiente $e^*_i = e_{n-i}$ de C^*_n ; si las indicatrices ι, ι' de dos elementos que se limitan directamente e, e' se engendran mutuamente en C_n , lo mismo ocurre con las indicatrices correspondientes de los elementos que les corresponden en C^*_n .

Una matriz cualquiera P formada por números enteros puede, como es sabido, ser transformada mediante composición anterior y posterior con ciertas matrices A y B de determinante ± 1 , en una forma normal P_0

$$(14) \quad B P A = P_0;$$

en la diagonal principal de P_0 figuran h enteros c_1, c_2, \dots, c_h , tales que cada uno es divisor del anterior y todos los demás puntos

están ocupados por ceros. Por transposición, se sigue de la (14)

$$\bar{A} \bar{P} \bar{B} = \bar{P}_0,$$

significando \bar{A} la traspuesta de A . De aquí se sigue que la matriz traspuesta tiene el mismo orden h y los mismos divisores elementales c_1, c_2, \dots, c_h que P .

El orden y los divisores elementales de la matriz E_i ($i=1, 2, \dots, n$) los habíamos designado, respectivamente, con

$$(15) \quad h_{i-1}; c'_{i-1}, c''_{i-1}, \dots$$

El número de Betti p_i es

$$p_i = g_i - h_i = N_i - h_{i-1} - h_i$$

De $N_{n-i} = N^*_i$, $h_{n-i} = h^*_{i-1}$, se deduce

$$N_{n-i} - h_{n-i-1} - h_{n-i} = N^*_i - h^*_{i-1} - h^*_{i-1}.$$

(LEMA). *Los coeficientes de torsión de orden $n-i$ de C_n coinciden con los coeficientes de torsión de orden $i-1$ de C^*_n y el número de Betti p_{n-i} de C_n es igual al número de Betti p^*_i de C^*_n .*

Siendo válida la primera afirmación para $i=1, 2, \dots, n$ y la segunda solo, naturalmente, para $i=1, 2, \dots, n-1$.

Reuniendo esta idea con el teorema 7 obtenido por partición normal, llegamos a la siguiente ley de reciprocidad:

TEOREMA 8. *Para una superficie bilateral el número de Betti p_{n-i} es igual a p_i , y los coeficientes de torsión de orden $n-i$ coinciden con los de orden $i-1$.*

Del lema se deduce, en particular: sobre una superficie bilateral no existen los coeficientes de torsión de orden $n-1$, así como los de orden cero ($r_{n-1} = 0$). La demostración de este teorema se basará en considerar la matriz traspuesta \bar{E}_n en vez de la E_n : en vez de investigar qué sistema de números (y) pueden ser representados mediante las ecuaciones

$$y'_{e'} = \sum_e \varepsilon_{e'e} x_e, \quad y = E_n x$$

con auxilio de números enteros x , investigaremos qué sistema de números ξ pueden expresarse en la forma

$$\xi_e = \sum_{e'} \varepsilon_{e'e} \eta_{e'}, \quad \xi = \eta E_n$$

mediante enteros η (e recorre los elementos de orden n y e' los de orden $n - 1$). Con el convenio hecho sobre la indicatriz 1 de los elementos e , la respuesta es: sólo cuando

$$\sum_e \xi_e = 0.$$

Si por el contrario, C_n es una superficie unilateral (sobre la cual se han fijado arbitrariamente las indicatrices primitivas 1 para los elementos de orden n), se encuentra con la misma sencillez como condición necesaria y suficiente la congruencia

$$\sum_e \xi_e \equiv 0 \pmod{2}.$$

Una superficie unilateral tiene en virtud de esto un único coeficiente de torsión de orden $n - 1$ cuyo valor es 2; esto es: sobre una superficie unilateral hay una cadena cerrada $(n - 1)$ -dimensional V_{n-1}^0 , la cual debe ser recorrida dos veces para que limite; toda cadena $(n - 1)$ -dimensional V_{n-1} que es $\simeq 0$ es $\simeq 0$ o $\simeq V_{n-1}^0$ (en este último caso es, naturalmente, $2 V_{n-1} \simeq 0$).

Si se quiere transportar la ley de reciprocidad a las superficies unilaterales, será conveniente empezar considerando la superficie de recubrimiento bilateral y de dos hojas que puede ser construída sobre toda superficie unilateral, y la cual representa por sus dos hojas las dos caras, conexa una con la otra, de la superficie fundamental. Formulando exactamente: a cada superficie unilateral C_n corresponde una superficie bilateral $C_n^{(2)}$ con las propiedades siguientes: «El número de elementos de cualquier orden es doble en $C_n^{(2)}$ que en C_n ; a cada elemento $e^{(2)}_i$ de $C_n^{(2)}$ corresponde un elemento determinado e_i de C_n del mismo orden; decimos: $e^{(2)}_i$ recorre (o cubre) a e_i ; pero cada elemento e_i de C_n es, recíprocamente, recorrido por dos elementos de la superficie $C_n^{(2)}$. Si $e^{(2)}_i$ está limitado por $e^{(2)}_{i-1}$, también los elementos trazados e_i, e_{i-1} correspondientes se limitan mutuamente». Para poder sacar de la ley de reciprocidad de $C_n^{(2)}$ conclusiones relativas a C_n , habría todavía que ver en qué relación están los números de Betti y los coeficientes de torsión de C_n con los de la superficie de recubrimiento $C_n^{(2)}$, lo cual, que yo sepa, no se ha hecho todavía.

§ 8.—Características.

Nos ocuparemos ahora algo más extensamente de una superficie bilateral C_n y utilizaremos las matrices E_i ($i = 0, 1, \dots, n + 1$). Hemos visto antes, que si C_n está tomado como base en una orientación determinada ω , corresponde a cada indicatriz ι de un elemento e de C_n una indicatriz determinada ι^* del elemento $e^* = e$ correspondiente en la superficie dual C_n^* . En particular, a la indicatriz 1 de cada punto e_0 de C_n corresponde una primitiva 1^* del elemento homólogo $e_n^* = e_0$; las cuales, como se deduce de la ecuación $E_n^* E_{n+1}^* = 0$ forman una cadena cerrada sobre C_n^* y definen por consiguiente una orientación ω^* de C_n^* . Por partición normal C_n y C_n^* se transforman en la misma superficie \hat{C}_n y parece natural preguntarse si sobre \hat{C}_n coinciden las orientaciones ω y ω^* o bien son opuestas.

LEMA.—Será $\omega^* = \omega$ si el número de dimensiones n es $\equiv 0$ ó 3 (mód. 4), por el contrario $\omega^* = -\omega$ para $n \equiv 1$ ó 2 (mód. 4); o sea

$$\omega^* = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \omega.$$

Demostración: a) Sobre un elemento de carácter simple e_n , es decir, un elemento de orden n cuyo ciclo contorno sea un simple $(n - 1)$ dimensional, los vértices $\alpha, \alpha', \dots, \alpha^n$ definen para cada sucesión $\{\alpha, \alpha', \dots, \alpha^n\}$ determinada de los mismos una indicatriz primitiva según la regla siguiente: (Definición por inducción completa.)

$$1) \quad \{\alpha\} = 1; \quad 2) \quad \{\alpha \alpha' \dots \alpha^n\} \rightarrow \{\alpha' \dots \alpha^n\}$$

Afirmo: Por transposición de dos vértices, la indicatriz se transforma en su opuesta. Demostración por inducción completa: La indicatriz del e_{n-1} de contorno $= \{\alpha' \alpha'' \dots \alpha^n\}$ se transforma en la opuesta cuando se permutan dos de los vértices $\alpha' \alpha'' \dots \alpha^n$; por consiguiente, también la indicatriz $\{\alpha \alpha' \alpha'' \dots \alpha^n\}$. Lo mismo ocurre si se permuta α con uno cualquiera de los otros vértices, por ejemplo, con α' . Para $n = 1$ esto es claro. Si $n \geq 2$, se sigue de

$$\begin{aligned} \iota = \{\alpha \alpha' \alpha'' \dots \alpha^n\} &\rightarrow \iota_1 = \{\alpha' \alpha'' \dots \alpha^n\} \rightarrow \{\alpha'' \dots \alpha^n\} \\ \iota'_1 &= \{\alpha \alpha'' \dots \alpha^n\} \rightarrow \{\alpha'' \dots \alpha^n\} \end{aligned}$$

basándose en la condición de coherencia que ι sobre el e_{n-1} de vértices $\alpha \alpha' \dots \alpha^n$, induce, no ι'_1 , sino $-\iota'_1$. Como ι e $\iota' = \{\alpha' \alpha \alpha'' \dots \alpha^n\}$ inducen sobre e_{n-1} las indicatrices opuestas $-\iota'_1$ e ι'_1 , respectivamente, son ellos mismos opuestos. Ordenaciones de los vértices, deducidas unas de otras por permutaciones pares, definen la misma orientación; las obtenidas por permutaciones impares, orientaciones opuestas.

b) Proveamos a los elementos de la superficie bilateral C_n de indicatrices primitivas 1. Los elementos de orden n de la superficie \tilde{C}_n obtenida por partición normal, son de carácter simple, cuyos vértices están formados por $n+1$ elementos e_0, e_1, \dots, e_n de C_n de órdenes 0 a n , los cuales se limitan mutuamente. Por la partición el elemento $\tilde{e}_n = (e_0 e_1 \dots e_n)$ de \tilde{C}_n se deduce del elemento e_n de C_n , y por la indicatriz 1 de e_n resulta \tilde{e}_n provisto de una orientación positiva. Cabe la duda de si coincide con la indicatriz $\{e_n e_{n-1} \dots e_0\}$ o será opuesta a ella.

La respuesta está contenida en la fórmula

$$(16) \quad \iota_n = \{e_n e_{n-1} \dots e_0\} = \varepsilon_{n-1, n} \dots \varepsilon_{1,2} \varepsilon_{0,1}$$

donde los índices $i-1, i$ se han puesto a ε para indicar abreviadamente la expresión e_{i-1}, e_i . Pues en la serie de las indicatrices

$$\{e_0\} = \iota_0 = 1, \quad \{e_1 e_0\} = \iota_1, \quad \{e_2 e_1 e_0\} = \iota_2, \dots$$

la definición inductiva, por ejemplo: $\iota_2 \rightarrow \iota_1$ se expresa como una ecuación de la forma $\iota_2 = \varepsilon_{12} \iota_1$. De aquí se sigue la afirmación antes señalada.

c) La ecuación (16) describe la orientación ω sobre \tilde{C}_n . Asimismo, la orientación ω^* sobre \tilde{C}_n , está descrita en las ecuaciones

$$\{e_n^* \dots e_1^* e_0^*\} = \varepsilon_{n-1, n}^* \dots \varepsilon_{1,2}^* \varepsilon_{0,1}^*$$

o, por ser $e_0^* = e_n, \dots, e_{0,1}^* = \varepsilon_{n-1, n}$, etc.,

$$\{e_0 \dots e_{n-1} e_n\} = \varepsilon_{0,1} \dots \varepsilon_{n-1, n}$$

Así, el signo en $\omega^* = \pm \omega$, depende de que la inversión formada por las $n+1$ cifras, sea par o impar; dicha inversión se ob-

tiene por

$$n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}$$

transposiciones.

Una cadena W_{n-1} de elementos de orden n , la cual se propaga de un e_n a otro e_n por el e_{n-1} del contorno común a e_n y e_n , es una cadena W^*_1 unidimensional en C^*_n . La cadena rebasa el elemento e_{n-1} , si W^*_1 recorre el $e^*_{n-1} = e_{n-1}$ correspondiente; en \tilde{C}_n se cruzan e_{n-1} y e^*_{n-1} en el punto engendrado por el elemento $e_{n-1} = e^*_{n-1}$, en la partición normal (fig. 5^a). Si e_{n-1} tiene una indicatriz primitiva ι , el cruzamiento es *positivo*, cuando e^*_{n-1} está recorrido en el sentido correspondiente a la indicatriz ι , y negativo en caso contrario; para esto, C_n debe ser colocado en una orientación determinada ω . Si V_{n-1} es una cadena $(n - 1)$ -dimensional cerrada, $W_{n-1} = W^*_1$ una cadena de elementos de orden n de C_n , podemos contar cuantas veces W^*_1 atraviesa a V_{n-1} , contando por $+1$ un cruce positivo, y por -1 , uno negativo. A este número lo llamaremos la *característica* $s(V_{n-1}, W^*_1)$ de V_{n-1}

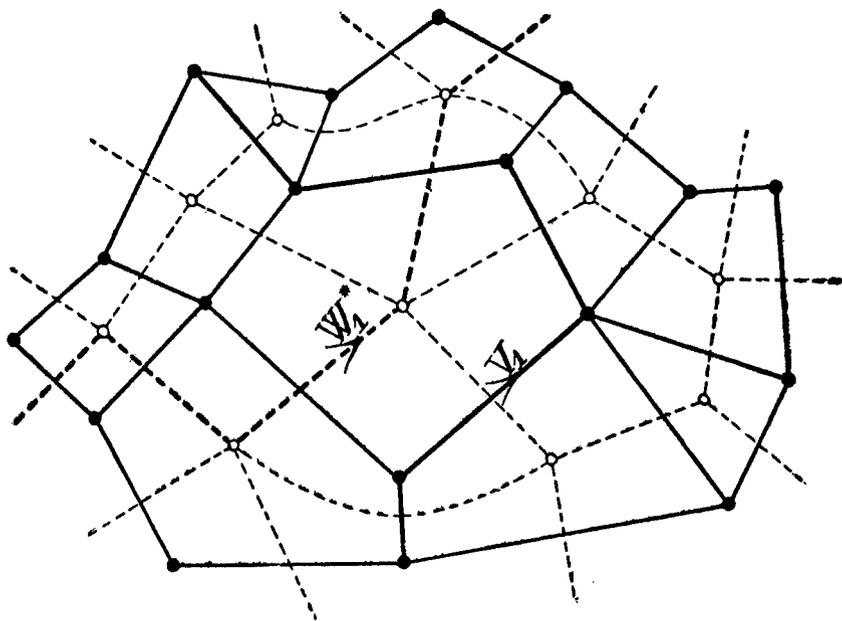


Fig. 5^a

Dos cadenas V_1 y W^*_1 que se cruzan en c_2 .

y W^*_1 . Es claro, que este número es $= 0$, si la cadena V_{n-1}

limita a una n -dimensional; es también $= 0$, si $V_{n-1} \simeq 0$, y asimismo si en C_n^* la cadena cerrada unidimensional W_{-1}^* es $\simeq 0$. Si hacemos los números de Betti $p_{n-1} = p_{-1}^* = p$, existe para la cadena cerrada V_{n-1} una base $V', \dots, V^{(p)}$, tal que toda cadena cerrada V_{n-1} es \simeq con una, y sólo con una combinación lineal $\xi_1 V' + \dots + \xi_p V^{(p)}$ con coeficientes ξ enteros. Asimismo, sea $W', \dots, W^{(p)}$ una base para las cadenas unidimensionales cerradas en C_n^*

$$W_{-1}^* \simeq \eta_1 W' + \dots + \eta_p W^{(p)}$$

Entonces, se obtiene

$$s(V_{n-1}, W_{-1}^*) = \sum_{\alpha, \beta=1}^p s_{\alpha\beta} \xi_{\alpha} \eta_{\beta}$$

La forma bilineal del segundo miembro con los coeficientes $s_{\alpha\beta}$ tiene un significado invariante en sentido del Análisis situs (frente a la partición); por cambio de base, tanto las ξ como las η sufren una transformación unimodular.

Esta consideración se puede transportar inmediatamente del par de índices $n-1, 1$ a un par cualquiera i, k cuya suma sea n , y asimismo fundar rigurosamente ($1 \leq k \leq n-1$). Supongamos provistos de indicatrices primitivas 1, a todos los elementos de C_n y, por tanto, a los de C_n^* . Una cadena i -dimensional V_i de C_n hace corresponder como indicatriz a cada elemento e de orden i un entero x_e ; la cadena es cerrada si satisfacen a las ecuaciones $\epsilon_i x = 0$. Una cadena k -dimensional W_k^* de C_n^* , hace corresponder asimismo a cada elemento de orden k de C_n^* , esto es, a cada elemento de orden i de C_n un entero y_e y es cerrada si $y \epsilon_{i+1} = 0$.

La *característica* está definida por la fórmula

$$s(V_i, W_k^*) = \sum_e x_e y_e (= x y)$$

y no depende de la elección de la indicatriz positiva 1 para el elemento e de orden i , pero sí de la orientación ω , variando con ella su signo. Por abreviar haré

$$\epsilon_i = A, \epsilon_{i+1} = B; N_i = N, h_{i-1} = a, h_i = b, p_i = N - a - b = p.$$

Si la cadena es $V_i \searrow 0$, el sistema de enteros x se puede expresar por un sistema de números racionales x' , en la forma $x = B x'$; entonces es, en efecto,

$$s(V_i W_k^*) = y \cdot x = y \cdot B x' = y B \cdot x' = 0,$$

pues $yB = 0$. Se demuestra en seguida que el recíproco es también cierto:

TEOREMA 9. *La cadena V_i es $\searrow 0$ sólo cuando para cualquier cadena cerrada W_k^* la característica $s(V_i W_k^*)$ es $= 0$.*

A saber, si x_e son números dados y es válida la ecuación $x \cdot y = 0$ para todo sistema de números y que satisfacen a la $y \cdot B = 0$, entonces la línea de las x debe estar compuesta, mediante multiplicadores x' , con las líneas de la matriz B , esto es, $x = B x'$. Si se elige una base $V', \dots, V^{(p)}$ para las cadenas cerradas V_i y otra $W', \dots, W^{(p)}$ para las W_k^* en el sentido indicado por las relaciones

$$V_i \searrow \xi_i V' + \dots + \xi_p V^{(p)}, \quad W_k^* \searrow \eta_1 W' + \dots + \eta_p W^{(p)}$$

entonces $s(V_i W_k^*)$ se transforma en una forma bilineal

$$(17) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^p s_{\alpha\beta} \xi_\alpha \eta_\beta = s_i(\xi, \eta)$$

de las variables ξ y η con coeficientes enteros, la *forma característica de orden i* . El teorema 9 dice que su determinante es $\neq 0$. Este determinante vale ± 1 ; si ξ_α son números enteros dados cuyo m. c. d. es 1, se pueden hallar enteros η_α tales que $s_i(\xi, \eta) = 1$. O dicho en forma geométrica (una cadena cerrada V_i se llamará *primitiva* si no es \searrow al duplo, triplo, cuádruplo, etc., de una cadena i -dimensional).

TEOREMA 10. *Para cada V_i primitiva existe una W_k^* cerrada que la cruza una sola vez: $s(V_i W_k^*) = 1$.*

Demostración: Por una transformación unimodular de las variables $x_e (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede lograr que las ecuaciones $Ax = 0$ tomen la forma

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_a = 0.$$

Si se aplica a las y_e la transformación contragrediente se obtiene

$$(18) \quad x \cdot y = \sum_{\lambda=1}^N x_{\lambda} y_{\lambda}, \quad \text{para } V_i \text{ cerrada:} \quad = \sum_{\lambda=a+1}^N x_{\lambda} y_{\lambda}$$

A consecuencia de las $A B = 0$, las líneas de B satisfacen a la ecuación $A x = 0$; después de la transformación, las primeras a líneas de B están, por consiguiente, llenas por ceros. Las ecuaciones $y B = 0$ hacen referencia, pues, sólo a los números y_{a+1}, \dots, y_N . Por una transformación unimodular de estas variables, se puede conseguir que tomen la forma

$$y_{a+1} = 0 \dots \dots y_{a+b} = 0$$

Si se aplica a las x_{a+1}, \dots, x_N la transformación contragrediente, la ecuación (18) subsiste y para cadenas cerradas se tiene en particular

$$s_i = x y = \sum_{\lambda=1}^p \xi_{\lambda} \eta_{\lambda}$$

donde $\xi_{\lambda} = x_{a+b+\lambda}$, $\eta_{\lambda} = y_{a+b+\lambda}$. Eligiendo convenientemente las dos bases $V', \dots, V^{(p)}$; $W', \dots, W^{(p)}$ se puede, pues, lograr que la forma característica (17) se convierta en la unitaria $\xi \cdot \eta$.

Lo mismo que hemos formado en C_n las características $s(V_i W^*_k)$, podemos determinar en C^*_n las características $s(W^*_k V_i)$. Tomemos como fundamental en C_n la orientación ω y en C^*_n la ω^* ; de la definición se deduce que estas dos características son iguales. Consideremos V_i y W^*_k como cadenas en \tilde{C}_n y utilicemos en ambos casos la misma orientación de \tilde{C}_n , entonces según el lema debe ser

$$(19) \quad s(W^*_k V_i) = \pm s(V_i W^*_k), \quad \text{con} \quad \pm = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(Para $n = 2$, el signo es $-$, no $+$; de modo que si la cadena V_i cruza a otra W^*_1 de «izquierda a derecha»; recíprocamente W^*_1 cruza a V_i de «derecha a izquierda»). Si V_i es una cadena cerrada

i -dimensional, W_k otra cadena k -dimensional cerrada de C_n , hay una W_k^* en C_n^* que es $\simeq W_k$ en \hat{C}_n (pues cada cadena cerrada de \hat{C}_n es homóloga a una cadena cerrada sobre la superficie C_n^* de la cual se deduce \hat{C}_n por partición). Si W_k^* , U_k^* son dos cadenas de C_n^* , las cuales son $\simeq W_k$ en \hat{C}_n , entonces vale la homología $W_k^* \simeq U_k^*$ en C_n^* . La característica $\mathbf{s}(V_i W_k^*)$ depende, según esto, solamente de V_i y W_k y puede ser designada con el nombre de *característica de ambas cadenas V_i y W_k en C_n* : $\mathbf{s}(V_i W_k)$. La fórmula (19) permite ver (este punto necesitaría, por lo demás, una demostración más rigurosa) que

$$(20) \quad \mathbf{s}(W_k V_i) = \pm \mathbf{s}(V_i W_k)$$

lo cual es una importante *generalización de la ley de reciprocidad* $p_i = p_k$ de los números de Betti.

Para $n = 2m$ es particularmente interesante la *forma característica media* \mathbf{s}_m ; dos cadenas cerradas m -dimensionales V, W tienen una característica $\mathbf{s}(V W)$, la cual, por las (20), satisface a la relación de simetría

$$\mathbf{s}(W V) = (-1)^m \mathbf{s}(V W).$$

Utilizando una base $V', \dots, V^{(p)}$ para las cadenas m -dimensionales ($p = p_m$)

$$V \simeq \xi_1 V' + \dots + \xi_p V^{(p)}, \quad W \simeq \eta_1 V' + \dots + \eta_p V^{(p)}$$

la forma $\mathbf{s}_m = \mathbf{s}$ bilineal con las variables ξ, η , es *simétrica* o *hemisimétrica*, según sea m , par o impar. Como el determinante de una forma hemisimétrica es distinto de cero, sólo cuando el número de variables es par, se sigue que: *Si m es par, el número de Betti medio $p = p_m$ de una superficie $2m$ -dimensional y bilateral, es par.* Una forma bilineal hemisimétrica \mathbf{s} con coeficientes enteros y determinante ± 1 , puede ponerse en la forma (1)

$$\mathbf{s} = (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) + (\xi_3 \eta_4 - \xi_4 \eta_3) + \dots + (\xi_{p-1} \eta_p - \xi_p \eta_{p-1})$$

(1) Véase p. ej.: «Hensel u. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen.» Leipzig 1902, pgs. 636, 7.

sometiendo las dos variables a la *misma* transformación unimodular.

Así se obtiene para m impar una «base canónica» para las cadenas m -dimensionales cerradas, tal como Riemann la construyó para las superficies bidimensionales ($m = 1$); formada por pares

$$(V', V''), \dots, (V^{(p-1)}, V^{(p)}),$$

de tal modo que dos cadenas de pares distintos tienen la característica cero (no se cortan) y las de un mismo par tienen la característica ± 1 . Si m es par, se puede sustituir la forma bilineal simétrica $s(\xi \eta)$ por la cuadrática $s(\xi \xi)$: la característica de una cadena cerrada V_m respecto a sí misma. Aquí no existe ninguna forma normal unitaria; sino que las formas cuadráticas con coeficientes enteros y determinante ± 1 se descomponen en varias clases no equivalentes, de formas no transformables unas en otras mediante sustituciones unimodulares. Por tanto, con m par, la clase a que pertenece la forma característica de grado m (en particular su índice de inercia) constituye una nueva peculiaridad de las superficies $2m$ -dimensionales respecto al Análisis-Situs.

Para terminar, haré notar que la exposición del Análisis Situs que aquí hago se diferencia de otras, en particular de la de Veblen, de la cual es independiente en su constitución, por la fundación axiomática de los conceptos «ciclo y partición» y que yo sepa, también la teoría de características es original.

Mayo 1923.