Andrew Ranidii

## SUR LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

Par WU WEN-TSUN.

#### INTRODUCTION

§ 1. Nous étudierons dans ce travail les espaces fibrés E(B, F, G, H) dont la fibre est une sphère de dimension m-1 et G le groupe orthogonal  $O_m$  ou un de ses sous-groupes [1][12] (\*). Nous dirons qu'un tel espace fibré définit une G-structure (fibrée sphérique) sur la base B, que nous désignerons par les symboles G, G, etc. Le problème central de la théorie des espaces fibrés est de classifier, étant donnés B, F et G, les structures fibrées par leurs invariants. Pour les  $O_m$ -structures le problème de classification se ramène à un autre grâce à un théorème fondamental de Steenrod-Whitney [2]. Soit en effet  $R_{n,m}$  la variété grassmannienne des sous-espaces de dimension m dans l'espace numérique de dimension n+m. Le théorème de Steenrod-Whitney dit alors :

Les classes d'isomorphisme des  $O_m$ -structures qu'on peut définir sur un complexe B sont en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie des applications continues (¹) de B dans  $R_{n,m}$ , pourvu que n soit assez grand.

Il en résulte que tous les invariants d'une classe d'homotopie des applications de B dans  $R_{n,m}$  sont aussi des invariants des  $O_m$ -structures correspondantes. Ceci permet donc d'introduire la notion suivante:

Soit A une classe de cohomologie dans  $R_{n,m}$ . Soit  $\mathfrak{S}$  une  $O_m$ -structure sur B correspondant à l'application  $f: B \to R_{n,m}(^2)$ . La classe  $f^*A$  (image réciproque de A par f) est alors un invariant de  $\mathfrak{S}$  et est appelée une classe caractéristique de  $\mathfrak{S}$ .

D'après Ehresmann [3], les classes d'homologie et de même les

(\*) Voir la liste des références p. 11.

(1) Dorénavant nous dirons simplement application au lieu d'application continue.

(2) Une application f d'un espace X dans un espace Y sora généralement notée  $f\colon X\to Y$ .

......

RIE

me et sur la

de la Théorie

ogiques et ses

tielles réelles.

riétés qui s'en

riques.

finies par des

I

II

III

IV

V

VI

VIII

IX

X

laptation

ET C°.



$$0 \leqslant \omega(\mathbf{1}) \leqslant \ldots \leqslant \omega(m) \leqslant n.$$

Les classes à coefficients entiers peuvent être aussi déterminées à l'aide de ces suites. Pourtant les seules classes qui importent sont celles qui figurent dans le tableau suivant:

Classes dans Ra, m.	Coefficients.	Suito correspondante.
$\mathbf{W}_{2}^{i}(i=1,\ldots m)$	entiers mod 2	$\omega(1) = \dots = \omega(m-i) = 0,$ $\omega(m-i+1) = \omega(m) = 1.$
$\overline{\mathbf{W}}_{2}^{i}(i=1,\ldots n)$	entiers mod 2	$\omega(1) = \dots = \omega(m-1) = 0,$ $\omega(m) = i.$
$\mathbf{P}_0^{ik}(\imath\leqslant k\leqslant m/2)$	entiers	$\omega(1) = \dots = \omega(m - 2k) = 0,$ $\omega(m - 2k + 1) = \dots = \omega(m) = 2.$
$\bar{P}_0^{4k}$ (1 $\leqslant k \leqslant n/2$ )	entiers	$\omega(1) = \dots = \omega(m-2) = 0,$ $\omega(m-1) = \omega(m) = 2k.$

Les classes caractéristiques correspondantes seront désignées par  $W^i_2(\mathfrak{S})$ ,  $\overline{W}^i_2(\mathfrak{S})$ ,  $P^{ik}_0(\mathfrak{S})$  et  $\overline{P}^{ik}_0(\mathfrak{S})$  respectivement; elles sont indépendantes de la valeur de n. L'indice inférieur o ou 2 indiquera toujours que les coefficients de la classe de cohomologie ou d'homologie considérée sont respectivement entiers ou entiers mod 2, et l'indice supérieur désignera la dimension. De plus, étant donnée une classe à coefficients entiers  $A_0$ , la classe déduite de  $A_0$  par réduction mod 2 sera désignée par  $A_2$ . Par exemple, la classe  $P_2^{ik}$  est ainsi déduite de  $P_0^{ik}$ .

L'importance de ces classes provient des raisons suivantes :

a) D'après Chern [4] les classes W<sub>2</sub> forment une base pour l'an-

neau de cohomologie mod 2 de  $R_{n,m}$ .

b) Tous les coefficients de cotorsion de  $R_{n,m}$  sont égaux à 2. Toutes les classes de cotorsion sont donc déduites de classes mod 2 par une certaine opération invariante  $\lambda$  définie de la manière suivante: soit  $A_2$  une classe mod 2. Prenons une cochaîne  $A_0$  à coefficients entiers telle que  $A_0$  réduit mod 2 appartienne à  $A_2$ . On a alors  $\delta A_0 = 2C_0$ , où  $C_0$  est un cocycle entier appartenant à une classe entière qui ne dépend que de  $A_2$  et que nous désignons par  $\lambda(A_3)$ .

c) D'après les travaux de Pontrjagin et Chern, les classes  $\mathbf{P}_0^{4k}$  ou  $\mathbf{P}_0^{4k}$  engendrent les éléments de dimension  $\leq n$  de l'anneau de cohemples à la company de la la la  $\mathbf{P}_0$ 

cohomologie à coefficients réels de R<sub>n, m</sub>.

Il en résulte que toutes ture  $\mathfrak{S}$  sont complèter  $P_0^{1k}(\mathfrak{S})$ ; nous nous borne

§ 2. Le théorème de Pontrjagin [5] au cas dest le groupe des rotatio groupe unitaire O'm, ce quappelées respectivement des structures ordinaires a Dans le théorème de St sont à remplacer respectigrand) définies de la man

 $\hat{\mathbf{R}}_{n, m}$  est la variété gradimension m dans l'espac

 $C_{n, m}$   $(n = 2n', m = 2m \text{ espaces complexes de dir rique complexe } G^{n'+m'}$  de

Les propriétés d'homeldiées par Pontrjagin [7] aussi introduire un système

 $W_{2}^{l}(\mathfrak{S}), \ \overline{W}_{2}^{l}(\mathfrak{S}), \ P_{0}^{3k}(\mathfrak{S})$ 

C<sub>0</sub><sup>2k</sup>(S), C<sub>0</sub><sup>2k</sup>(S) pour un Dans les applications à présentent toujours ensemsous la forme d'un polyne la manière suivante:

$$\begin{split} \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S},\ t) &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{W}_{2}^{i}(\mathfrak{S}) \cdot t^{i} \\ \overline{\mathbf{W}}_{2}(\mathfrak{S},\ t) &= \sum_{i\geqslant 0} \overline{\mathbf{W}}_{2}^{i}(\mathfrak{S}) \cdot t^{i} \\ \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S},\ t) &= \sum_{k\geqslant 0} \overline{\mathbf{P}}_{0}^{4k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{i} \\ \overline{\mathbf{P}}_{0}(\mathfrak{S},\ t) &= \sum_{k\geqslant 0} \overline{\mathbf{P}}_{0}^{4k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{4k} \\ \overline{\mathbf{C}}_{0}(\mathfrak{S},\ t) &= \sum_{k\geqslant 0} \overline{\mathbf{C}}_{0}^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k} \\ \overline{\mathbf{C}}_{0}(\mathfrak{S},\ t) &= \sum_{k\geqslant 0} \overline{\mathbf{C}}_{0}^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k} \end{split}$$

tiers mod a peuvent des suites d'entiers  $\omega(m)$  telles que

e aussi déterminées asses qui importent

iulte correspondanto.

$$\begin{aligned}
& \dots = \omega(m-i) = 0, \\
& -i+1) = \omega(m) = 1. \\
& \dots = \omega(m-1) = 0, \\
& \omega(m) = i. \\
& \dots = \omega(m-2k) = 0, \\
& k+1) = \dots = \omega(m) = 2. \\
& \dots = \omega(m-2) = 0, \\
& \dots = \omega(m) = 2k. \end{aligned}$$

seront désignées par nt; elles sont indér o ou 2 indiquera mologie ou d'homor entiers mod 2, et plus, étant donnée déduite de A<sub>0</sub> par emple, la classe P<sup>4\*</sup><sub>2</sub>

ns suivantes : une base pour l'an-

es de classes mod 2 de la manière suiune cochaîne  $A_0$  à partienne à  $A_2$ . On a rtenant à une classe ésignons par  $\lambda(A_2)$ , ern, les classes  $P_n^{ik} \le n$  de l'anneau de

Il en résulte que toutes les classes caractéristiques d'une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{S}$  sont complètement déterminées par les classes  $W_2(\mathfrak{S})$  et  $P_0^{ik}(\mathfrak{S})$ ; nous nous bornerons donc à l'étude de ces dernières.

§ 2. Le théorème de Steenrod-Whitney a été généralisé par Pontrjagin [5] au cas des G-structures fibrées sphériques, où G est le groupe des rotations  $O_m$  et par Chern [6] au cas où G est le groupe unitaire  $O_m$ , ce qui suppose m=2m'. Ces structures seront appelées respectivement orientées ou unitaires pour les distinguer des structures ordinaires dont le groupe G est le groupe orthogonal. Dans le théorème de Steenrod-Whitney étendu, les variétés  $R_{n,m}$  sont à remplacer respectivement par les variétés  $R_{n,m}$  et  $C_{n,m}$  (n assez grand) définies de la manière suivante:

 $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  est la variété grassmannienne des sous-espaces orientés de dimension m dans l'espace numérique de dimension n + m;

 $C_{n,m}$  (n=2n', m=2m') est la variété grassmannienne des sousespaces complexes de dimension complexe m' dans l'espace numérique complexe  $C^{n'+m'}$  de dimension complexe n' + m'.

Les propriétés d'homologie des variétés  $\hat{R}_{n,m}$  et  $C_{n,m}$  ont été étudiées par Pontrjagin [7], Ehresmann [8] et Hodge [9]. On peut aussi introduire un système de classes caractéristiques:

 $W^i_2(\mathfrak{S}), \ \overline{W}^i_2(\mathfrak{S}), \ \overset{ullet}{P}^{ik}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{S}), \ \overline{P}^{ik}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{S}) \ \text{et} \ X^m_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{S}) \ \text{pour une} \ O^{\wedge}_{\mathfrak{m}}\text{-structure} \ \mathfrak{S}:$ 

 $C_0^{2k}(\mathfrak{S}), \ \overline{C}_0^{2k}(\mathfrak{S}) \ \text{pour une O}_m'\text{-structure }\mathfrak{S}.$ 

Dans les applications les classes caractéristiques ainsi définies se présentent toujours ensemble, de sorte qu'il convient de les réunir sous la forme d'un polynome en introduisant une indéterminée t de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \overline{W}_{2}(\mathfrak{S},\ t) = \sum\limits_{i=0}^{m} \overline{W}_{2}^{i}(\mathfrak{S}) \cdot t^{i} \\ \overline{W}_{2}(\mathfrak{S},\ t) = \sum\limits_{k \geq 0} \overline{W}_{2}^{i}(\mathfrak{S}) \cdot t^{i} \\ P_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \sum\limits_{k \geq 0} \overline{C}_{0}^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k} \\ \overline{C}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \sum\limits_{k \geq 0} \overline{C}_{0}^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k} \\ \overline{C}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \sum\limits_{k \geq 0} \overline{C}_{0}^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k} \\ \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{pour unc } O_{m}^{*}\text{-structure }\mathfrak{S}; \\ [m/2] = \text{le plus grand entier} \\ \text{contenu dans } m/2. \\ \\ \text{pour unc } O_{m}^{*}\text{-structure }\mathfrak{S}; \\ \\ \text{pour unc } O_{m}^{*}\text{-structure }\mathfrak{S}; \\ \\ m = 2m'. \end{array}$$

où  $W_2^0(\mathfrak{S})$ ,  $P_0^0(\mathfrak{S})$ ,  $C_0^0(\mathfrak{S})$ ,  $\overline{W}_2^0(\mathfrak{S})$ , etc. sont des classes unités mod 2 ou entières de dimension o.

L'étude des classes caractéristiques constitue le but essentiel du présent travail. Nous remarquons que les classes  $W_2^t(\mathfrak{S})$  sont en relation étroite avec les classes caractéristiques introduites par Stiefel [10] et Whitney [11], et la classe  $X_0^m(\mathfrak{S})$  avec la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété orientable pour la « structure tangente » de cette variété orientée. Mais nous ne préciserons pas les relations exactes dans ce travail.

§ 3. Il est évident qu'on peut considérer une structure fibrée sphérique orientée comme une structure ordinaire et une structure unitaire comme une structure orientée; cela veut dire qu'une structure orientée est subordonnée [1] à une structure ordinaire et une structure unitaire à une structure orientée. Le premier problème central que nous considérons dans ce travail est le problème inverse, à savoir:

Étant donnée une structure ordinaire (ou orientée) S, est-ce qu'il existe une structure orientée (resp. unitaire) S' subordonnée à S?

Grâce au théorème fondamental de Steenrod-Whitney-Pontrjagin-Chern ce problème peut être ramené à un problème concernant les variétés grassmanniennes de la manière suivante:

Pour un élément X de  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ , soit  $\phi(\mathbf{X})$  le même élément mais non-orienté.  $\phi(\mathbf{X})$  est alors un élément de  $\mathbf{R}_{n,m}$  et on obtient ainsi une application canonique  $\phi: \hat{\mathbf{R}}_{n,m} \to \mathbf{R}_{n,m}$ .

Pour un élément Z de  $C_{n,m}$ , soit  $\varphi'(Z)$  le même élément en négligeant sa structure complexe mais muni de l'orientation naturelle. On peut alors considérer  $\varphi'(Z)$  comme un élément de  $\hat{R}_{n,m}$ . On a ainsi une application canonique  $\varphi': C_{n,m} \rightarrow \hat{R}_{n,m}$ .

Notre problème est alors équivalent au suivant :

Etant donnée une application  $f: B \to \mathbb{R}_{n,m}$ , est-ce qu'il existe une application  $\hat{f}: B \to \hat{\mathbb{R}}_{n,m}$ , telle que  $\hat{\varphi} = f^{\mathfrak{p}}$ 

Etant donnée une application  $f: B \to \mathring{\mathbf{R}}_{n,m}$ , est-ce qu'il existe une application  $g: B \to \mathring{\mathbf{C}}_{n,m}$  telle que  $\phi'g \simeq f$ ?

Le premier pas vers la solution de notre problème est donc la détermination du type d'homologie des applications  $\varphi$  et  $\varphi'$ . D'après les raisons données plus haut, il suffit pour cela de déterminer les

CLASSES CARACTÉRIST

images inverses des résultats suivants :

Si la structure or naire S, on a

$$\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}, t) = \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}, t) =$$

Si la structure un ⊚, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{2} \otimes \\ \mathbf{P}_{0} \otimes \\ \mathbf{X}_{0}^{n_{0}} \end{pmatrix}$$

Ces dernières for pour qu'une structs subordonnée; par e

(2)

§ 4. Comme appl complexes des variés variété différentiable tangente © admet s des formules (1) les variété orientée soit

Pour les variétés de dimension 2 tella

$$\mathbf{C}_{2}^{2} = \mathbf{W}_{2}^{2}($$

Pour les variétés de dimension 2 telle

(4)

Une étude plus variétés grassmannis sont non seulement la dimension 4 les en correspondance fiant les conditions Ehresmann, mais étautre méthode [12].

des classes unités

le but essentiel du ses W½(⑤) sont en ntroduites par Sticce la caractéristique la « structure tanpréciserons pas les

ne structure fibrée re et une structure veut dire qu'une ructure ordinaire et e premier problème e problème inverse,

orientée) S, est-ce e) S' subordonnée

l-Whitney-Pontrjacoblème concernant nte :

ême élément mais et on obtient ainsi

e élément en néglientation naturelle, ent de Â<sub>n, m</sub>. On a

-ce qu'il existe une

est-ce qu'il existe

blème est donc la ons o et o'. D'après de déterminer les images inverses des classes  $W_2^i$ ,  $P_0^{ik}$  et  $X_0^m$ . On est conduit ainsi aux résultats suivants :

Si la structure orientée S' est subordonnée à la structure ordinaire S, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}, \ t) &= \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}', \ t), & \overline{\mathbf{W}}_{2}(\mathfrak{S}, \ t) &= \overline{\mathbf{W}}_{2}(\mathfrak{S}', \ t), \\ \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}, \ t) &= \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}', \ t), & \overline{\mathbf{P}}_{0}(\mathfrak{S}, \ t) &= \overline{\mathbf{P}}_{0}(\mathfrak{S}', \ t). \end{aligned}$$

Si la structure unitaire S' est subordonnée à la structure orientée S, on a

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{3}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{C}_{2}(\mathfrak{S}',\ t), \\ \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}',\ t) \cup \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}',\ it), \\ \mathbf{X}_{0}^{m}(\mathfrak{S}) = (-1)^{m'}\mathbf{C}_{0}^{m}(\mathfrak{S}'), \qquad m = 2m'. \end{cases}$$

Ces dernières formules donnent quelques conditions nécessaires pour qu'une structure orientée © admette une structure unitaire subordonnée; par exemple, il est nécessaire que

$$(2) W_2^{2k+1}(\mathfrak{S}) = 0.$$

§ 4. Comme application nous étudierons les structures presque complexes des variétés dissérentiables [12] [13]. Nous dirons qu'une variété dissérentiable orientée est presque complexe si sa structure tangente © admet une structure unitaire subordonnée. On déduit des formules (1) les conditions nécessaires suivantes pour qu'une variété orientée soit presque complexe:

Pour les variétés de dimension 4: il existe une classe entière  $\mathbb{C}^2_0$  de dimension 2 telle que

(3) 
$$C_2^2 = W_2^2(\mathfrak{S}), \qquad C_2^2 \cup C_0^2 = P_0^4(\mathfrak{S}) + 2X_0^4(\mathfrak{S});$$

Pour les variétés de dimension 6 : il existe une classe entière  $\mathbb{C}^2_0$  de dimension 2 telle que

$$\mathbf{C}_{2}^{2} = \mathbf{W}_{2}^{2}(\mathfrak{S}).$$

Une étude plus approsondie des propriétés d'homotopie des variétés grassmanniennes [14] [15] [16] montre que ces conditions sont non seulement nécessaires mais aussi suffisantes. De plus, pour la dimension 4 les structures presque complexes de la variété sont en correspondance biunivoque avec le système de classes  $C_0^2$  vérifiant les conditions (3). Pour la dimension 6 le théorème est dû à Ehresmann, mais énoncé sous une autre forme et démontré par une autre méthode [12].

§ 5. Un autre problème étudié est la détermination des rapports entre les classes caractéristiques de certaines structures fibrées sphériques invariablement liées l'une à l'autre. Par exemple, la structure fibrée sphérique tangente d'une variété plongée dans un espace cuclidien et sa structure fibrée sphérique normale fournissent un exemple de deux structures fibrées sphériques duales l'une de l'autre dont nous ne préciserons pas ici la définition. Pour deux telles structures © et , on a:

$$\begin{array}{lll} (5), & \mathbb{W}_2(\mathfrak{S}, \ t) = \overline{\mathbb{W}}_2(\overline{\mathfrak{S}}, \ t), & \overline{\mathbb{W}}_2(\mathfrak{S}, \ t) = \mathbb{W}_2(\overline{\mathfrak{S}}, \ t); \\ (5)_2 & P_0(\mathfrak{S}, \ t) = \overline{P}_0(\overline{\mathfrak{S}}, \ t), & \overline{P}_0(\mathfrak{S}, \ t) = P_0(\overline{\mathfrak{S}}, \ t). \end{array}$$

De même, pour deux structures fibrées sphériques unitaires Set duales l'une de l'autre on a

$$(5)_{\mathfrak{s}} \qquad \mathbf{C}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}, \ t) = \mathbf{C}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}, \ t), \qquad \overline{\mathbf{C}}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}, \ t) = \mathbf{C}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}, \ t).$$

Ces formules forment une généralisation d'un théorème de dualité de Whitney [11] qui s'exprime par les formules (5). Elles montrent que les classes  $W_2^i(\mathfrak{S})$  présentent un caractère dual par rapport aux classes  $\overline{W}_2^i(\mathfrak{S})$ , ce qui justifie leur introduction.

§ 6. Le dernier problème que nous considérons est la détermination des classes caractéristiques de la structure fibrée sphérique qui est composée par deux autres structures fibrées sphériques. Par exemple, en composant deux structures ordinaires  $\mathfrak{S}_1$  et  $\mathfrak{S}_2$  sur un même complexe K on obtiendra une structure ordinaire  $\mathfrak{S}_1$ , appelée le produit de  $\mathfrak{S}_1$  et  $\mathfrak{S}_2$ . L'étude des classes caractéristiques de  $\mathfrak{S}$  conduit à une formule importante due à Whitney [11]:

$$W_2(\mathfrak{S}, t) = W_2(\mathfrak{S}_1, t) \cup W_2(\mathfrak{S}_2, t).$$

A l'aide de cette formule et de ses conséquences nous construisons un exemple d'une variété orientée de dimension 6 dont  $W_2^*(\mathfrak{S}) \neq 0$  pour sa structure tangente  $\mathfrak{S}$ , ce qui montre que la condition nécessaire (2) (et aussi (4)) pour l'existence d'une structure presque complexe n'est pas triviale en général.

§ 7. Le présent travail est subdivisé en cinq chapitres. Dans le premier chapitre nous étudierons les propriétés d'homologie des variétés grassmanniennes. Comme point de départ, nous définissons les subdivisions canoniques des variétés  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  et nous donnons les

CLASSES CARACTÉRISTI(

formules de bords d démonstration de Por soit aussi complet qu essentielle de ce trav tiques des diverses str tions entre elles pour à l'autre. Le troisième des variétés grassman presque complexes de chapitre. La composit dérée dans le dernier les formules liant les ( fibrées sphériques son type d'homologie de ci grassmannienne (ou l dans une autre.

Remarque. Les preconstituent ma thèse se versité de Strasbourg Docteur ès sciences. L. S. Chern et Ch. Ehres:

[1] Ch. Euresmann, Espa 764; Espaces fibrés 144-147.

[2] N. E. STEENROD, Cla (1944), 294-311.

[3] Ch. Euresmann, Sur 1

Journal de Math., 10

[4] S. Guers, On the m bundle, Annals of M

[5] L. Pontriagin, Character 245.

[6] S. Chern, Characterist 47 (1946), 85-121.

[7] L. Pontriagin, Mat. S

[8] Ch. Euresmann, Sur la Math., 35 (1934), 3 ination des rapports actures fibrées sphéxemple, la structure ans un espace cuclirnissent un exemple ane de l'autre dont r deux telles struc-

 $\mathbf{W}_{2}(\overline{\mathfrak{G}}, t);$  $\mathbf{P}_{0}(\overline{\mathfrak{G}}, t).$ 

briques unitaires S

 $G_o(\overline{\mathfrak{S}}, t)$ .

i théorème de duarmules (5). Elles caractère dual par troduction.

s est la déterminabrée sphérique qui es sphériques. Par es S, et S, sur un dinaire S, appelée actéristiques de S

. .

nous construisons 6 dont W³(⊗) ≠ o que la condition structure presque

chapitres. Dans le s d'homologie des t, nous définissons nous donnons les

formules de bords dues à Pontrjagin [7]. Nous reproduisons la démonstration de Pontrjagin de ces formules pour que notre travail soit aussi complet que possible. Le deuxième chapitre est la partie essentielle de ce travail; nous y définissons les classes caractéristiques des diverses structures fibrées sphériques et étudions les relations entre elles pour des structures invariablement associées l'une à l'autre. Le troisième chapitre concerne les propriétés d'homotopie des variétés grassmanniennes, qui serviront à l'étude des structures presque complexes des variétés dissérentiables dans le quatrième chapitre. La composition des structures fibrées sphériques est considérée dans le dernier chapitre. Nous suivons une méthode unique: les formules liant les classes caractéristiques des diverses structures fibrées sphériques sont toujours obtenues par la considération du type d'homologie de certaines applications canoniques d'une variété grassmannienne (ou le produit de deux variétés grassmanniennes) dans une autre.

Remarque. Les premiers quatre chapitres du présent travail constituent ma thèse soutenue à la Faculté des Sciences de l'Université de Strasbourg le 16 juillet 1949 pour obtenir le grade de Docteur ès sciences. L'auteur tient à exprimer ses remerciements à S. Chern et Ch. Ehresmann et son grand respect à L. Pontrjagin.

Le 16 octobre 1949, Paris.

#### RÉFÉRENCES

[1] Ch. Ehresmann, Espaces fibrés associés, C. R., Paris, 213 (1941), 762-764; Espaces fibrés de structures comparables, C. R., Paris, 214 (1942), 144-147.

144-147.
[2] N. E. Sternou, Classification of sphere bundles, Annals of Math., 4

(1944), 294-311.

[3] Ch. Emiesmann, Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, Journal de Math., 104 (1939), 69-100.

[4] S. Chern, On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, Annals of Math., 49 (1948), 362-372.

[5] L. Pontriagin, Characteristic cycles, C. R. U. R. S. S., 47 (1945), 242-

245.
[6] S. Chern, Characteristic classes of Hermitian manifolds, Annals of Math., 47 (1946), 85-121.

[7] L. PONTRIAGIN, Mat. Shornik. 21 (163) (1947), 233-284.

[8] Ch. Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogènes, Annals of Math., 35 (1934), 396-443.

[9] W. V. D. Honge, The intersection formulae for a grassmannian variety, Journal Lond. Math. Soc., 17 (1942), 48-64. (La formule peut aussi être démontrée par la méthode utilisée par S. Chern dans (4).)

[10] E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv., 8 (1935/36), 305-353.

[11] H. Whitner, On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology (1941), 101-141.

[12] Ch. Ehresmann, Sur la théorie des espaces fibrés, Colloque de Topologie Algébrique, Paris (1947).

[13] H. Hopp, Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Courant Anniversary volume (1948), 167-185.

[14] G. W. Whitehead, Homotopy properties of the real orthogonal groups, Annals of Math., 43 (1942), 132-146.

[15] B. ECKMANN, Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, Comm. Math. Helv., 14 (1841/42), 234-256.

[16] L. Pontriagin, Classification of some skew products, C. R. U. R. S. S., 47 (1945), 322-325.

LES DES V.

§ 1. L

Soit  $R^{n+m}$  l'espace sous-espaces vectorie orientés) de  $R^{n+m}$  ser Soit  $C^{n'+m'}$  (resp. quaternionien) de di de dimension réelle m = 4m''). La variéte quaternioniens) de di m, de  $C^{n'+m'}$  (resp. C

Les variétés  $R_{n,m}$ , manniennes et seront de les distinguer.

Les propriétés d'he étudiées à l'aide des  $(m, n, \omega)$ -fonctions. (des entiers  $1, 2, \ldots$  aux conditions:

 $0 \leqslant \omega$ 

L'ensemble des (n Nous poserons

(1)

la méthode utilisée par us in n-dimensionalen (5/36), 305-353.
manifolds, Lectures in s, Colloque de Topologic igfaltigkeiten, Courant real orthogonal groups, ruppenräumen, Comm.

ets, C. R. U. R. S. S.,

a grassmannian variety,

#### CHAPITRE PREMIER

### LES PROPRIÉTÉS D'HOMOLOGIE DES VARIÉTÉS GRASSMANNIENNES

#### § 1. Les variétés grassmanniennes.

Soit  $\mathbb{R}^{n+m}$  l'espace numérique de dimension n+m. La variété des sous-espaces vectoriels de dimension m non-orientés (respectivement orientés) de  $\mathbb{R}^{n+m}$  sera désignée par  $\mathbb{R}_{n,m}$  (resp.  $\hat{\mathbb{R}}_{n,m}$ ).

Soit  $C^{n'+m'}$  (resp.  $Q^{n'+m'}$ ) l'espace numérique complexe (resp. quaternionien) de dimension n'+m' (resp. n''+m''), c'est-à-dire de dimension réelle n+m, où n=2n', m=2m' (resp. n=4n'', m=4m''). La variété des sous-espaces vectoriels complexes (resp. quaternioniens) de dimension m' (resp. m'') ou de dimension réelle m, de  $C^{n'+m'}$  (resp.  $C^{n'+m'}$ ) sera désignée par  $C_{n,m}$  (resp.  $C_{n,m}$ ).

Les variétés  $\mathbf{R}_{n,m}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ ,  $\mathbf{C}_{n,m}$  ou  $\mathbf{Q}_{n,m}$  sont appelées variétés grassmanniennes et seront désignées par  $\mathbf{G}_{n,m}$  s'il n'y a aucune nécessité de les distinguer.

Les propriétés d'homologie des variétés grassmanniennes ont été étudiées à l'aide des  $\omega$ -fonctions ou, d'une façon plus précise, des  $(m, n, \omega)$ -fonctions. Ce sont des fonctions définies dans l'ensemble des entiers  $1, 2, \ldots m$  et prenant des valeurs entières satisfaisant aux conditions:

$$0 \leqslant \omega(1) \leqslant \omega(2) \leqslant \ldots \leqslant \omega(m) \leqslant n$$
.

L'ensemble des  $(m, n, \omega)$ -fonctions sera désigné par  $\Omega(n, m)$ . Nous poserons

(1) 
$$d(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega(i).$$

Les fonctions suivantes sont particulièrement importantes dans la théorie des structures sibrées sphériques:

(2) 
$$\begin{cases} \omega(1) = \cdots = \omega(m-k) = 0, \\ \omega(m-k+1) = \cdots = \omega(m) = 1; \quad (0 \le k \le m) \end{cases}$$

$$(2) \quad \omega(1) = \cdots = \omega(m-1) = 0, \quad \omega(m) = k; \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

(3) 
$$\begin{cases} \omega(1) = \cdots = \omega(m-2k) = 0, \\ \omega(m-2k+1) = \cdots = \omega(m) = 2. \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} \omega(1) = \cdots = \omega(m-k) = 0, \\ \omega(m-k+1) = \cdots = \omega(m) = 1; \quad (0 \leqslant k \leqslant m) \end{cases}$$
(2) 
$$\omega(1) = \cdots = \omega(m-1) = 0, \quad \omega(m) = k; \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$
(3) 
$$\begin{cases} \omega(1) = \cdots = \omega(m-2k) = 0, \\ \omega(m-2k+1) = \cdots = \omega(m) = 2; \quad (0 \leqslant 2k \leqslant m) \end{cases}$$
(3) 
$$\omega(1) = \cdots = \omega(m-2) = 0; \quad \omega(m-1) = \omega(m) = 2k;$$
(0 \le 2k \le n).

Nous désignerons ces fonctions respectivement par  $\omega_k^m$ ,  $\overline{\omega}_k^m$ ,  $\omega_{2k,2k}^m$  et

En faisant la convention  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega(m+1) = n$ , nous appellerons point sautant de la fonction  $\omega \in \Omega(n, m)$  un entier  $i(o \leqslant i \leqslant m)$ tel que  $\omega(i+1)>\omega(i)$ . Soient  $i_0(\omega),\ \ldots,\ i_{s(\omega)}(\omega)$  la suite des points sautants de la fonction ω rangés dans l'ordre croissant. Nous désignerons par  $\Omega_0(n, m)$ ,  $\Omega_0^*(n, m)$ ,  $\Omega_1(n, m)$  et  $\Omega_1^*(n, m)$  les sousensembles de  $\Omega(n, m)$  dont les fonctions  $\omega$  satisfont respectivement aux conditions suivantes:

$$\begin{cases}
\omega(i_0+1)+i_0 \equiv \omega(i_1+1)+i_1 \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s-1}+1)+i_{s-1} \\
\text{et aussi} \equiv \omega(i_s+1)+i_s \pmod{2} \text{ si } \omega(m)=n.
\end{cases} [(\text{mod } 2)]$$

(4)\* 
$$\begin{cases} \omega(i_1) + i_1 \equiv \omega(i_2) + i_2 \equiv \cdots \equiv \omega(i_s) + i_s \pmod{2} \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_0) + i_0 \pmod{2} \text{ si } \omega(1) \equiv 0. \end{cases}$$

(5) 
$$\begin{cases} \omega(i_0+1)+i_0 \equiv \omega(i_1+1)+i_1 \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s-1}+1)+i_{s-1} \equiv m \\ \text{et aussi } \equiv \omega(i_s+1)+i_s \pmod{2} \text{ si } \omega(m)=n. \end{cases}$$
 [(mod 2)

$$(5)^{s} \begin{cases} \omega(i_{s}) + i_{1} \equiv \omega(i_{2}) + i_{2} \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s}) + i_{s} \equiv m \pmod{2} \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_{0}) + i_{0} \pmod{2} \text{ si } \omega(1) \equiv 0. \end{cases}$$

$$(5)^{s} \begin{cases} \omega(i_{1}) + i_{1} \equiv \omega(i_{2}) + i_{2} \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s}) + i_{s} \equiv m \pmod{2} \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_{0}) + i_{0} \pmod{2} \text{ si } \omega(1) \equiv 0. \end{cases}$$

$$(5)^{s} \begin{cases} \omega(i_{1}) + i_{1} \equiv \omega(i_{2}) + i_{2} \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s}) + i_{s} \equiv m \pmod{2} \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_{0}) + i_{0} \pmod{2} \text{ si } \omega(1) \equiv 0. \end{cases}$$

(où 
$$s = s(\omega)$$
,  $i_r = i_r(\omega)$ ,  $r = 0, 1, ..., s$ ).

Pour chaque fonction  $\omega \in \Omega(n, m)$  nous définissons certaines fonctions associées  $\omega_{(i)}$ ,  $\omega^{(i)}$  et  $\omega^*$  par les équations suivantes :

(6) 
$$\begin{cases} \omega_{(i)}(j) = \omega(j) \text{ pour } j \neq i, & \omega_{(i)}(i) = \omega(i) - 1; \\ \omega^{(i)}(j) = \omega(j) \text{ pour } j \neq i, & \omega^{(i)}(i) = \omega(i) + 1; \\ \omega^*(j) = n - \omega(m - j + 1), & j = 1, ..., m. \end{cases}$$

En posant  $s(\omega) = s$ , on remarque que  $\omega_0$  n'appartient à  $\Omega(n, m)$ que pour  $i = i_0(\omega) + 1, \dots, i_{s-1}(\omega) + 1$  et aussi  $i = i_s(\omega) + 1$ 

CLASSES CARACTÉRISTIC

si 
$$\omega(m) = n$$
. De m  
 $i = i_1(\omega), \ldots, i_s(\omega)$  et a

$$i_r(\omega^*)$$
 +

Il en résulte que w f remarquons aussi

$$\begin{cases} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \overline{\zeta_2} \end{cases}$$

Soit M un espace cor disjoints deux à deux, cellulaire de M si les con

r° Chaque cellule 🕫 une boule ouverte don! 2° La réunion de tor M tout entier.

3° Pour chaque celle σ mais non à σ elle-môs réunion de certaines cel

Soient H<sub>p</sub> et H<sup>p</sup> une i paces topologiques au s K on peut alors associer gné par le même symb cohomologic sont isomer M, de sorte qu'on peut « subdivisions » plus g Eilenberg-Steenrod, Pr II. Cartan, Comm. Malie E. Spanier, Annals of  $M_{\mathbb{Z}}$ 

Deux subdivisions ce orientée M de dimension cation cellulaire D, appele le complexe L telle que le

1º D est une applicat orientées de K sur l'enser ent importantes dans

$$0 \leqslant k \leqslant m)$$

$$= k; \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

$$(0 \leqslant 2k \leqslant m) = \omega(m) = 2k;$$
  

$$(0 \leqslant 2k \leqslant n).$$

par 
$$\omega_k^m$$
,  $\overline{\omega}_k^m$ ,  $\omega_{2k,2k}^m$  et

on the proof of t

$$(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$$
  
 $(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$   
 $(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$   
 $(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$   
 $(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$   
 $(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$   
 $(i_{s-1}+1)+i_{s-1}$ 

$$i_{s-1}+1)+i_{s-1} \equiv m$$
  
 $i_{s-1}+1)+i_{s-1} \equiv m$   
 $i_{s-1}+1)=n$ . [(mod 2)

 $\equiv m \pmod{2}$ 

sons certaines foncvantes :

$$\omega(i) - \mathbf{1}$$
;  $\omega(i) + \mathbf{1}$ ;

opartient à 
$$\Omega(n, m)$$
 ussi  $i = i_s(\omega) + 1$ 

si  $\omega(m) = n$ . De même,  $\omega^{(i)}$  n'appartient à  $\Omega(n, m)$  que pour  $i = i_*(\omega), \ldots, i_*(\omega)$  et aussi  $i = i_0(\omega)$  si  $\omega(1) = 0$ . On a

$$\omega^{**} = \omega, \quad s(\omega^*) = s(\omega),$$
  
$$i_r(\omega^*) + i_{s,-r}(\omega) = m, \quad r = 0, 1, ..., s.$$

Il en résulte que  $\omega \in \Omega_{\mathfrak{o}}(n, m)$  est équivalent à  $\omega^* \in \Omega_{\mathfrak{o}}^*(n, m)$ . Nous remarquous aussi

(7) 
$$\begin{cases} \omega_{m}^{m} \in \Omega_{0}^{*}(n, m), \\ \omega_{2k, 2k}^{m} \in \Omega_{1}^{*}(n, m) \in \Omega_{0}^{*}(n, m), \\ \overline{\omega}_{2k, 2k}^{m} \in \Omega_{1}^{*}(n, m) \in \Omega_{0}^{*}(n, m). \end{cases}$$

#### § 2. Subdivision cellulaire.

Soit M un espace compact. Une collection finie K de sous-espaces disjoints deux à deux, appelés cellules de M, forme une subdivision cellulaire de M si les conditions suivantes sont vérifiées:

1° Chaque cellule  $\sigma$  est ou bien un point ou bien homéomorphe à une boule ouverte dont la dimension s'appelle la dimension de  $\sigma$ .

2° La réunion de toutes les cellules de la collection K est l'espace M tout entier.

3° Pour chaque cellule  $\sigma$  les points appartenant à l'adhérence de  $\sigma$  mais non à  $\sigma$  elle-même forment un sous-espace de M qui est une réunion de certaines cellules de dimension plus petite de K.

Soient H<sub>p</sub> et H<sup>p</sup> une théorie d'homologie et de cohomologie d'espaces topologiques au sens d'Eilenberg-Steenrod. A la subdivision K on peut alors associer canoniquement un complexe abstrait, désigné par le même symbole K, dont les groupes d'homologie et de cohomologie sont isomorphes aux groupes correspondants de l'espace M, de sorte qu'on peut les identifier. Ceci est vrai même pour des « subdivisions » plus générales que celles définies ci-dessus. Cf. Eilenberg-Steenrod, Proc. Nat. Acad. Sc., 31 (1945), 117-120; H. Cartan, Comm. Math. Helv., 18 (1945-46), 1-15, § 10; et aussi E. Spanier, Annals of Math., 50 (1949), 203-245, § 10.

Deux subdivisions cellulaires K et L d'une variété compacte orientée M de dimension m seront dites duales s'il existe une application cellulaire D, appelée opérateur de dualité, du complexe K dans le complexe L telle que les conditions suivantes soient vérifiées:

1° D est une application biunivoque de l'ensemble des cellules orientées de K sur l'ensemble des cellules orientées de L.

2° Pour chaque cellule  $\sigma$  de K, dim  $\sigma + \dim D(\sigma) = m$ .

3°  $D(-\sigma) = -D(\sigma)$ ,  $\sigma \in K$ .

4° Deux cellules orientées  $\sigma \in K$  et  $\tau \in L$  sont disjointes si  $\dim \sigma + \dim \tau \leqslant m$  et  $\tau \not= \pm D(\sigma)$ ; les deux cellules  $\sigma$  et  $D(\sigma)$  ont un seul point commun dont l'indice d'intersection est égal à +1:  $I_0(\sigma, D(\sigma)) = +1$ , où  $I_0$  signifie l'indice d'intersection dans la variété orientée M.

Les homomorphismes des groupes de chaînes de K dans ceux de L induits par D seront désignés par le même symbole D. Il résulte de 4° que, pour une chaîne A de dimension p de K et une chaîne B de dimension m-p de L, on a  $I_0(A,B)=< D(A), B>$ , où <> est le symbole du produit scalaire.

Nous supposons vérifiée de plus la condition suivante :

 $5^{\circ}\ I_{\scriptscriptstyle 0}(\delta\sigma,\tau)=(-1)^{\rho}I_{\scriptscriptstyle 0}(\sigma,\,\delta\tau),\ \sigma\in K,\ \tau\in L,$ 

$$\dim \sigma = p$$
,  $\dim \tau = m - p + 1$ .

Par exemple, cette condition est vérifiée pour les subdivisions duales des variétés grassmanniennes considérées dans §§ 3-5.

En supposant 5°, on aura:

$$<\mathrm{D}\delta(\sigma),\,\tau> = \mathrm{I}_0(\delta\sigma,\,\tau) = (-1)^p\mathrm{I}_0(\sigma,\,\delta\tau) = (-1)^p <\mathrm{D}(\sigma),\,\delta\tau> \\ = (-1)^p < \delta\mathrm{D}(\sigma),\,\tau>.$$

Les cellules  $\sigma$ ,  $\tau$  étant quelconques, on en déduit  $\mathrm{D} \sigma = (-1)^p \delta \mathrm{D}$ . Il en résulte que D induit un isomorphisme de  $\mathrm{H}_p(\mathrm{K})$  sur  $\mathrm{H}^{m-p}(\mathrm{L})$ . L'opérateur de dualité D établit donc d'une façon canonique une dualité entre l'homologie et la cohomologie de la variété orientée M, c'est-à-dire  $\mathrm{H}_p(\mathrm{M}) \approx \mathrm{H}^{m-p}(\mathrm{M})$ ; deux classes correspondantes dans cet isomorphisme sont dites duales l'une de l'autre. Remarquons que, M étant compacte et localement connexe dans toutes les dimensions, on peut considérer les groupes  $\mathrm{H}_p(\mathrm{M})$  comme groupes d'homologie singuliers de l'espace M, en partant d'une théorie d'homologie quelconque.

# $\S$ 3. Les variétés grassmanniennes $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ .

Nous commençons par l'étude des variétés  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ . Soit  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  la variété grassmannienne définie dans l'espace  $\mathbf{R}^{n+m}$ . Prenons un système de coordonnées  $(x) = (x_i, \ldots, x_{n+m})$  et désiCLASSES CARACTÉRISTIQUI gnons par  $\mathbb{R}^k$  le sous-es équations :

- Pour une fonction  $\omega \in \mathcal{C}$  tés X de dimension m te
- (2)  $\dim(X \cap \mathbb{R}^n)$  est une pseudovariété désignerons par  $\overline{U_{\omega}}$ . En et (6), § 1).

Soit  $(e_1, \ldots, e_{n+m})$  la gnons par  $X_{\infty}$  l'espace a vecteurs  $e_i$ , où i est le ii

 $\{i(\omega)\} = \{\omega(1)\}$ 

L'espace X est aussi.

(4)  $x_j$ :
où  $\tilde{j}$  est le j-ième nombre

$$(3)' \{\tilde{j}(\omega)\} = \{1, \dots, \omega(m)\}$$

Remarquons que  $\{\tilde{j}(\omega)\}$  taires dans la suite des d'une orientation déterns sera désigné par  $\tilde{X}_{\omega}$ . Le i sera désigné par  $\tilde{X}_{\omega}$ .

L'ensemble des éléme nale non-dégénérée sur l de  $\tilde{X}_{\omega}$  (resp.  $\tilde{X}_{\omega}$ ) forme que nous désignerons pa

$$\dot{N}_\omega \cap \overline{U_\omega} =$$

sont des cellules ouverk pseudo-variété  $\overline{U}_{\omega}$ . Tout son orientation, est déter

$$(5) x_{7} = \sum_{i=1}^{m}$$

s de K. dans ceux de mbole D. Il résulte e K et une chaîne B  $\mathrm{P(A)},\,\mathrm{B}>$ , où <>

suivante :

our les subdivisions dans  $\S\S$  3-5.

$$(-1)^p < D(\sigma), \ \delta \tau > 0$$

 $\operatorname{ait} \operatorname{D} \delta = (-1)^p \delta \operatorname{D}.$  $H_p(K)$  sur  $H^{m-p}(L)$ . çon canonique une variété orientée M, rrespondantes dans e. Remarquons que, ates les dimensions. roupes d'homologie e d'homologie quel-

es  $ar{\mathbf{R}}_{n,\ m}$  .

dans l'espace R<sup>n+m</sup>. ...,  $w_{n+m}$ ) et désiCLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES gnons par  $\mathbb{R}^k$  le sous-espace vectoriel de dimension k défini par les équations:

 $x_{k+1} = \cdots = x_{n+m} = 0,$   $(0 < k \leqslant n+m).$ (1)

Pour une fonction  $\omega \in \Omega(n, m)$  l'ensemble des sous-espaces orientés X de dimension m tels que

 $\dim (\mathbf{X} \cap \mathbf{R}^{\omega(i)+i}) \geqslant i,$ i = 1, 2, ..., m,(2)

est une pseudovariété de dimension d(w) (cf. (1), § 1), que nous désignerons par  $U_{\omega}$ . En particulier,  $\tilde{R}_{n,m} = U_{\omega_0}$ , où  $\omega_0 = \omega_0^{m*}(cf. (2)$ et (6), § 1).

Soit  $(e_1, \ldots, e_{n+m})$  la base de  $\mathbb{R}^{n+m}$  correspondant à (x). Désignons par X, l'espace vectoriel de dimension m engendré par les vecteurs ei, où i est le i-ième nombre de la suite :

 $\{i(\omega)\}=\{\omega(1)+1, \omega(2)+2, ..., \omega(m)+m\}.$ 

L'espace X est aussi défini par les équations :

$$(4) x = 0, j = 1, ..., n$$

où j est le j-ième nombre de la suite:

(3) 
$$\{\tilde{j}(\omega)\}=\{1,\ldots,\omega(1);\omega(1)+2,\ldots,\omega(2)+1,\ldots;\omega(m)+m+1,\ldots,n+m\}.$$

Remarquons que  $\{\tilde{j}(\omega)\}\$  et  $\{\tilde{i}(\omega)\}\$  sont des suites complémentaires dans la suite des entiers de 1 à n+m. L'espace  $X_{\omega}$ , muni d'une orientation déterminée par la suite des vecteurs  $e_{\overline{i}}, e_{\overline{i}}, \ldots, e_{\overline{m}}$ , sera désigné par  $\tilde{X}_{\omega}.$  Le même espace muni de l'orientation opposée sera désigné par X<sub>ω</sub>.

L'ensemble des éléments de R<sub>n, m</sub> ayant une projection orthogonale non-dégénérée sur  $X_{\omega}$  et dont l'orientation se projette sur celle de  $\bar{X}_{\omega}$  (resp.  $\bar{X}_{\omega}$ ) forme un voisinage de  $\bar{X}_{\omega}$  (resp.  $\bar{X}_{\omega}$ ) dans  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ que nous désignerons par  $N_{\omega}$  (resp.  $N_{\omega}$ ). Les intersections

$$\dot{\overline{N}}_{\omega} \cap \overline{U_{\omega}} = \dot{\overline{U}}_{\omega} \qquad \text{et} \qquad \overline{\overline{N}}_{\omega} \cap \overline{\overline{U}_{\omega}} = \overline{\overline{U}}_{\omega}$$

sont des cellules ouvertes dont la réunion a pour adhérence la pseudo-variété  $\overline{\mathrm{U}_{\omega}}$ . Tout élément de  $\mathrm{N}_{\omega}$  (resp.  $\overline{\mathrm{N}}_{\omega}$ ), en négligeant son orientation, est déterminé par un système d'équations :

(5) 
$$x_{\tilde{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{i}^{-}, \quad j=1, 2, ..., n,$$

où  $\overline{i}$  et  $\widetilde{j}$  parcourent respectivement les deux systèmes d'indices (3) et (3). On peut donc considérer les nombres  $\xi_{ji}$  comme les coordonnées de cet élément, appelées coordonnées normales dans le voisinage  $\widetilde{N}_{\omega}$  (resp.  $\overline{N}_{\omega}$ ), dont l'orientation sera déterminée une fois pour toutes par l'ordre suivant de ses coordonnées :

(6) 
$$\xi_{11}, \ldots, \xi_{1m}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{2m}, \ldots, \xi_{n_1}, \ldots, \xi_{nm}$$

Dans le système des coordonnées normales du voisinage  $\tilde{N}_{\omega}$  (resp.  $\overline{N}_{\omega}$ ), l'ensemble  $\tilde{U}_{\omega}$  (resp.  $\overline{U}_{\omega}$ ) se présente comme une variété linéaire définie par les équations

(7) 
$$\xi_{ji} = 0$$
, pour  $j > \omega(i)$ ,  $i = 1, 2, ... m$ .

Les nombres  $\xi_{ji}$  tels que  $j \leqslant \omega(i)$ , i = 1, ..., m, forment une suite partielle de (6), qui détermine un système de coordonnées normales dans  $U_{\omega}$  (resp.  $\bar{U}_{\omega}$ ) ainsi que l'orientation normale de  $\bar{U}_{\omega}$  (resp.  $\bar{U}_{\omega}$ ). L'élément  $\hat{X}_{\omega} \in \bar{U}_{\omega}$  (resp.  $\bar{X}_{\omega} \in \bar{U}_{\omega}$ ), correspondant aux coordonnées  $\xi_{ji} = 0$  pour tous les i et j, sera appelé l'élément central de  $\bar{U}_{\omega}$  (resp.  $\bar{U}_{\omega}$ ) ou  $\bar{N}_{\omega}$  (resp.  $\bar{N}_{\omega}$ ).

D'après Pontrjagin, l'ensemble des cellules ouvertes  $\vec{\mathbf{U}}_{\omega}$  et  $\vec{\mathbf{U}}_{\omega}$ ,  $\omega \in \Omega(n, m)$ , forme une subdivision cellulaire canonique  $\hat{\mathbf{K}}_{(x)}$  de la variété  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  par rapport au système de coordonnées

$$(x) = (x_1 \ldots, x_{n+m}) \text{ de } \mathbb{R}^{n+m}.$$

Les relations d'incidence entre les cellules du complexe  $\hat{K}_{(x)}$ , munies des orientations normales, ont été déterminées par Pontrjagin ; on peut les écrire sous la forme :

$$(8) \quad \begin{cases} \delta \dot{\bar{U}}_{\omega} = \Sigma \epsilon_{\omega,k} [\dot{\bar{U}}_{\omega_{(k)}} + (-1)^{\omega(k)+k+m} \overline{\bar{U}}_{\omega_{(k)}}], \\ \delta \bar{\bar{U}}_{\omega} = \Sigma \epsilon_{\omega,k} [\overline{\bar{U}}_{\omega_{(k)}} + (-1)^{\omega(k)+k+m} \dot{\bar{U}}_{\omega_{(k)}}], \end{cases}$$

où  $\varepsilon_{\omega,k} = +1$  ou -1 et où la sommation s'étend à l'ensemble des indices k tels que  $\omega_{(k)} \in \Omega(n, m)$ .

Esquisse de la démonstration. — On montre facilement que les formules donnant les bords sont de la forme :

$$\begin{cases} \partial \dot{\bar{\mathbf{U}}}_{\omega} = \Sigma \left[ \dot{a}_{\omega,k} \dot{\bar{\mathbf{U}}}_{\omega_{(k)}} + \dot{\bar{b}}_{\omega,k} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\omega_{(k)}} \right], \\ \partial \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\omega} = \Sigma \left[ \bar{a}_{\omega,k} \dot{\bar{\mathbf{U}}}_{\omega_{(k)}} + \bar{\bar{b}}_{\omega,k} \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\omega_{(k)}} \right]. \end{cases} (\omega_{(k)} \in \Omega(n,m))$$

CLASSES CARACTÉRIS où  $\overset{+}{a}_{(0),k}$ ,  $\overset{+}{b}_{(0),k}$ , etc., so sont donc équivalente:

(9)

Les équations (10) si  $\rho$  de  $\hat{R}_{n,m}$  sur elle-mé avec l'orientation opp  $\hat{U}_{\omega_{(k)}}$  et  $\overline{U}_{\omega_{(k)}}$  respecti-

équations résultent als

If reste done à dér  $\omega_{(k)} \in \Omega_{(n,m)}$  et considére conditions suivantes :

(α) X' se projette per
 (β) X' est représenté

$$\begin{cases} x_j = \\ x_{\omega(k)} + \end{cases}$$

ού (12)

et j et i sont respecti (3); en particulier, k = En esset, X' est l'élén où

 $\begin{cases}
e'_j = \\
e'_k = 
\end{cases}$ 

où les  $\xi'_{\mu}$  satisfont à (1 Considérons mainter dans U' et introduison un ordre tel que  $\xi'_{\mu}$  pri U'\_(-) et U'\_0 les sous-ens ment aux conditions :

 $\xi'_{(k),k} > 0$  Orientons  $U'_{(+)}$  et  $U'_{(-)}$  que:

1º U' n'est autre qu

(14) 
$$\partial U'_{(+)} = \eta$$

 $\ldots, \xi_{nm}.$ 

les du voisinage  $\mathring{\mathbb{N}}_{\omega}$ te comme une variété

..., m, forment une de coordonnées tation normale de  $\mathring{\mathbb{U}}_{\omega}$ , correspondant aux spelé l'élément central

ouvertes  $\vec{\mathbf{U}}_{\omega}$  et  $\vec{\mathbf{U}}_{\omega}$ , canonique  $\vec{\mathbf{K}}_{(\omega)}$  de la mécs

n.

omplexe K<sub>(x)</sub>, munies par Pontrjagin ; on

$$m\widetilde{U}_{\omega_{(k)}},$$
 $m\widetilde{U}_{\omega_{(k)}},$ 

end à l'ensemble des

nt que les formules don-

$$\sigma_{(k)} \in \Omega(n, m)$$

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

où  $\vec{a}_{\omega,k}$ ,  $\vec{b}_{\omega,k}$ , etc., sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Les formules (8) sont donc équivalentes à :

(9) 
$$\ddot{a}_{\omega,k} \cdot \ddot{a}_{\omega,k} = (-1)^{\omega(k)+k+m};$$
  
(10)  $\ddot{a}_{\omega,k} = \ddot{b}_{\omega,k}, \ \ddot{a}_{\omega,k} = \ddot{b}_{\omega,k}.$ 

Les équations (10) sont faciles à démontrer. En effet, considérons l'application  $\rho$  de  $\hat{R}_{n,m}$  sur elle-même telle que pour  $X \in \hat{R}_{n,m}$ ,  $\rho(X)$  soit le même élément avec l'orientation opposée. Évidemment  $\rho$  applique les cellules orientées  $\hat{U}_{\omega}$ ,  $\hat{U}_{\omega_{(k)}}$  respectivement sur les cellules orientées  $\hat{U}_{\omega}$ ,  $\hat{U}_{\omega_{(k)}}$  et  $\hat{U}_{\omega_{(k)}}$ . Les équations résultent alors du fait que  $\rho$  conserve les coefficients d'incidence :

$$_{0}$$
0 =  $\delta_{0}$ 0.

Il reste donc à démontrer l'équation (9). Soit k un entier fixe tel que  $\omega_{(k)} \in \Omega_{(n,m)}$  et considérons l'ensemble U' des éléments  $X' \in \hat{R}_{n,m}$  satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) X' se projette positivement sur l'élément central  $\hat{X}_{\omega_{(k)}}$  de  $\hat{U}_{\omega_{(k)}}$ .

(β) X' est représenté par l'ensemble des équations :

(11) 
$$\begin{cases} x_{\bar{j}} = \sum_{i \neq k} \xi'_{ji} x_{\bar{i}} + \xi'_{jk} x_{\bar{k}-1}, & \text{pour } j \neq \omega(k), \\ x_{\omega(k)+k} = \sum_{i \neq k} \xi'_{\omega(k),i} x_{\bar{i}} + \xi'_{\omega(k),k} x_{\bar{k}-1}, \end{cases}$$

οù

(12) 
$$\xi'_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i)$$

et j et  $\bar{i}$  sont respectivement le j-ième nombre de (3)' et le i-ème nombre de (3); en particulier,  $\bar{k} = \omega(k) + k$ ,  $\hat{k'} = \omega(k) + k - 1$ , où  $k' = \omega(k)$ .

En effet, X' est l'élément de  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  déterminé par la suite de vecteurs  $\{e_1',\dots e_m'\}$ 

(13) 
$$\begin{cases} e'_{j} = e^{-}_{i} + \sum_{j \neq \omega(k)} \xi'_{ji} e_{j} + \xi'_{\omega(k), i} e_{\omega(k) + k, i} \neq k; \\ e'_{k} = e^{-}_{k-1} + \sum_{j \neq \omega(k)} \xi'_{jk} e_{j} + \xi'_{\omega(k), k} e_{\omega(k) + k, i} \end{cases}$$

où les ξ' satisfont à (12).

Considérons maintenant  $\{\xi'_{ji}\}$ ,  $j \leqslant \omega(i)$ , comme un système de coordonnées dans U' et introduisons une orientation de U' en rangeant ces coordonnées dans un ordre tel que  $\xi'_{ji}$  précède  $\xi'_{j'i'}$  si j' > j ou j' = j, i' > i. Désignons par  $U'_{(+)}$ ,  $U'_{(+)}$  et  $U'_0$  les sous-ensembles de U' dont les éléments X' satisfont respectivement aux conditions :

$$\xi'_{\omega(k),k} > 0, \quad \xi'_{\omega(k),k} < 0 \quad \text{et} \quad \xi'_{\omega(k),k} = 0.$$

Orientons  $U'_{(+)}$  et  $U'_{(-)}$  par l'orientation induite de celle de U'. On voit alors que :

 $\iota^{\circ}\ U_{0}'$  n'est autre que la cellule  $\dot{U}_{\omega_{(k)}}.$  Par conséquent,

(14) 
$$\partial U'_{(+)} = \eta \dot{U}_{\omega(k)}, \quad \partial U'_{(-)} = -\eta \dot{U}_{\omega(k)}, \quad \eta = \pm \tau.$$

2° L'élément central  $\vec{X}_\omega$  de  $\vec{U}_\omega$  est déterminé par la suite de vecteurs

$$\{e_1,\ldots,e_m\}.$$

D'après (13), un élément  $X' \in U'$  se projette positivement sur  $\vec{X}_\omega$  si et sculement si  $\xi'_{(k),k} > 0$ . Par conséquent

$$U'_{(+)} = \dot{U}_{\infty} \cap U'.$$

Soit  $\{\xi_{ji}\}$  le système de coordonnées normales dans  $\tilde{\mathbf{U}}_{\omega}$ . En comparant (11) et (5), on voit que les transformations de coordonnées pour les éléments communs aux  $\mathbf{U}'$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_{\omega}$  sont données par les équations suivantes :

(16) 
$$\begin{cases} \xi_{jk} = \xi'_{jk}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \text{pour } j \neq \omega(k), \text{ ou, ce qui revient au même, pour } j < \omega(k); \\ \xi_{ji} = \xi'_{ji} - \xi'_{jk}\xi'_{\omega(k),i}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \text{pour } j \neq \omega(k), i \neq k; \\ \xi_{\omega(k),k} = 1/\xi'_{\omega(k),i}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \xi_{\omega(k),i} = -\xi'_{\omega(k),i}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \text{pour } i \neq k, \text{ ou, ce qui revient au même, pour } i > k; \end{cases}$$

où  $\xi'_{-(k), k} > 0$ .

Le jacobien de (16) est du signe de  $(-1)^{m-k+1}$ , c'est-à-dire les orientations de  $U_{\infty}$  et  $U'_{(+)}$  coïncident ou ne coïncident pas dans leur partie commune suivant que m-k+1 est pair ou impair. D'après (14), on a alors:

$$(17) \qquad \qquad \stackrel{+}{a_{\omega, k}} = (-1)^{m-k+1} \eta.$$

3° Pour U'(-) on a de même

$$U'_{(-)} = \overline{U}_{\scriptscriptstyle N} \cap U'_{\scriptscriptstyle N}$$

Les transformations de coordonnées pour les éléments communs aux U' et  $\overline{U}_{\omega}$  sont encore représentées par (16) mais où  $\xi'_{\omega(k),k} < 0$ . On trouve que le jacobien de (16) est du signe de  $(-1)^{\omega(k)}$ . On en déduit, en tenant compte de (14):

(18) 
$$\bar{a}_{\omega,h} := (-1)^{\omega(h)+1} \gamma_1.$$

De (17) et (18) on déduit (9). Les formules (8) sont donc démontrées.

Il en résulte que la chaîne

(19) 
$$\dot{\mathbf{R}}_{\omega} = \dot{\mathbf{U}}_{\omega} + (-1)^{\omega(i_0+1)+i_0+m} \cdot \overline{\mathbf{U}}_{\omega} \quad (i_0 = i_0(\omega))$$

est un cycle mod 2 pour toutes les fonctions  $\omega \in \Omega(n, m)$ ; elle est un cycle entier si et seulement si  $\omega \in \Omega_0(n, m)$ . Gette chaîne, dont la dimension est égale à  $d(\omega)$ , considérée comme un cycle mod 2 ou un cycle entier selon le cas, sera désignée par  $[\omega]_0^*$  ou  $[\omega]_2^*$  et sa classe d'homologie par  $[\omega]_0^*$  ou  $[\omega]_2^*$ . Nous remarquons que ces classes (et aussi ces cycles) sont définis à partir d'un système de coordonnées

CLASSES CARACTÉRISTIQUE

particulier  $(x) = (x_1, \dots$  aussi que le cycle  $[\omega]_2$  or pseudo-variété  $\overline{U}_{\omega}$ .

A chaque fonction  $\omega \in$  de la cellule  $\tilde{N}_{\omega}$  (resp.  $\tilde{N}$  orientable  $\hat{R}_{n,m} = \overline{U_{\omega_{0}}}$  otoutes l'orientation de la alors :

Proposition 1. — L'o ou non avec celle de  $\hat{\mathbf{R}}_{n,n}$ 

$$(29) \quad \begin{cases} m \cdot (mn - d(\epsilon)) \\ (\text{resp. } m \cdot (mn)) \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. — La

$$1, \ldots, \omega(1), \omega(1) + 2, \ldots$$

dissère de la suite 1,2, impaire selon que mn — a mation orthogonale A dé

$$\begin{cases}
A(\alpha) \\
A(\alpha)
\end{cases}$$

a un déterminant + 1, et

(22) 
$$A(\ddot{X}_{\omega})$$
:

Un élément X dans le v équations (5) est transfor les équations :

$$\begin{cases} x_i = (-1) \\ x_j = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \end{cases}$$

et appartenant par cons L'image  $A(N_{\omega})$  [resp.  $A(\tilde{N})$  suite de vecteurs

sur X, si et sculement si

. En comparant (11) et ir les éléments communs .

ne, pour  $j < \omega(k)$ ;

pour i > k;

st-à-dire les orientations ur partie commune suion a alors :

ets communs aux U' et s. On trouve que le jaco-1 tenant compte de (14):

nc démontrées.

$$(i_0 = i_0(\omega))$$

 $\Omega(n, m)$ ; elle est un e chaîne, dont la diecycle mod 2 ou un ou  $[\omega]_2$  et sa classe s que ces classes (et ème de coordonnées CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

particulier  $(x) = (x_1, \dots x_{n+m})$  de l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Nous remarquons aussi que le cycle  $[\omega]_2$  ou  $[\omega]_0$  est représenté géométriquement par la pseudo-variété  $\overline{\mathbf{U}}_{\omega}$ .

A chaque fonction  $\omega \in \Omega(n, m)$  nous avons associé une orientation de la cellule  $\tilde{N}_{\omega}$  (resp.  $\tilde{N}_{\omega}$ ) et par suite une orientation de la variété orientable  $\hat{R}_{n,m} = U_{\omega_0}$  où  $\omega_0 = \omega_0^{m*}$ . Nous choisirons une fois pour toutes l'orientation de la variété  $\hat{R}_{n,m}$  induite par celle de  $\tilde{N}_{\omega_0}$ . On a alors:

Proposition 1. — L'orientation de  $\tilde{N}_{\omega}$  (resp.  $\tilde{N}_{\omega}$ ) est en cohérence ou non avec celle de  $\hat{R}_{n,m}$  selon que

(20) 
$$\begin{cases} m \cdot (mn - d(\omega)) & \text{est pair ou impair,} \\ (\text{resp. } m \cdot (mn - d(\omega)) + m + n & \text{est pair ou impair).} \end{cases}$$

Démonstration. — La suite  $\{\tilde{j}(\omega), \tilde{i}(\omega)\}$ , c'est-à-dire la suite

$$1, \ldots, \omega(1), \omega(1) + 2, \ldots, \omega(m) + m + 1, \ldots, n + m,$$
  
$$\omega(1) + 1, \ldots, \omega(m) + m,$$

dissère de la suite  $1, 2, \ldots n + m$  par une permutation paire ou impaire selon que  $mn - d(\omega)$  est pair ou impair. Donc la transformation orthogonale A définic par les équations :

(21) 
$$\begin{cases} A(x_i) = (-1)^{mn-d(\omega)} \cdot x_i, \\ A(x_j) = x_j, \quad j = 2, \dots n, \\ A(x_{\bar{l}}) = x_{n+i}, \quad i = l, \dots m, \end{cases}$$

a un déterminant + 1, et on a

(22) 
$$\Lambda(\dot{X}_{\omega}) = \dot{X}_{\omega_{\alpha}}, \quad \Lambda(\bar{X}_{\omega}) = \bar{X}_{\omega_{\alpha}}$$

Un élément X dans le voisinage  $\tilde{N}_{\omega}$  (resp.  $\tilde{N}_{\omega}$ ) représenté par les équations (5) est transformé dans un élément  $\Lambda(X)$  représenté par les équations :

(23) 
$$\begin{cases} x_{i} = (-1)^{mn-d(\omega)} \cdot \sum_{i=1}^{m} \xi_{1i} x_{n+i}, \\ x_{j} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{n+i}, \quad j = 2, \dots n, \end{cases}$$

et appartenant par conséquent au voisinage  $\tilde{N}_{\omega_0}$  (resp.  $\tilde{N}_{\omega_0}$ ). L'image  $\Lambda(N_{\omega})$  [resp.  $\Lambda(\tilde{N}_{\omega})$ ] a une orientation déduite de celle de

 $\bar{N}_{\omega}$  (resp.  $\bar{N}_{\omega}$ ). En comparant les deux systèmes d'équations (5) et (23) et en tenant compte de l'équation (21) on voit que l'orientation de  $A(\bar{N}_{\omega})$  [resp.  $A(\bar{N}_{\omega})$ ] est en cohérence ou non avec celle de  $\bar{N}_{\omega_{0}}$  (resp.  $\bar{N}_{\omega_{0}}$ ) selon que  $m[mn-d(\omega)]$  est pair ou impair. Puisque le déterminant de la transformation  $\Lambda$  est positif, on peut déformer  $\Lambda$  dans la transformation identique en parcourant une famille de transformations orthogonales de l'espace  $R^{n+m}$ . Par conséquent  $\Lambda(\bar{N}_{\omega})$  [resp.  $A(\bar{N}_{\omega})$ ] est déformable en  $\bar{N}_{\omega}$  (resp.  $\bar{N}_{\omega}$ ) et les deux déterminent la même orientation de  $\hat{R}_{n,m}$ . Il en résulte que l'orientation de  $\bar{N}_{\omega}$  (resp.  $\bar{N}_{\omega}$ ) est en cohérence ou non avec celle de  $\bar{N}_{\omega_{0}}$  (resp.  $\bar{N}_{\omega_{0}}$ ) selon que  $m(mn-d(\omega))$  est pair ou impair.

De la même façon la considération de la transformation orthogonale A' définie par les équations :

(24) 
$$\begin{cases} \Lambda'(x_{i}) = -x_{i}, \\ \Lambda'(x_{i}) = x_{i}, \quad i = 2, \dots n + m - 1, \\ \Lambda'(x_{n+m}) = -x_{n+m}, \end{cases}$$

nous donne

(25) 
$$A'(\vec{X}_{\omega}) = \vec{X}_{\omega_{\delta}}, \qquad A'(\vec{X}_{\omega_{\alpha}}) = \vec{X}_{\omega_{\delta}}$$

De (24) et (25) on déduit que l'orientation de  $N_{\omega_o}$  est en cohérence ou non avec celle de  $N_{\omega_o}$  selon que m+n est pair ou impair. Il en résulte que l'orientation de  $N_{\omega}$  est en cohérence ou non avec celle de  $N_{\omega_o}$  selon que  $m \cdot (mn-d(\omega))+m+n$  est pair ou impair. La proposition est ainsi démontrée.

Nous définissons maintenant une subdivision cellulaire duale à celle considérée ci-dessus. Pour cela introduisons un autre système de coordonnées  $(x^*) = (x_i^*, \dots, x_{n+m}^*)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$  tel que :

$$(26) x_i^* = x_{n+m+1-i}, i = 1, \dots n+m.$$

A partir de ce système on définit de même une subdivision cellulaire canonique  $\hat{K}_{(x^*)}$  de la variété  $\hat{R}_{n,m}$  dont les cellules, les cycles, etc., seront désignés respectivement par les mêmes symboles que dans le complexe  $\hat{K}_{(x)}$  en ajoutant un astéristique. En particulier,  $R^{**}$  (o  $< k \le n + m$ ) est le sous-espace de  $R^{n+m}$  de dimension k défini par les équations :

$$x_{k+1}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$$
, où  $x_1 = \ldots = x_{n+m-k} = 0$ .

CLASSES CARACTÉRISTIQU

Proposition 2. — 1 prenant l'orientation de l'opérateur de dualité D vantes :

(27) 
$$\begin{cases} D(\dot{\mathbb{U}}_{\omega}) = (-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si)\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si)\frac{\mathbb{I}}{2}m(m-si) \end{cases}$$

où  $\lambda(\omega^*)$  est un entier que culier, on a (cf. (2), (3)

$$(28) \lambda(\omega_{2k,2k}^m) = \lambda(\omega_{2k}^m)$$

Démonstration. Les l < n + m) sont en pos et  $\mathbb{R}^{*l}$  ont une intersec sible:

 $\dim(\mathbb{R}^k \cap$ 

D'après un raisonner

(29) 
$$I_0(\mathring{U}_{\omega},\mathring{U}_{\omega'}^*) = I_0$$
  
si  $\omega' = I_0$ 

où I<sub>o</sub> est l'indice d'inter à partir du système (v).

Considérons mainter  $\overline{U}_{\omega}$  et  $\mathring{U}_{\omega^*}^*$  ou  $\overline{U}_{\omega^*}^*$  sont r

$$(3o) \quad x_{\tilde{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{\tilde{i}},$$

(31) 
$$x_{j*}^* = \sum_{i=1}^m \xi_{ji}^* x_i^*$$

où  $\tilde{i},\;\tilde{i}^*,\;\tilde{j},\;\tilde{j}^*$  parcourer

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

PROPOSITION 2. — Les subdivisions  $\hat{K}_{(x)}$  et  $\hat{K}_{(x')}$  sont duales. En prenant l'orientation de  $\hat{R}_{n,m}$  à partir du système de coordonnées (x), l'opérateur de dualité  $D: \hat{K}_{(x)} \rightarrow \hat{K}_{(x')}$  est donné par les équations suivantes :

(27) 
$$\begin{cases} D(\overline{\mathbf{U}}_{\omega}) = (-\mathbf{1})^{\lambda(\omega*)} \cdot \overline{\mathbf{U}}_{\omega*}^*, & D(\overline{\mathbf{U}}_{\omega}) = (-\mathbf{1})^{\lambda(\omega*)+m+n} \cdot \overline{\mathbf{U}}_{\omega*}^*, \\ si \frac{1}{2} m(m-1) \text{ est pair}; \\ D(\overline{\mathbf{U}}_{\omega}) = (-\mathbf{1})^{\lambda(\omega*)} \cdot \overline{\mathbf{U}}_{\omega*}^*, & D(\overline{\mathbf{U}}_{\omega}) = (-\mathbf{1})^{\lambda(\omega*)+m+n} \cdot \overline{\mathbf{U}}_{\omega*}^*, \\ si \frac{1}{2} m(m-1) \text{ est impair}; \end{cases}$$

où  $\lambda(\omega^*)$  est un entier qui ne dépend que de la fonction  $\omega^*$ . En particulier, on a (cf. (2), (3) et ( $\overline{3}$ ) de § 1):

(28) 
$$\lambda(\omega_{2k,2k}^m) = \lambda(\overline{\omega_{2k,2k}}) \equiv 0$$
,  $\lambda(\omega_m^m) \equiv 1/2 \ m(m+1) \ \text{mod } 2$ .

Démonstration. Les deux systèmes d'espaces  $R^k$  et  $R^{*l}$  (o < k, l < n + m) sont en position générale, c'est-à-dire deux espaces  $R^k$  et  $R^{*l}$  ont une intersection dont la dimension est la plus petite possible:

$$\dim(\mathbf{R}^k \cap \mathbf{R}^{*l}) = \sup(k + l - n - m, o),$$

D'après un raisonnement d'Ehresmann, on a alors :

$$\begin{split} (29) \ \ I_{\scriptscriptstyle 0}(\mathring{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega},\mathring{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega'}^*) \!=\! I_{\scriptscriptstyle 0}(\mathring{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega},\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega'}^*) \!=\! I_{\scriptscriptstyle 0}(\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega},\mathring{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega'}^*) \!=\! I_{\scriptscriptstyle 0}(\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega},\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{\scriptscriptstyle \omega'}^*) \!=\! 0, \\ \mathrm{si} \ \omega' \! \neq\! \omega^*, \quad \mathit{d}(\omega') \! +\! \mathit{d}(\omega) \! \leqslant\! \mathit{nm}, \end{split}$$

où  $I_0$  est l'indice d'intersection calculé dans la variété  $\hat{R}_{n,m}$  orientée à partir du système (x).

Considérons maintenant le cas  $\omega' = \omega^*$ . Les éléments de  $\bar{U}_{\omega}$  ou  $\bar{U}_{\omega}^*$  ou  $\bar{U}_{\omega^*}^*$  sont respectivement représentés par les équations :

(30) 
$$x_{j} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{i}^{-}, \quad j = 1, \dots m; \quad \xi_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i);$$

(31) 
$$x_{j*}^* = \sum_{i=1}^m \xi_{ji}^* x_{i*}^*, \quad j = 1, \dots m; \quad \xi_{ji}^* = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega^*(i),$$

où  $\tilde{i},\ \tilde{i}^*,\ \tilde{j},\ \tilde{j}^*$  parcourent respectivement les suites :

ves d'équations (5) et voit que l'orientation on avec celle de  $\tilde{N}_{\omega_{\bullet}}$  u impair. Puisque le on peut déformer  $\Lambda$  une famille de transfar conséquent  $A(\tilde{N}_{\omega})$  et les deux détenulte que l'orientation c celle de  $\tilde{N}_{\omega_{\bullet}}$  (resp. ir.

nsformation orthogo-

· m --- I,

 $\ddot{X}_{\omega_{o}}$ .

e N<sub>we</sub> est en cohérence pair ou impair. Il en ce ou non avec celle pair ou impair. La

on cellulaire *duale* à ns un aûtre système ace R<sup>n+m</sup> tel que :

+m.

ne subdivision cellucellules, les cycles, êmes symboles que que. En particulier, + m de dimension k

 $= x_{n+m-k} = 0.$ 

$$\begin{cases} \tilde{i}(\omega) \rbrace = \{ \omega(1) + 1, \dots, \omega(m) + m \}, \\ \{ \tilde{i}^*(\omega^*) \} = \{ \omega^*(1) + 1, \dots, \omega^*(m) + m \}, \\ = \{ n + m + 1 - (\omega(m) + m), \dots, n + m + 1 - (\omega(1) + 1) \}, \\ \{ \tilde{j}(\omega) \} = \{ 1, \dots, \omega(1); \quad \omega(1) + 2, \dots, \omega(2) + 1; \\ \dots \omega(m) + m + 1, \dots, n + m \}, \\ \{ \tilde{j}^*(\omega^*) \} = \{ 1, \dots, \omega^*(1); \quad \omega^*(1) + 2, \dots, \omega^*(2) + 1; \\ \dots, \omega^*(m) + m + 1, \dots, n + m \}, \\ = \{ n + m + 1 - (n + m), \dots, n + m + 1 - (\omega(m) + m + 1); \dots, n + m + 1 - \omega(1), \dots, n + m + 1 - 1 \}.$$

Les deux suites  $\{\tilde{i}^*(\omega^*)\}$  et  $\{n+m+1-\tilde{i}(\omega)\}$  sont donc en ordre inverse, c'est-à-dire  $\tilde{i}^*=n+m+1-\tilde{i}'$ , où i'=m+1-i. De même,  $\tilde{j}^*=n+m+1-\tilde{j}'$ , où j'=n+1-j. D'après (26), on a donc

 $x_i^* = \dot{x}^i$ ,  $x^* = x_j^i$ , i = 1, ..., m; j = 1, ..., n, et (31) devient

(32) 
$$\begin{cases} x_{j} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{n+1-j, m+1-i}^{*} x_{i}, & j = 1, ..., n; \\ \xi_{n+1-j, m+1-i}^{*} = 0 & \text{pour} & j \leq \omega(i). \end{cases}$$

En comparant les équations (30) et (32) on voit alors que le seul élément possible commun aux  $\dot{U}_{\omega}$  ou  $\overline{U}_{\omega}$  et  $\dot{U}_{\omega}^*$  ou  $\overline{U}_{\omega}^*$  est l'élément central  $\dot{X}_{\omega}$  ou  $\overline{X}_{\omega}$ . D'une façon plus précise, puisque les suites  $\{\bar{i}(\omega)\}$  et  $\{n+m+1-\bar{i}^*(\omega^*)\}$  diffèrent par une permutation paire ou impaire selon que  $\frac{1}{2}m(m-1)$  est pair ou impair, on aura:

(33) 
$$\begin{cases} I_{0}(\dot{\overline{U}}_{\omega}, \overline{\overline{U}}_{\omega^{*}}^{*}) = I_{0}(\overline{\overline{U}}_{\omega}, \dot{\overline{U}}_{\omega^{*}}^{*}) = 0, \\ \dot{\overline{U}}_{\omega} \cap \dot{\overline{U}}_{\omega^{*}}^{*} = \{\dot{\overline{X}}_{\omega}\}, \ \overline{\overline{U}}_{\omega} \cap \overline{\overline{U}}_{\omega} = \{\overline{X}_{\omega}\}, \\ pour & \frac{1}{2}m(m-1) \text{ pair}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{0}(\ddot{\overline{U}}_{\omega}^{*}, \dot{\overline{U}}_{\omega^{*}}^{*}) = I_{0}(\overline{\overline{U}}_{\omega}, \overline{\overline{U}}_{\omega^{*}}^{*}) = 0, \\ \dot{\overline{U}}_{\omega} \cap \overline{\overline{U}}_{\omega^{*}} = \{\dot{\overline{X}}_{\omega}\}, \ \overline{\overline{U}}_{\omega} \cap \dot{\overline{U}}_{\omega^{*}}^{*} = \{\overline{\overline{X}}_{\omega}\}, \\ pour & \frac{1}{2}m(m-1) \text{ impair.} \end{cases}$$

CLASSES CARACTÉRISTIQUE

Dans le cas où  $\frac{1}{2}m$   $\dot{U}_{\omega}$  et  $\dot{\overline{U}}_{\omega^*}^*$  (resp.  $\overline{\overline{U}}_{\omega^*}^*$ )  $\ddot{N}_{\omega}$ , qui se coupent a calcul on trouve que

 $\vec{I}_{\omega_0}(\vec{U}_{\omega}, \vec{U}_{\omega}^*) = (-1)$ où  $\vec{I}_{\omega_0}$  désigne l'indiorienté  $\vec{N}_{\omega}$  et où  $\lambda'(\omega^*)$ ;
nous intéressera pas

$$(28)' \begin{cases} \lambda'(\omega_m^m) = \frac{1}{2} \\ \lambda'(\omega_{2k, 2k}^m) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'après la propositio

$$I_o(\ddot{U}_\omega, \ddot{U}_\omega^*) = (-1)^2$$
  
où on a posé  $\lambda(\omega^*) = \lambda'($   
sorte que (28) est une  
application cellulaire D

tion précédente devier  $I_{\flat}(\overline{U}_{\omega}, D(\overline{U}_{\omega})) = +1$ . rateur de dualité de  $K_{(*)}$ . Il en résulte que la  $\varepsilon$ :

 $D(\hat{\mathbf{R}}_{\omega^*}) = (-1)^{p(\omega)} \cdot [\hat{\mathbf{U}}_{\omega}^*]$   $(34) \qquad \hat{\mathbf{R}}_{\omega}^* = (-1)^{q}$ 

où  $i_0^* = i_0(\omega^*), i_s = i_s(\omega),$ 

$$(34)'$$
  $\mu(\omega) = \lambda(\omega) = 0$ 

est toujours un cocycle sculement si  $\omega^* \in \Omega_0(n, n \{\omega\}_0^2)$  ou  $\{\omega\}_0^2$  et sa clas

$$(35) \quad \{\omega\}_{0}^{*} = \begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{\omega}^{*} + \\ (-1)^{*} \end{cases}$$

n+1; (ω(1)+1)}.

 $z \leftarrow 1 - \omega(1), \ldots, z \leftarrow 1 - 1$ 

 $-i(\omega)$  sont donc en , où i' = m + 1 - i. 1 - j. D'après (26),

 $j=1, \ldots, n,$ 

 $i, \ldots, n;$   $\leq \omega(i).$ 

voit alors que le seul ou  $\overline{U}_{\omega^*}^*$  est l'élément , puisque les suites r une permutation pair ou impair, on

 $-\frac{1}{2}m(m-1) \text{ pair};$ 

Dans le cas où  $\frac{1}{2}m(m-1)$  est pair (resp. impair), les ensembles  $\tilde{U}_{\omega}$  et  $\tilde{U}_{\omega}^*$  (resp.  $\tilde{U}_{\omega}^*$ ) sont des variétés linéaires dans le voisinage  $\tilde{N}_{\omega}$ , qui se coupent suivant le seul élément  $\tilde{X}_{\omega}$ . Par un simple calcul on trouve que

 $\vec{l}_{\omega,0}(\hat{U}_{\omega}, \hat{U}_{\omega}^*) = (-1)^{\lambda(\omega^*)}, \quad \text{(resp. $\hat{I}_{\omega,0}(\hat{U}_{\omega}, \overline{U}_{\omega}^*) = (-1)^{\lambda(\omega^*)}$),}$  où  $\hat{I}_{\omega,0}$  désigne l'indice d'intersection calculé dans le voisinage orienté  $\hat{N}_{\omega}$  et où  $\lambda'(\omega^*)$  est un entier ne dépendant que de  $\omega^*$  qui ne nous intéressera pas. En particulier, on a

$$(28)' \begin{cases} \lambda'(\omega_m^m) \equiv \frac{1}{2} m(m-1) \mod 2; \\ \lambda'(\omega_{2k,2k}^m) \equiv 0, \quad \lambda'(\omega_{2k,2k}^m) \equiv 0 \mod 2. \end{cases}$$

D'après la proposition 1,  $\mathring{\mathbf{I}}_{\omega, 0} = (-1)^{m(mn-d(\omega))} \cdot \mathbf{I}_{0}$ . On a donc

$$I_0(\dot{\mathbb{U}}_\omega,\ \dot{\mathbb{U}}_\omega^*\cdot)\!=\!(-1)^{\lambda(\omega^*)},\qquad \left(\text{resp. }I_0(\dot{\mathbb{U}}_\omega,\ \overline{\mathbb{U}}_\omega^*)\!=\!(-1)^{\lambda(\omega^*)}\right)$$

où on a posé  $\lambda(\omega^*) = \lambda'(\omega^*) + m(mn - d(\omega)) = \lambda'(\omega^*) + m \cdot d(\omega^*)$ , de sorte que (28) est une conséquence de (28). En définissant une application cellulaire  $D: \hat{K}_{(x)} \to \hat{K}_{(x')}$  par les équations (27), l'équation précédente devient  $I_{\mathfrak{o}}(\hat{U}_{\omega}, D(\hat{U}_{\omega})) = +1$ . De même, on a  $I_{\mathfrak{o}}(\hat{U}_{\omega}, D(\hat{U}_{\omega})) = +1$ . Il en résulte que D n'est autre que l'opérateur de dualité de  $\hat{K}_{(x)}$  dans  $\hat{K}_{(x')}$ . Le théorème est ainsi démontré.

Il en résulte que la chaîne dans  $\hat{K}_{(2^*)}$  de dimension  $d(\omega)$  (cf. (19)):  $D(\hat{R}_{\omega^*}) = (-1)^{\nu(\omega)} \cdot [\bar{U}_{\omega}^* + (-1)^{\omega^*(l_0^*+1)+l_0^*+n} \cdot \bar{U}_{\omega}^*]$ , où

$$(34) \qquad \hat{\mathbf{R}}_{\omega}^* = (-\mathbf{1})^{\varphi(\omega)}.$$

où  $i_0^* = i_0(\omega^*)$ ,  $i_s = i_s(\omega)$ ,  $s = s(\omega)$ , et  $\left[\dot{\mathbf{U}}_{\omega}^* + (-1)^{\omega(i_s) + i_s + m} \cdot \overline{\mathbf{U}}_{\omega}^*\right]$ ,

$$(3h)' \qquad \mu(\omega) = \lambda(\omega) + \frac{1}{2}m(m-1) \cdot [\omega(i_s) + i_s + m],$$

est toujours un cocycle mod 2 et est aussi un cocycle entier si et seulement si  $\omega^* \in \Omega_0(n, m)$  ou  $\omega \in \Omega_0^*(n, m)$ . Nous le désignerons par  $\{\omega\}_2^*$  ou  $\{\omega\}_0^*$  et sa classe par  $\{\omega\}_2^*$  ou  $\{\omega\}_0^*$ . En particulier, on a

$$(35) \quad \{\omega\}_{0}^{*} = \begin{cases} \overline{U}_{\omega}^{*} + \overline{U}_{\omega}^{*}, & \text{pour } \omega = \omega_{2k, 2k}^{m} \text{ ou } \overline{\omega}_{2k, 2k}^{m}, \\ (-1)^{m} \cdot [\overline{U}_{\omega}^{*} - \overline{U}_{\omega}^{*}], & \text{pour } \omega = \omega_{m}^{m}, n > 1. \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, les classes  $[\hat{\omega}]_i$  et  $\{\omega\}_i$ , i=0,2, sont définies dans les complexes  $\hat{K}_{(x)}$  et  $\hat{K}_{(x')}$  respectivement et dépendent donc du système de coordonnées

$$(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$$

choisi dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Pourtant on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 3. — Dans le cas  $\omega(m) < n$ ,  $\omega \in \Omega_0(n, m)$ , la classe  $\{\omega\}_0^*$  est indépendante du système de coordonnées choisi dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Démonstration. Soit  $(x') = (x'_1, \ldots, x'_{n+m})$  un autre système de coordonnées de l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ , par rapport auquel les cocycles et autres éléments définis seront distingués par un prime. Si (x) et (x') définissent la même orientation de  $\mathbb{R}^{n+m}$ , la transformation orthogonale  $\Lambda$  telle que  $\Lambda(x'_i) = x_i$ ,  $i = 1, \ldots, n+m$  est déformable dans la transformation identique en parcourant une famille de transformations orthogonales. On a ainsi

$$A^*\{\omega\}_0^{'} = \{\omega\}_0^{'}, \quad \text{ou} \quad \{\omega\}_0^{'} = \{\omega\}_0^{'}$$

et le théorème est démontré.

Supposons au contraire que (x) et (x') définissent dissérentes orientations de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Considérons un autre système de coordonnées  $(x'') = (x''_1, \ldots, x''_{n+m})$  tel que

$$x_i'' = x_i, \quad i \neq 1; \quad x_i'' = -x_i,$$

et désignons les cocycles définis à partir de ce système par  $\{\omega\}_0^{n'}$ , etc. Les systèmes (x') et (x'') définissent alors la même orientation de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et par conséquent d'après le cas précédent on a

(36) 
$$\{\omega\}_0^{\prime \hat{}} \sim \{\omega\}_0^{\prime \hat{}}$$
.

Les systèmes  $(x'^*)$  et  $(x''^*)$  étant définis comme  $(x^*)$  (cf. 26)), et  $\omega(m)$  étant  $\leq n$ , on voit facilement que  $\overset{+}{X}_{\omega}^* = \overset{+}{X}_{\omega}^{"*}$ ,  $\overset{-}{X}_{\omega}^* = \overset{-}{X}_{\omega}^{"*}$  et aussi, en tenant compte de l'orientation,

$$\vec{\mathbf{U}}_{\omega}^* = \vec{\mathbf{U}}_{\omega}^{"*}, \qquad \overline{\mathbf{U}}_{\omega}^* = \overline{\mathbf{U}}_{\omega}^{"*}, \qquad (\omega(m) < n),$$

ďoù

$$\{\omega\}_0^{\hat{\ }}=\{\omega\}_0^{\#^{\nu}}.$$

En combinant avec (36), on obtient la proposition dans le présent cas.

CLASSES CARACTÉRISTIQ

REMARQUE 1. — La classes  $\{\omega\}_0^2$  pour  $\omega$ : cas  $n = \omega(m)$ , sont ind dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ . I dente.

Remarque 2. — Os additive pour l'annes entiers. Nous renvoy Pontrjagin concernar structures fibrées sphétravail.

#### § 4. Les v:

Soit  $R_{n,m}$  la variété rique  $R^{n+m}$  de dimer données  $(x) = (x_1, \dots$  $X_{\omega}$ ,  $i(\omega)$ ,  $\tilde{j}(\omega)$  ont le m de § 3). L'ensemble ! tion orthogonale non- $\mathbf{R}_{n,m}$  dont les élément système des nombres? normales de N<sub>w</sub> qui, orientation normale. L satisfont aux équation dimension d(ω) représs données normales de : ζ<sub>ji</sub> non-nulles rangées ment  $X_{\omega}$ , correspond appelé élément centre ouvertes  $U_{\omega}$ ,  $\omega \in \Omega$  (n,  $\mathbf{R}_{n,m}$  appelée la subdiv coordonnées (x).

La variété  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  défis à deux feuillets de la forme la subdivision s système de coordonné classes  $[\hat{\omega}]_i$  et  $\{\omega\}_i^*$ , et  $\hat{K}_{(x^*)}$  respectivennées

démontrer la proposi-

 $s \in \Omega_o(n, m)$ , la classe nées choisi dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

un autre système de uquel les cocycles et un prime. Si (x) et m, la transformation ..., n+m est déforarcourant une famille

$$=\{\omega\}_0^{\prime}$$

léfinissent différentes e système de coor-

 $-x_i$ ,

e système par {w}<sub>o</sub>^^, la même orientation édent on a

nme  $(x^*)$  (cf. 26)), et  $w_*$ ,  $\overline{X}_{\omega}^* = \overline{X}_{\omega}^{r_*}$  et aussi,

n) < n,

position dans le pré-

Remarque 1. — La même méthode permet de démontrer que les classes  $\{\omega\}_0^{\hat{n}}$  pour  $\omega = \omega_{2k,2k}^m$ ,  $\overline{\omega}_{2k,2k}^m$ ,  $(\omega \in \Omega_0(n,m))$ , même dans le cas  $n = \omega(m)$ , sont indépendantes du système de coordonnées choisi dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Pour les classes  $\{\omega\}_2^{\hat{n}}$  l'indépendance est évidente.

Remarque 2. — On n'a pas encore déterminé une base même additive pour l'anneau de cohomologie de  $\hat{R}_{n,m}$  aux coefficients entiers. Nous renvoyons le lecteur aux mémoires originaux de Pontrjagin concernant les résultats importants pour l'étude des structures fibrées sphériques que nous n'utiliserons pas dans notre travail.

#### § 4. Les variétés grassmanniennes $R_{n,m}$ .

Soit  $R_{n,m}$  la variété grassmannienne définie dans l'espace numérique  $\mathbb{R}^{n+m}$  de dimension n+m. Prenons un système de coordonnées  $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$  et supposons que les notations  $\mathbb{R}^k$ ,  $X_{\omega}$ ,  $i(\omega)$ ,  $j(\omega)$  ont le même sens que dans § 3 (cf. (1), (3), (3)' et (4) de § 3). L'ensemble  $N_{\omega}$  des éléments X de  $R_{n,m}$  ayant une projection orthogonale non-dégénérée sur  $X_{\omega}$  est un voisinage de  $X_{\omega}$  dans  $\mathbf{R}_{n,m}$  dont les éléments sont définis par les équations (5) de § 3. Le système des nombres  $\xi_{ji},\;((6)\;\S\;3)$  forme un système de *coordonnées* normales de N<sub>w</sub> qui, dans l'ordre considéré, détermine aussi son orientation normale. Le sous-ensemble  $U_{\omega}$  de  $N_{\omega}$  dont les éléments satisfont aux équations (2) § 3, est aussi une cellule ouverte de dimension  $d(\omega)$  représentée par les équations (7) § 3, avec les coordonnées normales de N<sub>o</sub>. Nous orientons U<sub>o</sub> par ses coordonnées  $\xi_{\mu}$  non-nulles rangées dans le même ordre que dans (6)  $\S$  3. L'élément  $X_{\omega}$ , correspondant aux coordonnées  $\xi_{\mu} = 0$  dans  $U_{\omega}$ , est appelé élément central de  $U_{\omega}$  ou  $N_{\omega}$ . L'ensemble des cellules ouvertes  $U_{\omega}$ ,  $\omega \in \Omega$  (n, m), forme une subdivision cellulaire,  $K_{(x)}$ , de  $\mathbf{R}_{n,m}$  appelée la subdivision canonique par rapport au système de coordonnées (x).

La variété  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  définie dans  $\mathbf{R}^{n+m}$  est évidemment un revêtement à deux feuillets de la variété  $\mathbf{R}_{n,m}$ . De plus, le complexe  $\hat{\mathbf{K}}_{(x)}$  qui forme la subdivision cellulaire de  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ , canonique par rapport au système de coordonnées (x), est aussi un complexe de revêtement

du complexe  $K_{(x)}$ ; la projection de  $K_{(x)}$  sur  $K_{(x)}$  sera désignée par  $\varphi$ . Grâce aux orientations que nous avons adoptées pour les cellules  $U_{\omega}$ ,  $\bar{U}_{\omega}$  et  $\overline{U}_{\omega}$  on a algébriquement:

$$\varphi \dot{\mathbf{U}}_{\omega} = \varphi \overline{\mathbf{U}}_{\omega} = \mathbf{U}_{\omega}.$$

Puisque  $\varphi \delta = \delta \varphi$ , on déduit des formules (8) § 3 les formules correspondantes de  $K_{(x)}$ :

(2) 
$$\delta \mathbf{U}_{\omega} = \sum \varepsilon_{\omega,i} (\mathbf{I} + (-\mathbf{I})^{\omega(i) + l + m}) \mathbf{U}_{\omega(i)},$$
$$(\varepsilon_{\omega,i} = +\mathbf{I} \text{ ou } -\mathbf{I})$$

où la sommation s'étend aux indices i pour lesquels  $\omega_0 \in \Omega(n, m)$ . On en déduit de plus :

(2)' 
$$\delta \mathbf{U}_{\omega} = \sum \gamma_{\omega,i} (\mathbf{I} + (-\mathbf{I})^{\omega(i)+i+m+i}) \mathbf{U}_{\omega^{(i)}},$$

où  $\omega^{(i)} \in \Omega(n, m)$ ,  $\eta_{\omega, i} = +1$  ou -1.

Il résulte de ces formules que la chaîne  $U_{\omega}$  est un cycle ainsi qu'un cocycle mod 2 pour chaque  $\omega \in \Omega(n, m)$ . C'est un cycle (resp. cocycle) entier si et seulement si  $\omega \in \Omega_1(n, m)$  (resp.  $\omega \in \Omega_1^*(n, m)$ ). Nous désignerons par  $[\omega]_2$  (resp.  $\{\omega\}_2$ ) le cycle (resp. cocycle) mod 2 représenté par la chaîne  $U_{\omega}$ ,  $\omega \in \Omega(n, m)$ , et sa classe par  $[\omega]_2$  (resp.  $\{\omega\}_2$ ). Pour  $\omega \in \Omega_1(n, m)$  ou  $\omega \in \Omega_1^*(n, m)$  nous poserons respectivement (cf. (1), § 3 et Proposition 2):

(3) 
$$\begin{cases} [\omega]_0 = U_{\omega}, & \omega \in \Omega_1(n, m); \\ \{\omega\}_0 = (-1)^{\lambda(\omega)} \cdot U_{\omega}, & \omega \in \Omega_1^*(n, m). \end{cases}$$

Nous désignerons leurs classes entières correspondantes par  $[\omega]_{\alpha}$  et  $\{\omega\}_{\alpha}$  respectivement.

Comme dans la proposition 2, § 3, on peut démontrer que les classes  $\{\omega\}_2$ ,  $\omega \in \Omega(n, m)$ , et  $\{\omega\}_0$ ,  $\omega \in \Omega(n, m)$ ,  $\omega(m) < n$ , sont indépendantes du choix du système de coordonnées dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ . On peut remarquer, comme à la fin du § 3, qu'il en est ainsi pour les classes  $\{\omega\}_0$ , où  $\omega_{2k,2k}^m$  ou  $\overline{\omega}_{2k,2k}^m$ , même dans le cas  $n = \omega(m)$ .

Dans le cas  $m + n \equiv 0 \mod 2$  la variété  $R_{n,m}$  est orientable et par dualité on peut faire correspondre la classe  $\{\omega^*\}_0$  à la classe  $[\![\omega]\!]_0$ . D'une façon plus précise, on définit d'abord les subdivisions cellulaires duales  $K_{(x)}$  et  $K_{(x^*)}$  de  $R_{n,m}$  canoniques par rapport aux systèmes de coordonnées (x) et  $(x^*)$  dans  $\mathbb{R}^{n+m}$  liées par les rela-

CLASSES CARACTÉRIS

tions (26) § 3. L'o une cellule de  $K_{(x)}$  par

 $\mathrm{D}(\mathrm{U}_{\alpha}$ 

en considérant R<sub>a, a</sub>
Les classes [ω], et
sont donc duales l
[ω], et {ω\*}<sub>2</sub> sont
L'anneau de col:
été déterminé par

suivante:

Proposition 4. l'anneau  $H^*(\mathbf{R}_{n,m})$ . 1

(5)

où la sommation s'è

(6) 
$$\begin{cases} \omega(i) \leqslant \omega'(i) \\ d(\omega') = d(i) \end{cases}$$

## § 5. Les va

Considérons mair dans  $C^{n+m}$  de dimercoordonnées canon in n'+m') l'espace  $z_{k+1}-\cdots-z_{n'+m'}=$  semble  $W_{\omega}$  des sou. m' tels que

(1)  $\dim(Z)$  est une pseudo-varié cellule ouverte  $W_{\omega}$  (

$$\zeta_{ji} = 0$$

zo sera désignée par 🦡 ntées pour les cellules

(8) § 3 les formules

$$^{m})\mathrm{U}_{\omega_{(i)}},$$

lesquels  $\omega_{(l)} \in \Omega(n, m)$ .

$$^{+1})U_{\omega}^{\omega},$$

 $\omega$  est un cycle ainsi. C'est un cycle (resp.) (resp.  $\omega \in \Omega_4^*(n, m)$ ). cycle (resp. cocycle)  $\omega$ , et sa classe par  $\omega$ ,  $\omega$ , nous poserons

$$2^*_{\mathfrak{l}}(n, m)$$
.

correspondantes par

at démontrer que les ,  $\omega(m) < n$ , sont indéses dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ . On peut n est ainsi pour les cas  $n = \omega(m)$ .

 $S_{n,m}$  est orientable et sse  $\{\omega^*\}_0$  à la classe bord les subdivisions par rapport aux "" liées par les rela-

tions (26) § 3. L'opérateur de dualité D :  $K_{(x)} \rightarrow K_{(x^*)}$  qui applique une cellule de  $K_{(x)}$  sur la cellule duale de  $K_{(x^*)}$  est alors donné par

(4) 
$$D(U_{\omega}) = (-1)^{\lambda(\omega^{*})} \cdot U_{\omega^{*}}^{*}$$
 (cf. Proposition 2, § 3),

en considérant  $R_{n,m}$  orientée comme le voisinage  $N_{\omega_0}$ , où  $\omega_0 = \omega_0^{m^*}$ . Les classes  $[\omega]_0$  et  $\{\omega^*\}_0$ , définies respectivement dans  $K_{(\omega)}$  et  $K_{(\omega^*)}$ , sont donc duales l'une de l'autre. Dans le cas mod 2, les classes  $[\omega]_0$ , et  $\{\omega^*\}_2$  sont toujours duales, que n + m soit pair ou impair.

L'anneau de cohomologie mod 2,  $H^*(\mathbf{R}_{n,m})$ , de la variété  $\mathbf{R}_{n,m}$  a été déterminé par S. Chern. En particulier on a la proposition suivante :

Proposition 4. — Les classes  $\{\overline{\omega}_k^m\}_2$ , où  $k=1,\ldots,n$ , engendrent l'anneau  $H^*(\mathbb{R}_{n,m})$ . Pour la multiplication on a en particulier:

(5) 
$$\left\{\omega\right\}_{2} \cup \left\{\overline{\omega}_{h}^{m}\right\}_{2} = \sum_{\omega'} \left\{\omega'\right\}_{2},$$

où la sommation s'étend à toutes les fonctions  $\omega' \in \Omega(n, m)$  telles que

(6) 
$$\begin{cases} \omega(i) \leqslant \omega'(i) \leqslant \omega(i+1), & i = 1, ..., m; \quad (\omega(m+1) = n)), \\ d(\omega') = d(\omega) + h. \end{cases}$$

# § 5. Les variétés grassmanniennes $C_{n,m}$ et $Q_{n,m}$ .

Considérons maintenant la variété  $C_{n,m}$  (n = 2n', m = 2m') définie dans  $C^{n'+m'}$  de dimension complexe n' + m'. Prenons le système de coordonnées canoniques  $(z) = (z_1, \ldots, z_{n'+m'})$ . Soit  $C^k$   $(k = 1, \ldots, n' + m')$  l'espace complexe de dimension complexe k défini par  $z_{k+1} = \cdots = z_{n'+m'} = 0$ . Pour chaque fonction  $\omega \in \Omega(n', m')$ , l'ensemble  $W_{\omega}$  des sous-espaces complexes Z de dimension complexe m' tels que

(1) 
$$\dim (\mathbf{Z} \cap \mathbf{C}^{\omega(i)+i}) \geqslant 2i, \qquad i == 1, \ldots, m',$$

est une pseudo-variété de dimension  $2d(\omega)$  qui est l'adhérence d'une cellule ouverte  $W_\omega$  dont les éléments sont définis par les équations

$$z_f = \sum_{i=0}^{m'} \zeta_{ji} z_i, \quad j = 1, ..., n';$$
  
$$\zeta_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i), i = 1, ..., m',$$

où  $\zeta_{ji}$  sont des nombres complexes et  $\tilde{i},\ \tilde{j}$  parcourent respectivement les suites

$$\{\tilde{i}(\omega)\} = \{\omega(1) + 1, \dots, \omega(m') + m'\},$$

$$\{\tilde{j}(\omega)\} = \{1, \dots, \omega(1); \omega(1) + 2, \dots, \omega(2) + 1; \dots, \omega(m') + m' + 1, \dots, n' + m'\}.$$

Puisque les nombres  $\zeta_{ji}$ ,  $j \leqslant \omega(i)$ , i = 1, ..., m', qu'on considère comme formant un système de coordonnées dans la cellule  $W_{\omega}$ , sont complexes, on peut attacher une orientation naturelle à chaque cellule  $W_{\omega}$ . L'élément central est défini comme dans le cas des variétés  $R_{n,m}$  ou  $\hat{R}_{n,m}$ .

L'ensemble des cellules  $W_{\omega}$ , où  $\omega \in \Omega(n', m')$ , forme une subdivision cellulaire canonique de  $\mathbb{C}_{n,m}$ . La chaîne  $W_{\omega}$  représente un cycle entier ainsi qu'un cocycle entier que nous désignerons par  $[\omega]_0^c$  et  $\{\omega\}_0^c$  respectivement. Leurs classes seront désignées respectivement par  $[\omega]_0^c$  et  $\{\omega\}_0^c$ ; elles sont indépendantes du système de coordonnées choisi dans l'espace  $\mathbb{C}^{n'+m'}$ . Ces classes sont linéairement indépendantes et forment une base du groupe d'homologie et de cohomologie respectivement. Pour déterminer une classe de cohomologie de dimension s, il suffit de connaître sa valeur sur chaque classe d'homologie  $[\omega]_0^c$ ,  $d(\omega) = 2s$ , qui est représentée géométriquement par la pseudo-variété  $W_{\omega}$  et qui est duale à la classe  $\{\omega\}_0^c$ . L'anneau de cohomologie entier  $H^*(\mathbb{C}_{n,m})$  de  $\mathbb{C}_{n,m}$  est engendré par les classes  $\{\omega_k^m\}_0^c$ , où  $k=0,1,\ldots,n'$ , et satisfait aux formules analogues à (5) et (6) de § 4, en remplaçant partout m par m' et n

La généralisation à la variété  $Q_{n,m}$  (n=4n'', m=4m'') est immédiate. A chaque fonction  $\omega \in \Omega(n'', m'')$  correspond une classe entière d'homologie  $[\omega]_0^q$  et une classe entière de cohomologie  $\{\omega\}_0^q$  de dimension  $4d(\omega)$ , qui sont duales. Les classes  $\{\omega\}_0^q$ ,  $\omega \in \Omega(n'', m'')$ , forment une base du groupe de cohomologie et les classes  $\{\overline{\omega}_k^{m'}\}_0^q$ ,  $k=0,1,\ldots,n''$ , engendrent l'anneau de cohomologie de  $Q_{n,m}$ .

# § 6. Relations entre deux variétés grassmanniennes duales.

Considérons les deux variétés grassmanniennes, dites duales,  $\hat{\mathbf{R}}_{n,\,m}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{m,\,n}$  définies dans le même espace numérique  $\mathbf{R}^{n+m}$  de

classes caractér dimension n + m sons une applica

telle que, pour  $\hat{\mathbf{R}}_{m,n}$  complèteme  $\mathbf{R}^{n+m}$ , calculé dan le type d'homolog coordonnées (x)z

Soient (e<sub>i</sub>) et (.)
Définissons les surapport à (x) pour cycles, etc., défin de celles de R<sub>n,m</sub>.
A chaque foncti

de la manière  $s = s(\omega)$ , l'ensemble  $\omega(1), \omega(2), \ldots, \omega(n)$   $\underbrace{0, \ldots, 0, \qquad \beta_1, \ldots}_{i_0}$   $\underbrace{0, \ldots, 0, \qquad \beta_1, \ldots}_{i_1}$   $\underbrace{0, \ldots, 0, \qquad \beta_1, \ldots}_{i_1}$   $\underbrace{i_1}$   $\underbrace{0 \otimes c \otimes \beta_1 < \ldots < \cdots}_{i_0}$ les deux). Par défiassociée b $\omega$  est de  $\underbrace{i_1, \ldots, m-i_s}_{i_1}$ 

On pout vérifier
(a)  $\omega \in \Omega_0^*(n, m)$  r  $\Omega_1^*(m, n)$ ;

(b) En désignan  $i_0' = i_0(\mathfrak{d}\omega)$ .

courent respectivement

$$+m'$$
,  
 $-x$ ; ...,  
 $m'-x$ , ...,  $n'+m'$ }.

, m', qu'on considère s dans la cellule W<sub>o</sub>, ion naturelle à chaque nine dans le cas des

'), forme une subdivi
νω représente un cycle
lésignerons par [ω]δ et
signées respectivement
du système de coorsses sont linéairement
oupe d'homologie et
eminer une classe de
maître sa valeur sur
ni est représentée géoni est duale à la classe
n) de C<sub>n, m</sub> est engendré
satisfait aux formules
partout m par m' et n

, m = 4m'') est imméond une classe entière cohomologie  $\{\omega\}_q^q$  de es  $\{\omega\}_q^q$ ,  $\omega \in \Omega(n'', m'')$ , et les classes  $\{\overline{\omega}_k^m\}_q^q$ , mologie de  $\mathbb{Q}_{n,m}$ .

nanniennes duales.

iennes, dites *duales,* numérique R<sup>n+m</sup> de CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

dimension n + m. Prenons une orientation fixe de  $\mathbb{R}^{n+m}$  et définissons une application

$$\delta: \hat{\mathbf{R}}_{n, m} \rightarrow \hat{\mathbf{R}}_{m, n}$$

telle que, pour chaque élément  $X \in \hat{R}_{n,m}$ , b(X) soit l'élément de  $\hat{R}_{m,n}$  complètement orthogonal à X et que  $I_0(bX, X)$  à l'origine de  $R^{n+m}$ , calculé dans cet espace orienté, soit égal à + 1. Pour étudier le type d'homologie de cette application, prenons deux systèmes de coordonnées  $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$  et  $(x') = (x'_1, \ldots, x'_{n+m})$  tels que

(1) 
$$x'_i = x_{n+m+1-i}, i = 1, ..., n+m.$$

Soient  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  les bases correspondantes de l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Définissons les subdivisions cellulaires canoniques  $\hat{K}_{(x)}$  et  $\hat{K}_{(x')}$  par rapport à (x) pour  $\hat{R}_{n,n}$  et par rapport à (x') pour  $\hat{R}_{m,n}$ . Les classes, cycles, etc., définis dans  $\hat{R}_{m,n}$  par rapport à (x') seront distingués de celles de  $\hat{R}_{n,m}$  par rapport à (x) en ajoutant un prime.

A chaque function  $\omega \in \Omega(n, m)$  nous associons une fonction

$$\mathfrak{d}\omega\in\Omega(m,\,n)$$

de la manière suivante : Soient  $i_0 = i_0(\omega), \ldots, i_s = i_s(\omega)$ , où  $s = s(\omega)$ , l'ensemble des points sautants de  $\omega$  (cf. § 1). La suite  $\omega(1), \omega(2), \ldots, \omega(m)$  est alors de la forme :

$$\underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_1}_{i_0}, \underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_1}_{i_1 - i_0}, \ldots, \underbrace{\beta_s, \ldots, \beta_s}_{i_s - i_{s-1}}, \underbrace{n, \ldots n,}_{m - i_s}$$

où  $0 < \beta_i < ... < \beta_s < n$  (on peut avoir  $i_0 = 0$  ou  $i_s = m$  ou tous les deux). Par définition la suite  $\delta\omega(\tau), ..., \delta\omega(n)$  pour la fonction associée  $\delta\omega$  est de la forme :

$$\underbrace{\frac{m-i_s,\ldots,m-i_s}{n-\beta_s}}_{n-\beta_s} \underbrace{\frac{m-i_{s-i},\ldots,m-i_{s-i},\ldots}{\beta_s-\beta_{s-1}}}_{m-i_i,\ldots,m-i_i,} \underbrace{\frac{m-i_{o-i},\ldots,m-i_{o-i},\ldots}{\beta_s-\beta_{s-1}}}_{\beta_s}$$

On peut vérifier que (cf.  $(4)^*$ ,  $(5)^*$  de  $\S 1$ ):

(a)  $\omega \in \Omega_0^*(n, m)$  resp.  $\Omega_1^*(n, m)$  est équivalent à  $\delta \omega \in \Omega_0^*(m, n)$  resp.  $\Omega_1^*(m, n)$ ;

(b) En désignant les points sautants de δω par

$$i'_0 = i_0(b\omega), \quad i'_{s'} = i_{s'}(b\omega), \quad \text{où} \quad s' = s(b\omega),$$

on a  $b\omega(i'_{s'}) + i'_{s'} + m \equiv \omega(i_s) + i_s + n \mod 2$  pour  $\omega \in \Omega^*_{\theta}(n, m)$ ;

(c)  $bb\omega = \omega$ ;

(a) Pour  $\omega = \omega_k^m$ , on a  $\delta \omega = \overline{\omega}_k^m$ , Pour  $\omega = \overline{\omega}_k^m$ , on a  $\delta \omega = \omega_k^m$ , Pour  $\omega = \omega_{2k,2k}^m$ , on a  $\delta \omega = \overline{\omega}_{2k,2k}^m$ , Pour  $\omega = \overline{\omega}_{2k,2k}^m$ , on a  $\delta \omega = \omega_{2k,2k}^m$ .

Un élément X dans une cellule  $\ddot{\mathbf{U}}_{\omega}$  ou  $\ddot{\mathbf{U}}_{\omega}$ ,  $\omega \in \Omega(n, m)$ , du complexe  $\hat{K}_{(lpha)}$  est défini par les équations :

(2) 
$$x_{\overline{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} \varepsilon_{i}, \quad j = 1, \dots n,$$
(3) 
$$\xi_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i),$$

(3) 
$$\xi_{ji} = 0$$
 pour  $j > \omega(i)$ 

où  $\tilde{i}$  et  $\tilde{j}$  parcourent respectivement les systèmes d'indices suivants;

 $\begin{aligned} & \{\bar{i}(\omega)\} = \{\omega(1) + 1, \ \omega(2) + 2, \dots, \omega(m) + m\}, \\ & \{\tilde{j}(\omega)\} = \{1, \dots, \omega(1); \ \omega(1) + 2, \dots, \omega(2) + 1; \end{aligned}$ (5)

 $\ldots$ ,  $\omega(m) + m + 1, \ldots, n + m$ .

L'élément  $\mathfrak{d}(X)$  de  $\dot{\mathbf{R}}_{n,m}$  est évidemment défini par les équations :

(6) 
$$x_i = -\sum_{j=1}^n \xi_{ji} x_j, \quad i = 1, ..., m,$$

où les  $\xi_{\mu}$  satisfont à (3).

Dans le système de coordonnées (x'), les équations (6) deviennent (cf. (1)):

(7) 
$$x'\tilde{f} = -\sum_{i'=1}^{n} \xi'_{i'i'}x'_{i'}, \qquad j' = 1, \ldots, m,$$

οù

(8) 
$$\begin{cases} j' = m + 1 - i, & i' = n + 1 - j, \\ \xi' / i' = \xi_{n+1-i', m+1-j'}, \\ \xi' / i' = 0 & \text{pour } j' > \delta \omega(i'), \end{cases}$$

 $\tilde{i}'$ ,  $\tilde{j}'$  parcourant respectivement les systèmes d'indices :

$$\begin{cases}
\bar{i}' \\ = \{b\omega(1) + 1, \dots, b\omega(n) + n\}, \\
\bar{j}' \\ = \{1, \dots, b\omega(1); b\omega(1) + 2, \dots, b\omega(2) + 1, \dots, b\omega(n) + n + 1, \dots, b\omega(n) + 1,$$

 $\ldots$ ,  $b\omega(n) + n + 1, \ldots, m + n$ ,

c'est-à-dire  $\bar{i'}$  et  $\tilde{j'}$  par courent respectivement les systèmes  $\{\bar{i}(\mathfrak{d}\omega)\}$  et  $\{\tilde{j}(\delta\omega)\}$  correspondant à la fonction  $\delta\omega\in\Omega(m,n)$ . Il en résulte que  $\delta$ 

CLASSES CARACTÉRIST est une application  $K_{(x)}$  qui applique  $U_i$ nous observons que suite de vecteurs :

est transformé par d de vecteurs

(9)  $\{e_1,\ldots,e_{\omega(1)},$ on dans l'élément Y est pair ou impair. L

Par conséquent U. Ü'<sub>νω</sub> ou Ü'<sub>νω</sub>) selon qu impair. On a ainsi al

$$(10) \quad \begin{cases} \delta \ddot{U}_{\omega} = (-1) \\ \delta \dot{U}_{\omega} = (-1) \end{cases}$$

οù ν(ω) est un entier q

$$(11) \quad \nu(\omega_{2k,2k}^m) \equiv (-1)$$

Par définition, on

$$\{\mathfrak{d}_{\omega}\}_{\mathfrak{o}}^{*} = (-$$
pour  $\mathfrak{d}_{\omega} \in \Omega_{\mathfrak{o}}(m, n)$ . Do:

$$p_* \{ p_m \}_v^0 = \begin{cases} (-1)_{b \in \omega} \\ (-1)_{b \in \omega} \end{cases}$$

D'après (b) et (34).

ού τ(ω) est un entier q

(i),

ics d'indices suivants :

$$(m)+m\},$$

.,ω(2)⊹⊢ι;  $\vdash m + 1, \ldots, n + m \}.$ 

fini par les équations :

uations (6) deviennent

'indices:

$$+n+1,\ldots,m+n,$$

es systèmes $\{ ilde{i}(\mathfrak{d}\omega)\}$  et

). Il en résulte que d

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

est une application cellulaire du complexe K(a) sur le complexe  $\vec{K}_{(x)}$  qui applique  $\vec{U}_{\omega}$  (resp.  $\vec{U}_{\omega}$ ) sur  $\vec{U}'_{\varepsilon\omega}$  ou  $\vec{U}'_{\varepsilon\omega}$ . Pour l'expliciter, nous observons que l'élément central  $X_{\omega}$  de  $U_{\omega}$  déterminé par la suite de vecteurs :

$$\{e_{\omega(1)+1},\ldots,e_{\omega(m)+m}\},\$$

est transformé par  $\mathfrak d$  dans l'élément  $\mathring{\mathrm{Y}}$  de  $\mathring{\mathrm{R}}_{m,n}$  déterminé par la suite de vecteurs

(9)  $\{e_1, \ldots, e_{\omega(1)}, e_{\omega(1)+2}, \ldots, e_{\omega(2)+1}, \ldots, e_{\omega(m)+m+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ ou dans l'élément  $\overline{Y}$  d'orientation opposée à  $\widetilde{Y}$  selon que  $mn-d(\omega)$ est pair ou impair. La suite (9) est en effet la même que la suite

$$\{e'_{\flat\omega(n)+n},\ldots,e'_{\flat\omega(1)+1}\}.$$

Par conséquent  $\dot{U}_{\omega}$  (resp.  $\ddot{U}_{\omega}$ ) est appliqué sur  $\dot{U}'_{t\omega}$  ou  $\ddot{U}'_{t\omega}$  (resp.  $\overline{\mathrm{U}}'_{\mathrm{t}\omega}$  ou  $\overline{\mathrm{U}}'_{\mathrm{t}\omega}$ ) sclon que  $mn-d(\omega)+\frac{1}{2}n(n-1)=\alpha(\omega)$  est pair ou impair. On a ainsi algébriquement :

(10) 
$$\begin{cases} \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}'_{t\omega}, & \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}'_{t\omega}, \\ \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}'_{t\omega}, & \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}_{t\omega}, \\ \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}'_{t\omega}, & \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}_{t\omega}, \\ \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}'_{t\omega}, & \delta \bar{U}_{\omega} = (-1)^{y(\omega)} \cdot \bar{U}'_{t\omega}, \end{cases}$$

où  $\nu(\omega)$  est un entier qui ne nous intéresse pas. En particulier, on a :

$$-(11) \quad \nu(\omega_{2k,2k}^m) \equiv (-1)^k, \qquad \nu(\bar{\omega}_{2k,2k}^m) \equiv (-1)^k \mod 2.$$

Par définition, on a (cf. (34) de § 3),

$$\{ \delta_\omega \}_0^{'} \! = \! (-1)^{\mu(k\omega)} . \big[ \tilde{U}_{k\dot{\omega}}' \! + \! (-1)^{k\omega(i_g') + i_{g'}' + m} . \tilde{U}_{k\omega}' \big]_{,}$$

pour  $b\omega \in \Omega_o(m, n)$ . Done

$$b^* \{b\omega\}_0^{\hat{\alpha}} = \begin{cases} (-1)^{\mu(b\omega) + \nu(\omega)} \cdot [\bar{U}_{\omega} + (-1)^{k\omega(ij) + ij_s + m} \cdot \bar{U}_{\omega}], & \text{pour } \alpha(\omega) \text{ pair}; \\ (-1)^{\mu(b\omega) + \nu(\omega)} \cdot [\bar{U}_{\omega} + (-1)^{k\omega(ij) + ij_s + m} \cdot \bar{U}_{\omega}], & \text{pour } \alpha(\omega) \text{ impair}. \end{cases}$$

D'après (b) et (34) de § 3 cette formule devient

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{d}^* \{ \mathfrak{d}\omega \}_{\hat{0}}^{\hat{\bullet}} &= (-1)^{\tau_{\zeta}^{(0)}}, \{\omega \}_{\hat{0}}^{\hat{\bullet}}, & \text{or} \\
\mathfrak{d}^* \{ \mathfrak{d}\omega \}_{\hat{0}}^{\hat{\bullet}} &= (-1)^{\tau_{\zeta}^{(0)}}, \{\omega \}_{\hat{0}}^{\hat{\bullet}}, & \\
\end{array}$$

οù  $\tau(\omega)$  est un entier qui ne nous intéresse pas.

En particulier, on a

(13) 
$$\begin{cases} \mathfrak{d}^* \{ \omega_{2k,2k}^n \}_0^* = (-1)^k \{ \overline{\omega_{2k,2k}^n} \}_0^*, \\ \mathfrak{d}^* \{ \overline{\omega_{2k,2k}^n} \}_0^* = (-1)^k \{ \omega_{2k,2k}^n \}_0^*. \end{cases}$$

Nous remarquons que les classes intervenant dans ces dernières formules sont définies d'une façon invariante dans les variétés  $\hat{\mathbf{R}}_{m,n}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ .

Pour les classes mod 2 on a tout simplement :

$$(14) \qquad b^* \{b\omega\}_2^* = \{\omega\}_2^*, \qquad \omega \in \Omega(n, m), \qquad b\omega \in \Omega(m, n)$$

En particulier,

$$\begin{cases}
\delta^* \{ \omega_k^n \}_2^2 = \{ \overline{\omega}_k^n \}_2^2, \\
\delta^* \{ \overline{\omega}_k^n \}_2^2 = \{ \omega_k^n \}_2^2.
\end{cases}$$

De la même façon on peut aussi définir les applications canoniques

$$\mathfrak{d}: \mathbb{G}_{n,m} \rightarrow \mathbb{G}_{m,n},$$

où G=R, C, ou Q et déterminer son type d'homologie. Par exemple, les formules (15) deviennent

$$(15') \begin{cases} \emptyset^* \{ \omega_k^{n'} \}_0 = \{ \overline{\omega}_k^{m'} \}_0^c, & \emptyset^* \{ \overline{\omega}_k^{n'} \}_0 = \{ \omega_k^{m'} \}_0^c, & \text{pour } G = G; \\ \emptyset^* \{ \omega_k^{n} \}_2 = \{ \overline{\omega}_k^{m} \}_2, & \emptyset^* \{ \overline{\omega}_k^{n} \}_2 = \{ \omega_k^{m'} \}_2^c, & \text{pour } G = R. \end{cases}$$

Les formules ainsi obtenues montrent une certaine relation de dualité entre les classes de cohomologie des variétés grassmanniennes duales. Nous les appliquerons en particulier à l'anneau de cohomologie des variétés grassmanniennes. En effet, la proposition 4, appliquée à la variété  $R_{m,n}$ , montre que l'anneau de cohomologie mod 2  $H^*(R_{m,n})$  est engendré par les classes  $\{\overline{\omega}_k^n\}_2$ ,  $k=1,\ldots,m$ . En appliquant l'opération  $\mathfrak{d}^*$  qui est un isomorphisme de  $H^*(R_{m,n})$  sur  $H^*(R_{n,m})$ , on voit que l'anneau  $H^*(R_{n,m})$ , d'après (15), est engendré par les classes

$$\mathfrak{d}^* \{\overline{\omega}_k^n\}_2 = \{\omega_k^m\}_2, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

De même, l'anneau de cohomologie à coefficients entiers de la variété  $\mathbf{C}_{n,m}$  est non seulement engendré par les classes  $\{\overline{\omega}_k^{m'}\}_0^6$ ,  $k=l,\ldots,n'$  mais aussi par les classes  $\{\omega_k^m\}_0^6$ ,  $k=l,\ldots,m'$ .

On peut aussi en déduire des formules analogues à (5), (6) de § 4 pour les produits avec les classes  $\{\omega_k^m\}_2$ . Nous nous contentons

CLASSES CARACTÉR d'établir une for chap. 2. D'après (m = 2m', n =

où  $\overline{\omega}_{i,h-i}^{n'}$  est la fe  $\overline{\omega}(1) = \ldots = \overline{\omega}(1)$ 

En appliquant devient

où  $\omega_{i,h-i}^{m'}$  est la fo

(18) 
$$\begin{cases} \omega(t) \end{cases}$$

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPITÉRIQUES

d'établir une formule particulière dont nous aurons besoin dans le chap. 2. D'après (5) et (6) de § 4, en appliquant à la variété  $C_{m,n}$  (m=2m', n=2n'), on a pour  $h_1 \leq h_2$ ,  $h=h_1+h_2$ ,

$$\{\overline{\omega}_{h_t}^{n'}\}_0^c \subseteq \{\overline{\omega}_{h_t}^{n'}\}_0^c = \sum_{i=0}^{h_t} \{\overline{\omega}_{i,h-i}^{n'}\}_0^c,$$

où  $\overline{\omega}_{i,h-t}^{n'}$  est la fonction  $\overline{\omega} \in \Omega(m', n')$  définie par

$$\overline{\omega}(1) = \ldots = \overline{\omega}(n'-2) = 0, \qquad \overline{\omega}(n'-1) = i, \qquad \overline{\omega}(n') = h - i.$$

En appliquant aux deux membres l'opération 5\*, la formule (16) devient

(17) 
$$\{\omega_{h_1}^{m'}\}_0^c \subseteq \{\omega_{h_2}^{m'}\}_0^c = \sum_{i=0}^{h_1} \{\omega_{i,h-i}^{m'}\}_0^c,$$

où  $\omega_{i,h-i}^{m'}$  est la fonction  $\omega \in \Omega(n'm')$  définie par

(18) 
$$\begin{cases} \omega(1) = \dots = \omega(m'-h+i) = 0, \\ \omega(m'-h+i+1) = \dots = \omega(m'-i) = 1, \\ \omega(m'-i+1) = \dots = \omega(m') = 2. \end{cases}$$

 $\begin{cases} k \\ 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} k \\ 0 \end{cases}$ 

ant dans ces dernières ate dans les variétés

uu:

 $\delta\omega$ ε $\Omega(m,n)$ .

les applications cano-

pe d'homologie. Par

 $G_k^{m'} = G_k^{m'}$  pour  $G = G_k^{m}$ ; pour  $G = R_k^{m}$ .

e certaine relation de iétés grassmanniennes l'anneau de cohomoa proposition 4, applie cohomologie mod 2 = 1, ..., m. En applime de  $H^*(R_{m,n})$  sur rès (15), est engendré

 $\ldots, m$ .

Scients entiers de la  $\{\overline{\omega}_k^{m'}\}_0^{\mathfrak{S}}, k = l, \ldots, m'.$ 

ogues à (5), (6) de  $\S 4$ ous nous contentons

#### CHAPITRE II

## LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

# § 1. Les structures fibrées sphériques.

Nous supposons connuc la théorie générale des espaces fibrés et

nous nous contentons d'expliquer quelques notations.

Soit E un espace sibré dont la base est B, la sibre type F, et le groupe structural G. Nous dirons alors qu'une structure fibrée, ou plus précisément une (F, G)-structure, a été définie sur la base B dans l'espace fibré E. Nous dirons aussi que E est l'espace fibré de cette structure. Nous écrirons  $\mathfrak{F}_{\scriptscriptstyle 1} \backsimeq \mathfrak{F}_{\scriptscriptstyle 2}$  pour exprimer que les deux (F, G)-structures & définies sur la même base sont isomorphes. Une application f'd'un espace B' dans la base B d'une (F, G)-structure F induit une (F, G)-structure sur la base B' que nous désignerons par  $f^*\mathfrak{F}$ . On aura  $f^*\mathfrak{F}\cong g^*\mathfrak{F}$  si  $f{\simeq}g$ , c'est-à-dire f homotope à g, g étant une autre application de B' dans B. Par conséquent la classe d'isomorphisme de f\*T ne dépend que de la classe d'homotopie de f. La (F, G)-structure & sur B est p-universelle si les classes d'isomorphisme des structures induites sur un complexe B' quelconque de dimension  $\leq p$  sont en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie des applications de B' dans B. Soit G un sous-groupe de G', où G' est aussi un groupe d'automorphismes de F, à une (F, G)-structure F est associée canoniquement une certaine (F, G')-structure &'. & est appelée une structure subordonnée de T' et nous écrirons T ≺ T'.

Dans le présent travail nous ne considérons que les structures dont la fibre type F est une sphère  $S_{m-1}$  de dimension m-1, considérée comme la sphère unité de l'espace enclidien Rm de dimension m. La structure sera appelée alors une structure sibrée

CLASSES CARACTÉ

sphérique. Nou groupes suivant

(a) Le group (b) Le groups

connexe de l'un (c) Le groupe

identifié avec C d) Le groupe R<sup>m</sup> étant identifi Nous appeller

 $O_m^*$ -structure, ( $\epsilon$ cas corresponda Puisque O<sub>m e</sub>

est une structure  $\mathfrak{F}' = \mathfrak{S}$ . De mè une structure su que nous désign m = 2m' (resp. i

Etant donnée « ture &', existe-t-: on une  $O_m^*$ -structu

c'est-à-dire  $\Im' \cong$ Nous trouvers structure subord. conditions néces obtenues sont exstructure fibrée s suivante.

Etant donnée l  $X \in \mathbb{R}_{n,m}$  et x élém de base  $R_{i,m}$  don structure fibrée e  $\mathfrak{N}_{n,m}$ . De même

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

sphérique. Nous supposons que le groupe structural est l'un des groupes suivants:

(a) Le groupe orthogonal  $O_m$  de  $S_{m-1}$ :

(b) Le groupe des rotations  $O_m$  de  $S_{m-1}$ , c'est-à-dire la composante connexe de l'unité dans  $O_m$ ;

(c) Le groupe unitaire  $O'_m$  de  $S_{m-1}$ , dans le cas m = 2m',  $\mathbb{R}^m$  étant identifié avec  $\mathbb{C}^{m'}$ ;

d) Le groupe quaternionien  $O''_m$  de  $S_{m-1}$ , dans le cas m = 4m'', R'' étant identifié avec Q'''.

Nous appellerons une telle structure (a) une  $O_m$ -structure, (b) une  $O_m$ -structure, (c) une  $O_m$ -structure et (d) une  $O_m$ -structure dans les cas correspondants.

Puisque  $O_m^*$  est un sous-groupe de  $O_m$ , chaque  $O_m^*$ -structure  $\mathfrak{F}$  est une structure subordonnée d'une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}'$ . Nous écrirons  $\mathfrak{F}' = \varphi \mathfrak{F}$ . De même chaque  $O_m'$ -structure (resp.  $O_m'$ -structure)  $\mathfrak{F}$  est une structure subordonnée d'une  $O_m^*$ -structure (resp.  $O_m'$ -structure) que nous désignerons par  $\varphi'\mathfrak{F}$ , (resp.  $\varphi''\mathfrak{F}$ ), en supposant que m = 2m' (resp. m = 4m''). Notre problème est alors le suivant:

Elant donnée une  $O_m$ -structure, une  $O_m$ -structure, on une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}'$ , existe-t-il respectivement une  $O_m$ -structure, une  $O_m$ -structure ou une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$  tel que

## $\mathfrak{F} \prec \mathfrak{F}'$ ,

e'est-à-dire  $\mathfrak{F}'\cong \mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{F}'\cong \mathfrak{P}'$  ou  $\mathfrak{F}'\cong \mathfrak{P}''$ 

Nous trouverons des conditions nécessaires pour qu'une telle structure subordonnée existe, et dans quelques cas particuliers des conditions nécessaires et suffisantes. Toutes les conditions ainsi obtenues sont exprimées en termes de classes caractéristiques d'une structure fibrée sphérique que nous allons définir dans la section suivante.

# § 2. Les classes caractéristiques.

Étant donnée la variété  $R_{n,m}$ , l'espace des couples (x, X), où  $X \in R_{n,m}$  et x élément de la sphère unité dans X, est un espace fibré de base  $R_{n,m}$  dont la fibre sur X est la sphère unité dans X. Sa structure fibrée est une  $O_m$ -structure que nous désignerons par  $\Re_{n,m}$ . De même nous désignerons par  $\Re_{n,m}$ ,  $\mathfrak{C}_{n,m}$  et  $\mathfrak{D}_{n,m}$  la

TIQUES PHÉRIQUES

hériques.

e des espaces fibrés et

rtations.

la fibre type F, et le ne *structure fibréc,* ou 5 définie sur la *base* B 3 est l'espace fibré de exprimer que les deux sont *isomorphes*. Une me (F, G)-structure  $\mathfrak F$ que nous désignerons à-dire f homotope à  $g_i$ ar conséquent la classe la classe d'homotopie niverselle si les classes an complexe B' queldance biunivoque avec 3' dans B. Soit G an 'automorphismes de F, quement une certaine racture subordonnée de

ons que les structures de dimension m-1, pace enclidien  $\mathbb{R}^m$  de s une structure fibrée

 $O_m^*$ -structure, la  $O_m^*$ -structure et la  $O_m^*$ -structure définies d'une façon analogue sur les variétés grassmanniennes  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ ,  $\mathbf{C}_{n,m}$  et  $\mathbf{Q}_{n,m}$ . L'importance de ces structures particulières résulte du théorème fondamental suivant :

Théorème 1 (théorème de Steenrod-Whitney-Pontrjagin-Chern). — La structure  $\mathfrak{N}_{n,m}$  (resp.  $\mathfrak{N}_{n,m}$ ,  $\mathfrak{C}_{n,m}$  ou  $\mathfrak{D}_{n,m}$ ) est une  $\mathfrak{O}_m$ -structure (resp.  $\mathfrak{O}_m'$ -structure,  $\mathfrak{O}_m'$ -structure ou  $\mathfrak{O}_m'$ -structure) p-universelle pourvu que n > p.

D'une façon plus précise, supposons que B est un complexe de dimension p < n. Chaque  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$  définie sur B est induite par une application  $f: B \to R_{n,m}$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{N}_{n,m}$ . Deux  $O_m$ -structures  $\mathfrak{F}_i \cong f_i^*\mathfrak{N}_{n,m} (i=1,2)$  sont isomorphes si et seulement si  $f_i \cong f_2$ . Il en est de même dans les autres cas. Dans la suite nous ne considérons que des structures fibrées ayant pour une base un complexe.

Il résulte de ce théorème qu'une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$  sur un complexe B de dimension p induite par l'application f de B dans  $\mathbf{R}_{n,m}$ , n > p, admet comme *invariants* les images réciproques des classes decohomologie de  $\mathbf{R}_{n,m}$ .

Ces classes de cohomologie dans la base B seront appelées les classes caractéristiques de la O<sub>m</sub>-structure considérée. Les classes caractéristiques se définissent de la même façon dans les autres cas.

Considérons une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$  sur un complexe B de dimension p et supposons que  $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{N}_{n,m}$  (n>p). A chaque fonction  $\omega \in \Omega(n,m)$  ou  $\Omega_1^*(n,m)$  correspond une classe  $\{\omega\}_2$  ou  $\{\omega\}_0$  dans  $\mathbf{R}_{n,m}$  et ainsi une classe caractéristique  $f^*\{\omega\}_2$  ou  $f^*\{\omega_0\}$  que nous désignerons par  $\{\omega\}_2(\mathfrak{F})$  ou  $\{\omega\}_0(\mathfrak{F})$ , appelée la classe caractéristique mod 2 ou entière du type  $\omega$  de la structure  $\mathfrak{F}$ . Puisque K est de dimension p, il ne faut considérer que des fonctions  $\omega$  pour lesquelles  $d(\omega) \leq p < n$ . D'après Prop. 3,  $\S$  3, Chap. 1, les classes caractéristiques correspondantes sont alors bien définies. De plus, nous démontrerons que pour  $\omega \in \Omega(n,m)$ , où  $d(\omega) \leq p$ , la classe caractéristique du type  $\omega$  est indépendante de la valeur n > p.

En effet, soient n, n' deux nombres quelconques tels que

$$n > n' > p$$
.

Considérons l'espace numérique  $R^{n+m}$  de dimension n+m et le système de coordonnées  $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ , Soit  $R^{n+m}$  le sous-

CLASSES CARACTÉRIST espace de dimension

Prenons  $(x)' = (x_i, R^{n'+m})$  et définissons avec subdivisions ce port aux systèmes (classes, etc. dans R La variété  $R_{n'm}$  est l'application identiquement,

d'où (i == 0 ou 2)

(1) 0\*:

Soit maintenant ?

et soit  $f = \theta f'$ . Alors

d'où

où  $\omega \in \Omega(n, m)$ ,  $d(\omega)$  dépendance des class

Remarque I. — Il cation  $f: B \rightarrow \mathbf{R}_{n',m}$  ci-dessus montre qua

 $(1)' \quad \{\omega\}'(\mathfrak{F}) = 0$ 

Remarque II. — }
R<sub>n,m</sub> est nulle pous caractéristiques du t

 $\{\omega\}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{z}$ même dans le cas n ucture définies d'une nes  $\mathbb{R}_{n_i m}$ ,  $\mathbb{C}_{n_i m}$  et  $\mathbb{Q}_{n_i m}$ . résulte du théorème

rey-Pontrjagin-Chern).  $_m$ ) est une  $O_m$ -structure tructure) p-universelle

3 est un complexe de finie sur B est indnite re 答論∫\*玳<sub>n, m</sub>. Deux omorphes si et sculetres cas. Dans la suite s ayant pour une base

e & sur un complexe B e B dans  $\mathbf{R}_{n,\,m},\;n>p,$ es des classes decolio-

B seront appelées les onsidérée. Les *classes* açon dans les autres

omplexe B de dimen-). A chaque fonction  $\{\omega\}_{2} \text{ ou } \{\omega\}_{0} \text{ dans}$ , où  $f^*\{\dot{\omega}_g\}$  que nous e la c*lasse caractéris*ure N. Puisque K est les fonctions ω pour 3, Gliap. 1, les classes en définies. De plus,  $d(\omega) \leqslant p$ , la classe valeur n > p. ques tels que

aension n+m et le Soit  $\mathbb{R}^{n'+m}$  le sous-

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES PIBRÉES SPHÉRIQUES espace de dimension n' + m défini par les équations :

$$x_{n'+m+1} = \cdots = x_{n+m} = 0.$$

Prenons  $(x)' = (x_1, \ldots, x_{n+m})$  comme système de coordonnées dans  $\mathbb{R}^{n'+m}$  et définissons les variétés  $\mathbb{R}_{n',\,m}$  et  $\mathbb{R}_{n,\,m}$  dans  $\mathbb{R}^{n'+m}$  et  $\mathbb{R}^{n+m}$ avec subdivisions cellulaires canoniques K'(x) et K(x) définies par rapport aux systèmes (x)' et (x) respectivement. Nous distinguons les classes, etc. dans  $R_{n',m}$  de celles dans  $R_{n,m}$  en ajoutant un prime. La variété  $\mathrm{R}_{n'm}$  est évidemment une sous-variété de  $\mathrm{R}_{n,\,m}$ . Soit  $\emptyset$ l'application identique de  $\mathrm{R}_{n',m}$  dans  $\mathrm{R}_{n,m}.$  On voit facilement que  $\theta$ est une application cellulaire de K<sub>w</sub> dans K<sub>w</sub> telle qu'on ait algébriquement,

$$\theta \mathbf{U}'_{\omega} = \mathbf{U}_{\omega}, \qquad \omega \in \Omega(n', m),$$

d'où (i = 0 ou 2)

(1) 
$$\theta^* \{ \omega \}_i = \begin{cases} \{ \omega \}_i', & \omega \in \Omega(n', m); \\ 0, & \omega \notin \Omega(n', m). \end{cases}$$

Soit maintenant  $\mathfrak F$  une structure sur B induite par f' :

$$B \rightarrow R_{n', m} (n' > p)$$

et soit  $f = \theta f'$ . Alors

$$\mathfrak{F} \cong \int^* \mathfrak{N}_{n,\,m} \cong \int'^* \mathfrak{N}_{n',\,m},$$

d'où

$$f^*\{\omega\}_i = f'^*\theta^*\{\omega\}_i = f^*\{\omega\}_i'$$

où  $\omega \in \Omega(n, m)$ ,  $d(\omega) \leq p$ , et i = 0 ou 2. Cette équation montre l'indépendance des classes caractéristiques de la valeur de n > p.

Remarque I. — Il peut arriver que F soit induite par une application  $f: B \to \mathbb{R}_{n,m}$  où n' est  $\leq p$ . Soit n > p. La démonstration ci-dessus montre que (cf. (1)):

(1)' 
$$\{\omega\}_i(\mathfrak{F}) = 0$$
 pour  $\omega \in \Omega(n, m)$  mais  $\omega \notin \Omega(n', m)$ .

Remarque II. — En faisant la convention que la classe  $\{\omega\}_i$  dans  $R_{n,m}$  est nulle pour  $\omega \in \Omega(n, m)$ , on peut encore définir les classes caractéristiques du type  $\omega$  pour  $\mathfrak{F} \cong \hat{f}^*\mathfrak{R}_{n,m}$  par les équations :

$$\{\omega\}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_{\mathfrak{o}}, \quad \omega = \int_{2k, 2k}^{m} \omega \omega \omega_{2k, 2k}^{m}, \quad \text{ou} \quad \bar{\omega}_{2k, 2k}^{m},$$

même dans le cas  $n \leq p$ .

La considération précédente s'applique aussi bien pour les  $O_m$ -structures.

De même, pour une  $O'_m$ -structure (resp.  $O''_m$ -structure)

$$\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{C}_{n,m},$$

où n=2n', m=2m' (resp.  $\mathfrak{F} \cong \int^* \mathfrak{D}_{n,m}$ , n=4n'', m=4m'') on associe à chaque fonction  $\omega \in \Omega(n', m')$  (resp.  $\omega \in \Omega(n'', m'')$ ), une classe caractéristique  $\{\omega\}_i^s(\mathfrak{F})$  (resp.  $\{\omega\}_i^s(\mathfrak{F})\}$ ), i=0 ou 2, du type  $\omega$  dans la base B de dimension p définie par

(2) 
$$\begin{cases} \{\omega\}_i^c(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_i^c, & \{\omega\}_i^c \text{ classe de } \mathbb{C}_{n,m}, \\ (\text{resp.}\{\omega\}_i^q(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_i^q, & \{\omega\}_i^q \text{ classe de } \mathbb{Q}_{n,m}). \end{cases}$$

On remarque que n n'est pas forcément > p dans cette définition si l'on fait la convention que la classe  $\{\omega\}_i^c$  dans  $\mathbb{C}_{n,m}$  ou  $\{\omega\}_i^q$  dans  $\mathbb{Q}_{n,m}$  est nulle pour  $\omega \in \Omega((n', m'))$  ou  $\omega \in \Omega(n'', m'')$ . Les classes caractéristiques définies dans (2) sont aussi indépendantes de n. Il en est de même pour les  $\mathbb{O}_m$ -structures et les  $\mathbb{O}_m$ -structures.

Soit K une subdivision cellulaire canonique et  $K^*$  la subdivision duale canonique de  $R_{n,m}$ . Soit f une application cellulaire de B dans  $K^*$ . Alors

(3) 
$$< \{\omega\}_i(f^*\mathfrak{N}_{n,m}), \sigma> = I_i([\omega]_i, f(\sigma)); \quad i = 0 \text{ ou } 2,$$

où  $I_i$  est l'indice d'intersection dans la variété  $\mathbf{R}_{n,m}$  orientée à partir du système de coordonnées (x), en supposant  $n+m \equiv 0 \mod 2$ . La formule (3) donne une définition équivalente des classes caractéristiques. De même pour les autres structures.

Les classes caractéristiques correspondant aux fonctions définies par les équations (2) et (3) de § 1 chap. 1 sont particulièrement importantes. Soient  $\Re$ ,  $\Re$ ,  $\mathfrak C$  et  $\mathfrak D$  respectivement une  $O_m$ -structure, etc. Nous poserons simplement:

- $(4) \qquad \mathbb{X}_0^m(\hat{\mathfrak{R}}) = \{\omega_m^m\}_0^*(\hat{\mathfrak{R}}).$
- (5)  $\mathbf{W}_{2}^{k}(\mathfrak{R}) = \{\omega_{k}^{m}\}_{2}(\mathfrak{R}), \quad \overline{\mathbf{W}}_{2}^{k}(\mathfrak{R}) = \{\overline{\omega}_{k}^{m}\}_{2}(\mathfrak{R}).$
- (6)  $\mathbf{P}_{0}^{4k}(\mathfrak{R}) = \left\{ \omega_{2k,2k}^{m} \right\}_{0}(\mathfrak{R}), \quad \mathbf{P}_{0}^{4k}(\mathfrak{R}) = \left\{ \overline{\omega}_{2k,2k}^{m} \right\}_{0}(\mathfrak{R}).$
- $(5)^{\hat{}} \quad \mathbf{W}_{2}^{k}(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\omega_{k}^{m}\}_{0}^{\hat{}}(\hat{\mathfrak{N}}), \quad \overline{\mathbf{W}}_{2}^{k}(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\overline{\omega}_{k}^{m}\}_{2}^{\hat{}}(\hat{\mathfrak{N}}).$
- $(6)^{\circ} \quad \mathbf{P}_{0}^{4k}(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\omega_{2k,2k}^{m}\}_{0}^{\circ}(\hat{\mathfrak{N}}), \quad \overline{\mathbf{P}}_{0}^{4k}(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\overline{\omega}_{2k,2k}^{m}\}_{0}^{\circ}(\hat{\mathfrak{N}}).$
- $(7) \qquad \mathbf{C}_0^{2k}(\mathfrak{C}) = \{\omega_k^m\}_0^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}), \qquad \mathbf{C}_0^{2k}(\mathfrak{C}) = \{\overline{\omega}_k^m\}_0^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}), \qquad m = 2m'.$
- $(8) \qquad Q_0^{4k}(\mathfrak{O}) = \{\omega_k^{m^*}\}_0^q(\mathfrak{O}), \qquad \overline{Q}_0^{4k}(\mathfrak{O}) = \{\overline{\omega}_k^{m^*}\}_0^q(\mathfrak{O}), \qquad m = \frac{1}{4}m''.$

CLASSES CARACTÉRIST

Introduisons aus:

$$(5)'$$
  $W_2(\mathfrak{S}, t) =$ 

$$(6)' \quad P_{o}(\mathfrak{S}, t) =$$

$$(7)'$$
  $C_{\alpha}(\mathfrak{C}, t) =$ 

$$(8)' \qquad Q_{\scriptscriptstyle 0}(\mathfrak{Q}, \ t) =$$

Nous appellerons

 $W^k(\mathfrak{S})$  les classes

 $W_2^k(\mathfrak{S})$  les classes  $P_0^{4k}(\mathfrak{S})$  ou  $\widetilde{P}_0^{4k}(\mathfrak{S})$ 

 $G_{\mathfrak{o}}^{2k}(\mathfrak{C})$  ou  $G_{\mathfrak{o}}^{2k}(\mathfrak{C})$ 

 $W_{2}(\mathfrak{S}, t)$  on WWhitney;

 $egin{aligned} & \mathbf{P}_{_{0}}(\mathfrak{S},\ t) \ ext{ou} \ \overline{\mathbf{P}}_{_{0}}(\mathfrak{S},\ t) \end{aligned}$ 

 $\mathbf{C}_{0}(\mathfrak{C}, t)$  on  $\mathbf{C}_{0}(\mathfrak{C}, X_{o}^{m}(\mathfrak{R}))$  la classe d En particulier, poture qui correspondentante dans les classes caractéristiques

et par conséquent o

Si g est une app lequel est définie un de K dans les varié structure g\*S est isc

$$(G=0, \cdot)$$

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

aussi bien pour les

 $\mathfrak{I}_m^r$ -structure)

 $= \ln n'', \quad m == \ln n'')$  on p.  $\omega \in \Omega(n'', m'')$ ), une i = 0 ou 2, du type  $\omega$ 

classe de  $C_{n,\,m}$ , classe de  $\mathbb{Q}_{n,m}$ ).

>p dans cette défini- $\delta_i^c$  dans  $G_{n,m}$  ou  $\{\omega\}_i^p$  $\Omega(n'', m'')$ . Les classes ndépendantes de n. Il  $\mathfrak{I}_m$ -structures. et K\* la subdivision ation cellulaire de B

i = 0 ou 2.

 $\mathrm{R}_{\scriptscriptstyle{n,\,m}}$  orientée à partir ı → m ≡≡ 0 mod 2. La des classes caractéris-

ax fonctions définies sont particulièrement ent une  $\mathrm{O}_{m}$ -structure,

 $\{x_{k}^{n}\}_{n}(\mathfrak{N}).$  $\{x_{2k,\,2k}\}_0(\mathfrak{R}).$  $\{a_i^n\}_2^2(\mathfrak{R})$  .

 $\{a_{k,\,2k}\} (\mathfrak{R}).$  $\{\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}^{n'}\}_{0}^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}),$ m == 2m'.

 ${a^r \choose a} {q \choose {\mathfrak Q}},$ m = 4m''.

Introduisons aussi une indéterminée t et posons :

(5)'  $W_{2}(\mathfrak{S}, t) = \sum_{k \geqslant 0} W_{2}^{k}(\mathfrak{S}) t^{k},$ (6)'  $P_{0}(\mathfrak{S}, t) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^{k} P_{0}^{4k}(\mathfrak{S}) t^{4k},$ 

Nous appellerons alors:

 $\mathbf{W}_{2}^{k}(\mathfrak{S})$  les classes de Stiefel-Whitney,

 $\overline{\overline{W}}_{s}^{h}\!(\mathfrak{S})$  les classes duales de Stiefel-Whitney,

 $\mathbf{P}_{\mathfrak{g}}^{4k}(\mathfrak{S})$  ou  $\overline{\mathbf{P}}_{\mathfrak{g}}^{4k}(\mathfrak{S})$  les classes ou les classes duales de Pontrjagin;  $C_0^{2k}(\mathfrak{C})$  ou  $C_0^{2k}(\mathfrak{C})$  les classes ou les classes duales de Chern;

 $W_{s}(\mathfrak{S}, t)$  on  $W_{s}(\mathfrak{S}, t)$  le polynome on le polynome dual de Whitney;

 $\mathbf{P}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}, t)$  ou  $\mathbf{P}_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}, t)$  le polynome ou le polynome dual de Pontr-

 $C_o(\mathfrak{C}, t)$  on  $C_o(\mathfrak{C}, t)$  le polynome ou le polynome dual de Chern;  $X_n^m(\Re)$  la classe d'Euler-Poincaré.

En particulier, pour une structure simple, c'est-à-dire une structure qui correspond à la classe d'homotopie d'une application constante dans les variétés grassmanniennes correspondantes, les classes caractéristiques de dimension non nulle sont toutes nulles et par conséquent on a respectivement :

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}, \ t) = \overline{\mathbf{W}}_{2}(\mathfrak{S}, \ t) = \mathbf{I} \ ; \\ & \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}, \ t) = \overline{\mathbf{P}}_{0}(\mathfrak{S}, \ t) = \mathbf{I} \ . \\ & \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}, \ t) = \overline{\mathbf{C}}_{0}(\mathfrak{S}, \ t) = \mathbf{I} \ ; \\ & \mathbf{X}_{0}^{m}(\mathfrak{R}) = \mathbf{o} \ . \end{aligned}$$

Si g est une application d'un complexe K' dans un autre sur lequel est définie une G-structure  ${\mathfrak S}$  induite par une application fde K dans les variétés grassmanniennes  $G_{n,m}$  correspondantes, la structure  $g^* \otimes$  est isomorphe à  $(fg)^* \otimes_{n,m}$  et par conséquent on a

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{2}(g^{*}\mathfrak{S}, \ t) = g^{*}\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}, \ t), \ \text{etc.} \\ & (\mathbf{G} = \mathbf{O}, \ \mathbf{O}', \ \mathbf{O}', \ \mathbf{O}''; \qquad \mathbf{G} = \mathfrak{N}, \ \mathfrak{N}, \ \mathbf{G}, \ \mathfrak{D}). \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\rho$  l'application de la variété  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  définie dans l'espace numérique  $\mathbf{R}^{n+m}$  sur elle-même telle que pour chaque élément  $\mathbf{X} \in \hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ ,  $\rho(\mathbf{X})$  soit le même élément, muni de l'orientation opposée. A chaque  $\mathbf{O}_m$ -structure  $\mathfrak{S}$  définie sur une base  $\mathbf{B}$  induite par une application  $f \colon \mathbf{B} \to \hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{S} \cong f^* \mathfrak{N}_{n,m}$ , on peut associer une autre  $\mathbf{O}_m$ -structure sur la même base  $\mathbf{B}$ , à savoir  $(\rho f)^* \hat{\mathbf{N}}_{n,m}$ . Cette structure est en esse t canoniquement liée à la structure donnée  $\mathfrak{S}$ , c'est-à-dire elle est désinie à un isomorphisme près et est indépendante de la valeur de n sussissamment grande. Nous la désignerons par  $-\mathfrak{S}$ . On a évidemment  $-(-\mathfrak{S}) \cong \mathfrak{S}$ . Pour déterminer les relations entre les classes caractéristiques de ces deux structures, prenons un système de coordonnées (x) dans  $\mathbf{R}^{n+m}$  par rapport auquel nous désinissons la subdivision canonique de la variété  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ . On voit alors que  $\rho$  est une application cellulaire telle que, algébriquement, on ait

$$\rho^* \overline{U}_{\omega} = \overline{U}_{\omega}, \qquad \rho^* \overline{U}_{\omega} = \overline{U}_{\omega},$$

d'où, d'après (34) de § 3 chap. 1,

$$\begin{array}{ll} \rho^*\{\omega\}_0^{\hat{}} = (-1)^{\omega(i_0) + i_0 + m}\{\omega\}_0^{\hat{}}, & \omega \in \Omega_0^*(n, m), \\ \rho^*\{\omega\}_2^{\hat{}} = \{\omega\}_2^{\hat{}}, & \omega \in \Omega(n, m). \end{array}$$

Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 2 (Pontrjagin) — Pour deux  $O_m$ -structure  $\mathfrak S$  et —  $\mathfrak S$  définies sur la base  $\mathfrak B$  de dimension p on a

$$\{\omega\}_{0}^{\hat{}}(\mathfrak{S}) = (-1)^{\omega(i_{s})+i_{s}+m} \{\omega\}_{0}^{\hat{}}(-\mathfrak{S}),$$

$$oid \qquad \omega \in \Omega_{0}^{*}(n, m), \qquad s = s(\omega), \qquad i_{s} = i_{s}(\omega), \qquad n > p;$$

$$\{\omega\}_{2}^{\hat{}}(\mathfrak{S}) = \{\omega\}_{2}^{\hat{}}(-\mathfrak{S}), \qquad \omega \in \Omega'(n, m).$$

En particulier, on a pour les classes de Pontrjagin et la classe d'Euler-Poincaré,

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{1}k}(\mathfrak{S}) = P_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{1}k}(-\mathfrak{S}), & \overline{P}_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{1}k}(\mathfrak{S}) = \overline{P}_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{1}k}(-\mathfrak{S}) \\ et & X_{\mathfrak{d}}^{m}(\mathfrak{S}) = -X_{\mathfrak{d}}^{m}(-\mathfrak{S}). \end{array}$$

De la même façon on peut associer canoniquement à chaque  $O'_m$ -structure  $\mathfrak S$  une autre  $O'_m$ -structure sur la même base que nous désignerons par  $\mathfrak S$  de la manière suivante : soit  $\mathfrak C_{n,\,m}$  la variété

CLASSES CARACTÉRE définie dans l'espac

Prenons un systèm l'espace  $C^{n'+m'}$ . Un un système d'équat Le système des éque complexes de  $\xi_{ij}$ ) de gnerons par  $\gamma(Z)$ . L'application f: Binduite par l'applic que de la structure  $\xi_{ij}$ 

Définissons la su par rapport au syst application cellulair d'équations

est appliquée par l'a

L'ensemble γ(Wω

On en déduit ains
Théorème 2'. — 1
dimension p on a {
particulier on a pour

$$C_0^{2k}(\mathfrak{S}) = (--$$

Soient  $\hat{R}_{n,m}$  et  $\hat{R}$  dans le même espa l'application étudiée fixe de l'espace  $R^{n+m}$ 

ciété Ř<sub>n, m</sub> définie dans e que pour chaque élé... muni de l'orientation sur une base B induite  $\mathfrak{S} \cong \int^* \mathfrak{N}_{n,m}$ , on peut ême base B, à savoir ioniquement liée à la nie à un isomorphisme suffisamment grande. mment  $-(-\mathfrak{S}) \cong \mathfrak{S}$ . ses caractéristiques de coordonnées (x) dans subdivision canonique application cellulaire

$$\omega \in \Omega_0^*(n, m),$$

$$(n, m)$$
.

ontrjagin et la classe

$$\widehat{\mathbf{P}}_{o}^{4k}(--\mathfrak{S})$$

niquement à chaque nême base que nous soit Cn, m la variété

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉMIQUES : 43 définie dans l'espace unitaire Cn'+m' de dimension complexe

$$n' + m'(n = 2n', m = 2m').$$

Prenons un système de coordonnées unitaires (z) quelconque dans l'espace  $\mathbb{C}^{n'+m'}$ . Un élément Z de la variété  $\mathbb{C}_{n,m}$  est alors défini par un système d'équations linéaires, soit :  $\sum_{j=1}^{n+m} \xi_{ij} \hat{z}_j = 0$ , i = 1, ..., s. Le système des équations  $\sum_{j=1}^{n+m} \bar{\xi}_{ij} z_j = 0$ , i = 1, ..., s ( $\bar{\xi}_{ij}$  conjugués complexes de  $\xi_{ij}$ ) définit alors un élément de  $\mathbb{C}_{n,\,m}$  que nous désignerons par \( \gamma(Z) \). Si la structure \( \otimes \) sur la base \( \otimes \) est induite par Papplication  $f \colon B \to C_{n,m}$ , la structure  $\gamma \otimes$  est alors celle qui est induite par l'application  $\gamma f\colon \operatorname{B} o \mathfrak{C}_{\mathfrak{n},m}.$  On voit que  $\gamma \mathfrak{S}$  ne dépend que de la structure S à un isomorphisme près.

Définissons la subdivision cellulaire canonique de la variété  $C_{n,m}$ par rapport au système de coordonnées (z); on voit que  $\gamma$  est une application cellulaire. En esset, un élément Z dans le voisinage W, d'équations

$$\begin{cases} z_{j} = \sum_{i} \xi_{ji} z_{i}, \\ \xi_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i), \end{cases}$$

est appliquée par l'application  $\gamma$  sur l'élément  $\gamma(Z)$  d'équations

$$\begin{cases} z_{\overline{j}} = \sum_{i} \overline{\xi}_{ji} z_{\overline{i}}, \\ \overline{\xi}_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i). \end{cases}$$

L'ensemble γ(W<sub>ω</sub>) coïncide donc avec W<sub>ω</sub> et algébriquement on aura

$$\gamma^* W_{\omega} = (-1)^{d(\omega)} W_{\omega}$$

On en déduit ainsi le théorème suivant :

Theorems 2'. — Pour deux  $O'_m$ -structures  $\mathfrak{S}$  et  $\gamma \mathfrak{S}$  sur la base de dimension p on a  $\{\omega\}_o^c(\mathfrak{S}) = (-1)^{d(\omega)}\{\omega\}_o^c(\gamma\mathfrak{S}), \omega\in\Omega(n', m')$ . En particulier on a pour les classes de Chern:

$$\overline{C}_0^{2k}(\mathfrak{S}) = (-1)^k \overline{C}_0^{2k}(\gamma \mathfrak{S}), \qquad \overline{C}_0^{2k}(\mathfrak{S}) = (-1)^k \overline{C}_0^{2k}(\gamma \mathfrak{S}).$$

Soient  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{m,n}$  les deux variétés grassmanniennes définies dans le même espace numérique  $\mathbb{R}^{n+m}$  de dimension n + m, et d l'application étudiée dans § 6 chap. 1, en prenant une orientation fixe de l'espace  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Pour une  $\mathbb{O}_m$ -structure  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathbb{B}$  induite par f:

 $B \to \hat{\mathbf{R}}_{n,m}$ , on a une  $O_m^*$ -structure  $\mathfrak{S}$  sur B induite par  $\mathfrak{F}: B \to \hat{\mathbf{R}}_{m,n}$ . Deux structures qui se correspondent de cette manière seront appelées duales l'une de l'autre. De la même façon on définit les O-structures duales pour  $O = O_m$ ,  $O_m'$  ou  $O_m''$ . D'après  $\S$  6, chap. 1, on a :

Théorème 3 (théorème de dualité). — Pour une G-structure  $\mathfrak{S}$  et une G-structure  $\mathfrak{S}(G = O, O, O' \text{ ou } O')$  duales l'une de l'autre on a

$$\begin{array}{lll} \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S},\ t) = \overline{\mathbf{W}}_{2}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), & \overline{\mathbf{W}}_{2}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{W}_{2}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), \\ \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \overline{\mathbf{P}}_{0}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), & \overline{\mathbf{P}}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{P}_{0}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), \\ \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \overline{\mathbf{C}}_{0}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), & \overline{\mathbf{C}}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{C}_{0}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), & \mathbf{G} = \mathbf{O}'. \\ \mathbf{Q}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \overline{\mathbf{Q}}_{0}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), & \overline{\mathbf{Q}}_{0}(\overline{\mathfrak{S}},\ t), & \mathbf{G} = \mathbf{O}'. \end{array}$$

# § 3. Les classes caractéristiques des structures subordonnées.

L'espace numérique  $R^{n+m}$  s'identifie canoniquement à  $C^{n'+m'}$  dans le cas n = 2n', m = 2m', ct à  $Q^{n'+m'}$  dans le cas n = 4n'', m = 4m''. Les variétés  $R_{n,m}$ ,  $\hat{R}_{n,m}$ ,  $\hat{C}_{n,m}$  et  $Q_{n,m}$  sont définies respectivement dans  $R^{n+m}$ ,  $C^{n'+m'}$  et  $Q^{n'+m'}$ .

Etant donné l'élément  $X \in \mathbf{R}_{n,m}$ , soit  $\phi X$  le même élément considéré sans orientation. On obtient ainsi une application canonique (la projection)  $\phi : \hat{\mathbf{R}}_{n,m} \to \mathbf{R}_{n,m}$ . Considérons un élément de  $\mathbf{C}_{n,m}$ , muni de son orientation naturelle, comme un élément de  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  en négligeant sa structure unitaire. On a ainsi une application canonique

$$\varphi': \mathbb{G}_{n,m} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}_{n,m}$$

De la même façon on définit une application canonique

$$\varphi'': \mathbb{Q}_{n, m} \to \mathbb{C}_{n, m}$$

Le problème énoncé dans § 1 revient à l'étude des applications  $\varphi$ ,  $\varphi'$  et  $\varphi''$  à cause du théorème suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème de Steenrod-Whitney-Pontrjagin-Chern :

Théorème 4. — Pour qu'une G-structure  $(G = O_m, O_m)$  ou  $O_m$ ) sur B induite par  $f: B \to G_{n,m}$  (G = R, R on C) admette une G'-structure subordonnée  $(G' = O_m)$ ,  $O_m$  ou  $O_m$ , il faut et il suffit qu'il existe

CLASSES CARACTÉRIST une application f'': B

Dans le cas G = 0 une forme plus précis tion suivante :

(2)

En effet,  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  est t projection est  $\varphi$ . L'es celle d'une application théorème fondamenta cation f' vérifiant (2)

On a  $\pi_i(\hat{\mathbf{R}}_{n,m}) = 0$ , entiers mod 2. Un gér de la classe  $[a^m_i]_2$  dua  $\mathbf{R}_{n,m}$  est homotope à représente est homotion (2) est équivalent

(3)

Pour une courbe fe mod 2, b, la condition

(4)

On a done:

Théorème 5. — Polure subordonnée, il f.

Théorème 6. —  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$ , on a

(5)  $\{\omega\}_i^*(\mathfrak{F}') = \{$ où p est la dimension d

$$(6) \quad \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{F}', t) =$$

$$(7) \qquad P_{\upsilon}(\mathfrak{F}', \ t) = \{$$

Démonstration. = 1

uite par  $\mathfrak{h}f:\mathrm{B}\twoheadrightarrow \mathrm{R}_{m,n}$ e manière scront appeon définit les O-strueès § 6, chap. 1, on a :

our une G-structure S duales l'une de l'autre

$$\begin{cases} t, t, t, \\ t, t, \end{cases}$$
  $G = 0$  ou  $0$ ;  $t, G = 0$ .

G == O''.

stiques

quement à  $\mathbf{C}^{n'+|m'|}$  dans  $\cos n = 4n'', m = 4m''.$ éfini**es** respectivement

même élément consiapplication canonique un élément de  $\mathbf{C}_{n,\,m}$ , n élément de  $\mathrm{R}_{\scriptscriptstyle n,m}$  en une application cano-

ı canonique

de des applications 🤉 re conséquence imméjagin-Chern :

$$(G = O_m, O_m^* \text{ ou } O_m^*)$$
  
admette une  $G'$ -struc-  
tet il suffit qu'il existe

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES une application  $f': B \rightarrow G'_{n,m}, G' = \hat{R}, C$  ou Q telle que

(1) 
$$\psi f' \simeq f \qquad (\psi = \varphi, \ \varphi' \ \text{ou} \ \varphi'').$$

Dans le cas  $G = O_m$  on peut énoncer le théorème précédent sous une forme plus précise en remplaçant la condition (1) par la condition suivante:

$$\varphi f' == f.$$

En effet,  $\hat{\mathbf{R}}_{n,\,m}$  est un revêtement à deux feuillets sur  $\mathbf{R}_{n,\,m}$  dont la projection est q. L'existence d'une O'm-structure subordonnée exige celle d'une application  $f'': B \to \hat{R}_{n,m}$  telle que  $\mathfrak{A} f'' \hookrightarrow f$ . D'après un théorème fondamental de déformation, f'' est homotope à une application f' vérifiant (2).

On a  $\pi_1(\hat{\mathbf{R}}_{n,m}) = 0$ ,  $\pi_1(\mathbf{R}_{n,m}) \approx \mathbf{Z}_2(nm > 1)$ , où  $\mathbf{Z}_2$  est le groupe des entiers mod 2. Un générateur de  $\pi_i(\mathbf{R}_{n,m})$  est représenté par un cycle de la classe  $[\omega_1^m]_2$  duale à la classe  $\{\omega_1^m\}_2$ .) Une courbe fermée dans  $\mathbf{R}_{a,m}$  est homotope à zéro si et seulement si le cycle mod 2 qu'elle représente est homotope à zéro. On voit facilement que la condition (2) est équivalente à la condition suivante :

$$f\pi_{i}(B) = 0.$$

Pour une courbe fermée quelconque dans B représentant un cycle mod 2, b, la condition (3) est équivalente à  $f(b) \simeq 0$ , d'où

$$(4) \qquad \qquad \{\omega_1^m\}_2(\mathfrak{F}) = 0.$$

On a donc:

Théorème 5. — Pour qu'une O<sup>m</sup>-structure F admette une O<sup>m</sup>-structure subordonnée, il faut et il suffit que la condition (4) soit vérifiée.

Théorème 6. — Soit & une Om-structure subordonnée à la  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$ , on a

(5) 
$$\{\omega\}_i^*(\mathfrak{F}') = \{\omega\}_i(\mathfrak{F}), \quad i = 0 \text{ ou. 2}, \quad \omega \in \Omega(p, m).$$

où p est la dimension de la base B. En particulier,

(6) 
$$W_{2}(\mathfrak{F}', t) = W_{2}(\mathfrak{F}, t), \quad \overline{W}_{2}(\mathfrak{F}', t) = \overline{W}_{2}(\mathfrak{F}, t);$$
  
(7)  $P_{0}(\mathfrak{F}', t) = P_{0}(\mathfrak{F}, t), \quad \overline{P}_{0}(\mathfrak{F}', t) = \overline{P}_{0}(\mathfrak{F}, t).$ 

$$(7) \quad P_{0}(\mathfrak{F}', t) = P_{0}(\mathfrak{F}, t), \qquad \overline{P}_{0}(\mathfrak{F}', t) = \overline{P}_{0}(\mathfrak{F}, t)$$

Démonstration. - Soient K et K les subdivisions cellulaires cano-

niques des variétés  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  et  $\mathbf{R}_{n,m}$  définies dans le même espace numérique  $\mathbf{R}^{n+m}$  par rapport au même système de coordonnées (x). La projection  $\varphi$  est une application cellulaire de  $\hat{\mathbf{K}}$  sur  $\mathbf{K}$  telle qu'on ait algébriquement,

$$\varphi \dot{\mathbf{U}}_{\omega} = \varphi \overline{\mathbf{U}}_{\omega} = \mathbf{U}_{\omega}.$$

D'après  $(4)^*$ ,  $(5)^*$  § 1, (34), (34') § 3 et (4) § 4 de chap. 1, on en déduit

$$\begin{array}{l} \phi^*\{\omega\}_0 \!=\! (-1)^{\lambda(\omega)} \! \phi^* \! U_\omega \!=\! (-1)^{\lambda(\omega)} \! [\dot{U}_\omega \!+\! \overline{U}_\omega] \\ =\! (-1)^{\mu(\omega)} \! [\dot{U}_\omega \!+\! (-1)^{\omega(i_2)+i_2+m} \overline{U}_\omega] \\ =\! \{\omega\}_0^*, \end{array}$$

où  $\omega \in \Omega_1^*(n, m)$ , n > p. D'où

$$\varphi^*\{\omega\}_0 = \{\omega\}_0^*, \qquad \omega \in \Omega_1^*(n, m).$$

De même,

$$\varphi^*\{\omega\}_2 = \{\omega\}_2^{\hat{}}, \qquad \omega \in \Omega(n, m).$$

Supposons que  $\mathfrak{F}' \cong f'^* \hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$ . Alors  $\mathfrak{F} \cong f^* \mathfrak{R}_{n,m}$  où  $f = \varrho f'$ .

$$\{\omega\}_{i}(\mathfrak{F}) = \int_{i}^{*} \{\omega\}_{i} = \int_{i}^{*} \varphi^{*}\{\omega\}_{i}$$

$$= \int_{i}^{*} \{\omega\}_{i}^{*} = \{\omega\}_{i}^{*}(\mathfrak{F}'), \quad i = 0, 2.$$
C. q. f. d.

Théorème 7. — Si la  $O'_m$ -structure  $\mathfrak{F}'$  (m=2m') est subordonnée à la  $O'_m$ -structure  $\mathfrak{F}$ , on a

$$\begin{array}{ll}
(8)_i & \underline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \underline{C}_2(\mathfrak{F}', t), \\
(8)_2 & \overline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \overline{C}_2(\mathfrak{F}', t).
\end{array}$$

Démonstration. — Soient  $\hat{R}_{n,m}$  et  $C_{n,m}$  (n=2n', m=2m') les variétés grassmanniennes définies respectivement dans l'espace numérique  $R^{n+m}$  et dans l'espace unitaire  $C^{n'+m'}$  associé à  $R^{n+m}$ . Soit  $\varphi': C_{n,m} \to \hat{R}_{n,m}$  l'application canonique définie au début de cette section. Puisque  $\tilde{w}_{2k+1}^m$  et  $\{w_{2k+1}^m\}_2^n$  sont de dimension impaire, il est évident que

(9) 
$$\varphi'^* \{ \widetilde{\omega}_{2k+1}^m \}_2^{\hat{}} = 0, \qquad \varphi'^* \{ \omega_{2k+1}^m \}_2^{\hat{}} = 0.$$

Prenons maintenant dans  $\mathbb{R}^{n+m}$  un sous-espace  $\mathbb{R}^{n+2k+1}$  de dimen-

CLASSES CARACTÉI

sion n-2k-1complexe  $R^{n-2k+1}$ complexe n'-k-1de dimension m t

(01)

définit un cycle | complexes Z de di

(11)

définit un cycle [
(11) et (10) son  $R^{n-2k+1}$  et T. II .  $[\overline{\omega}_{2k}^{m*}]_2^2$  avec la sousD'où

(15)

Puisque F' est :

où  $f: \mathbf{B} \to \mathbf{\hat{R}}_{n,m,j}$  ainsi que de  $\mathfrak{F}'$ . O

ĬÑ.

En les combinant de Pour démontrer de dimension  $n+\frac{1}{R^{n+2k-1}}$  dans un s n'+k-1. Les élé

(13)

définit un cycle  $\left[\omega_{v}^{m}\right]$ 

(14)

définit un cycle  $[\omega_k^m]$  deux conditions (13

le même espace numée coordonnées (x). La le K sur K telle qu'on

) § 4 de chap, 1, on en

$$\frac{\partial \left[\ddot{\mathbf{U}}_{\omega} + \overline{\mathbf{U}}_{\omega}\right]}{\partial + i\mathbf{s} + m\overline{\mathbf{U}}_{\omega}}$$

m).

m).

 $\{i, j\}_i$  $\{i, j\}_i$ 

=2m') est sübordonnée

=2n', m=2m') les rement dans l'espace n' associé à  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Soit tie au début de cette dimension impaire, il

 $_{2}^{\prime}==0$ .

ice  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$  de dimen-

classes canacténistiques des structures fibrées sphériques 47 sion n-2k+1 tel que la somme de  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$  et de son conjugué complexe  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$  soit un espace complexe T de dimension complexe n'-k+1. L'ensemble des espaces vectoriels orientés X de dimension m tel que

(10) 
$$\dim_{\cdot} (X \cap \mathbb{R}^{n-2k+1}) \geqslant 1$$

définit un cycle  $[\tilde{\omega}_{2k}^{m*}]_{2}^{h} \in [\tilde{\omega}_{2k}^{m*}]_{2}^{h}$ . De même, l'ensemble des espaces complexes Z de dimension complexe m' tel que

$$(11) \qquad \dim_{\cdot} (Z \cap T) \geqslant 2$$

définit un cycle  $[\overline{\omega}_k^{m^*}]_2^c \in [\overline{\omega}_k^{m^*}]_2^c$ . Pour un  $X = \phi'(Z)$  les conditions (11) et (10) sont équivalentes grâce à notre choix des espaces  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$  et T. Il en résulte que l'intersection dans  $\mathbb{R}_{n,m}^*$  du cycle  $[\overline{\omega}_{2k}^{m^*}]_2^c$  avec la sous-variété  $\phi' \mathbf{C}_{n,m}$  est le cycle  $\phi'[\overline{\omega}_k^{m^*}]_2^c$  dans  $\phi' \mathbf{C}_{n,m}$ . D'où

$$\varphi'^* \left\{ \bar{\omega}_{2k}^m \right\}_2^{'} = \left\{ \bar{\omega}_k^{m'} \right\}_2^c.$$

Puisque  $\mathfrak{F}'$  est subordonnée à  $\mathfrak{F}$ , on a  $\mathfrak{F}' = f'^*\mathfrak{F}_{n,m}$  et

$$\mathfrak{F} = f^* \hat{\mathfrak{N}}_{n,m}$$

où  $f: B \to \hat{R}_{n,m}$ ,  $f': B \to C_{n,m}$  et  $f = \varphi'f'$ , B étant la base de Fainsi que de F'. On déduit alors de (9) et (12):

$$\overline{W}_{\scriptscriptstyle 2}^{\scriptscriptstyle 2k+1}(\mathfrak{F}) = \hspace{-0.5cm} \circ, \qquad \overline{W}_{\scriptscriptstyle 2}^{\scriptscriptstyle 2k}(\mathfrak{F}) = \overline{C}_{\scriptscriptstyle 2}^{\scriptscriptstyle 2k}(\mathfrak{F}').$$

En les combinant dans une seule formule, on obtient (8)<sub>a</sub>.

Pour démontrer (8), prenons dans  $\mathbb{R}^{n+m}$  un sous-espace  $\mathbb{R}^{n+2k-1}$  de dimension n+2k-1 qui rencontre son conjugué complexe  $\mathbb{R}^{n+2k-1}$  dans un sous-espace complexe  $\mathbb{T}'$  de dimension complexe n'+k-1. Les éléments  $X \in \mathring{\mathbb{R}}_{n,m}$  tel que

(13) 
$$\dim_{\cdot} (X \cap \mathbb{R}^{n+2k-1}) \geqslant 2k,$$

définit un cycle  $[\omega_{2k}^{m^*}]_2^{\wedge} \in [\omega_{2k}^{m^*}]_2^{\wedge}$ . De même, les éléments  $Z \in \mathbb{C}_{n,m}$  tel que

(14) 
$$\dim_{\cdot} (\mathbb{Z}_{\cap} \mathbf{T}') \geqslant 2k,$$

définit un cycle  $[\omega_k^{m^*}]_2^c \in [\omega_k^{m^*}]_2^c$ . Il est évident que pour  $X = \varphi'(Z)$  les deux conditions (13) et (14) sont équivalentes. On en déduit

$$\varphi'^* \{ \omega_{2k}^m \}_2^* = \{ \omega_k^{m'} \}_2^c,$$

et par conséquent

$$(15) W_{\frac{3}{2}}^{2k}(\mathfrak{F}) = C_{2}^{2k}(\mathfrak{F}').$$

La formule (8), est une conséquence de (9) et (15). C. q. f. d.

Le théorème implique quelques conditions nécessaires pour qu'une  $O_m$ -structure  $\mathfrak{F}$  admette une  $O_m$ -structure subordonnée. Par exemple il est nécessaire que

$$W_{2}^{2k+1}(\mathfrak{F}) = \overline{W}_{2}^{2k+1}(\mathfrak{F}) = 0.$$

Nous donnerons plus loin un exemple qui montre que ces conditions ne sont pas triviales, même pour les structures associées aux variétés différentiables orientables. Pour obtenir des conditions plus fortes il faut considérer le type d'homologie à coefficients entiers de l'application  $\varphi'$  que nous déterminerons dans la section suivante. Bien que ce type d'homologie soit un peu difficile à déterminer pour  $\varphi'$ , on peut le déterminer complètement pour  $\varphi''$ . On démontre en effet :

Théorème 8. — Si la  $O_m^r$ -structure  $\mathfrak{F}'$  sur la base B est subordonnée à la  $O_m'$ -structure  $\mathfrak{F}$ , on a:

$$\frac{\mathbf{C}_{v}(\mathfrak{F}, t) = \mathbf{Q}_{v}(\mathfrak{F}', t)}{\overline{\mathbf{C}}_{v}(\mathfrak{F}, t) = \overline{\mathbf{Q}}_{v}(\mathfrak{F}', t)}.$$

§ 4. — Étude de l'application canonique 
$$\varphi': \mathbb{C}_{n,m} \to \hat{\mathbb{R}}_{n,m}$$
  $(n=2n', m=2m').$ 

Pour déterminer le type d'homologie à coefficients entiers de l'application canonique  $\varphi': \mathbb{C}_{n,m} \to \hat{\mathbb{R}}_{n,m}$  il suffit en général de déterminer  $\varphi'^*\{\omega_{2k,2k}^m\}_0^*$  ou  $\varphi'^*\{\overline{\omega_{2k,2k}^m}\}_0^*$  et  $\varphi'^*\{\omega_m^m\}_0^*$ . Puisque l'ensemble des cycles  $[\omega']_0^*$ ,  $d(\omega') = 2k$ , forme une base d'homologie de dimension 4k dans  $\mathbb{C}_{n,m}$ , il suffit pour cela de déterminer les indices d'intersection:

Nous définissons les cycles  $[\omega']_0^c$  par rapport à un système de coordonnées unitaires  $(z) = (z_1, \ldots, z_{n'+m'})$  choisi dans  $\mathbb{C}^{n'+m'}$  une fois pour

CLASSES CARACTÉR

toutes. Pourtant p rons dans  $\mathbb{R}^{n+m}$  d appropriés permet et que nous préci explicites entre les teurs dans  $\mathbb{C}^{n'+m'}$ , nées choisis respe cycles seront repré ou (1) § 5 de chap

LEMME.

Démonstration.

$$\begin{cases}
z_i = x \\
z_j = x_{n+1} \\
z_j = x_{2j}
\end{cases}$$

Pour une fonce  $\omega'(1) = 0$  ou bien chaque élément Zé cause de la premiè  $[\omega_m^{m*}]_0^2$  sont contenvectour  $e_{n+m}$ , on vocumun, donc

Dans le deuxième des espaces complet

On voit que le ser  $[\omega_m^{m*}]_o^*$  est, d'après  $\{g_2, \ldots, g_{m'+1}, \text{ ou l'}\}$   $\{e_n, \ldots, e_{n+m-1}\}$ ,  $U = U_{o}$ , ainsi que Nous rappelons que sentés par les équar

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

49

(9) et (15). G. q. f. d.

tions nécessaires pour cture subordonnée. Par

ΞO.

montre que ces condistructures associées aux enir des conditions plus à à coefficients entiers de ans la section suivante, sile à déterminer pour  $\phi'$ , . On démontre en effet :

ur la base B est subor-

que 
$$\varphi' \colon \mathbb{C}_{n,m} \to \hat{\mathbb{R}}_{n,m}$$
).

coefficients entiers de flit en général de déter-Puisque l'ensemble des omologie de dimension er les indices d'inter-

$$\omega' \in \Omega(n', m');$$

$$\omega' \in \Omega(n', m').$$

t à un système de coorins C<sup>n'+m'</sup> une fois pour toutes. Pourtant pour définir les cycles  $[\bar{\omega}_{2k,2k}^m]_0^*$  et  $[\omega_m^m]_0^*$  nous choisirons dans  $\mathbb{R}^{n+m}$  des systèmes de coordonnées  $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$  appropriés permettant la détermination des indices d'intersection et que nous préciserons chaque fois par la donnée des relations explicites entre les  $z_i$  et les  $x_i$ . Nous désignerons les bases des vecteurs dans  $\mathbb{C}^{n'+m'}$  et  $\mathbb{R}^{n+m}$  correspondant aux systèmes de coordonnées choisis respectivement par  $(g_i)$  et  $(e_i)$ . Remarquons que les cycles seront représentés par les pseudo-variétés définies par (z) § 3 ou (z) § 5 de chap. 1.

Lemme. 
$$\varphi'^* \left\{ \omega_m^m \right\}_0^* = \left( -1 \right)^{m'} \left\{ \omega_{m'}^{m'} \right\}_0^c.$$

Démonstration. Choisissons les coordonnées  $(x_i)$  tel que

$$\begin{cases} z_{i} = x_{n-1} + ix_{n+m}, \\ z_{j} = x_{n+2j-4} + ix_{n+2j-3}, & j = 2, \dots, m' \to 1, \\ z_{j} = x_{2j-m-3} + ix_{2j-m-2}, & j = m' + 2, \dots, n' + m'. \end{cases}$$

Pour une fonction  $\omega' \in \Omega(n', m')$  avec  $d(\omega') = m'$  on a ou bien  $\omega'(1) = 0$  ou bien  $\omega'(i) = 1$ ,  $i = 1, \ldots, m'$ . Dans le premier cas chaque élément  $Z \in [\omega']_0^*$  contient le vecteur  $g_1$  et donc  $e_{n-1}$  et  $e_{n+m}$  à cause de la première équation de (1). Puisque tous les éléments de  $[\omega_m^{m*}]_0^*$  sont contenus dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+m-1}$  qui ne contient pas le vecteur  $e_{n+m}$ , on voit que  $[\omega_m^{m*}]_0^*$  et  $\varphi'([\omega']_0)$  n'ont aucun élément en commun, donc

(2) 
$$I_0([\omega_m^{n*}]_0^{\hat{}}, \varphi'[\omega']_0^{\hat{}}) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega'(\mathfrak{1}) = 0.$$

Dans le deuxième cas  $\omega'(i) = 1$ , i = 1, ..., m',  $[\omega_m^{m'}]_0^c$  est l'ensemble des espaces complexes de dimension complexe m' contenus dans

$$C^{m'+1}: z_{m'+2} = \ldots = z_{n'+m'} = 0.$$

On voit que le seul élément commun aux ensembles  $\varphi'([\omega_m^m]_0^c)$  et  $[\omega_m^{m*}]_0^{\alpha}$  est, d'après (1), l'espace complexe déterminé par les vecteurs  $g_2, \ldots, g_{m'+1}$ , ou l'espace orienté déterminé par la suite de vecteurs  $\{e_n, \ldots, e_{n+m-1}\}$ , c'est-à-dire l'élément central  $\ddot{\mathbf{X}}_{\omega}$  du voisinage  $\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}_{\omega}$ , ainsi que du voisinage  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\omega}$ , où  $\omega = \omega_m^{m*}$ ,  $\omega' = \omega_m^{m'}$ . Nous rappelons que les éléments du voisinage  $\ddot{\mathbf{N}} = \ddot{\mathbf{N}}_{\omega}$  sont représentés par les équations :

$$x_{7} = \sum \xi_{ji}x_{i}^{-},$$
  
 $\{i\} = \{n, n+1, ..., n+m-1\},$   
 $\{j\} = \{1, ..., n-1, n+m\}.$ 

Considérons les coordonnées normales  $(\xi_{ji})$  de  $\tilde{N}$  comme un système de coordonnées dans un espace numérique; soit  $(u_{ji})$  la base de vecteurs correspondante. Le voisinage  $\tilde{N}$  est alors orienté par la séquence :

$$\mathbf{A} = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}; u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}; \ldots u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}\}.$$

Le voisinage  $\vec{\mathbf{U}}$  est une variété linéaire dans  $\vec{\mathbf{N}}$  représentée par

$$\xi_{ni} = \ldots = \xi_{nm} = 0$$

dont l'orientation est déterminée par la suite des vecteurs suivants :

$$B = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}; \ldots, u_{n-1,i_1}, \ldots, u_{n-1,m}\}.$$

Les éléments Z de W sont représentées par les équations :

$$\begin{cases} z_1 = \xi_{11}z_2 + \ldots + \xi_{1m'}z_{m'+1}, \\ z_{m'+2} = \ldots = z_{n'+m'} = 0. \end{cases}$$

En posant  $\xi_{ji} = \xi_{ji} + i\xi_{ji}$ ,  $\xi_{ji}$  et  $\xi_{ji}$  réclles,  $\phi'(Z)$  est défini par les équations :

$$\begin{cases} x_1 = \dots = x_{n-2} = 0, \\ x_{n-1} = \xi_{11} x_n - \xi_{11} x_{n+1} + \dots + \xi_{1m'} x_{n+m-2} - \xi_{1m'} x_{n+m-1}, \\ x_{n+m} = \xi_{11} x_n + \xi_{11} x_{n+1} + \dots + \xi_{1m'} x_{n+m-2} + \xi_{1m'} x_{n+m-1}. \end{cases}$$

L'ensemble  $\phi'(W)$  est donc aussi une variété linéaire dont l'orientation naturelle est déterminée par la suite des vecteurs suivante :

$$C = \{u_{n-1,1} + u_{n,2}, u_{n,1} - u_{n-1,2}, \dots, u_{n-1,m-1} + u_{n,m}, u_{n,m-1} - u_{n-1,m}\}.$$

En comparant avec les systèmes A et B, on trouve

$$\overset{\mathbf{t}}{\mathbf{I}}(\overset{\mathbf{t}}{\mathbf{U}}, \varphi'\mathbf{W}) = (-1)^{m'}, \quad \text{ou} \\
\overset{\mathbf{T}}{\mathbf{I}}([\omega_m^{m*}]_0^*, \varphi'[\omega_m^{m'}]_0^*) = (-1)^{m'}, \quad \text{ou}$$

où  $\tilde{I}$  est l'indice d'intersection calculé dans  $\tilde{N}$ . D'après proposition 1 § 3 chap. 1,  $\tilde{I}$  est le même que l'indice d'intersection  $I_0$  calculé dans la variété  $\hat{R}_{n,m}$  orientée par rapport au système de coordonnées (x), puisque m est pair. Il en résulte

(3) 
$$I_{0}([\omega_{m}^{m*}]_{0}^{*}, \varphi'[\omega_{m'}^{m'}]_{0}^{c}) = (-1)^{m'}.$$

Notre lemme est évidemment une conséquence de (2) et (3), C. q. f. d. CLASSES C

Détermi

(4)où  $\overline{\gamma} = \varphi \varphi'$   $d(\omega) = 2k,$ dimension

(5)

οù

(6)

(7)

Démontr

(8)

En effet, ce cas on a

ω'(m' d'où les iné;

 $\omega'(m'-1)$ Il est donc t

 $(x) = (x_1, \dots$   $G^s$  étant défi

(a) R<sup>h-2k</sup>
 (b) l'inter

 $2\omega'(m') - 2k$ (c) Y no

complexe ent

Le cycle [i représenté g XeR<sub>n,m</sub> satisfi

De même,

(ii) de N comme un sysrique; soit  $(u_{ji})$  la base de est alors orienté par la

$$\ldots u_{n1}, \ldots, u_{nm}$$
.

dans Ñ représentée par

e des vecteurs suivants :

$$\{1,\ldots,u_{n-1,m}\}.$$

ar les équations :

, φ'(Z) est défini par les

$$x_{m-2} - \xi_{1m}, x_{n+m-1}, x_{m-2} + \xi_{1m}, x_{n+m-1}.$$

été linéaire dont l'orienles vecteurs suivante :

$$u_{n,m}, u_{n,m-1}-u_{n-1,m}\}.$$

on trouve

$$(1)^{m'}$$
, ou

$$1)^{m'}$$
.

 D'après proposition 1 d'intersection 🗓 calculé système de coordonnées

équence de (2) et (3), C. q. f. d.

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES Déterminons maintenant  $\phi'^* \{ \overline{\omega}_{2k,2k}^m \}_0^*$ . Remarquons d'abord qu'on a

où  $\bar{\gamma} = \varphi \varphi' : \mathbf{C}_{n,m} \to \mathbf{R}_{n,m}$ . Puisque l'ensemble des classes  $\{\omega\}_0^c$  avec  $d(\omega) = 2k$ ,  $\omega \in \Omega(n'm')$ , forme une base d'homologie de  $\mathbf{C}_{n,m}$  pour la dimension 4k, on a

(5) 
$$\varphi^* \{ \overline{\omega}_{2k,2k}^m \}_0 = \sum_{h=0}^k \varepsilon_{h,k} \{ \overline{\omega}_{h,2k-h}' \}_0^s + \sum_{\omega'} \varepsilon_{\omega'} \{ \omega' \}_0^s,$$

οù

(6) 
$$\begin{cases} \overline{\omega}'_{h,2k-h}(\mathbf{I}) = \dots = \overline{\omega}'_{h,2k-h}(m'-2) = 0, \\ \overline{\omega}'_{h,2k-h}(m'-1) = h, \quad \overline{\omega}'_{h,2k-h}(m') = 2k - h, \\ \varepsilon_{h,k} = \mathbf{I}_{0}([\overline{\omega}_{2k,2k}^{m *}]_{0}, \quad \overline{\varphi}[\overline{\omega}'_{h,2k-h}]_{0}^{\varepsilon}); \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \omega'(m'-2) > 0, \quad d(\omega') = 2k, \\ \varepsilon_{\omega'} = \mathbf{I}_{0}([\overline{\omega}_{2k,2k}^{m *}]_{0}, \quad \overline{\varphi}[\omega']_{0}^{\varepsilon}). \end{cases}$$

(7) 
$$\begin{cases} \omega'(m'-2) > 0, & d(\omega') = 2k, \\ \varepsilon_{\omega'} = I_{\mathfrak{g}}([\overline{\omega}_{2k,2k}^{m}]_{\mathfrak{g}}, & \overline{\varphi}[\omega']_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}}). \end{cases}$$

Démontrons d'abord que

$$\epsilon_{\omega'} = 0$$

En effet, pour que la fonction  $\omega'$  existe, il faut que m > 4. Dans će cas on a

$$\omega'(m'-2) > 0$$
,  $d(\omega') = 2k$ ,  $\omega'(m'-1) \leqslant \omega'(m')$ ,

d'où les inégalités

$$\omega'(m'-1)+\omega'(m')\leqslant 2k-1\,,\qquad \omega'(m'-1)\leqslant k-1\,.$$

Il est donc toujours possible de choisir le système de coordonnées  $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$  et  $z = (z_1, \ldots, z_{n'+m'})$  tels que, les espaces  $\mathbb{R}^s$  et C' étant définis comme dans § 3 et § 5 de chap. Ton ait : (a)  $\mathbb{R}^{h-2k+2}$  et  $\mathbb{C}^{\omega'(m'-1)+m'-1}$  sont disjoints ;

(b) l'intersection de  $\mathbb{R}^{n-2k+2}$  et  $\mathbb{C}^{\omega(m)+m'}$ , soit Y, est de dimension  $2\omega'(m') - 2k + 2$ ;

(c) Y ne confient aucune droite complexe et le sous-espace complexe engendré par Y n'a aucun vecteur en commun avec

$$C\omega'(m'-1)+m'-1$$

Le cycle  $\left[\frac{m}{\log k, 2k}\right]_0$  défini dans  $R_{n,m}$  par rapport au système (x) est représenté géométriquement par la pseudo-variété des éléments  $X{\in}\mathbf{R}_{n,\,m}$  satisfaisant à la condition

dim. 
$$(X \cap \mathbb{R}^{n-2k+2}) \geqslant 2$$
.

De même, le cycle  $[\omega']_0^c$  défini dans  $\mathbf{C}_{a,m}$  par rapport au système

(z) est représenté géométriquement par la pseudo-variété des éléments  $Z \in C_{n,m}$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \dim, & (Z \cap C^{\omega'(m'-1)+m'-1}) \geqslant m-2, \\ Z \subset C^{\omega(m')+m'}, & \text{etc.} \end{cases}$$

Il en résulte que, en tenant compte de (a), pour un élément  $\overline{\varphi}(Z) = X$  commun à  $[\overline{\omega}_{2k,2k}^m]_0$  et  $\overline{\varphi}[\omega']_0$ , X a une intersection avec  $C^{\omega(m'-1)+m'-1}$  d'une dimension égale à m-2 et une intersection avec  $\mathbb{R}^{n-2k+2}$  d'une dimension égale à 2. X étant complexe, sa dimension, d'après (b) et (c), est alors nécessairement égale à (m-2)+2+2=m+2, ce qui est absurde. Par conséquent les deux cycles ne peuvent avoir aucun élément en commun et la formulc (8) est ainsi démontrée.

Il en résulte que l'équation (5) se réduit à

(8) 
$$\overline{\varphi}^* \left\{ \overline{\omega}_{2k,2k}^m \right\}_0 = \sum_{h=0}^k \varepsilon_{h,k} \left\{ \overline{\omega}_{h,2k-h}' \right\}_0^{\epsilon};$$

οù

(9) 
$$\epsilon_{h,k} = I_0([\overline{\omega}_{2k,2k}^m]_0, \ \overline{\varphi}[\overline{\omega}_{h,2k-h}]_0^c).$$

Pour déterminer  $\epsilon_{h,k}$ , prenons le système de coordonnées (x)défini par :

$$(10), z_j = x_{n+2j+3} + ix_{n+2j+4}, j = 1, ..., m' - 2;$$

$$(10)_2 z_j = x_{n-m+2j-2h+5} - ix_{n-m+2j-2h+6},$$

$$j=m'-1,\ldots,m'+h-2;$$

$$(10)_3 z_j = x_{n-m'+j+h-4k+1} + ix_{n-m'+j-2k-h+3}, j = m'+h, ..., m'+2k-h-1;$$

$$j = m' + h, \dots, m' + 2k - h - 1$$

$$(10)_4 - z_j = x_{2j-m-4k+2h-4} + ix_{2j-m-4k+2h}, j = m' + 2k - h + 1, ..., n' + m';$$

$$(10)_{5} z_{m'+h-1} = x_{n-2k+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{n+4} + x_{n-2k+1});$$

$$(10)_6 z_{m'+2k-h} = x_{n-2k+1} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} (-x_{n+3} + x_{n-2k+2}).$$

Pour h = 0, on supprime le système (10)<sub>2</sub>, et pour h = k, on supprime (10),.

Nous avons ainsi choisi les systèmes de coordonnées (z) et (x) de telle façon que, comme il est facile à vérifier, le seul élément commun à  $[\overline{\omega}_{2k,2k}^{m^*}]_0$  et  $\overline{\varphi}[\overline{\omega}_{h,2k-h}^*]_0^c$  soit l'élément central du voisinage  $N_{\overline{\omega}} = N$  ou  $U_{\overline{\omega}} = U$ , où  $\overline{\omega} = \overline{\omega}_{2k,2k}^{m^*}$ , qui est aussi l'élément central du CLASSES CARAC

voisinage Work ments sont de I

$$\begin{cases} x_j = \xi_{j1} x_{n-1} \\ x_{j+2} = \xi_{j1} x_{n-1} \end{cases}$$

La variété lir (II)

Dans l'espace vecteurs corress minées respect?  $\Lambda == \{u_{i_1}, \ldots u_{i_k}\}$  $\mathbf{B} == \{u_{ii}, \dots u_{ii}\}$ 

Les éléments  $z_{j+m'-2} = \zeta_{j,m'}$  $z_{j \cdots m'-1} =$ on, d'après (10)

$$x_{n+h-4k+j} =$$

$$x_{n-2k-h+j+2}$$

$$x_{n-2h+2j+1} = \left(-\right.$$

$$x_{n-2h+2j+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

seudo-yariété des éléntes :

a), pour un élément une intersection avec 2 et une intersection X étant complexe, sa écessairement égale à e. Par conséquent les en commun et la for-

 $_{
m J_0)}.$ e de coordonnées (x)

$$j = 1, ..., m' - 2;$$
 $+2j-2h+6;$ 
 $-1, ..., m' + h - 2;$ 
 $-m'+j-2k-h+3;$ 
 $..., m' + 2k - h - 1;$ 
 $m-4k+2h;$ 
 $-h-1, ..., n' + m';$ 
 $x_{n-2k+4};$ 

$$+x_{n-2k+2}$$
).

et pour h == k, on sup-

ordonnées (z) et (x) de le seul élément comcentral du voisinage si l'élément central du classes caractéristiques des structures fibrées sphériques .53 voisinage  $W_{\omega'} = W$ , où  $\omega' = \overline{\omega}_{h,2k-h}$ . Dans le voisinage N les éléments sont de la forme :

$$\begin{cases} x_{j} = \xi_{j1}x_{n-2k+1} + \xi_{j2}x_{n-2k+2} + \xi_{j3}x_{n+3} + \dots + \xi_{jm}x_{n+m}, \\ j = 1, \dots, n-2k; \\ x_{j+2} = \xi_{j1}x_{n-2k+1} + \xi_{j2}x_{n-2k+2} + \xi_{j3}x_{n+3} + \dots + \xi_{jm}x_{n+m}, \\ j = n-2k+1, \dots, n. \end{cases}$$

La variété linéaire U dans N est représentée par :

(11) 
$$\xi_{ji} = \xi_{j2} = 0$$
,  $j = n - 2k - 1, ..., n$ .

Dans l'espace vectoriel de coordonnées  $(\xi_{ji})$  soit  $(u_{ji})$  la base de vecteurs correspondante, Les orientations de N et U sont alors déterminées respectivement par les suites des vecteurs suivantes :

$$\Lambda = \{u_{i1}, \dots u_{im}; \dots u_{ni}, \dots, u_{nm}\}; 
B = \{u_{i1}, \dots u_{im}; \dots u_{n-2k,1}, \dots, u_{n-2k,m}; 
u_{n-2k+1,3}, \dots, u_{n-2k+4,m}; \dots, u_{n3}, \dots, u_{nm}\}.$$

Les éléments du voisinage W sont de la forme :

$$\begin{cases} z_{j+m'-2} = \zeta_{j,m'-1} z_{m'+h-1} + \zeta_{j,m'} z_{m'+2k-h}, & j = 1, ..., h; \\ z_{j+m'-1} = & \zeta_{j,m'} z_{m'+2k-h}, & j = h+1, ..., 2k-h; \\ z_{j} = 0, & j = m' + 2k - h + 1, ..., n' + m', \end{cases}$$

ou, d'après (10), en posant  $\zeta_{ji} = \zeta'_{ji} + i \zeta''_{ji}$ ,  $\zeta'_{ji}$  et  $\zeta''_{ji}$  réelles.

$$x_{n-4k+2h} = 0,$$

$$x_{n-4k+j} = \zeta'_{jm} x_{n-2k+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta''_{j,m} x_{n-2k+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta''_{j,m} x_{n+2},$$

$$j = h + 1, \dots, 2k - h$$

$$x_{n-2k-h+j+2} = \zeta_{j,m}'' x_{n-2k+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{j,m}' x_{n-2k+2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{j,m}' x_{n+3},$$

$$j = h+1, \dots, 2k-h;$$

$$x_{n-2h+2j+1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{j,m'-1}'' + \zeta_{j,m'}'\right) x_{n-2k+1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{j,m'}'' + \zeta_{j,m-1}'\right) x_{n-2k+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{j,m'}'' x_{n+3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{j,m'-1}'' x_{n+4}, \quad j=1,\ldots,h;$$

$$x_{n-2h+2j+2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'-1} + \zeta''_{j,m'}\right)x_{n-2k+1} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'} + \zeta''_{j,m'-1}\right)x_{n-2k+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m}x_{n+3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'-1}x_{n+4}, \quad j = 1, \dots, h.$$

Dans l'espace vectoriel complexe de coordonnées complexes  $(\zeta_{jl})$  soit  $(w_{jl})$  la base de vecteurs correspondante. Le système de vecteurs contenus dans W:

$$\{ w_{1,m'-1}, \ \mathbf{i}w_{1,m'-1}, \dots w_{h,m'-1}, \ \mathbf{i}w_{h,m'-1}; \\ w_{1,m'}, \ \mathbf{i}w_{1m'}, \dots w_{2k-h,m'}, \ \mathbf{i}w_{2k-h,m'} \}$$

correspond à un système de vecteurs contenus dans  $\bar{\phi}W$ , qui par son ordre détermine aussi l'orientation naturelle de  $\bar{\phi}W$ . La projection de ce système sur la variété linéaire complètement orthogonale à (11) dans N est le système suivant :

$$C = \left\{ \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-2h+2,1} + u_{n-2h+1,2}, -\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-2h+1,1} + u_{n-2h+2,2}; \dots \right.$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n,1} + u_{n-1,2} ; -\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-1,1} + u_{n,2} ;$$

$$u_{n-2h+1,1} + \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-2h+2,2}, -\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-2k+1,2} + u_{n-2k+2,1}; \dots$$

$$u_{n-1,1} + \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n,2} ; -\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-1,2} + u_{n,1} ;$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-2k+1,2}, u_{n-2k+1,1}; \dots \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} u_{n-2h,2}, u_{n-2h,1} \right\}.$$

On peut vérisser que la suite composée {B, C} détermine la même orientation que A ou l'orientation opposée selon que h est pair ou impair. Par conséquent (cf. Proposition 1, § 3, chap. 1).

$$I_0(U, \overline{\varphi}W) = I_{\overline{\omega},0}(U, \varphi W) = (-1)^h,$$
  
 $\epsilon_{h,k} = (-1)^h \quad \text{(cf. (9))}.$ 

ou

L'équation (8) devient alors

(12) 
$$\overline{\varphi}^* \{ \overline{\omega}_{2k,2k}^m \}_0 = \sum_{h=0}^k (-1)^h \{ \overline{\omega}_{h,2k-h}^i \}_0^e.$$

D'après les formules de multiplication pour l'anneau de cohomologie dans  $C_{n,m}$  (cf. § 5, chap. 1), on a

$$(13) \quad \{\overline{\omega}_{h,2k-h}^{\prime}\}_{0}^{\varepsilon} = \{\overline{\omega}_{h}^{m}\}_{0}^{\varepsilon} \cup \{\overline{\omega}_{2k-h}^{m^{\prime}}\}_{0}^{\varepsilon} - \{\overline{\omega}_{h-1}^{m^{\prime}}\}_{0}^{\varepsilon} \cup \{\overline{\omega}_{2k-h+1}^{m^{\prime}}\}_{0}^{\varepsilon}.$$

On déduit de (12) et (13) par une simple réduction que

$$\overline{\varphi}^* \left\{ \overline{\omega}_{2k,2k}^m \right\}_0 = \sum_{h=0}^{2k} \left( -1 \right)^h \left\{ \overline{\omega}_h^m \right\}_0^c \cup \left\{ \overline{\omega}_{2k-h}^{m'} \right\}_0^c,$$

CLASSES CARA

ou, d'après (4

Supposons tant une  $O'_m$ : tion  $f: B \rightarrow \emptyset$ 

 $\{ \widetilde{\omega}_{2k,\,2k}^m \}$ 

ou, d'après (6)

En utilisant définis par (6) une seule forn

Тикопеми 9 subordonnée ©

et

(18)

Évidemmen lemme. La foi suivantes:

Pour la dém et, en utilisant obtenir une for nous allons dér théorème de du

Démonstratic Supposons c de la base B lonnées complexes (ζη) Le système de vecteurs

...  $w_{2k-h,m'}, iw_{2k-h,m'}$ nus dans  $\tilde{\phi}W$ , qui par elle de ¢W. La projeciplètement orthogonale

$$2h+1,1+1,\dots 2h+2,2;\dots$$

$$2k+1,2+1-u_{n-2k+2,1}; \dots$$

$$u_{n,1} \leftarrow u_{n,1}$$
;

$$-2h,2, u_{n-2h,4}$$

C} détermine la même clon que h est pair ou3, chap. 1).

$$k = h \begin{cases} c \\ 0 \end{cases}$$

r l'anncau de cohomo-

$$\binom{m'}{n-1} \binom{c}{0} \cup \left\{ \frac{-m'}{(02k-h+1)} \right\} \binom{c}{0}$$

duction que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -m \\ 0 \\ 2h - h \end{array} \right\} \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array},$$

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPIJÉRIQUES ου, d'après (4),

$$(14) \qquad \varphi'^* \left\{ \overline{\omega}_{2k,2k}^m \right\}_0^s = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \left\{ \overline{\omega}_{m'}^h \right\}_0^s \cup \left\{ \overline{\omega}_{2k-h}^{m'} \right\}_0^s.$$

Supposons maintenant que S est une Om-structure sur B admettant une O'm-structure subordonnée S' induite par une application  $f: \mathbb{B} \to \mathbb{C}_{n,m}$ . On déduit de (14) (cf. théorème 4 de § 3):

$$\{\overline{\omega}_{2k,2k}^{m}\}_{0}^{'}(\mathfrak{S}) = \sum_{h=0}^{2k} (-1)\{\overline{\omega}_{h}^{m'}\}_{0}(\mathfrak{S}') \cup \{\overline{\omega}_{2k-h}^{m'}\}_{0}(\mathfrak{S}'),$$

ou, d'après (6) et (7) de § 2,

(15) 
$$\overline{P}_{\theta}^{4k}(\mathfrak{S}) = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \overline{C}_{\theta}^{2h}(\mathfrak{S}') \cup \overline{C}_{\theta}^{4k-2h}(\mathfrak{S}').$$

En utilisant le polynome de Pontrjagin et le polynome de Chern définis par (6)' et (7)' de § 2, on peut réunir les formules (15) dans une seule formule, à savoir, la formule (17) du théorème suivant;

Theorems 9. — Si une O'm-structure & admet une O'm-structure subordonnée &', on a

(16) 
$$\mathbf{P}_{\mathbf{u}}(\mathfrak{S}', t) = \mathbf{C}_{\mathbf{u}}(\mathfrak{S}', t) \cup \mathbf{C}_{\mathbf{u}}(\mathfrak{S}', \mathbf{i}t);$$

$$(17) \qquad \overline{P}_{0}(\mathfrak{S}', t) = \overline{C}_{0}(\mathfrak{S}', t) \cup \overline{C}_{0}(\mathfrak{S}', it);$$

eŧ

$$(18) \hspace{1cm} X_0^m(\mathfrak{S}) = (-1)^{m'} G_0^m(\mathfrak{S}'), \hspace{1cm} m = 2m'$$

Evidemment la formule (18) est une conséquence immédiate du lemme. La formule (16) est équivalente au système des formules suivantes:

(19) 
$$(-1)^k P_0^{4k}(\mathfrak{S}) = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h C_0^{2h}(\mathfrak{S}') \vee C_0^{4k-2h}(\mathfrak{S}').$$

Pour la démontrer, on peut partir de la formule (17) § 6 chap. 1, ct, en utilisant la méthode par laquelle nous avons démontré (17), obtenir une formule analogue à (14), et en déduire (19). Pourtant nous allons démontrer cette formule à partir de (15) à l'aide du théorème de dualité de § 2 (théorème 3).

Démonstration de (16).

Supposons que la  $O_m'$ -structure  $\mathfrak{S}'$  est induite par l'application f'de la base B dans la variété  $C_{n,m}$  définie dans l'espace unitaire  $C^{n'+m'}$  (n=2n', m=2m'). En identifiant  $C^{n'+m'}$  à l'espace numérique  $R^{n+m}$  de dimension n+m, on a les variétés  $C_{n,m}$ ,  $\hat{R}_{n,m}$  et  $\hat{R}_{m,n}$  définies dans  $C^{n'+m'}$  ou  $R^{n+m}$ . Soient

$$\begin{array}{l} b': \ C_{n,\,m} \rightarrow C_{m,\,n}, \\ b: \ \hat{R}_{n,\,m} \rightarrow \hat{R}_{m,\,n}, \\ \phi': \ C_{n,\,m} \rightarrow \hat{R}_{n,\,m}, \\ \phi'_{1}: \ C_{m,\,n} \rightarrow \hat{R}_{m,\,n}, \end{array}$$

et

les applications canoniques introduites dans  $\S$  5 chap. 1 et  $\S$  3 où  $\mathfrak{d}$  est définie par rapport à l'orientation de  $\mathbb{R}^{n+m}$  correspondant à la structure complexe de  $\mathbb{C}^{n'+m'}$ . On a

$$\varphi_i' b' = b \varphi'.$$

La formule (14) étant déjà démontrée, on obtient, en l'appliquant aux variétés  $C_{m,n}$ ,  $\hat{R}_{m,n}$  et à l'application  $\varphi_i$ , la formule suivante :

(21) 
$$\varphi_1'^* \{ \overline{\omega}_{2k,2k}^n \}_0^{\hat{}} = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \{ \overline{\omega}_h^{n'} \}_0^c \cup \{ \overline{\omega}_{2k-h}^{n'} \}_0^c.$$

D'après § 6 chap. 1, on a

(22) 
$$\begin{cases} \mathfrak{d}^* \{ \overline{\omega}_{2k,2k}^n \}_0^c = (-1)^k \{ \omega_{2k,2k}^m \}_0^c, \\ \mathfrak{d}'^* \{ \overline{\omega}_i^n \}_0^c = \{ \omega_i^m \}_0^c. \end{cases}$$

En appliquant l'opération of aux deux membres de (21) et en utilisant (20), (22), on obtient

$$(-1)^{k}\varphi'^{*}\left\{\omega_{2k,2k}^{m}\right\}_{0}^{\prime} = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^{h}\left\{\omega_{h}^{m'}\right\}_{0}^{c} \cup \left\{\omega_{2k-h}^{m'}\right\}_{0}^{c},$$

d'où les formules (19) ou, en les combinant dans une seule, la formule (16).

C. q. f. d.

LES DES V

§ 1. Les groupe Soit  $V_{n+m,m}$  la ver  $\mathbb{R}^{n+m}$ , c'est-à-dire la  $(v_j) = (v_1, \ldots, v_m)$ : relle dont la base control de la projection p applique déterminé par les versite un élément [i] élément  $[v_j] \in F$ ,

$$(1) \qquad h_l([v_j])$$

soit un élément bic on a

Il en résulte que h un seul point  $[\tilde{e}'_i]$  de

(2)

Nous remarquons e en prenant par exer

 $(1)' \qquad [\overline{e}_j] = [e_i]$ où  $e_i, \ldots, e_{n+m}$  est i

 $\mathbb{C}^{n'+m'}$  à l'espace numériétés  $\mathbb{C}_{n,\,m}$ ,  $\hat{\mathbb{R}}_{n,\,m}$  et  $\hat{\mathbb{R}}_{m,\,n}$ 

§ 5 chap. 1 et § 3 où b

on obtient, en l'applion φ', la formule sui-

 $\left\{\widetilde{\omega}_{2k-h}^{n'}\right\}_{0}^{c}.$ 

embres de (21) et en

 $\cup \left\{ \omega_{2k-h}^{m'} \right\}_{0}^{c},$ 

lans une seule, la for-

C. q. f. d.

#### CHAPITRE III

## LES PROPRIÉTÉS D'HOMOTOPIE DES VARIÉTÉS GRASMANNIENNES

§ 1. Les groupes d'homotopie des variétés  $R_{n,m}$  et  $R_{n,m}$ . Soit  $V_{n+m,m}$  la variété de Stiefel définie dans l'espace numérique  $R^{n+m}$ , c'est-à-dire la variété des suites de m vecteurs orthonormés  $(v_j) = (v_i, \ldots, v_m), v_j \in R^{n+m}$  La variété  $V_{n+m,m}$  a une fibration naturelle dont la base est la variété  $R_{n,m}$  définie dans  $R^{n+m}$ , la fibre est homéomorphe au groupe de rotation  $O_m$  de la sphère  $S_{m-1}$ , et la projection p applique  $[v_i, \ldots, v_m]$  sur l'espace vectoriel orienté déterminé par les vecteurs  $v_i, \ldots, v_m$  dans cet ordre. Soient  $\overline{F}$  la fibre sur l'espace orienté  $\overline{R}^m = p([\overline{c}_i, \ldots, \overline{c}_m])$  et supposons qu'il existe un élément  $[\overline{c}'_j] = [\overline{c}'_i, \ldots, \overline{c}'_m]$  de  $V_{n+m,m}$  tel que, pour chaque élément  $[v_j] \in F$ ,

(1) 
$$h_{i}([v_{j}]) = \left[\alpha_{j}(v_{j}\cos 1/2 \pi t + \overline{c}_{j}'\sin 1/2 \pi t)\right],$$

$$\alpha_{j} = \left(1 + v_{j} \cdot \overline{c}_{j}' \cdot \sin \pi t\right)^{\frac{1}{2}},$$

soit un élément bien défini de  $V_{n+m,m}$  pour  $0 \leqslant t \leqslant 1$ . Dans ce cas on a

$$h_0([v_j]) = [v_j], \qquad h_1([v_j]) = [\bar{e}'_j].$$

Il en résulte que  $h_t$  définit une homotopie dans  $V_{n-m,m}$  de  $\overline{F}$  sur un seul point  $[\overline{e}'_j]$  de  $V_{n+m,m}$ , c'est-à-dire,

(2) 
$$\overline{F} \subseteq o$$
 dans  $V_{n+m,m}$ 

Nous remarquons que ceci est toujours possible dans le cas  $n \ge m$ , en prenant par exemple

$$(1)'$$
  $[\bar{e}_j] = [e_1, \ldots, e_m], [\bar{e}'_j] = [e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}],$ 

où  $e_1, \ldots, e_{n+m}$  est une base de vecteurs quelconque de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Soit maintenant  $\sigma^k$  une cellule de dimension k bordée par la sphère unité  $s^{k-1}$ :  $y_1^2 + \cdots y_k^2 = 1$  dans un espace cuclidien de dimension k de coordonnées  $y_1, \ldots, y_k$ . Le point de  $\sigma^k$  de coordonnées  $y_1 t, \ldots, y_k t$ , (0  $\leq t \leq 1$ ), sera désigné par le couple (y, t). En particulier,  $(y, 1) \equiv y$  est un point de  $s^{k-1}$ . Étant donnée une application  $f: s^{k-1} \to \overline{F}$ , soit

$$h_f : \sigma^k \to \hat{\mathbf{R}}_{n,m}$$

l'application définie par l'équation

(3) 
$$h_f(y, t) = ph_{i-t}f(y), \qquad y \in s^{k-1}.$$

On a alors

$$h_j(y) = \overline{\mathbf{R}}^m$$
, et  $h_j(y, o) = p([\overline{e}'_j])$ .

Par conséquent on peut considérer  $h_f$  comme une application appartenant à un élément du groupe d'homotopie  $\pi_k(\hat{\mathbf{R}}_{n,m})$  et il est clair qu'on a ainsi un homomorphisme pour k > 1, soit:

$$H: \pi_{k-1}(\overline{F}) \rightarrow \pi_k(\hat{R}_{n,m}).$$

De même, la projection induit un homomorphisme

$$P: \pi_k(V_{n+m,m}) \to \pi_k(\hat{R}_{n,m}), \qquad k > 0$$

Supposons  $n \ge m$  de façon que la condition (2) soit vérifiée. D'après un théorème d'Eckmann, H et P sont alors des isomorphismes et on a

$$\pi_k(\hat{\mathbf{R}}_{n,m}) = \mathrm{P}\pi_k(\mathbf{V}_{n+m,m}) + \mathrm{H}\pi_{k-1}(\overline{\mathbf{F}}), \qquad k > 1, \qquad n \geqslant m$$

En faisant correspondre à chaque élément  $[v_j]$  de  $\overline{F}$  la rotation qui transforme la suite  $\overline{e}_i$ , ...,  $\overline{e}_m$  dans la suite  $v_1$ , ...,  $v_m$ , ou la matrice correspondante, on identifie  $\overline{F}$  à  $O_m$ , ou l'ensemble des matrices orthogonales unimodulaires à m lignes. La dernière formule devient alors :

(4) 
$$\pi_k(\hat{\mathbf{R}}_{n,m}) = \Pr_k(\mathbf{V}_{n+m,m}) + \mathbf{H}\pi_{k-1}(\hat{\mathbf{O}}_m), \\ k > 1, \ n \geqslant m, \ mn > 1.$$

Nous remarquons que, dans le cas n assez grand, H est indépendant du choix de  $[\tilde{e}'_j]$  et que pour définir H([f]),  $[f] \in \pi_{k-1}(O_m)$ , il suffit de supposer que  $h_f$  soit défini seulement pour  $[v_j] \in f(s^{k-1})$ .

D'après § 6, chap. 1, la variété  $\hat{\mathbf{R}}_{n,m}$  et la variété  $\hat{\mathbf{R}}_{m,n}$  définies

dans le même déterminer les utilisant les for revêtement de

Proposition π<sub>i</sub>(i

 $\pi_k(\hat{\mathbf{R}}_{n,m}) \approx \pi_k(\mathbf{I}_{n,m}) \approx \pi_k(\mathbf{I}_{n,m})$ 

Dans le cas *k* 

(5)  $\pi_k(\hat{\mathbf{R}}_{n,r})$ 

Pour m = 3

 $(6) = \pi_i(O_4^*)$ 

$$(6)' \qquad \begin{cases} \pi_i \\ \pi_3 \end{cases}$$

où  $Z_0$  est le gro Pour  $\pi_i(O_4^*)$   $\epsilon$ 

f: s1-

définies par les

$$f_{i}(y) = \begin{cases} y_{i}^{2} - y_{i} \\ 2(y_{i}y_{i}) \\ 2(y_{i}y_{i}) \end{cases}$$

$$(y \in s^{3});$$

$$f_{z}(y)$$
 =

 $y \in s^{k-1}$ .

$$=p([\bar{e}'_j]).$$

comme une application notopie  $\pi_k(\mathring{\mathbf{R}}_{n,m})$  et il estur k > 1 , soit :

phisme

, .

$$k > 0$$
.

lition (2) soit vérifiée. sont alors des isomor-

$$k > 1$$
,  $n \geqslant m$ .

 $[v_j]$  de  $\overline{F}$  la rotation suite  $v_1, \ldots, v_m$ , ou la  $O_m$ , ou l'ensemble des gues. La dernière for-

$$_{k-1}(O_m)$$
,

grand, H est indépen-([f]), [f] $\in \pi_{k-1}(O_m)$ , il t pour  $[v_j]\in f(s^{k-1})$ . a variété  $\hat{\mathbb{R}}_{m,n}$  définies classes caractéristiques des structures fibrées sphériques 59 dans le même espace  $\mathbb{R}^{n+m}$  sont homéomorphes. On peut donc déterminer les groupes d'homotopie de  $\hat{\mathbb{R}}_{n,m}$  dans le cas  $n \leq m$  en utilisant les formules (4) pour  $\hat{\mathbb{R}}_{m,n}$ . De plus, la variété  $\hat{\mathbb{R}}_{n,m}$  est un revêtement de la variété  $\hat{\mathbb{R}}_{n,m}$ . On a ainsi la proposition suivante:

Proposition 5. —

$$\begin{aligned} & \pi_{\mathbf{1}}(\hat{\mathbf{R}}_{n,\,m}) = 0, & \pi_{\mathbf{1}}(\mathbf{R}_{n,\,m}) & \cong \mathbf{Z}_{\mathbf{2}}, & nm > \mathbf{1}; \\ & \pi_{k}(\hat{\mathbf{R}}_{n,\,m}) & \approx \pi_{k}(\mathbf{R}_{n,\,m}) & \approx \pi_{k}(\mathbf{V}_{n+m,\,m}) + \pi_{k-1}(\mathbf{O}_{m}^{*}), & n \geqslant m, & k > \mathbf{1}, \\ & \pi_{k}(\hat{\mathbf{R}}_{n,\,m}) & \approx \pi_{k}(\mathbf{R}_{n,\,m}) & \approx \pi_{k}(\mathbf{V}_{n+m,\,m}) + \pi_{k-1}(\mathbf{O}_{n}^{*}), & n \leqslant m, & k > \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Dans le cas k < n la formule (4) devient:

(5) 
$$\pi_k(\hat{\mathbf{R}}_{n,m}) = \mathbf{H}\pi_{k-1}(\hat{\mathbf{O}}_m), \quad n > k > 1, \quad n \geqslant m.$$

Pour m = 4 on a:

(6) 
$$\pi_{\mathfrak{z}}(O_{4}) \otimes \mathbb{Z}_{\mathfrak{z}}, \qquad \pi_{\mathfrak{z}}(O_{4}) = 0, \qquad \pi_{\mathfrak{z}}(O_{4}) \otimes \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}} + \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$$

(6)' 
$$\begin{cases} \pi_{i}(\hat{\mathbf{R}}_{n,4}) = 0, & \pi_{2}(\hat{\mathbf{R}}_{n,4}) \approx \mathbf{Z}_{2}, \\ \pi_{3}(\hat{\mathbf{R}}_{n,4}) = 0, & \pi_{4}(\hat{\mathbf{R}}_{n,4}) \approx \mathbf{Z}_{0} + \mathbf{Z}_{0}, \end{cases} n \geqslant 4,$$

où Zo est le groupe des entiers.

Pour  $\pi_i(O_4)$  et  $\pi_3(O_4)$  on peut prendre les générateurs

$$f \colon s^1 \to \mathcal{O}_4$$
, et  $f_i \colon s^3 \to \mathcal{O}_4$ ,  $(i = 1, 2)$ 

définies par les équations suivantes:

$$f(y) = \begin{cases} y_1, & -y_2, & 0, & 0 \\ y_2, & y_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{cases} (y \in s^1),$$

$$f_{1}(y) = \begin{cases} y_{4}^{2} - y_{3}^{2} - y_{2}^{2} + y_{1}^{2}, & 2(y_{1}y_{2} - y_{3}y_{4}), & 2(y_{1}y_{3} + y_{2}y_{4}, & 0) \\ 2(y_{1}y_{2} + y_{3}y_{4}), & y_{1}^{2} - y_{3}^{2} + y_{2}^{2} - y_{1}^{2}, & 2(y_{2}y_{3} - y_{1}y_{4}), & 0 \\ 2(y_{1}y_{3} - y_{2}y_{4}), & 2(y_{1}y_{4} + y_{2}y_{3}), & y_{1}^{2} + y_{3}^{2} - y_{2}^{2} - y_{1}^{2}, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{cases},$$

$$(y \in s^{3});$$

$$f_{2}(y) = \begin{cases} y_{1}, & -y_{2}, & -y_{3}, & -y_{4} \\ y_{2}, & y_{1}, & -y_{4}, & y_{3} \\ y_{3}, & y_{4}, & y_{1}, & -y_{2} \\ y_{4}, & -y_{3}, & y_{2}, & y_{4} \end{cases}, \qquad (y \in s_{3}).$$

Aux générateurs f,  $f_i(i=1, 2)$  nous ferons correspondre les générateurs

$$h_f: \sigma^2 \to \hat{\mathbf{R}}_{n,A}, \quad \text{et} \quad h_{f_i}: \sigma_4 \to \hat{\mathbf{R}}_{n,A}(i=1, 2),$$

de  $\pi_{i}(\mathbf{\hat{R}}_{n,4})$  et  $\pi_{i}(\mathbf{\hat{R}}_{n,4})$  en précisant chaque fois l'homotopie  $h_{i}$  ou les éléments  $[\bar{e}, \ldots, \bar{e}_i]$  et  $[\bar{e}'_i, \ldots, \bar{e}'_i]$  de  $V_{n+4,4}$ . Soit  $(x) = (x_i, \ldots, x_i)$  $x_{n+4}$ ) un système de coordonnées de l'espace  $\mathbb{R}^{n+4}$  et soit  $e_i$ , ...,  $e_{n+1}$  la base de vecteurs correspondante. Nous poserons respecti-

ement:

(a) pour 
$$h_{f}$$
:  $[\bar{e}_{j}] = [e_{1}, e_{n+2}, e_{n+3}, e_{n+4}],$ 

$$[\bar{e}'_{j}] = [e_{n}, e_{n+1}, e_{n+3}, e_{n+4}];$$
(b) pour  $h_{f_{i}}$ :  $[\bar{e}_{j}] = [e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n}, e_{n+4}];$ 

(b) pour 
$$h_{f_i}$$
:  $[\bar{e}_j] = [e_{n+1}, e_{n+2}, e_3, e_{n+4}]$ ;  $[\bar{e}'_j] = [3/5 e_{n-1} - 4/5 e_{n+2}, 4/5 e_n - 3/5 e_{n+1}, e_{n+3}, e_{n+4}]$ ; (c) pour  $h_f$ :  $[\bar{e}_i] = [e_n e_n e_n]$ ,  $[e_{n+2}]$ ,  $[e_{n+3}]$ ,  $[e_{n+4}]$ ;  $[e_{n+4}]$ ;  $[e_{n+4}]$   $[e_{n+4}]$ 

(c) pour 
$$h_f$$
:  $[\bar{e}_j] = [e_1, e_2, e_3, e_{n+4}], [\bar{e}'_j] = [\bar{e}_n, e_{n+4}, e_{n+2}, e_{n+3}].$   
Les éléments  $I$ 

Les éléments  $h_f(y, t)$ ,  $y \in s^i$  et  $h_{f_s}(y, t)$ ,  $y \in s^3 (i = 1, 2)$  sont alors représentés respectivement par les équations suivantes:

(7) 
$$h_{j}(y, t)$$
:  $(y \in s^{i})$ ,  
 $\begin{cases} x_{2} = \cdots = x_{n-1} = 0, \\ x_{1} \cos 1/2 \pi t = x_{n} \cdot y_{1} \sin 1/2 \pi t + x_{n+1} \cdot y_{2} \sin 1/2 \pi t, \\ x_{n+2} \cos 1/2 \pi t = -x_{n} \cdot y_{2} \sin 1/2 \pi t + x_{n+1} \cdot y_{1} \sin 1/2 \pi t; \end{cases}$ 

$$\begin{cases} (7)_{1} & h_{f_{1}}(y, t): & (y \in s^{3}), \\ x_{1} = x_{2} = x_{4} \cdots = x_{n-2} = 0, \\ x_{n+1} \cos 1/2 \pi t = 5/3 x_{n-1} \cdot (y_{4}^{2} - y_{3}^{2} - y_{2}^{2} - y_{1}^{2}) \sin 1/2 \pi t \\ & + 5/4 x_{n} \cdot \left[ 2(y_{4}y_{2} + y_{3}y_{4}) \sin 1/2 \pi t - 3/5 \cos 1/2 \pi t \right] \\ + x_{n+2} \cos 1/2 \pi t = 5/3 x_{n-1} \cdot \left[ 2(y_{4}y_{2} - y_{3}y_{4}) \sin 1/2 \pi t - 4/5 \cos 1/2 \pi t \right] \\ & + 5/4 x_{n} \cdot (y_{4}^{2} - y_{3}^{2} + y_{2}^{2} - y_{1}^{2}) \sin 1/2 \pi t \\ + 5/4 x_{n} \cdot (y_{4}^{2} - y_{3}^{2} + y_{2}^{2} - y_{1}^{2}) \sin 1/2 \pi t \\ + x_{n+3} \cdot 2(y_{4}y_{4} + y_{2}y_{3}) \sin 1/2 \pi t, \\ + x_{n+3} \cdot 2(y_{4}y_{3} + y_{3}y_{4}) \sin 1/2 \pi t \\ + 5/4 x_{n} \cdot 2(y_{2}y_{3} - y_{4}y_{4}) \sin 1/2 \pi t \end{cases}$$

$$(7)_{2} h_{f_{2}}(y, t): \qquad (y \in s^{3}),$$

$$\begin{cases} x_{4} = \cdots = x_{n-4} = 0, \\ x_{1} \cos 1/2 \pi t = (y_{1}x_{n} + y_{2}x_{n+4} + y_{3}x_{n+2} + y_{4}x_{n+3}) \sin 1/2 \pi t, \\ x_{2} \cos 1/2 \pi t = (-y_{2}x_{n} + y_{1}x_{n+4} + y_{4}x_{n+2} - y_{3}x_{n+3}) \sin 1/2 \pi t, \\ x_{3} \cos 1/2 \pi t = (-y_{3}x_{n} - y_{4}x_{n+4} + y_{1}x_{n+2} + y_{2}x_{n+3}) \sin 1/2 \pi t, \\ x_{n+4} \cos 1/2 \pi t = (-y_{4}x_{n} + y_{3}x_{n+4} - y_{2}x_{n+2} + y_{1}x_{n+3}) \sin 1/2 \pi t. \end{cases}$$

Les images ha un cycle mod 2 et  $S_i^4(i = 1, 2)$ . appartenant à Ω

$$(8) \quad h_f(y) =$$

$$(8), \quad h_{f_i}(y) =$$

$$(8)_{\mathfrak{s}} \qquad h_{f_{\mathfrak{s}}}(y) =$$

$$(9)_{i}$$

$$(9)_2$$
.

Posons mainle

$$(10) \begin{cases} \left[\omega_2^{4*}\right]_2^2 = \\ I_2(r, S^2) \end{cases}$$

Nous démontre

$$(11)$$
  $a \neq 0$ 

D'une façon pl

$$(11)'$$
  $a=1$ ;

 $\it D\'emonstration$  .

Les éléments tions:

$$\begin{cases} x_j = \xi_{j1} x_n + \xi_{ji} \\ x_{n+2} = \xi_{n_1} x_n - \xi_{n_2} \end{cases}$$

L'ensemble Ü équations :

et l'ensemble S² sentée par :

$$\xi_{i} = \xi_{n2} (= y_i \operatorname{tg} \xi_{ji} = 0 \operatorname{pour} (ji)$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{R}}_{n,4}(i=1,2),$$

ue fois l'homotopie  $h_t$  ou  $V_{n+4,4}$ . Soit  $(x) = (x_1, ...,$ space  $\mathbb{R}^{n+4}$  et soit  $e_1, \ldots,$ . Nous poserons respecti-

$$[e_n, e_{n+1}, e_{n+3}, e_{n+4}];$$

 $[e_{n+4}],$   $[e_n - 3/5 e_{n+1}, e_{n+3}, e_{n+4}];$ 

$$[\bar{e}'_j] = [\bar{e}_n, e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}].$$

t),  $y \in s^3 (i = 1, 2)$  sont alors ions suivantes :

$$x_{n+1} \cdot y_2 \sin 1/2 \pi t,$$
  
 $t + x_{n+1} \cdot y_1 \sin 1/2 \pi t;$ 

 $y_2^2 - y_1^2 \sin 1/2 \pi t$  $(3) \sin 1/2 \pi t - 3/5 \cos 1/2 \pi t$  $_{3} \cdot 2(y_{1}y_{3} - y_{2}y_{4}) \sin 1/2 \pi t,$  $_{3}y_{4})\sin 1/2\pi t - 4/5\cos 1/2\pi t$  $(y_4^2 - y_3^2 + y_2^2 - y_1^2) \sin 1/2 \pi t$  $y_{4} = \frac{1}{2} \frac{1}$  $\frac{1}{4} x_n \cdot 2(y_2 y_3 - y_1 y_4) \sin 1/2 \pi l$   $+ y_3^2 - y_2^2 - y_1^2) \sin 1/2 \pi l$ ;

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2} + y_4 x_{n+3} \sin 1/2 \pi t, \\ x_{n+2} - y_3 x_{n+3} \sin 1/2 \pi t, \\ x_{n+2} + y_2 x_{n+3} \sin 1/2 \pi t, \\ -y_2 x_{n+2} + y_4 x_{n+3} \sin 1/2 \pi t \end{array}$$

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

Les images  $h_f(\sigma^2)$  et  $h_f(\sigma^4)$ , i=1, 2, représentent respectivement un cycle mod 2 et deux cycles entiers que nous désignerons par S2 et  $S_i^4(i=1, 2)$ . Soient  $\omega_2^{4*}=\omega$ ,  $\omega_{2,2}^{4*}=\omega_1$ ,  $\omega_4^{4*}=\omega_2$ , les fonctions appartenant à  $\Omega(n, 4)$  définies dans § 1 Chap. 1; on a alors:

partenant a 
$$\Sigma(n, 4)$$
 decimally define  $\overline{U}_{\omega}$ ,  $y \in S^1$ ; (8)  $h_f(y) = p([e_1, e_{n+2}, e_{n+3}, e_{n+4}]) \in \overline{U} = \overline{U}_{\omega}$ ,  $y \in S^1$ ;

(8) 
$$h_f(y) = p([e_1, e_{n+2}, e_{n+3}, e_{n+4}]) \in \overline{U}_i = \overline{U}_{\omega_i}, \quad y \in s^3;$$
  
(8)  $h_{f_i}(y) = p([e_{n+1}, e_{n+2}, e_3, e_{n+4}]) \in \overline{U}_i = \overline{U}_{\omega_i}, \quad y \in s^3;$ 

$$(8)_{1} \quad h_{f_{1}}(y) = p([e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}]) \in \overline{U}_{2} = \overline{U}_{0}, \qquad y \in s^{3};$$

$$(8)_{2} \quad h_{f_{2}}(y) = p([e_{1}, e_{2}, e_{3}, e_{n+4}]) \in \overline{U}_{2} = \overline{U}_{0}, \qquad y \in s^{3};$$

(8)<sub>2</sub> 
$$h_{f_2}(y) = p(t^{-1}, t^{-2})$$
  
(9)  $S^2 - \{h_f(s^1)\} \in \tilde{N} = \tilde{N}_{\omega};$ 

$$(9) \qquad \qquad S_{i}^{4} - h_{f_{i}}(s^{3}) \in \mathring{\mathbf{N}}_{i} = \mathring{\mathbf{N}}_{\omega_{i}};$$

$$(9)_{i} \qquad \qquad \mathring{\mathbf{N}} = \mathring{\mathbf{N}}_{\omega_{i}};$$

(9),  
(9),  
(9),  

$$S_2^4 - h_{f_2}(s^3) \in \mathring{N}_2 = \mathring{N}_{\omega_2}.$$

Posons maintenant:

Nous démontrerons les résultats suivants :

Nous démontrerons les reservations 
$$a_{21} = 0$$
,  $a_{22} \neq 0$ . (11)  $a \neq 0$ ,  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{21} = 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ .

D'une façon plus précise, on a :

D'une façon plus précise, on a . 
$$a_{21} = 0$$
,  $a_{22} = 1$ .  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} = 1$ .

Démonstration de (11).

$$a =$$

Les éléments du voisinage N sont représentés par les équa-

ns: 
$$\begin{cases} x_{j} = \xi_{j1}x_{n} + \xi_{j2}x_{n+1} + \xi_{j3}x_{n+3} + \xi_{j4}x_{n+4}, & j = 1, ..., n-1, \\ x_{n+2} = \xi_{n_1}x_{n} + \xi_{n_2}x_{n+1} + \xi_{n_3}x_{n+3} + \xi_{n_4}x_{n+4}, & \text{for } N \text{ représentée par} \end{cases}$$

L'ensemble  $\ddot{\mathbf{U}}$  est la variété linéaire dans  $\ddot{\mathbf{N}}$  représentée par les équations:

$$\xi_{n_1} = \xi_{n_2} = 0$$
,

et l'ensemble  $S^3 - \{h_f(s')\}$ , d'après (7), est la variété linéaire représentée par :

ntée par : 
$$\xi_{11} = \xi_{n2} (= y_1 \operatorname{tg} 1/2 \pi t), \quad \xi_{12} = -\xi_{n1} (= y_2 \operatorname{tg} 1/2 \pi t), \\ \xi_{j1} = 0 \text{ pour } (ji) \neq (1,1), (1,2), (n, 1) \text{ ou } (n, 2).$$

WU WEN-TSUN Il en résulte que le seul élément commun aux ensembles Ü et  $S^2 - \{h(s')\}\$  est l'élément central  $\vec{X} = \vec{X}_{\omega}(\xi_{\mu} = 0)$  de  $\vec{U}$ , qui est aussi le seul élément commun à la pseudo-variété U et à S² [cf. (8), (9)]. L'indice d'intersection mod 2 de ces deux ensembles en cet élément commun est évidemment i ; on a ainsi a=1.

D'après  $(7)_i$  tout élément de  $S_i^4$  contient le vecteur  $e_{n+4}$  tandis que tout élément de la pseudo-variété U2 est contenu dans Rn+3, l'espace vectoriel déterminé par les vecteurs  $e_1, \ldots, e_{n+3}$  (cf. § 2, chap. 1). Il en résulte que Si et U, n'ont aucun élément en commun et par conséquent  $a_{2i} = I_0(r_2, S_1^2) = 0$ .

Les éléments de  $\vec{N}_{_2}$  sont de la forme :

$$\begin{cases} x_j = \xi_{j1}x_n + \xi_{j2}x_{n+1} + \xi_{j3}x_{n+2} + \xi_{j4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n1}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n1}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_n + \xi_{n4}x_{n+3} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_{n+4} + \xi_{n4}x_{n+3} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_{n+4} + \xi_{n4}x_{n+4} + \xi_{n4}x_{n+3}, \\ x_{n+4} = \xi_{n4}x_{n+4} + \xi_{n4}x_{n$$

Considérons  $\tilde{N}_z$  comme un espace euclidien de coordonnées  $\xi_{\mathcal{A}}$  et désignons la base de vecteurs correspondante par uji. L'orientation normale de  $\tilde{N}_z$  est alors déterminée par la suite de vecteurs sui-

$$A = \{u_{i1}, \dots, u_{i4}, u_{i1}, \dots, u_{i4}, \dots, u_{i4}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{n4}\}.$$

where  $U_2$  est la variété linéaire rope.

L'ensemble  $\ddot{\mathbf{U}}_{_{2}}$  est la variété linéaire représentée par

(12) 
$$\xi_{n1} = \xi_{n2} = \xi_{n3} = \xi_{n4} = 0,$$
 nt l'orientation est détermine représente

dont l'orientation est déterminée par la suite de vecteurs suivante :

B = 
$$\{u_{i_1}, \dots, u_{i_4}, u_{i_1}, \dots, u_{i_{24}}, \dots, u_{i_{n-1,1}}, \dots, u_{n-1,4}\}$$
.

See dans  $\tilde{N}$ 

D'après  $(7)_2$ , et  $(9)_2$  l'ensemble  $S_2^4 - \{h_2(s^3)\}$  est aussi une variété linéaire dans  $\tilde{N}_z$  représentée par :

(13) 
$$\begin{cases} \xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{n1} (=y, \text{ tg } 1/2 \pi t), \\ \xi_{12} = -\xi_{21} = \xi_{33} = -\xi_{n3} (=y_2 \text{ tg } 1/2 \pi t), \\ \xi_{13} = -\xi_{24} = -\xi_{31} = \xi_{n2} (=y_3 \text{ tg } 1/2 \pi t), \\ \xi_{14} = \xi_{29} = -\xi_{32} = -\xi_{1n} (=y, \text{ tg } 1/2 \pi t), \\ \xi_{21} = 0 (0 \le t \le 1, y_1^2 + \dots + y_2^2 - 1), \end{cases}$$
varieté continut (1, y\_1^2 + \dots + y\_2^2 - 1)

les autres  $\xi_{ji} = 0$   $(0 \leqslant l \leqslant 1, y_1^2 + \dots + y_k^2 = 1)$ .

Cette variété contient évidemment le système de vecteurs :

G=
$$\{u_{11}+u_{22}+u_{33}+u_{n_1}, u_{12}-u_{21}+u_{34}-u_{n_3}, u_{13}-u_{24}-u_{31}+u_{n_2}, u_{14}-u_{23}-u_{32}-u_{n_1}\},$$

CLASSES CARACT.

qui, dans cet or suite composée { de  $\bar{N}_{z}$  que le sy  $S_2^t - \{h_{f_2}(s^3)\}$ , cal savoir leur éléme. chap. 1, cet indic comme éfant calcu

$$a_{22} = I_0(b_2, S_2^4) =$$

$$a_{ii} = -4.$$

Tout élément de

$$x_{j} = \xi_{ji}x_{n-1} + x_{n+1} = \xi_{n-1,j}x_{n-1} + x_{n+2} = \xi_{n}x_{n-1} + x_{n-1}$$

Les ensembles  $\vec{\mathbf{U}}_{_{\!\scriptscriptstyle{\mathrm{B}}}}$ dans  $\tilde{N}_i$  représentées  $(7)_{i}$ ):

$$\mathfrak{B}_{1}: \begin{cases} 3/5 & \xi_{31} = 2(y \\ 4/5\xi_{32} = 4/5\xi_{32} = 4/5\xi_{32} = 4/5\xi_{n-1,1} = \frac{y_{1}^{2}}{4/5\xi_{n-1,2}} \\ 3/5 & \xi_{n,1} = 2(y - 4/5\xi_{n}) \end{cases}$$

les autres  $\xi_{ji} = 0$  où o (on a en esset posé y'i= Par un simple calcul on vant quatre points:

$$(y_1', y_2', y_3', y_4') = (\varepsilon_i . V \varepsilon_i)$$

où les indices d'intersect Proposition 1, chap. 1).

u aux ensembles U et i=o)de Ü, qui est aussi U et à S\* [cf. (8), (9)]. sembles en cet élément

vecteur  $e_{n+4}$  tandis que enu dans R<sup>a+3</sup>, l'espace  $e_{n+3}$  (cf. § 2, chap. 1). ent en commun et par

$$j=1,\ldots n-1$$
;

. de coordonnées  $\xi_{ji}$  et par  $u_{ji}$ . L'orientation suite de vecteurs sui-

$$\{u_{n1},\ldots,u_{n4}\}.$$

ée par

le vecteurs suivante:

$$-1,1,\ldots,u_{n-1,4}$$
.

est aussi une variété

$$y_1 \lg 1/2 \pi l$$
,  $y_2 \lg 1/2 \pi l$ ,

$$y_{_3} \text{ tg } 1/2 \pi t),$$

$$y_i \lg 1/2 \pi t$$
),

e de vecteurs :

$$-u_{n_3}, _{i_4} - - u_{i_3} - u_{i_2} - u_{n_1} \},$$

qui, dans cet ordre, détermine aussi son orientation. Puisque la suite composée {B, C} détermine évidemment la même orientation de  $\tilde{N}_2$  que le système A, l'indice d'intersection de  $\tilde{U}_2 = \tilde{U}_{\phi 2}$  et  $S_2^4 - \{h_{f_2}(s^3)\}$ , calculé dans  $\tilde{N}_2$  pour leur seul point commun  $\tilde{X}_2$ , à savoir leur élément central, est égal à +1. D'après proposition 1, chap. 1, cet indice d'intersection reste le même en le considérant comme étant calculé dans  $\hat{\mathrm{R}}_{n,4}.$  Donc

$$\begin{split} a_{22} &= \mathrm{I}_{0}(b_{2}, \, \mathrm{S}_{2}^{4}) = \mathrm{I}_{0}\left(\mathring{\mathrm{U}}_{2}, \, \mathrm{S}_{2}^{4} - \{h_{f_{2}}(s^{3})\}\right) = + \, \mathfrak{t} \,, \,\, (\mathrm{cf.} \,\, (8)_{2} \,\, \mathrm{et} \, (9)_{2}). \\ 4^{\circ} \,\, a_{11} &= -\, 4 \,. \end{split}$$

Tout élément de N, est défini par les équations :

$$x_{j} = \xi_{ji}x_{n-1} + \xi_{j2}x_{n} + \xi_{j3}x_{n+3} + \xi_{j4}x_{n+4}, \quad j = 1, \dots n-2,$$

$$x_{n+1} = \xi_{n-1,4}x_{n-1} + \xi_{n-1,2}x_{n} + \xi_{n-1,3}x_{n+3} + \xi_{n-1,4}x_{n+4},$$

$$x_{n+2} = \xi_{n1}x_{n-1} + \xi_{n2}x_{n} + \xi_{n3}x_{n+3} + \xi_{n4}x_{n+4}.$$

Les ensembles  $\ddot{\mathbf{U}}_{i} = \ddot{\mathbf{U}}_{\omega_{i}}$  et  $\mathbf{S}_{i}^{c} - \{h_{f_{i}}(s^{a})\} = \mathfrak{B}_{i}$  sont des variétés dans  $\ddot{\mathbf{N}}_{i}$  représentées respectivement par les équations suivantes (cf.  $(7)_{i}$ ):

$$\mathfrak{B}_{i}:\begin{cases} 3/5 & \xi_{3i} = 2(y_{1}'y_{3}' + y_{2}'y_{4}'), \\ 4/5\xi_{32} = 2(y_{2}'y_{3}' - y_{1}'y_{4}'), & \xi_{33} = y_{4}'^{2} + y_{3}'^{2} - y_{2}'^{2} - y_{1}'^{2}, \\ 3/5 & \xi_{n-1,1} = y_{4}'^{2} - y_{3}'^{2} - y_{2}'^{2} + y_{1}'^{2}, \\ 4/5 & \xi_{n-1,2} = 2(y_{1}'y_{2}' + y_{2}'y_{4}') - 3/5, \xi_{n-1,3} = 2(y_{1}'y_{3}' - y_{2}'y_{4}'), \\ 3/5 & \xi_{n,1} = 2(y_{1}'y_{2}' - y_{3}'y_{4}') - 4/5, \\ 4/5 & \xi_{n,2} = y_{4}'^{2} - y_{3}'^{2} + y_{2}'^{2} - y_{1}'^{2}, \xi_{n3} = 2(y_{1}'y_{4}' + y_{2}'y_{3}'), \end{cases}$$

les autres  $\xi_{ji} = 0$  où  $0 \leqslant y_1^{'2} + y_2^{'2} + y_3^{'2} + y_4^{'2} \leqslant 1$ ,

(on a en effet posé  $y_i' = y_i (\lg 1/2 \pi l)^2$ ).

Par un simple calcul on trouve que les deux variétés se coupent suivant quatre points:

$$(y_1', y_2', y_3', y_4') = (\varepsilon_1 \cdot \sqrt{7/10}, \ \varepsilon_1 \cdot \sqrt{7/10}, \ \varepsilon_2 \cdot \sqrt{1/10}, \ -\varepsilon_2 \cdot \sqrt{1/10}),$$

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 = +1/2 \ \text{ou} \ -1/2,$$

où les indices d'intersection, calculés soit dans  $\tilde{N}_1$  soit dans  $R_{\pi,4}$  (cf. Proposition 1, chap. 1), sont tous égaux à — 1. D'où

$$a_0 = -4$$
.

## § 2. Les groupes d'homotopie des variétés $C_{n,4}$ et $Q_{n,4}$ .

Soient  $C_{n,m}$  la variété grassmannienne définie dans l'espace  $C^{n'+m}$  munie d'une structure unitaire par la forme d'Hermite

$$z_1\overline{z}_1 - |- \dots -|- z_{n'+m'}\overline{z}_{n'+m'}$$

où (z) est le système de coordonnées canoniques. Soit  $U_{n'+m',m'}$  la variété des suites de m' vecteurs orthonormés de  $\mathbb{C}^{n'+m'}$ . La variété  $U_{n'+m',m'}$  admet une fibration naturelle dont la base est  $\mathbb{C}_{n,m}$  et dont la fibre est homéomorphe à  $U_{m',n'}$  qu'on peut identifier avec le groupe unitaire  $O_m'$ . Dans le cas  $n \geq m$ , la fibre est homotope à zéro dans  $U_{n'+m',m'}$  par une homotopie qui induit un isomorphisme H du groupe  $\pi_{k-1}(U_{m',m'})$  dans  $\pi_k(\mathbb{C}_{n,m})$ , k > 1. La projection p de la fibration induit aussi un isomorphisme P du groupe  $\pi_k(U_{n'+m',m'})$  dans  $\pi_k(\mathbb{C}_{n,m})$  et on a

$$\pi_k(\mathbf{C}_{n,m}) = \mathrm{P}\pi_k(\mathbf{U}_{n'+m',m'}) + \mathrm{H}\pi_{k-1}(\mathbf{O}_m'), \qquad n \geqslant m, \qquad k > 1.$$

En particulier,

(1) 
$$\pi_k(\mathbf{C}_{n,m}) = \mathbf{H}\pi_{k-1}(\mathbf{O}'_m), \quad n \geqslant m, \quad n \geqslant k > 1,$$

et évidemment  $\pi_i(C_{n,m}) = 0$ .

Dans le cas m=4,  $O'_4$  est homéomorphe à  $s^3 \times s^4$ . Done :

(2) 
$$\pi_{1}(O'_{4}) \approx Z_{0}, \quad \pi_{2}(O'_{4}) = 0, \quad \pi_{3}(O'_{4}) \approx Z_{0},$$

dont les générateurs sont déterminés respectivement par les applications suivantes :

$$f_{1}(y) = \begin{cases} y_{1} + iy_{2}, & 0 \\ 0 & i \end{cases}, & \text{où} \quad y = (y_{1}, y_{2}) \in s^{1} : y_{1}^{2} + y_{2}^{2} = i;$$

$$f_{3}(y) = \begin{cases} y_{1} + iy_{2} & y_{3} + iy_{4} \\ -y_{3} + iy_{4} & y_{4} - iy_{2} \end{cases}, & \text{où} \quad y = (y_{1}, \dots, y_{4}) \in s^{3}:$$

$$y_{1}^{2} + \dots + y_{4}^{2} = i.$$

Soient maintenant  $g_1, \ldots, g_{n'+2}$  la base canonique de vecteurs de  $C^{n'+2}$  et  $\sigma^2$ ,  $\sigma^4$  les cellules bordées respectivement par  $s^4$  et  $s^3$ , dont les points sont désignés par les couples (y, t), où  $(y, 1) = y \in s^4$  ou  $s^3$ , et  $0 \le t \le 1$ . D'après (1) et (2), on a

(3) 
$$\begin{cases} \pi_{1}(\mathbf{C}_{n,4}) = \pi_{3}(\mathbf{C}_{n,4}) = 0; \\ \pi_{k}(\mathbf{C}_{n,4}) = \mathbf{H}\pi_{k-1}(\mathbf{O}'_{4}) \approx \mathbf{Z}_{0}, \quad k = 2, 4. \end{cases}$$

CLASSES CARACTÉR

Aux application  $h_{f_1}: \sigma^2 \rightarrow \mathbf{C}_{n,4}$  et  $\pi_2(\mathbf{C}_{n,4})$  et  $\pi_4(\mathbf{C}_{n,4})d$ 

$$(h) \quad h_{f_1}(y, t) = f$$

$$(4)' - h_{f_i}(y,t):$$

(5) 
$$h_{f_3}(y, t) = p$$

ou,

$$(5)' \quad h_{f_0}(y,t):$$

Les images  $h_{f_1}(\cdot)$  nous désignerons :  $[\omega]_0^c, \omega \in \Omega(n', m')$  par

Démontrons par  $\alpha$  soit  $N_{\alpha} = N$  l'ense tème d'équations d

$$\begin{cases} z_{n'} = \\ z_{n'+1} = \end{cases}$$

Les ensembles linéaires dans N revantes :

$$S^0_{+} \cap N : \left\{ - \right\}$$

où  $\zeta_{ji}$  et  $\bar{\zeta}_{ji}$  seront d

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

Aux applications  $f_i$  et  $f_s$  nous ferons correspondre les applications  $h_{f_1}: \sigma^2 \longrightarrow \mathbb{C}_{n,4}$  et  $h_{f_3}: \sigma^4 \longrightarrow \mathbb{C}_{n,4}$  représentant les générateurs de  $\pi_2(\mathbf{C}_{n,4})$  et  $\pi_4(\mathbf{C}_{n,4})$  définies par les équations suivantes :

(4) 
$$h_{f_1}(y, t) = p([g_{n'+1}(y_1 + iy_2) \sin 1/2\pi t + g_n \cos 1/2\pi t, g_{n'+2}]);$$

$$(4)' \quad h_{f_1}(y, t) : \begin{cases} z_1 = \dots = z_{n'-1} = 0, \\ z_{n'+1} \cos 1/2 \pi t = z_n, \quad (y_1 + iy_2) \sin 1/2 \pi t. \end{cases}$$

(5) 
$$h_{f_3}(y, t) = p([g_{n'}(y_1 + iy_2) \sin 1/2 \pi t + g_{n'+1}(y_3 + iy_4) \sin 1/2 \pi t + g_{n'+1} \cos 1/2 \pi t, g_{n'}(-y_3 + iy_4) \sin 1/2 \pi t + g_{n'+4}(y_1 - iy_2) \sin 1/2 \pi t + g_{n'+2} \cos 1/2 \pi t]).$$

ou,

$$(5)' \quad h_{f_{0}}(y, t) : \begin{cases} z_{1} = \dots = z_{n'-2} = 0, \\ z_{n'} \cos 1/2 \pi t = z_{n'-1} (y_{1} + iy_{2}) \sin 1/2 \pi t \\ + z_{n'+2} (-y_{3} + iy_{4}) \sin 1/2 \pi t, \\ z_{n'+1} \cos 1/2 \pi t = z_{n'-1} (-y_{3} + iy_{4}) \sin 1/2 \pi t \\ + z_{n'+2} (y_{1} - iy_{2}) \sin t/2 \pi t. \end{cases}$$
Les images  $h_{f_{0}}(\sigma^{2})$  et  $h_{f_{0}}(\sigma^{3})$  représentent des excles entiers que

Les images  $h_{f_1}(\sigma^2)$  et  $h_{f_3}(\sigma^4)$  représentent des cycles entiers que nous désignerons respectivement par So et So. Définissons les cycles  $[\omega]_0^c, \omega \in \Omega(n', m')$  par rapport au système des coordonnées (z); on aura :

(6) 
$$I_{0}([\overline{\omega}_{1}^{2*}]_{0}^{6}, S_{0}^{2}) = I,$$
  
(7)  $I_{0}([\overline{\omega}_{2}^{2*}]_{0}^{6}, S_{0}^{2}) = I.$ 

Démontrons par exemple l'équation (7). En supposant  $\omega = \overline{\omega}_2^{2*}$ , soit  $N_{\omega} = N$  l'ensemble des éléments  $Z \in C_{n,m}$  représentés par un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} z_{j} = \zeta_{j} z_{n'-1} + \zeta_{j} z_{n'+2}, & j = 1, \dots, n'-2, \\ z_{n'} = \zeta_{n'-1} z_{n'-1} + \zeta_{n'-1} z_{n'+2}, \\ z_{n'+1} = \zeta_{n'} z_{n'-1} + \zeta_{n'} z_{n'+2}. \end{cases}$$

Les ensembles W<sub>ω</sub> = W( ⊂ N) et S<sub>0</sub> ∩ N sont alors des variétés linéaires dans N représentées respectivement par les équations suivantes:

$$W: \zeta_{n'-1,1} = \zeta_{n',1} = 0;$$

$$S_{4}^{0} \cap N: \begin{cases} \zeta_{ji} = \xi_{j2} = 0, & j = 1, \dots n' - 2, \\ \zeta_{n'-1,1} = -\bar{\zeta}_{n',2} (= (y_{1} + iy_{2}) \lg 1/2 \pi \ell), \\ -\bar{\zeta}_{n-1,2} = \zeta_{n',1} (= (y_{3} + iy_{4}) \lg 1/2 \pi \ell), \end{cases}$$

où  $\zeta_{ji}$  et  $\zeta_{ji}$  seront des nombres complexes conjugués.

riétés  $\mathbf{C}_{n,4}$  et  $\mathbf{Q}_{n,4}.$ 

nie dans l'espace G<sup>n'+</sup> m d'Hermite

ques. Soit  $U_{n'+m',m'}$  la s de C<sup>n'+m'</sup>. La variété base est  $C_{n,m}$  et dont la entifier avec le groupe homotope à zéro dans orphisme H du groupe p de la fibration induit  $\pi_{m',m'}$ ) dans  $\pi_k(\mathbb{C}_{n,m})$  et

$$n \geqslant m, \qquad k > 1.$$

$$n \geqslant k > 1$$
,

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}'_{\mathfrak{q}}) \approx Z_{\mathfrak{g}}$$

vement par les appli-

$$y_1^2 + y_2^2 = 1$$
;

$$(y_1, \dots, y_4) \in s^3$$
:  
 $(y_1^2 + \dots + y_4^2 = 1)$ 

onique de vecteurs de ent par s' et s3, dont où (y, 1) === y€s¹ ou s³,

Le seul élément commun aux ensembles W et  $S_0^i$  n N est l'élément central Z de N :  $z_j = 0$ ,  $j = 1, \ldots, n' - 2$ , n' + 1, où l'indice d'intersection calculé soit dans N, soit dans  $C_{n,4}$  est égal à +1. Puisque l'adhérence de W est une pseudo-variété représentant géométriquement le cycle  $[\overline{\omega_2^{2*}}]_0^i$ , qui n'a aucun élément en commun avec  $S_0^i$  n'appartenant pas à N (cf. (5)), on obtient (7).

Les considérations précédentes se généralisent naturellement au cas d'une variété grassmannienne  $Q_{n,4}$ . En esset, on a :  $(n \ge 4)$ .

(8) 
$$\pi_{i}(Q_{n,4}) = \pi_{i}(Q_{n,4}) = \pi_{i}(Q_{n,4}) = 0, \quad \pi_{i}(Q_{n,4}) \approx Z_{o}.$$

Supposons  $Q_{n,4}$  définie dans l'espace quaternionien  $Q^{n'+1}$  (n=4n'') de dimension quaternionienne n''+1 et les cycles  $[\omega]_0^n$   $(\omega \in \Omega(n'',1))$  définis par rapport à un système de coordonnées quaternioniennes  $(q)=(q_1,\ldots q_{n'+1})$ . Prenons une sphère  $s^3$  et la cellule  $\sigma^i$  bordée par  $s^3$ . Représentons les points de  $s^3$  par les quaternions y de norme 1 et les points de  $\sigma^i$  par (y,t) où  $0 \le t \le 1$  et  $(y,t)=y \in s^3$ . Un générateur de  $\pi^4(Q_{n,4})$  est alors déterminé par l'application  $f: \sigma^i \to Q_{n,4}$  telle que f(y,t) soit la droite quaternionienne représentée par les équations suivantes :

$$q_1 = \dots = q_{n'-2} = 0$$
,  $q_{n'+1} \cos 1/2 \pi t = q_{n'} \cdot y \sin 1/2 \pi t$ .

Désignons par  $S_q^4$  le cycle entier porté par l'image  $f(\sigma^4)$ . On peut démontrer que :

(9) 
$$I_0([\omega_1^{1*}]_q^q, S_q^4) = 1$$

Identifions maintenant  $C^{n'+3}$  à l'espace  $R^{n+6}$   $(n=2n'\geqslant 6)$ . Soient  $\hat{R}_{n,6}$  et  $C_{n,6}$  les variétés grassmanniennes définies respectivement dans  $R^{n+6}$  et  $C^{n'+3}$ . L'application canonique  $\varphi'$  de  $C_{n,6}$  dans  $\hat{R}_{n,6}$  induit l'homomorphisme des groupes d'homotopie  $\pi_k(C_{n,6})$  dans  $\pi_k(\hat{R}_{n,6})$ , k>0, qui sera désigné par  $\Phi_k$ . Nous démontrerons :

Proposition 6. — Pour  $4 \le k \le 6$ ,  $\Phi_k$  est un isomorphisme sur; pour k = 2,  $\Phi_2$  est un homomorphisme sur, en supposant  $n \ge 6$ . Démonstration.

Soit  $\tilde{\varphi}: U_{n'+3,3} \rightarrow V_{n+6,6}$  l'application définie par

$$\phi([w_{\scriptscriptstyle 1}, w_{\scriptscriptstyle 2}, w_{\scriptscriptstyle 3}]) = [w_{\scriptscriptstyle 1}, \mathrm{i} w_{\scriptscriptstyle 1}, w_{\scriptscriptstyle 2}, \mathrm{i} w_{\scriptscriptstyle 2}, w_{\scriptscriptstyle 3}, \mathrm{i} w_{\scriptscriptstyle 3}].$$

Prenons maintenant un élément fixe  $Z \in \mathbb{C}_{n,6}$  et désignons par  $\overline{U}_{3,3}$  la fibre sur Z dans la fibration de  $U_{n'+3,3}$  et par  $\overline{V}_{6,5}$  la fibre sur  $\phi'(Z) \in \dot{R}_{n,6}$ 

CLASSES CARACTÉRIS

dans la fibration de une application  $\overline{\varphi}$ :

Puisque  $n \ge 6$ , o Il est clair qu'on pe et  $(h_t)$  de  $\overline{V}_{6,5}$  en un aussi  $\varphi'p' = p\tilde{\varphi}$  où jprojections dans les

(10)

Les applications of pectivement les hom

 $egin{array}{l} ar{\Phi}_k::&: \ \Phi_k::: \ \mathbf{H}_k::: \end{array}$ 

 $\Pi'_k$ : :

De (10) on dédui

(11)

On peut considére unitaire et un group sous-groupe de  $\overline{V}_{6,z}$  homéomorphe à l'complexe 3. Puisque cation identique du  $\overline{\varphi}$ , on en déduit :

 $\Phi_k$  est un homome  $\Phi_k$  est un isomorp Dans le cas  $k \le 6$ : En tenant compte  $\epsilon$  phisme sur pour k = 1

Remarquons qu'or

(12)  $\pi_2(\mathbf{C}_{n,6})$ 

'et Si n N est l'élément '+1, où l'indice d'inst égal à +1. Puisque résentant géométriquecommun avec Si n'ap-

sent naturellement au et, on a :  $(n \geqslant 4)$ .

$$\pi_4(\mathbb{Q}_{n,4}) \approx \mathbb{Z}_0.$$

nionien  $Q^{n'+4}$   $(n = f_1 n'')$  cycles  $[\omega]_s^g$   $(\omega \in \Omega(n'', 1))$  nées quaternioniennes et la cellule  $\sigma^4$  bordée quaternions y de norme  $(y,t) = y \in s^3$ . Un génépplication  $f \colon \sigma^4 \to Q_{n,4}$  one représentée par les

 $=q_{n'}\cdot y\sin 1/2\pi t$ .

l'image  $f(\sigma^4)$ . On peut

 $\mathbb{R}^{n+6}$   $(n=2n'\geqslant 6)$ . les définies respectiveonique  $\varphi'$  de  $\mathbb{C}_{n,6}$  dans nomotopie  $\tau_{\kappa}(\mathbb{C}_{n,6})$  dans s démontrerons :

un isomorphisme sur; supposant  $n \ge 6$ .

e par

$$, w_{\scriptscriptstyle 3}, iw_{\scriptscriptstyle 3}].$$

. désignons par Ū<sub>3,3</sub> la ,₅ la fibre sur φ'(Z)∈Â<sub>n,6</sub> classes caractéristiques des structures fibrées sphériques  $\cdot$  67 dans la fibration de  $V_{n+6,6}$ . La restriction de  $\tilde{\varphi}$  à  $\overline{U}_{3,3}$  définit alors une application  $\bar{\varphi}: \overline{U}_{3,3} \rightarrow \overline{V}_{6,5}$ .

Puisque  $n \ge 6$ , on a  $\overline{\mathrm{U}}_{3,3} \le 0$  dans  $\mathrm{U}_{n'+3,3}$  et  $\overline{\mathrm{V}}_{6,5} \le 0$  dans  $\mathrm{V}_{n+6,6}$ . Il est clair qu'on peut choisir la déformation  $(h'_i)$  de  $\overline{\mathrm{U}}_{3,3}$  en un point et  $(h_i)$  de  $\overline{\mathrm{V}}_{6,5}$  en un point de telle façon qu'on ait  $\tilde{\varphi}h'_i = h_i\tilde{\varphi}$ . On a aussi  $\varphi'p' = p\tilde{\varphi}$  où  $p: \mathrm{V}_{n+6,6} \to \hat{\mathrm{R}}_{n,6}$  et  $p': \mathrm{U}_{n'+3,3} \to \mathrm{C}_{n,6}$  sont les projections dans les fibrations correspondantes. Il en résulte:

$$\varphi'p'h_{\iota}' = ph_{\iota}\tilde{\varphi}.$$

Les applications  $\overline{\varphi}$ ,  $\varphi'$  et les homotopies  $(h_t)$ ,  $(h'_t)$  définissent respectivement les homomorphismes suivants :

$$\begin{split} & \overline{\Phi}_{k}: \ \pi_{k-1}(\overline{\mathbf{U}}_{3,3}) \! \to \! \pi_{k-1}(\overline{\mathbf{V}}_{6,5}), \ k > \mathbf{I} \,, \\ & \Phi_{k}: \ \pi_{k} \quad (\mathbf{C}_{n,6}) \! \to \! \pi_{k}(\hat{\mathbf{R}}_{n,6}), \\ & \mathbf{H}_{k}: \ \pi_{k-1}(\overline{\mathbf{V}}_{6,5}) \! \to \! \pi_{k}(\hat{\mathbf{R}}_{n,6}), \ k > \mathbf{I} \,, \\ & \mathbf{H}'_{k}: \ \pi_{k-1}(\overline{\mathbf{U}}_{3,3}) \! \to \! \pi_{k}(\mathbf{C}_{n,6}), \ k > \mathbf{I} \,. \end{split}$$

De (10) on déduit :

(11) 
$$H_k \overline{\Phi}_k = \Phi_k H'_k, \quad k > 1.$$

On peut considérer  $\overline{U}_{3,3}$  et  $\overline{V}_{6,5}$  respectivement comme un groupe unitaire et un groupe de rotations. En considérant  $\overline{U}_{3,3}$  comme un sous-groupe de  $\overline{V}_{6,5}$ , on sait que l'espace homogène  $\overline{V}_{6,5}/\overline{U}_{3,3}$  est homéomorphe à l'espace projectif complexe  $K_3$  de dimension complexe 3. Puisque  $\pi_k(K_3) = 0$ , pour  $k = 1,3,\ldots 6$ , et que l'application identique du groupe  $\overline{U}_{3,3}$  dans  $\overline{V}_{6,5}$  est autre que l'application  $\overline{\varphi}$ , on en déduit :

 $\Phi_{i}$  est un homomorphisme sur;

 $\overline{\Phi}_k$  est un isomorphisme sur pour  $k = 4, \ldots 6$ .

Dans le cas  $k \le 6 \le n$ ,  $H_k$  et  $H'_k$  sont aussi des isomorphismes surs. En tenant compte de (11), il en résulte que  $\Phi_k$  est un homomorphisme sur pour k=2 et est un isomorphismes sur pour k=4,5,6.

Remarquons qu'on a en esset  $\pi_1(\overline{U}_{3,3}) \approx Z_0, \pi_2(\overline{U}_{3,3}) = 0$ . D'où

(12) 
$$\pi_2(\mathbf{C}_{n,6}) \approx \mathbf{Z}_0, \quad \pi_3(\mathbf{C}_{n,6}) = 0, \quad n \geqslant 6.$$

On peut représenter un générateur de  $\pi_i(\overline{\mathbb{U}}_{3,3})$  par l'application suivante :

$$f: y \to \begin{cases} y_1 + iy_2, & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases}, \quad y \in s^1: y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Soit  $\sigma^2$  la cellule bordée par  $s^1$  dont les points sont représentés par (y, t), où  $y = (y, 1) \in s^1$ ,  $0 \le t \le 1$ . A f correspond une application  $h_f: \sigma^2 \to \mathbf{C}_{n,6}$  telle que,  $(z) = (z_1, \ldots, z_{n'+3})$  étant un système de coordonnées dans  $\mathbf{C}^{n'+3}$ ,  $h_f(y, t)$  est l'élément  $\mathbf{Z} \in \mathbf{C}_{n,6}$  représenté par les équations (4)'. Soit  $\mathbf{S}^2$  le cycle entier de  $\mathbf{C}_{n,6}$  représenté par l'image sphérique de  $h_f$ ; on aura alors (cf. (6)):

(13) 
$$I_{\theta}([\omega_{1}^{3*}]_{0}^{c}, S_{\epsilon}^{2}) = 1.$$

De même, on a  $\pi_{_{1}}(\overline{V}_{6,5}) \! \approx \! \pi_{_{2}}(\hat{R}_{n,6}) \! \approx \! Z_{_{9}}, \,\, \mathrm{et}$ 

(14) 
$$\pi_2(\overline{\mathbf{V}}_{6,0}) = \pi_3(\hat{\mathbf{R}}_{n,6}) = 0.$$

Un générateur de  $\pi_i(\overline{V}_{6,5})$  est représenté par l'application

$$\overline{\phi}f \colon y \longrightarrow \begin{cases} y_1 & y_2 & \text{o}, \\ -y_2 & y_1 & \text{o}, \\ \text{o} & \text{o} & \text{E}_4 \end{cases}$$

où yes', et E, est la matrice unité à 4 lignes. Le généraleur correspondant de  $\pi_2(\hat{\mathbf{R}}_{n,6})$  définit un cycle mod 2 de dimension 2 dans  $\hat{\mathbf{R}}_{n,6}$ , soit  $S_n^2$ . On vérifie facilement :

(15) 
$$I_{2}([\omega_{2}^{6*}]_{2}^{2}, S_{R}^{2}) = 1.$$

§ 3. La classification des applications d'un complexe de dimension 4 dans les variétés grassmanniennes  $C_{n,4}$ .

Soit K' un complexe de dimension 4. Nous allons démontrer que les classes d'homotopie des applications de K' dans  $C_{n,4}$   $(n=2n' \ge 4)$  sont en correspondance biunivoque avec les couples de deux classes entières de cohomologie  $C^2$ ,  $C^4$  dans  $K^4$ . D'une façon plus précise, on a :

Proposition 7. — a) A chaque couple de classes entières de coho-

CLASSES CARACTÉ

mologie G<sup>2</sup>, G<sup>4</sup> de que:

(1)

où  $\overline{\omega}_1^2$ ,  $\overline{\omega}_2^2 \in \Omega(n', 2)$ 

b) Deux appli et seulement si

(2)

Démonstration duales L<sub>O</sub> et L<sub>O</sub>. L<sub>O</sub>, les cocycles suit toutes les apsaire, des subdivications cellulaires

Soit K' le sque! sommet de L<sub>c.5</sub>, squelette K<sup>2</sup> de se cycle, on ait g'(c dans § 2. D'après

 $I^{0}([\underline{\omega}_{5*}^{i}]_{\mathfrak{c}}^{6}$ 

ou

(3)

De plus, on a,

 $g'(\delta \sigma^3) = g'(\sum$ 

If on resulte q  $\sigma^3 \in K^3$  of puis h hPronons main htion  $g: K^4 \rightarrow C_{n,4}$ 

(4)

(5) pour o'cK', forment une sphèr

où So est le cycle s

 $\overline{v}_i(\overline{\mathrm{U}}_{3,3})$  par l'application

$$: y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

oints sont représentés par respond une application tant un système de coor-LeC<sub>n,6</sub> représenté par les 6 représenté par l'image

et

oar l'application

Le générateur corres-2 de dimension 2 dans

ns d'un complexe assmanniennes  $\mathbf{C}_{n,4}$  .

s allons démontrer que dans  $C_{n,4}$   $(n=2n'\geqslant 4)$  couples de deux classes me façon plus précise,

lasses entières de coho-

classes caractéristiques des structures fibrées sphériques 69 mologie  $C^2$ ,  $C^4$  dans  $K^4$  correspond une application  $g: K^4 \rightarrow C_{n,4}$  telle que :

(1) 
$$g^*\{\overline{\omega}_i^2\}_0^c = \mathbf{C}^2$$
,  $g^*\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c = \mathbf{C}^4$ , où  $\overline{\omega}_1^2$ ,  $\overline{\omega}_2^2 \in \Omega(n', 2)$ .

b) Deux applications  $g_i \colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{C}_{n,4}$  (i=1,2) sont homotopes si et seulement si

$$\begin{cases} g_1^* \{ \widetilde{\omega}_1^2 \}_0^c = g_2^* \{ \widetilde{\omega}_1^2 \}_0^c, \\ g_1^* \{ \widetilde{\omega}_2^2 \}_0^c = g_2^* \{ \widetilde{\omega}_2^2 \}_0^c. \end{cases}$$

Démonstration de a). — Prenons deux subdivisions cellulaires duales  $L_{(r)}$  et  $L_{(r)}$  de  $C_{n,4}$  et définissons les cycles  $[\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c$ ,  $[\overline{\omega}_2^{2*}]_0^c$  dans  $L_{(r)}$ , les cocycles  $\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c$ ,  $\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c$  dans  $L_{(r)}$  (cf. chap. 1). Dans ce qui suit toutes les applications dans  $C_{n,4}$  seront, en prenant, si nécessaire, des subdivisions plus fines du complexe considéré, des applications cellulaires dans  $L_{(r)}$ .

Soit K' le squelette de K' de dimension i. Définissons  $g'(K^i) = \text{un}$  sommet de  $L_{G'}$ . Choisissons un cocycle  $C^2 \in \mathbb{C}^2$  et étendons g' au squelette  $K^2$  de façon que, en considérant  $g'(\sigma^2)$ ,  $\sigma^2 \in K^2$ , comme un cycle, on ait  $g'(\sigma^2) \sim C^2(\sigma^2)$ .  $S_0^2$ , où  $S_0^2$  est le cycle sphérique défini dans § 2. D'après (6) § 2, on a alors

$$I_{\mathfrak{g}}([\overline{\omega}_{\mathfrak{f}}^{2*}]_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{e}},\ g'(\sigma^{2})) = C^{2}(\sigma^{2}) \cdot I_{\mathfrak{g}}([\overline{\omega}_{\mathfrak{f}}^{2*}]_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{e}},\ S_{\mathfrak{g}}^{2}) = C^{2}(\sigma^{2}),$$

ou

$$g'^*\{\overline{\omega}_i^2\}_0^c = \mathbf{C}^2.$$

De plus, on a, si  $\delta \sigma^3 = \sum \sigma_i^2$ 

$$g'(\delta \sigma^3) \simeq g'(\Sigma^{\sigma_i^2}) \simeq \Sigma g'(\sigma_i^2) \simeq \Sigma G^2(\sigma_i^2) \cdot S_0^2 = \delta G^2(\sigma^3) \cdot S_0^2 = 0.$$

Il en résulte qu'on peut étendre  $g'/K^2$  à l'intérieur de chaque  $\sigma^3 \in K^3$  et puis à  $K^4$  puisque  $\pi_3(\mathbb{C}_{n,4}) = o$ .

Prenons maintenant un cocycle  $C' \in C'$  et définissons une application  $g: K' \to C_{n,4}$  telle que :

$$(4) g/K^3 = g'/K^3,$$

(5) pour  $\sigma' \in K'$ ,  $g(\sigma')$  et  $g'(\sigma')$  forment une sphère

$$\simeq [C'(\sigma') - I_0([\omega_2^{2*}]_0^c, g'(\sigma')] \cdot S_0^4,$$

où So est le cycle sphérique défini dans § 2.

De (7) § 2 on déduit

$$I_{\scriptscriptstyle 0}([\bar{\omega}^{2*}]^{\scriptscriptstyle c}_{\scriptscriptstyle 0},\ g(\sigma^4))-I_{\scriptscriptstyle 0}([\bar{\omega}^{2*}_2]^{\scriptscriptstyle c}_{\scriptscriptstyle 0},\ g'(\sigma^4))=C^4(\sigma^4)-I_{\scriptscriptstyle 0}([\bar{\omega}^{2*}_2]^{\scriptscriptstyle c}_{\scriptscriptstyle 0},\ g'(\sigma^4))$$

d'où

$$\mathbf{C}^{4}(\sigma^{4}) = \mathbf{I}_{0}(\left\{\bar{\omega}_{2}^{2}\right\}_{0}^{c}, \ g(\sigma^{4})) = g^{*}\left\{\bar{\omega}_{2}^{2}\right\}_{0}^{c}(\sigma^{4})$$

pour chaque o'∈K', ou

(6) 
$$g^*\{\omega_2^2\}_0^c = C^*$$
.

D'après (3), (4) et (6), g est une application vérifiant (1).

Démonstration de b). — Soit J le segment  $1 \le t \le 2$ . Puisque  $C_{n,4}$  est connexe et simplement connexe, on peut définir une application

$$f: K^4 \times \delta J + K^4 \times J \rightarrow C_{n_1 4}$$

telle que

(7) 
$$f/K^4 \times (j) = g_j/K^4$$
,  $j = 1, 2$ .

D'après (2), il existe une cochaîne entière D' dans K' telle que

(8) 
$$g_i^* \{ \bar{\omega}_i^2 \}_0^c - g_2^* \} \bar{\omega}_i^2 \}_0^c = \delta D^i.$$

Remplaçons maintenant l'application f par une application

$$f'/K^4 > J \rightarrow K^1 > J$$

tels que

(z) 
$$f'/K^4 \times \partial J + K^0 \times J = f,$$

 $(\beta) \ \text{pour} \quad \sigma^i \in K^i, \quad f'/\sigma^i \rightarrowtail J \quad \text{et} \quad f/\sigma^i \rightarrowtail J \quad \text{forment une sphère} \\ {} \cong \left[D^i(\sigma^i) - I_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c, \ f(\sigma^i \rightarrowtail J))] \cdot S_0^2.$ 

On en déduit (cf. (6) § 2):

$$I_{\sigma}([\bar{\omega}_{i}^{2*}]_{0}^{c}, f'\sigma' \times J)) = D^{t}(\sigma^{i}).$$

D'où, en tenant compte de (8), pour  $\sigma^2 \in K^2$ ,

$$I_{\mathfrak{g}}([\varpi_{1}^{2*}]_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{e}}, f'(\delta \sigma^{2} \searrow J)) = D^{\mathfrak{g}}(\delta \sigma^{2}) = \delta D^{\mathfrak{g}}(\sigma^{2}) = g_{1}^{*} \{ \overline{\omega}_{1}^{2} \}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{e}}(\sigma^{2}) - g_{2}^{*} \{ \overline{\omega}_{1}^{2} \}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{e}}(\sigma^{2}),$$
ou, d'après (7),

 $I_{o}([\overline{\omega}_{i}^{2*}]_{0}^{c}, f'(\delta(\sigma^{2} \searrow J))) = o.$ 

Il en résulte que (cf. (3), (6), § 2),

$$f'(\delta(\sigma^2 \times J)) \simeq 0$$
, pour chaque  $\sigma^2 \in K^2$ .

CLASSES CARACT

On peut dos que  $\pi^2(\mathbf{C}_{a,\,4}) = 0$ Le procédé par le fait que  $S_0^2$  fo § 2. En tenant 0  $S_0^4$  forme un géremplacer f' pa

telle que f"/K' une homotopie D'après (8) e

Proposition of complexe K de  $(n = 4n'' \ge 4)$  (i = 1, 2) sond En applique d'un complexe résultats particle resse dans ce tr

Proposition aucune co-torsh

sont homotopes

(9)

 $(10) f_1^* \{ a$ 

Démonstratice subdivision celle système de coordinate K cations considér dans K cations complexe construct qu'il existe

tel que

On peut donc étendre f' à  $K^2 \times J$  et puis à  $K^3 \times J$ , puisque  $\pi^3(\mathbb{C}_{n,4}) = 0$ .

Le procédé précédent s'appuie sur la première équation de (2) et le fait que  $S_0^2$  forme un générateur de  $\pi_2(C_{n,4})$  vérifiant l'équation (6) § 2. En tenant compte de la deuxième équation de (1) et du fait que  $S_0^4$  forme un générateur de  $\pi_4(C_{n,4})$  vérifiant (7) § 2, on peut aussi remplacer f' par une application

$$f'': \mathbb{K}^4 \times \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{C}_{n, 4}$$

telle que  $f''/K^4 > \delta J + K^2 > J \equiv f'$ . Cette application définit alors une homotopie de  $g_i$  à  $g_i$  (cf. (7)) et (b) est ainsi démontré.

D'après (8) et (9) de § 2, on a aussi le théorème suivant :

PROPOSITION 7'. — A chaque classe entière de cohomologie Q<sup>4</sup> d'un complexe K de dimension 4 correspond une application  $g: K \to \mathbb{Q}_{n,4}$   $(n = 4n'' \ge 4)$  tel que  $g^*\{\omega_i^4\}_0^q = \mathbb{Q}^4$ . Deux applications  $g_i: K \to \mathbb{Q}_{n,4}$  (i = 1, 2) sont homotopes si et seulement si  $g_i^*\{\omega_i^4\}_0^q = g_2^*\{\omega_i^4\}_0^q$ .

En appliquant cette méthode à la classification des applications d'un complexe K' dans  $\hat{R}_{n,4}$  ou  $R_{n,4}$  (n > 4), on ne trouve que des résultats partiels. Pourtant, à propos du problème qui nous intéresse dans ce travail, il suffit de démontrer le théorème suivant :

Proposition 7". — Supposons que le complexe K' n'admette aucune co-lorsion de dimension 4. Alors deux applications

$$f_i: \mathbf{K}^i \rightarrow \mathbf{R}_{n,i} (i = 1, 2)$$

sont homotopes si

(9) 
$$f_1^* \{ \omega_2^4 \}_0^* = f_2^* \{ \omega_2^4 \}_2^2,$$

(10) 
$$f_4^* \{ \omega_4^4 \}_0^1 = f_2^* \{ \omega_4^4 \}_0^1, \qquad f_4^* \{ \omega_{2,2}^4 \}_0^1 = f_2^* \{ \omega_{2,2}^4 \}_0^1.$$

Démonstration. — Nous définirons les cycles  $[\omega_2^{4*}]_2^{\hat{\epsilon}}$ , etc. dans une subdivision cellulaire  $\hat{K}_{(x)}$  de  $\hat{R}_{a,4}$  canonique par rapport à un certain système de coordonnées (x), les cocycles  $\{\omega_2^4\}_2^{\hat{\epsilon}}$ , etc., dans la subdivision duale  $\hat{K}_{(x^*)}$  et nous supposons que  $f_i$  ainsi que toutes les applications considérées dans ce qui suit sont des applications cellulaires dans  $\hat{K}_{(x^*)}$ , en passant si nécessaire aux subdivisions plus fines du complexe considéré. D'après (6)', (10), (11)' de § 1 on peut démontrer qu'il existe une application

$$f: K^4 \times \delta J + K^3 \times J \rightarrow \hat{R}_{n,4}$$

tel que

(11) 
$$f/K^4 \times (j) = f_j/K^4, \quad j = 1, 2.$$

') —  $I_0([\bar{\omega}_2^{2*}]_0^c, g'(\sigma^i))$ 

 $\left\{\widetilde{\omega}_{2}^{2}\right\}_{0}^{c}\left(\sigma^{4}\right)$ 

n vérifiant (1).

nt 1 ≤ t ≤ 2. Puisque peut définir une appli-

1, 2.

D' dans K' telle que

une application

/, forment une sphère

í).

 $\widetilde{\sigma}_{1}^{2}$  $_{0}^{c}$  $(\sigma^{2})$  --  $g_{2}^{*}$  $\{\widetilde{\omega}_{1}^{2}\}_{0}^{c}$  $(\sigma^{2})$ ,

 $\sigma^2 \in K^2$ .

Soient  $\Lambda_i^s$  (i=1, 2) les cochaînes entières dans  $K^s$  tel que

(12) 
$$f_{2}^{*} y_{i} - f_{2}^{*} y_{i} = \delta \Lambda_{i}^{*},$$
 (cf. (10)),

où on a posé (cf. § 1 (10)):

$$\{\omega_{2,2}^{4}\}_{0}^{\hat{}} = y_{4}, \qquad \{\omega_{4}^{4}\}_{0}^{\hat{}} = y_{2}, \qquad [\omega_{2,2}^{4*}]_{0}^{\hat{}} = x_{1}, \qquad [\omega_{4*}^{4}]_{0}^{\hat{}} = x_{2}.$$

Supposons que la sphère  $f(\delta(\sigma^t \times J))$  est

$$\simeq B_i(\sigma^i) \cdot S_i^4 + B_i(\sigma^i) \cdot S_i^4$$
 (cf. § 1),

où Bi peuvent être considérés comme des cochaînes entières de dimension 4. Définissons deux autres cochaînes entières Ci par

(13) 
$$C_i^3(\sigma^2) = I_v(b_i, f(\sigma^3 \times J)).$$

On déduit ainsi (cf. (10), (11) de § 1):

$$\begin{array}{l} a_{i_t} B_{\jmath}(\sigma^4) + a_{i_2} B_{\jmath}(\sigma^4) = I_{\scriptscriptstyle 0}(b_i, \, f(\delta(\sigma^4 \times J))) \\ = I_{\scriptscriptstyle 0}(r_i, \, f(\sigma^4 \times 1)) - I_{\scriptscriptstyle 0}(r_i, \, f(\sigma^4 \times 2)) - I_{\scriptscriptstyle 0}(r_i, \, f(\delta\sigma^4 \times J)) \\ = I_{\scriptscriptstyle 0}(r_i, \, f_{\scriptscriptstyle 1}(\sigma^4)) - I_{\scriptscriptstyle 0}(r_i, \, f_{\scriptscriptstyle 2}(\sigma^4)) - I_{\scriptscriptstyle 0}(r_i, \, f(\delta\sigma^4 \times J)) \\ = \delta A_i^2(\sigma^4) - \delta C_i^3(\sigma^4), \end{array}$$

d'où (cf. 11)' § 1),  $b_i B_i \sim 0$ , où  $b_i$  sont des entiers non nuls. Par hypothèse il n'existe pas de co-torsion de dimension 4 dans K. Il en résulte que  $B_i \sim 0$ . Par le procédé classique on peut alors remplacer l'application f par une autre

$$f': K^4 \times \partial J + K^3 \times J \rightarrow \hat{R}_{n,4}$$

telle que

$$(\alpha)'$$
  $f'/K' \times \delta J + K^2 \times J = f$ 

$$(\beta)'$$
  $f'(\delta(\sigma^* \times J)) \simeq 0$  pour chaque  $\sigma^* \in K^*$ .

Par conséquent cette application peut être étendue à  $\mathrm{K}^{\mathfrak{s}} \! \times \! \mathrm{J}$ , ce qui réalise l'homotopie de  $f_i$  et  $f_2$ . Notre théorème est ainsi démontré.

ET E

ou presque que

A une variék structure riema: O<sub>m</sub>-structure apa les fibres étant la cette structure es est orientable et de M, la structa subordonnées ce classes caractéris Pontrjagin sero.  $\{\omega\}_i^*(-\vdash M), W_s($ rentiable de la va structure (angen)

Une variété dif lement si  $W_2(M)$ :

Si la variété : donnée à sa  $O_m^*$ est presque comp. -i-M. Le théorèm donnent quelque structure presque ces conditions de

W)

(2)

(3) $\mathbf{p}_{1}$  dans K<sup>4</sup> tel que

(cf. (10)),

 $[\alpha_{4*}^{\varsigma}]_0^{\circ} = r_2.$ 

(cf. § 1),

cochaînes entières de es entières Ci par

$$(\sigma^{\epsilon} \times J)))$$
  
 $(\sigma^{\epsilon} (x_{i}, f(\delta \sigma^{\epsilon} \times J))$   
 $(\sigma^{\epsilon} \times J))$ 

entiers non nuls. Par ension 4 dans K. Il en peut alors remplacer

pour chaque  $\sigma^i \in K^i$ . tendue à  $K^i \times J$ , ce théorème est ainsi

#### CHAPITRE IV

## LA STRUCTURE TANGENTE A UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE ET SES STRUCTURES SUBORDONNÉES

§ 1. Les structures presque complexes ou presque quaternioniennes d'une variété différentiable.

A une variété différentiable M de dimension m, munie d'une structure riemannienne on associe d'une manière évidente une  $O_m$ -structure appelée la structure tangente de M, dont la base est M, les fibres étant les sphères unités dans les espaces tangents de M; cette structure est indépendante de la structure riemannienne. Si M est orientable et +M et -M les deux variétés orientées déduites de M, la structure tangente de M admet alors deux  $O_m$ -structures subordonnées correspondant à +M et -M respectivement. Les classes caractéristiques et les polynômes de Stiefel-Whitney et de Pontrjagin seront alors désignés respectivement par  $\{\omega\}_i(M)$ ,  $\{\omega\}_i^*(+M)$ ,  $W_2(M)$ , etc. Ce sont des invariants de la structure différentiable de la variété M. Le théorème 5 de § 3 chap. Il est pour la structure tangente équivalent à :

Une variété différentiable M de dimension m est orientable si et seu-

lement si  $W_2^1(M) = 0$ .

Si la variété orientée + M admet une O'<sub>m</sub>-structure  $\mathfrak{S}$  subordonnée à sa O'<sub>m</sub>-structure correspondante, nous dirons que + M est presque complexe et que  $\mathfrak{S}$  est une structure presque complexe de + M. Le théorème 7 de  $\S$  3 chap. u et le théorème 9 de  $\S$  4 chap. u donnent quelques conditions nécessaires pour l'existence d'une structure presque complexe. En particulier, si M est de dimension h, ces conditions deviennent:

- (2)  $W_{2}^{\frac{1}{2}}(-+M) = C_{2}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{S}),$ (3)  $P_{0}^{4}(+M) = C_{0}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{S}) \cup C_{0}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{S}) - 2C_{0}^{4}(\mathfrak{S}).$

Il résulte de (1) et (3):

(4) 
$$P_0^4(-+M) + 2X_0^4(-+M) = C_0^2(\mathfrak{S}) \cup C_0^2(\mathfrak{S}).$$

Nous démontrerons que les conditions (2) et (4) sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes. D'une façon plus précise, on a

Théorème 10. — (a) Pour qu'une variété orientée — M admette une structure presque complexe  $\mathfrak{S}$ , il faut et il suffit qu'il existe une classe de cohomologie entière  $\mathbb{C}_0^2$  de dimension 2 telle que

(5) 
$$W_2^2(+M) = C_2^2$$

et

(6) 
$$P_0^3(-M) - 2X_0^3(-M) := C_0^2 \cup C_0^2$$

où  $\mathbb{C}^2$  est la classe mod 2 déduite de  $\mathbb{C}^2$  par réduction mod 2.

(b) Le système des structures presque complexes de + M est en correspondance biunivoque avec le système des classes  $\mathbb{C}_0^2$  satisfaisant aux conditions (5) et (6).

Démonstration. — Nos conditions étant évidemment nécessaires, démontrons qu'elles sont suffisantes. Soient  $\hat{\mathbf{R}}_{n,4}$  (n=2n') assez grand) défini dans un espace vectoriel  $\mathbf{R}^{n+4}$  de dimension n+4 et  $\mathbf{C}_{n,4}$  défini dans le même espace muni d'une structure unitaire. La  $\mathbf{C}_3$ -structure correspondant à la variété orientée  $+\mathbf{M}$  est alors induite par une certaine application, soit f, de  $\mathbf{M}$  dans  $\hat{\mathbf{R}}_{n,4}$ . D'après proposition 7, § 3 chap. In il existe une application

$$g: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{C}_{n,4}$$

telle que

(7) 
$$\begin{cases} g^* \{ \overline{\omega}_i^2 \}_0^2 = C_0^2, \\ g^* \{ \overline{\omega}_2^2 \}_0^2 = P_0^3 (+M) + X_0^3 (+M). \end{cases}$$

Il en résulte, en désignant par  $\varphi'$  l'application canonique de  $G_{n,4}$  dans  $\hat{R}_{n,4}$  et en posant  $\varphi'g = f$ :

$$f^*\{\omega_4^4\}_0^2 = g^*\phi'^*\{\omega_4^4\}_0^2 = g^*\{\omega_2^2\}_0^c \text{ (lemme, § 1, chap. II)} \\ = g^*\{\overline{\omega_4^2}\}_0^c \cup g^*\{\overline{\omega_1^2}\}_0^c - g^*\{\overline{\omega_2^2}\}_0^c \text{ (cf. § 1, (5), chap. I)} \\ = C_0^2 \cup C_0^2 - P_0^4(-M) - X_0^4(-M) \tag{cf. (7)} \\ = X_0^4(-M), \tag{cf. (6)}$$

c'est-à-dire

(8) 
$$\bar{f}^* \{ \omega_4^4 \}_0^{\hat{}} = f^* \{ \omega_4^4 \}_0^{\hat{}}.$$

CLASSES CARACTÉRIS

De même, on a:

(9)

et

(10)

D'après propositi

La structure  $g^*\mathfrak{C}$  on la  $O_4$ -structure ta (b). La correspondent complexes et les characteristics  $\mathfrak{C}_0^3(g^*\mathfrak{C}_{n,4})$  est complete. La proposition

Nous dirons qu' presque quaternioni sa structure tange: théorème suivant e théorème 8 de § 3,

Théorème 11. — admette une structur

 $W_2^2(+-M)$ 

If n'existe alors  $q_0 + M$ .

Pour les variétés

Théorème 12. — ait une structure pr classe entière  $G_0^2$  de i

(12)

Démonstration. - quée dans théorème aussi suffisante. On

Soient  $C_{n,6}$  (n = définies dans  $C^{n'+3}$  l'application canon

 $) \cup \mathbb{C}_0^2(\mathfrak{S}).$ 

) et (4) sont non seuleune façon plus précise,

é orientée 🕂 M admette il suffit qu'il existe une 2 telle que

 $\cup \mathbb{C}^2_a$ 

duction mod 2 . plexes de + M est en s classes  ${f C}_0^2$  satisfaisant

idemment nécessaires, it  $R_{n,\,4}$  (n=2n') assez le dimension n + 4 et structure unitaire. La entée -+ M est alors M dans R<sub>n,4</sub>. D'après cation

- M).

ion canonique de C<sub>n. 4</sub>

lemme, § 4, chap. п) (cf. § 4, (5), chap. 1) (cf. (7))(cf. (6))

 $\overline{f}^* \{ \omega_{2,2}^4 \}_0^4 = f^* \{ \omega_{2,2}^4 \}_0^4,$ (9)

et

De même, on a:

(10) 
$$\bar{f}^* \{ \omega_2^4 \}_2^{\hat{}} = f^* \{ \omega_2^4 \}_2^{\hat{}}.$$

D'après proposition 7", § 3, chap. 111, on déduit de (8), (9) et (10)

$$f \simeq \overline{f} = \varphi' g$$
.

La structure  $g^*\mathfrak{C}_{n,4}$  est donc subordonnée à la structure  $f^*\mathfrak{R}_{n,4}$ , ou la O4-structure tangente correspondant à + M. Ceci démontre (a).

(b). La correspondance biunivoque entre les structures presque complexes et les classes Co vérifiant (5) et (6) résulte du fait que  $\mathbf{C}_0^4(g^*\mathfrak{C}_{n,\,4})$  est complètement déterminé par les classes  $\mathbf{C}_0^2$  et  $\mathbf{P}_0^4(-\!\!\mid\!-\mathbf{M})$ (cf. la proposition 7(b), § 4, chap. m et (3)).

Nous dirons qu'une variété orientée + M admet une structure presque quaternionienne (ou qu'elle est presque quaternionienne) si sa structure tangente en admet une. On peut démontrer alors le théorème suivant en partant de la proposition 7', § 3, chap. 111 et théorème 8 de § 3, chap. 11.

Théorème 11. — Pour qu'une variété orientée + M de dimension 4 admette une structure presque quaternionienne, il faut et il suffit que :

$$W_2^2(+M) = 0$$
,  $P_0^4(+M) + 2X_0^4(+M) = 0$ .

Il n'existe alors qu'une seule structure presque quaternionienne de

Pour les variétés de dimension 6, on a

Théorème 12. — Pour qu'une variété orientée + M de dimension 6 ait une structure presque complexe, il faut et il suffit qu'il existe une classe entière Co de la variété M telle que

(12) 
$$C_2^2 = W_2^2 (-M).$$

Démonstration. — La nécessité de la condition (12) étant impliquée dans théorème 7 § 3, chap. 11, nous démontrerons qu'elle est aussi suffisante. On suppose done l'existence de Co vérifiant (12).

Soient  $C_{n,6}$  (n=2n'>6) et  $\hat{R}_{n,6}$  les variétés grassmanniennes définies dans Cn'+3 et son espace associé Rn+6 respectivement, et o' l'application canonique de  $C_{n,6}$  dans  $\hat{R}_{n,6}$ . Soit  $f: M \rightarrow \hat{R}_{n,6}$  l'application qui induit la structure tangente de + M. Désignons par  $M^k$  le squelette de M de dimension k. En utilisant (13) de § 2, chap. III, on peut définir une application  $g: M^3 \to \mathbb{C}_{n,6}$  tel que  $g^*\{\omega_1^3\}_0^c = \mathbb{C}_0^2$ . Il en résulte

$$f^*\{\omega_2^6\}_2^2 = (\varphi'g)^*\{\omega_2^6\}_2^2, \qquad (= \mathbb{C}_2^2)$$

et par conséquent en utilisant (15) de § 2 chap. m (cf. la démonstration de proposition 7", chap. m)

$$f/\dot{\mathrm{M}}^2 \simeq \phi' g/\mathrm{M}^2$$
 dans  $\hat{\mathrm{R}}_{n,\,6}$ .

On peut donc déformer f dans une application  $f_2: \mathbb{M} \to \hat{\mathbb{R}}_{n,\,6}$  telle que  $f_n/M^2 \equiv \phi' g/M^2$ . Puisque  $\pi^3(\hat{R}_{n,6}) \equiv 0$  (cf. (14), § 2, chap. III), on peut déformer donc  $f_2$  dans  $f_3: M \to \hat{R}_{n,6}$  tel que  $f_3/M^3 \equiv \phi'g/M^3$ , d'où  $f_3(M^3) \subset \phi'(C_{n,6})$ . Supposons maintenant que nous ayons déformé f dans  $f_k: M \to R_{n,6}$  tel que  $f_k(M^k) \subset \varphi'(C_{n,6})$ , où  $3 \leqslant k \leqslant 6$ . Pour une cellule  $\sigma = \sigma^{k+1} \in M^{k+1}$  quelconque l'application  $f_k / \delta \sigma$  définit une application  $g_k: \delta \sigma \to \mathbf{C}_{n,\delta}$  telle que  $\varphi' g / \delta \sigma \equiv f_k / \delta \sigma$  soit homotope à zéro dans R<sub>n,6</sub>. D'après proposition 6 ou (12) § 2, chap. 111, on a donc  $g_k \succeq 0$  dans  $C_{n,6}$  et par conséquent on peut l'étendre à une application  $g_k: \sigma \to \mathbf{C}_{n,6}$ . Les applications  $f_k/\sigma$  et  $\phi'g_k/\sigma$  définissent un certain élément  $\alpha$  de  $\pi_{k+1}(\mathbf{R}_{n,6})$ . D'après la proposition 6, il existe un élément  $\alpha'$  de  $\pi_{k+1}(C_{n,6})$  tel que  $\Phi_{k+1}\alpha' = \alpha$ . Définissons maintenant une application  $g'_k: \sigma \to \mathbf{C}_{n,\delta}$  telle que  $g'_k(\sigma)$  et  $g_k(\sigma)$ forment une image sphérique appartenant à l'élément a'. L'élément de  $\pi_{k+1}(\hat{\mathbf{R}}_{n,6})$  représenté par  $f_k(\sigma)$  et  $\varphi'g'_k(\sigma)$  est alors  $\alpha - \Phi_k \alpha' = 0$ . Il en résulte que  $f_k/\sigma \simeq \varphi' g'_k/\sigma$  rel.  $\delta \sigma$ . On peut donc déformer  $f_k$  en une application  $f_{k+1}: M \to \hat{R}_{n,6}$ , telle que  $f_{k+1}/M^{k+1} \cong \varphi' g_k/M^{k+1}$  et par conséquent  $f_{k+1}(M^{k+1}) \in \phi'(\mathbf{C}_{n,6})$ .

Par récurrence on obtient enfin une application  $g': M \to \mathbb{C}_{n,6}$  telle que  $f = \varphi'g'$ . La structure  $g'^*\mathfrak{C}_{n,6}$  est alors une structure presque complexe de la variété  $+\!-\!M$ .

C. q. f. d.

# § 2. Quelques exemples.

Nous énonçons d'abord deux lemmes dont le premier est une simple conséquence de la définition des classes caractéristiques (cf. CLASSES CARACTÉ

(1) de § 2, chap. tration.

Lemme 1. — S être plongée dans

 $\{\omega\}_i (-+M)$ 

LEMMF 2. — P valeur de la clas où γ est la caracté

EXEMPLES.

(a) Pour une : engendrant le gre valeur + 1 pour

 $\{\omega\}_0(S)$ 

Il en résulte

Si la sphère S<sup>4k</sup> a

d'où

Mais alors on a

 $\mathbf{C}_{\upsilon}(\mathfrak{S},\ t) \cup \mathbf{C}_{\upsilon}(\mathfrak{S})$ ce qui est contra Une sphère de

Un théorème s

complexe.

des sphères con A. Kirchhoff, St sphères, G. R. I (b) Plus géné.

4k est telle que

et

la variété + M

$$= \mathbf{C}_2^2$$

p. m (cf. la démons-

$$\{n, 6.$$

on  $f_i \colon \operatorname{M} o \operatorname{R}_{s,\, 0}$  telle (14), § 2, chap. m), que  $\int_3/\mathrm{M}^3 \equiv \varphi'g/\mathrm{M}^3$ , at que nous ayons  $(C_{n,6})$ , où  $3 \leqslant k < 6$ . plication  $f_k/\mathfrak{d}\sigma$  définit  $\pm f_k/$ dø soit homotope e) § 2, chap. 111. on a peut l'étendre à une et  $\varphi'g_k/\sigma$  définissent la proposition 6, il , α' = α. Définissons e que  $g_k'(\sigma)$  et  $g_k(\sigma)$ ément «. L'élément alors  $\alpha = \Phi_k \alpha' = 0$ . donc déformer $f_k$  en  $\mathbf{M}^{k+1} \cong \varphi' g_k / \mathbf{M}^{k+1}$  et

eation  $g' \colon \mathbf{M} \to \mathbf{C}_{n, 6}$ ne structure presque

C. q. f. d.

le premier est une caractéristiques (cf.

classes caractéristiques des structures fibrées sphériques 77

(1) de § 2, chap. 11) et dont le deuxième sera admis sans démonstration.

Lemme 1. — Si une variété orientée + M de dimension m peut être plongée dans un espace cuclidien de dimension m+1, on a

$$\{\omega\}(-M)=0, \quad i=0 \text{ ou } 2, \quad \omega \neq \omega_m^m \in \Omega(m, m).$$

Lemme 2. — Pour une variété orientée + M de dimension m la valeur de la classe  $X_0^m(+-M)$  sur le cycle + M est égal à  $(--1)^m\gamma$ , où  $\gamma$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété M.

EXEMPLES.

(a) Pour une sphère orientée  $S^{4k}$  de dimension 4k soit s la classe engendrant le groupe de cohomologie de dimension 4k, qui prend la valeur -1 pour le cycle  $S^{4k}$ . On a alors, d'après les lemmes 1 et 2

$$X_0^{4k}(S^{4k}) == 2s.$$

$$\{\omega\}_0^*(S^{4k}) = 0, \quad \text{pour} \quad \omega \neq \omega_{ik}^{4k} \in \Omega(4k, 4k).$$

Il en résulte

$$P_0(S^{ik}, t) = 1$$
.

Si la sphère S<sup>4k</sup> admet une structure presque complexe ©, on aura

$$C_0^{4k}(\mathfrak{S}) = X_0^{4k}(S^{*k}) = 2s,$$

d'où

$$C_0(\mathfrak{S},\ t) = C_0(\mathfrak{S},\ it) = 1 + 2s \cdot t^{4k}$$

Mais alors on a

$$\mathbf{C}_{o}(\mathfrak{S},\ t) \cup \mathbf{C}_{o}(\mathfrak{S},\ \mathrm{i}\,t) = (\mathbf{1} + 2s \cdot t^{4k})^{2} = \mathbf{1} + 4s \cdot t^{4k} \neq \mathbf{P}_{o}(\mathbf{S}^{4k},\ t),$$

ce qui est contraire au théorème 9. Donc :

Une sphère de dimension 4k n'admet aucune structure presque complexe.

Un théorème général concernant les structures presque complexes des sphères contient notre théorème comme cas particulier (cf. A. Kirchhoff, Sur l'existence de certains champs tensoriels sur les sphères, G. R. Paris, 225 (1947), 1258-1260).

(b) Plus généralement, si une variété orientée M de dimension. 4k est telle que

$$X_0^{4k}(M) = 0,$$

et

$$\mathbf{P}_{o}^{ij}(\mathbf{M}) = \mathbf{o}, \qquad \mathbf{o} < j < k,$$

la variété + M ainsi que - M n'admet aucune structure presque

complexe. Un exemple autre que  $S^{tk}$  est fourni par les variétés  $H_{\rho}^{4k}(p > 1)$  de dimension 4k définies de la façon suivante :

Prenons une sphère  $S^{*k}$  avec 2p trous symétriques deux à deux par rapport au plan équatorial de la sphère  $S^{*k}$ . Identifions par symétrie les bords de chaque paire de trous. La variété orientable ainsi obtenue est  $H_p^{4k}$ . On a alors :

$$(\alpha) X_0^{4k}(+H_p^{4k}) := 2(1-p) \cdot s,$$

- ( $\beta$ )  $H_{\rho}^{4k}$  peut être plongé dans un espace euclidien de dimension 4k + 1, où s'est la classe engendrant le groupe de cohomologie de dimension 4k, qui prend la valeur +1 pour le cycle représenté par la variété orientée +1  $H_{\rho}^{4k}$ .

$$\begin{array}{c} X_{\mathfrak{d}}^{4}(\to K) == 3z_{\mathfrak{d}}^{4}, \\ C_{\mathfrak{d}}^{2}(\mathfrak{S}) == 3z_{\mathfrak{d}}^{2}, \qquad C_{\mathfrak{d}}^{4}(\mathfrak{S}) == 3z_{\mathfrak{d}}^{4}, \end{array}$$

d'où

$$W_{2}^{2}(+K) = G_{2}^{2}(\mathfrak{S}) = z_{2}^{2},$$

et

$$P_0^4(-K) = C_0^2(\mathfrak{S}) \cup C_0^2(\mathfrak{S}) - 2C_0^4(\mathfrak{S}),$$
  
=  $9z_0^2 \cup z_0^2 - 6z_0^4 = 3z_0^4.$ 

Pour la variété — K on a (cf. théorème 2):

$$X_0^4(-K) = -X_0^4(-K) = -3z_0^4,$$
  
 $P_0^4(-K) = P_0^4(-K) = 3z_0^4.$ 

Supposons que — K admette aussi une structure presque complexe &. Alors

$$C_0^4(\mathfrak{S}') = X_0^4(-K) = -3z_0^4,$$
  
 $C_2^2(\mathfrak{S}') = W_2^2(-K) = W_2^2(-K) = z_2^2,$ 

d'où

$$C_0^2(\mathfrak{S}') = (2a - 1)z_0^2$$

où a est un entier. Puisque

$$P_{\upsilon}^4(--K) = C_{\upsilon}^2(\mathfrak{S}') \, \cup \, C_{\upsilon}^2(\mathfrak{S}') - 2\,C_{\upsilon}^4(\mathfrak{S}'),$$

on aura

$$3z_0^4 = (2a + 1)^2 z_0^2 \cup z_0^2 + 6z_0^4,$$

ou

$$a^{2} + a + 1 = 0,$$

ce qui est impossible. Donc:

Le plan projecti complexe pour l'ori

De plus, si & e de la variété orient ment que les class - 32° et 32° respect

Il n'existe que e l'une, &, correspon

(d) D'après thé complexes de la s de S°. Ce sont les § 2, chap. m:  $\Phi_6$  es  $\overline{\alpha} \in \pi_6(\hat{\mathbf{R}}_{n,6})$  sont les drant les deux structures presque classes d'homotopie

Les résultats sui rèmes concernant démontrés au chap.

(e) Dans  $\S$  4 cho dimension 2n,  $n \geqslant$  rème 7, on a done:

Pour tous les n > 2n qui n'admettent :

(f) Une variété nécessairement pre pas vraie. Par exessans singularité de complexe 3 on pe complexe naturelle a donc

 $2X_{\circ}^{4}()$ 

D'après théorèm tant on a  $X_0^4(M) \cdot N$  sable.

urni par les variétés on suivante :

étriques deux à deux 5 S<sup>\*\*</sup>. Identifions par La variété orientable

clidien de dimension pe de cohomologie de cycle représenté par

dimension réelle 4k. 2 conformément à sa 1 — K. Soient 2º et 2º droite complexe et au

!4(*3*5)

.

cture presque com-

 $= z_2^2$ ,

 $\mathcal{L}^4_v(\mathfrak{S}'),$ 

Le plan projectif complexe K n'admet aucune structure presque complexe pour l'orientation non conforme à sa structure complexe.

De plus, si  $\mathfrak{S}'$  est une structure presque complexe queleonque de la variété orientée  $\to K$ , on peut démontrer comme précédemment que les classes  $C_0^*(\mathfrak{S}')$  et  $C_0^*(\mathfrak{S}')$  sont nécessairement égales à  $+3z_0^*$  et  $3z_0^*$  respectivement. Il en résulte que :

Il n'existe que deux structures presque complexes de + K dont l'une, S, correspond à sa structure complexe et l'autre est &.

(d) D'après théorème 12, il existe deux structures presque complexes de la sphère S<sup>6</sup> correspondant aux deux orientations de S<sup>6</sup>. Ce sont les seules possibles. Cela résulte de Proposition 6, § 2, chap.  $m: \Phi_{\epsilon}$  est un isomorphisme de  $\pi_{\epsilon}(\mathbf{C}_{n, \, \epsilon})$  sur  $\pi_{\epsilon}(\hat{\mathbf{R}}_{n, \, \epsilon})$ . Si  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{\alpha} \in \pi_{\epsilon}(\hat{\mathbf{R}}_{n, \, \epsilon})$  sont les deux classes d'applications de S<sup>6</sup> dans  $\hat{\mathbf{R}}_{n, \, \epsilon}$  engendrant les deux structures tangentes de + S<sup>6</sup> et - S<sup>6</sup>, les deux structures presque complexes de S<sup>6</sup> sont alors engendrées par les classes d'homotopie  $\tilde{\Phi}_{\epsilon}(\tilde{z})$  et  $\tilde{\Phi}_{\epsilon}(\alpha)$  de  $\pi_{\epsilon}(\mathbf{C}_{n, \, \epsilon})$ .

Les résultats suivants sont démontrés à l'aide de quelques théorèmes concernant les produits de structures fibrées sphériques, démontrés au chap. v.

(e) Dans § 4 chap. v nous indiquerons une variété orientable de dimension 2n.  $n \ge 3$  quelconques, dont  $W_2^3(M) \ne 0$ . D'après théorème 7, on a donc :

Pour tous les  $n \geqslant 3$ , il existe des variétés orientables de dimension 2n qui n'admettent aucune structure presque complexe.

(f) Une variété différentiable parallélisable de dimension 4 est nécessairement presque quaternionienne, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, pour une surface algébrique M d'ordre 4 sans singularité dans un espace projectif complexe de dimension complexe 3 on peut démontrer que,  $\mathfrak{S}$  étant la structure presque complexe naturelle de M,  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S}) = 0$ . D'après théorèmes 7 et 9, on a donc

$$\begin{split} \mathbf{W}^2_{\imath}(\mathbf{M}) &= \mathbf{C}^2_{\imath}(\mathfrak{S}) = 0, \\ 2\mathbf{X}^3_{\flat}(\mathbf{M}) + \mathbf{P}^4_{\flat}(\mathbf{M}) &= \mathbf{C}^2_{\flat}(\mathfrak{S}) \cup \mathbf{C}^2_{\flat}(\mathfrak{S}) = 0. \end{split}$$

D'après théorème 12, M est donc presque quaternionienne. Pourtant on a  $X_0^4(M) \cdot M = 24 \neq 0$ . Par conséquent M est non-parallélisable.

#### CHAPITRE V

# LA COMPOSITION DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

## § 1. Le ×-produit de deux structures fibrées sphériques.

Soient  $R_1^{n_i}$  et  $R_2^{n_i}$  deux espaces numériques et  $R^n(n = n_i + n_2)$  leur somme directe. Prenons une base de vecteurs  $(e_i^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)})$  dans  $R_i^{n_i}$  qui, dans cet ordre, détermine une certaine orientation de  $R_i^{n_i}$ . L'espace  $R^n$  muni de l'orientation définie par l'ordre de la base de vecteurs  $e_i^{(1)}, \ldots, e_{n_i}^{(1)}, e_i^{(2)}, \ldots, e_{n_k}^{(2)}$  sera appelé la somme orientée de ces deux espaces orientés  $R_i^{n_i}$  et  $R_i^{n_i}$ .

Soient  $S_i(i = 1, 2)$  et S les sphères-unités respectivement dans les espaces  $R_i^{n_i}$  et  $R^n$ . Nous dirons que S est le joint de  $S_i$  et  $S_i$ . Si nous orientons  $S_i$  en concordance avec l'orientation de  $R_i^{n_i}$  et puis S en concordance avec l'orientation de la somme orientée  $R^n$  des espaces orientés  $R_i^{n_i}$  et  $R_i^{n_i}$ , la sphère orientée S sera appelée alors le joint orienté des deux sphères orientées  $S_i$  et  $S_i$ .

Soient  $\mathfrak{S}_i$ , i=1,2, deux G-structures fibrées sphériques (G=0, O, O, ou O') définies respectivement sur les bases  $B_i$ . On peut alors définir canoniquement une G-structure  $\mathfrak{S}$  sur le produit  $B_i \times B_2$  telle que la sphère fibre de  $\mathfrak{S}$  sur un point  $p=p_i \times p_2$  de  $B_i \times B_2$  soit le joint (ou le joint orienté pour G=O) des deux sphères fibres de  $\mathfrak{S}_i$  sur les points  $p_i$  de  $B_i$ . Nous dirons que  $\mathfrak{S}$  est le  $\mathfrak{S}$ -produit de  $\mathfrak{S}_i$  et  $\mathfrak{S}_2$  et nous le noterons  $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_2$ .

Le problème que nous envisageons dans cette section est le suivant:

Déterminer les classes caractéristiques de  $\mathfrak{S}$  en termes de celles de  $\mathfrak{S}_i$ : Nous n'envisageons que les deux cas particuliers suivants :

1º Détermination des classes de Stiefel-Whitney ou des classes de Chern de la structure S pour des structures S₁ quelconques;

CLASSES CARACTÉRIS

2° Détermination lorsque ©, est une s Considérons d'abi Prenons pour ce somme directe est l R<sub>ni, mi</sub> les variétés gre espaces; les cycles e gués de ceux de R<sub>ni</sub>, X<sub>i</sub> de R<sub>ni, mi</sub> et un élicest la somme de ces application canonique la variété R<sub>ni, mi</sub> en per Supposons mainte

Supposons mainte induites respectivem

l'application définie p

 $f'(p_i \times 1)$  Il est alors évident i

l'application
(1)

Nous étudions donc nique W. Dans le cas équations suivantes

(2)  $\Psi^*$  où la sommation est é  $k_i \geq 0$ .

Démonstration. — formules suivantes :

 $(3) \quad I_2 = I_2(\Psi(\Gamma \omega^{(1)}))$ 

où  $\omega^{(i)} \in \Omega(n_i, m_i)$ ,  $d(\omega^{(i)})$ Pour démontrer (3) CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

2º Détermination des classes caractéristiques quelconques de S lorsque  $\mathfrak{S}_i$  est une structure simple.

Considérons d'abord le problème 1° pour les O-structures.

Prenons pour cela deux espaces numériques  $\mathbb{R}^{n_i+m_i}_i$  dont la somme directe est  $\mathbb{R}^{n+m}$   $(n=n_1+n_2,\ m=m_1+m_2)$ . Soient  $\mathbb{R}_{n,m}$ ,  $\mathbf{R}_{n_i,\,m_i}$  les variétés grassmanniennes définies respectivement dans ces espaces; les cycles et éléments analogues dans  $R_{n_i,m_i}$  seront distingués de ceux de  $R_{n,m}$  en ajoutant des superindices. Pour un élément  $\mathbf{X}_i$  de  $\mathbf{R}_{n_i,m_i}$  et un élément  $\mathbf{X}_2$  de  $\mathbf{R}_{n_i,m_i}$  soit X l'élément de  $\mathbf{R}_{n_i,m}$  qui est la somme de ces deux éléments X, et X2. On obtient ainsi une application canonique  $\Psi$  de la variété produit  $R_{n_1,\,m_1} \times R_{n_2,\,m_2}$  dans la variété  $R_{n,m}$  en posant  $\Psi(X_1 \times X_2) = X$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{S}_i(i=1,\ 2)$  sont des O-structures induites respectivement par des applications  $f_i: B_i \rightarrow \mathbf{R}_{n_i, m_i}$ . Soit

$$f': B_{i} \times B_{2} \to R_{n_{i}, m_{i}} \times R_{n_{i}, m_{2}}$$

l'application définie par

$$f'(p_i \times p_2) = f_i(p_i) \times f_2(p_2), \quad p_i \in \mathbf{B}_i$$

Il est alors évident que le X-produit S=S, XS, est induit par

(1) 
$$f = \Psi f' : B_i \times B_2 \to R_{n,m}.$$

Nous étudions donc le type d'homologie de l'application canonique W. Dans le cas mod 2 ce type d'homologie est donné par les équations suivantes

(2) 
$$\Psi^* \{ \overline{\omega}_k^m \}_2 = \sum_{i=1}^m \{ \overline{\omega}_{k_i}^{m_i} \}_2^{(i)} \otimes \{ \overline{\omega}_{k_i}^{m_i} \}_2^{(2)},$$

où la sommation est étendue aux couples  $(k_1, k_2)$  tels que  $k_1 + k_2 = k$ ,

Démonstration. — La formule (2) est en effet équivalente aux formules suivantes:

(3) 
$$I_2 = I_2(\Psi([\omega^{(1)}]_2^{(1)} \otimes [\omega^{(2)}]_2^{(2)}), [\overline{\omega_k^{m*}}]_2).$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pour } \omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) < k, \\ 1 \text{ pour } \omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) = k, \end{cases}$$

où  $\omega^{(i)} \in \Omega(n_i, m_i), d(\omega^{(1)}) + d(\omega^{(2)}) = k.$ 

Pour démontrer (3), considérons d'abord le cas

(4) 
$$\omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}m_2 ) < k.$$

PHÉRIQUES

brées sphériques.

 $\mathbb{R}^n(n=n_1+n_2)$  leur 's  $(e_i^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)})$  dans ie orientation de R<sub>i</sub>i. l'ordre de la base de a somme orientée de

pectivement dans les de S, et S<sub>2</sub>. Si nous de Rie et puis Sen entée R<sup>n</sup> des espaces ppelée alors le *joint* 

sphériques (G = 0, bases B<sub>i</sub>. On peut S sur le produit point  $p = p_1 \times p_2$ G = O') des deux s dirons que 🌫 est  $=\mathfrak{S}_{i} imes\mathfrak{S}_{j}$  . ette section est le

mes de celles de  $\mathfrak{S}_i$  : ers suivants : iey ou des classes 5, quelconques ;

Prenons dans  $R_i^{n_i+m_i}$  (i=1, 2) un sous-espace vectoriel  $R_i$  de dimension  $\omega^{(i)}(m_i) + m_i$  et dans  $R^{n+m}$  un sous-espace vectoriel  $R_0$  de dimension n-k+1 tels que

(5) 
$$\dim_{\bullet} (R_{0} \cap (R_{1} \oplus R_{2})) = 0,$$

ce qui est toujours possible à cause de (1). Considérons maintenant le cycle  $[\overline{\omega}_k^{m*}]_2 \in [\overline{\omega}_k^{m*}]_2$  représenté géométriquement par la pseudo-variété de l'ensemble des  $X \in \mathbb{R}_{n,m}$  tels que

(6) 
$$\dim_{\cdot} (X_{\Omega} R_{0}) \geqslant 1.$$

De même, nous prenons les cycles  $[\omega^{(i)}]_2^{(i)} \in [\omega^{(i)}]_2^{(i)}$  représentés géométriquement par les pseudo-variétés ensembles des éléments  $X_i \in R_{n_i, m_i}$  satisfaisant respectivement aux conditions  $X_i \in R_i$ , etc. Pour  $X_i \in [\omega^{(i)}]_2^{(i)}$ , on voit donc que  $X = \Psi(X_i \times X_2)$  est contenu dans  $R_i \oplus R_2$  et par conséquent ne satisfait pas (6), d'après (5). Il en résulte que  $\Psi([\omega^{(i)}]_2^{(i)} \times [\omega^{(2)}]_2^{(2)})$  n'a aucun élément en commun avec  $[\overline{\omega}_k^{m^*}]_2$ . Donc:

(7) 
$$I_2 = 0$$
 pour  $\omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) < k$ ,

Supposons maintenant

$$\omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) = k.$$

On a alors nécessairement

$$\omega^{(i)} = \overline{\omega}_{k_i}^{m_i}, \qquad k_1 + k_2 = k.$$

Dans  $R_{n_i+m_i}^{n_i+m_i}$  prenons un système de coordonnées  $(x^{(i)}) = (x_i^{(i)}, \ldots, x_{n_i+m_i}^{(i)})$  correspondant à la base de vecteurs  $(e^i) = (e_i^{(i)}, \ldots, e_{n_i+m_i}^{(i)})$  et désignons par  $R_i^s$  le sous-espace de  $R_i^{n_i+m_i}$  déterminé par les vecteurs  $e_i^{(i)}, \ldots, e_i^{(i)}$ .

Soit  $\mathbb{R}^{n-k+1}$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^{n+m}$  déterminé par les vecteurs :

$$e_{m_1+k_1+1}^{(1)}, \ldots, e_{n_1+m_1}^{(1)}; \qquad e_{m_2+k_2+1}^{(2)}, \ldots, e_{n_2+m_3}^{(2)}; \qquad e_{m_1}^{(1)}+e_{m_2}^{(2)}.$$

Nous définirons les cycles  $[\overline{\omega}_{k_i}^{m_i}]_2^{(0)}$  (i = 1, 2) et  $[\overline{\omega}_k^{m^*}]_2$  comme l'ensemble des éléments  $X_i \in \mathbb{R}_{n_i, m_i}$  et  $X \in \mathbb{R}_{n_i, m}$  satisfaisant respectivement aux conditions suivantes :

$$R_i^{m_i-1} \subset X_i \subset R_i^{m_i+k_i};$$
  
dim.  $(X \cap R^{n-k+1}) \ge 1$ .

On voit facilement que le seul élément commun aux deux ensembles  $\left[\overline{\omega}_{k}^{m^*}\right]_2$  et  $\Psi(\left[\overline{\omega}_{k_1}^{m_1}\right]_2^{(1)}) \times \left[\overline{\omega}_{k_2}^{m_2}\right]_2^{(2)})$  est l'élément  $X_0 \in \mathbf{R}_{n,m}$  déterminé par les vecteurs  $e_1^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}; e_1^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}$ . On peut réaliser

CLASSES CARACTÉRI

ces deux ensemble linéaires et par con à 1, c'est-à-dire,

$$(8)$$
  $I_2 = I$ 

De (7) et (8) on déc D'après (1), il en

w

D'où

 $\mathbf{W}^2$ 

En appliquant le tl on en déduit :

 $\mathbf{W}_{2}($ 

(Cf. la démonstr Chap. н.)

De la même façor les G-structures, où du théorème 5. On a

Théorème 13. — G-structures S, et S

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{s}(\mathbf{S}, t) &= \mathbf{W}_{s}(\mathbf{S}_{t}, \\ &\overline{\mathbf{W}}_{s}(\mathbf{S}, t) = \overline{\mathbf{V}}_{t} \\ \mathbf{C}_{o}(\mathbf{S}, t) &= \mathbf{C}_{o}(\mathbf{S}_{t}, t) \\ &\overline{\mathbf{C}}_{o}(\mathbf{S}, t) &= \mathbf{Q}_{o}(\mathbf{S}_{t}, t) \\ &\overline{\mathbf{Q}}_{o}(\mathbf{S}, t) &= \mathbf{Q}_{o}(\mathbf{S}_{t}, t) \end{aligned}$$

Considérons mair Supposons que  $\hat{R}_{n_i,m}$ nies respectivement  $\hat{\epsilon}$ somme  $R^{n+m}$   $(n = n_i)$  pace vectoriel R, de espace vectoriel R, de

nsidérons maintenant ment par la pseudo-

 $[^{(i)}_{2}\in [\omega^{(i)}]^{(i)}_{2}$  représentés embles des éléments ditions  $X_i \subset R_i$ , etc.  $(X_{_{2}} igotimes X_{_{2}})$  est contenu ıs (6), d'après (5). Il élément en commun

$$(m_2) < k$$

 $\text{données} \quad (x^{(i)}) == (x^{(i)}),$ vecteurs  $(e^i) = (e^{(i)},$ de  $R_i^{n_i+m_i}$  déterminé

par les vecteurs:

$$e_{m_1}^{(1)} + e_{m_2}^{(2)}$$
.

et  $\left[\overline{\omega}_{k}^{m*}\right]_{a}$  comme l'enusant respectivement

commun aux deux ément  $X_{{}_{n}}\!\!\in\!\!\mathbb{R}_{{}_{n,\,m}}$  déter-😩. On peut réaliser CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES 83

ces deux ensembles au voisinage de X, dans R, m par des variétés linéaires et par conséquent leur indice d'intersection mod 2 est égal à 1, c'est-à-dire,

(8) 
$$I_2 = i$$
 pour  $\omega^{(1)}(m_i) + \omega^{(2)}(m_j) = k$ .

De (7) et (8) on déduit la formule (2). D'après (1), il en résulte que

$$\begin{split} \overline{\mathbf{W}}_{2}^{k}(\mathfrak{S}) &= f^{*} \{ \overline{\omega}_{k}^{m} \}_{2} = f'^{*} \Psi'^{*} \{ \overline{\omega}_{k}^{m} \}_{2} \\ &= \sum f'^{*} (\{ \overline{\omega}_{k_{1}}^{m_{1}} \}_{2}^{(1)} \otimes \{ \overline{\omega}_{k_{2}}^{m_{2}} \}_{2}^{(2)} ) \\ &= \sum f_{1}^{*} \{ \overline{\omega}_{k_{1}}^{m_{1}} \}_{2}^{(1)} \otimes f_{2}^{*} \{ \overline{\omega}_{k_{2}}^{m_{2}} \}_{2}^{(2)} \\ &= \sum \overline{\mathbf{W}}_{2}^{k_{1}} (\mathfrak{S}_{1}) \otimes \overline{\mathbf{W}}_{2}^{k_{2}} (\mathfrak{S}_{2}). \end{split}$$

D'où

$$\overline{\mathbf{W}}^{2}(\mathfrak{S}, t) = \overline{\mathbf{W}}^{2}(\mathfrak{S}_{1}, t) \otimes \overline{\mathbf{W}}^{2}(\mathfrak{S}_{2}, t).$$

En appliquant le théorème de dualité (Théorème 3, § 2, Chap. n) on en déduit :

$$\mathbf{W}_{\scriptscriptstyle 2}(\mathfrak{S},\ t) \mathop{==} \mathbf{W}_{\scriptscriptstyle 2}(\mathfrak{S}_{\scriptscriptstyle 1},\ t) \otimes \mathbf{W}_{\scriptscriptstyle 2}(\mathfrak{S}_{\scriptscriptstyle 2},\ t).$$

(Cf. la démonstration de la formule (16), Théorème 3, § 4,

De la même façon on peut déduire les formules analogues pour les G-structures, où G == O' ou O" et pour les O'-structures à l'aide du théorème 5. On arrive ainsi au théorème suivant :

Théorème 13. — Si la structure & est le X-produit de deux G-structures  $\mathfrak{S}_{i}$  et  $\mathfrak{S}_{2}$ , on a

$$\begin{split} \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S},\ t) &= \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}_{1},\ t) \otimes \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}_{2},\ t), \\ &= \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}_{1},\ t) \otimes \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}_{2},\ t), \quad pour \quad \mathbf{G} = \mathbf{O} \ ou \ \mathbf{O}^{*}; \\ \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S},\ t) &= \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}_{1},\ t) \otimes \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}_{2},\ t), \\ &= \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S},\ t) = \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}_{1},\ t) \otimes \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}_{2},\ t), \quad pour \quad \mathbf{G} = \mathbf{O}'; \\ \mathbf{Q}_{0}(\mathfrak{S},\ t) &= \mathbf{Q}_{0}(\mathfrak{S}_{1},\ t) \otimes \mathbf{Q}_{0}(\mathfrak{S}_{2},\ t), \quad pour \quad \mathbf{G} = \mathbf{O}''. \end{split}$$

Considérons maintenant le problème 2° pour des O'-structures. Supposons que  $\hat{\mathbf{R}}_{n_i,m_i}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{n_i,m}$  sont les variétés grasmanniennes définies respectivement dans les espaces numériques  $R_i^{n_i+m_i}$  et dans leur somme  $\mathbb{R}^{n+m}$   $(n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2)$ . Prenons les systèmes de coordonnées  $(x^{(i)})$  et (x) dans  $R_i^{n_i+m_l}$  et  $R^{n+m}$  correspondant aux bases de vecteurs  $(e^{(i)})$  et (e) tels que

$$\begin{array}{ll} x_i = x_i^{(1)}, & i = 1, \dots, m_1; \\ x_i = x_{i-m_1}^{(2)}, & i = m_1 + 1, \dots, n_2 + m; \\ x_i = x_{i-n_2-m_2}^{(1)}, & i = n_2 + m + 1, \dots, n + m. \end{array}$$

Nous définissons les subdivisions canoniques  $\hat{K}^{(i)}$  et  $\hat{K}$  de ces variétés grassmanniennes par rapport à ces systèmes de coordonnées. Pour  $X_2$  élément de  $\hat{R}_{n_2,m_2}$  soit X l'élément de  $\hat{R}_{n,m}$  qui est la somme orientée de  $R_1^{m_1}$  et  $X_2$ , où  $R_1^{m_1}$  est le sous-espace orienté de  $R_1^{n_1+m_1}$  déterminé par la suite de vecteurs  $e_1^{(i)}$ , ...,  $e_{m_1}^{(i)}$ . Soit

$$\Psi': \hat{\mathbf{R}}_{n_z, m_z} \rightarrow \hat{\mathbf{R}}_{n_z, m}$$

l'application définie par  $\Psi': X_2 \to X$ . On voit facilement que  $\Psi'$  est une application cellulaire de  $\hat{K}^{(2)}$  dans  $\hat{K}$  telle que

$$\Psi'\dot{\mathbf{U}}_{\omega^{(2)}}^{(2)} = \dot{\mathbf{U}}_{\omega}, \qquad \Psi'\ddot{\mathbf{U}}_{\omega^{(2)}}^{(2)} = \overline{\mathbf{U}}_{\omega},$$

où  $\omega^{(2)} \in \Omega(n_2, m_2)$  et  $\omega \in \Omega(n, m)$  sont liés par les équations suivantes :

(9) 
$$\begin{cases} \omega(i) = 0, & i = 1, ..., m_i; \\ \omega(i) = \omega^{(2)}(i - m_i), & i = m_i + 1, ..., m. \end{cases}$$

On voit donc que, d'après (4)\* § 1, Chap. 1,

$$\omega \in \Omega_0^*(n, m), \quad \text{si} \quad \omega^{(2)} \in \Omega_0^*(n_2, m_2) \quad \text{et} \quad \omega^{(2)}(m_2) < n_2$$

De plus, on a 
$$s(\omega^{(2)}) = s(\omega)[=s],$$
 
$$\omega(i_s) + i_s + m = \omega^{(2)}(i_s^{(2)}) + i_s^{(2)} + m_2.$$

D'après (34), § 3, Chap. 1, les cocycles  $\{\omega\}_0$  et  $\{\omega^{(2)}\}_0^{(2)}$  définis respectivement dans  $\hat{K}$  et  $\hat{K}^{(2)}$  sont donnés par les équations suivantes:

$$\begin{split} \{\omega\}_0 &= (-1)\mu(\omega) \cdot \left[\dot{U}_{\omega} + (-1)^{\omega(l_3) + l_5 + m} \cdot \overline{U}_{\omega}\right], \\ \{\omega^{(2)}\}_0^{(2)} &= (-1)\mu(\omega^{(2)}) \cdot \left[\dot{U}_{\omega}^{(2)} + (-1)^{\omega(2)(i_3^{(2)}) + i_3^{(2)} + m_2} \cdot \overline{U}_{\omega^{(2)}}^{(2)}\right]. \end{split}$$

Il en résulte :  $\Psi'^*\{\omega\}_0 = \pm \{\omega^{(2)}\}_0^{(2)}$ , ou

(10)  $\Psi^{\prime *}\{\omega\}_0 = \{\omega^{(2)}\}_0^{(2)}$  pour  $\omega^{(2)}\in \Omega_0^*(n_2, m_2)$  et  $\omega^{(2)}(m_2) < n_2$ . En outre, il est évident que

(11) 
$$\begin{cases} \Psi'^* \{ \omega \}_2 = \{ \omega^{(2)} \}_2^{(2)} & \text{pour } \omega^{(2)} \in \Omega(n_2, m_2); \\ \Psi'^* \{ \omega \}_i = 0, \text{ si } \omega(1), \dots, \omega(m_i) \text{ ne sont pas tous nuls} \\ (i = 0 \text{ ou } 2). \end{cases}$$

Supposons maintenant que Si sont des Omistructures sur les

CLASSES CARACTERISTICS

bases B<sub>i</sub>, S<sub>i</sub> étant sin induite par une appliconstamment l'élément qui induit la structure ( par l'application

οù π est la projection es (11) on peut déduire ale

Theorems 14. — Si: $\mathfrak{S}_{i} \times \mathfrak{S}_{i}$ ,  $\mathfrak{S}_{i}$  étant simps

(12) F (12)' W

etc. De même pour les O

§ 2. Le

Soient  $\mathfrak{S}_i$  (i = 1, 2) ( $G = 0, 0^{\circ}$ , 0', ou 0'') construire alors une autr sur un point  $x \in K$  est le sphères fibres sur x d  $\cup$ -produit des  $\mathfrak{S}_i$  et ser

Soit  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{1} \times \mathfrak{S}_{2}$  le  $K \times K$ . Considérons l'appar  $d: x \times x$ ,  $x \in K$ . Il es.

Pour deux classes de con aura

Par conséquent d'après (

Theorems 15 (Whitney tures  $\mathfrak{S}_i$  (G = 0,0°, 0'  $\epsilon$ 

 $\begin{aligned} \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}_{1}, t) \\ \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}_{1}, t) \\ \mathbf{Q}_{0}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{Q}_{0}(\mathfrak{S}_{1}, t) \\ \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}_{2}, t), \end{aligned}$ 

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

bases  $B_i$ ,  $\mathfrak{S}_i$  étant simple. On peut supposer alors que  $\mathfrak{S}_i$  est induite par une application  $f_i: B_i \to \hat{R}_{n_i,m_i}$  telle que  $f_i(p_i)$  soit constamment l'élément  $R_i^{m_i} \in \hat{R}_{n_i,m_i}$ . Si  $f_i: B_i \to \hat{R}_{n_i,m_i}$  est l'application qui induit la structure  $\mathfrak{S}_i$ , le produit  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_i$  est alors induit par l'application

 $f' = \Psi' f_2 \pi : B_i \times B_2 \rightarrow \hat{R}_{n,m}$ 

où π est la projection canonique de  $B_4 \times B_2$  sur  $B_3$ . De (9), (10) et (11) on peut déduire alors le théorème suivant :

Theorems 14. — Si  $\mathfrak{S}_i$  sont des O'-structures,  $\mathfrak{S}$  le  $\times$ -produit  $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ ,  $\mathfrak{S}_1$  étant simple, on a :

(12) 
$$\mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}, t) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S}_{2}, t), \\ \mathbf{W}_{0}(\mathfrak{S}, t) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{W}_{0}(\mathfrak{S}_{2}, t),$$

etc. De même pour les O-structures.

## § 2. Le théorème de Whitney.

Soient  $\mathfrak{S}_i$  (i=1,2) deux G-structures fibrées sphériques  $(G=0,0^{\circ}, 0', \text{ ou } 0'')$  sur un même complexe K. On peut construire alors une autre G-structure  $\mathfrak{S}$  sur K dont la sphère fibre sur un point  $x \in K$  est le joint (orienté dans le cas  $G=0^{\circ}$ ) des deux sphères fibres sur x de  $\mathfrak{S}_i$ . Cette structure  $\mathfrak{S}$  sera appelée le  $\vee$ -produit des  $\mathfrak{S}_i$  et sera désignée par  $\mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}_2$ .

Soit  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$  le  $\times$ -produit des  $\mathfrak{S}_i$  sur le complexe produit  $K \times K$ . Considérons l'application diagonale  $d: K \to K \times K$  définie par  $d: x \times x$ ,  $x \in K$ . Il est évident alors que

$$\mathfrak{S} \cong d^*\mathfrak{S}'.$$

Pour deux classes de cohomologie quelconques X et Y dans K on aura

$$X \cup Y = d^*(X \otimes Y).$$

Par conséquent d'après (1) et théorème 13 on obtient :

Theorems 15 (Whitney). —  $Si \otimes est \ le \cup -produit \ de \ deux \ G$ -structures  $\otimes_i (G = O, O^*, \ O' \ ou \ O'')$  sur le même complexe, on a

$$\begin{split} \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t) \cup \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t), & pour \ \mathbf{G} = \mathbf{O} \ \text{ou} \ \mathbf{O}^{*}; \\ \mathbf{C}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{C}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t) \cup \mathbf{C}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t), & pour \ \mathbf{G} = \mathbf{O}'; \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{Q}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t) \cup \mathbf{Q}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t), & pour \ \mathbf{G} = \mathbf{O}''. \\ \mathbf{P}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{P}_{\mathbf{0}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t), & pour \ \mathbf{G} = \mathbf{O} \ ou \ \mathbf{O}^{*} \ et \ \mathfrak{S}_{\mathbf{z}} \ simple. \end{split}$$

espondant aux bases

+m; ... n+m.

es K<sup>a</sup> et K de cesmes de coordonnées. <sub>3, m</sub> qui est la somme e orienté de R<sup>n+m</sup> Soit

icilement que Ψ' est ie

équations suivantes :

.

 $\omega^{(2)}(m_2) < n_2.$ 

 $m_2$ .

o et  $\{\omega^{(2)}\}_0^{(2)}$  définis

r les équations sui- $\overline{U}_{0}$ ,

(0, 0), (0,

 $_{2}$ ) et  $\omega^{(2)}(m_{2}) < n_{j}$ .

 $\Omega(n_{z}, m_{z});$  sont pas tous nuls

n-structures sur les

§ 3. Les classes caractéristiques des variétés fibrées différentiables à structure fibrée sphérique.

Soit M une variété dissérentiable de dimension n dont la  $O_n$ -structure tangente est  $\mathfrak{M}$ . Soit  $\mathfrak{S}$  une  $O_m$ -structure dissérentiable définie dans une variété  $\widetilde{M}$  sur la base M, la projection étant f.  $\widetilde{M}$  est alors une variété dissérentiable de dimension n + m - 1. Nous désignerons par  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  la O-structure tangente de la variété  $\widetilde{M}$ .

Considérons la structure fibrée  $\mathfrak B$  associée à  $\mathfrak S$  définie sur  $\mathfrak M$  dont la fibre-type est un espace vectoriel de dimension  $\mathfrak m$ . On peut alors considérer la sphère S(x) sur un point  $x\in \mathfrak M$  dans  $\mathfrak S$  comme étant la sphère unité de la fibre V(x) sur x dans  $\mathfrak B$ . Soit o(x) l'origine de l'espace V(x). L'ensemble de o(x) forme un espace évidemment homéomorphe à  $\mathfrak M$ ; on peut donc identifier o(x) à x.

Considérons maintenant S(x) comme une sous-variété différentiable de la variété  $\widetilde{M}$ . Pour un point  $y \in S(x)$  soit T(y) l'élément de contact tangent à S(x) au point y. Il existe un champ transversal de la structure  $\mathfrak{S}$ ; soit N(y) l'élément de contact de ce champ au point y. Soit L(y) la droite dans V(x) joignant y et o(x). On obtient alors les O-structures suivantes :

a) Une  $O_{m-1}$ -structure  $\mathfrak{T}$  sur la base  $\widehat{M}$  dont la fibre sur  $y \in S(x)$  est la sphère unité dans T(y);

b) Une  $O_n$  -structure  $\mathfrak{N}$  sur la base  $\widetilde{M}$  dont la fibre sur  $y \in S(x)$  est la sphère unité dans N(y);

c) Une  $O_0$  -structure  $\mathfrak{L}$  sur la base  $\widetilde{M}$  dont la fibre sur  $y \in S(x)$  est une o-sphère dans la droite L(y).

Le  $\cup$ -produit  $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T}$  est une structure définie sur  $\widetilde{M}$  dont la fibre sur  $y \in S(x)$  est constituée de toutes les directions dans V(x) issues de y. A chaque direction l dans V(x) issue de y soit g(l) le point où S(x) rencontre la direction issue de o(x) et parallèle à l. g est alors une application de l'espace fibré de la structure  $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T}$  sur l'espace fibré  $\widetilde{M}$  de la structure  $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{L}$  par p, on voit que fg = fp, où g applique les fibres sphères de  $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{L}$  homéomorphiquement et linéairement sur les fibres sphères correspondantes de la structure  $\mathfrak{L}$ . On en déduit :

 $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T} \cong f^*\mathfrak{S}.$ 

De même, l'application tions dans N(y) issues issues de x et donc une  $\mathfrak{N}$  sur l'espace fibré de

(2)

D'autre part, il est é

(3)

Des équations (1), (2) (

(4)

La structure & est évi

D'après théorème 15,

 $\mathbf{P}_{\mathfrak{o}^{\dagger}}$ 

En utilisant théorème

Théorème 16. — Si : d'une O-structure différ dont la structure tangent

 $W_{2}(\widetilde{\mathfrak{M}}, t)$   $P_{0}(\widetilde{\mathfrak{M}}, t)$ 

où f est la projection de

§ 4.

Soit  $P_n$  l'espace projec est  $\mathfrak{P}_{(n)}$ . D'après Stiefel,

 $W_2^r(\mathfrak{T}_{(n)})$  =

où X est la classe qui e mod 2 de dimension 1 d

 $\mathbf{W}_{2}($ 

on n dont la  $O_n$ -strucdifférentiable définie a étant f.  $\widehat{M}$  est alors - I. Nous désignerons

S définie sur M dont on m. On pout alors is S comme étant la bit o(x) l'origine de espace évidemment ) à x.

ous-variété différenoit T(y) l'élément de hamp transversal de e ce champ au point x). On obtient alors

it la fibre sur  $y \in S(x)$ 

t la fibre sur  $y \in S(x)$ 

fibre sur  $y \in S(x)$  est

sur  $\widetilde{M}$  dont la fibre lans V(x) issues de y. le point où S(x) renest alors une applicacespace fibré  $\widetilde{M}$  de la  $\widetilde{E}$  par p, on voit que toméomorphique respondantes de la

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES 87

De même, l'application  $f: \widetilde{M} \to M$  induit une application des directions dans N(y) issues de  $y \in S(y)$  sur des directions tangentes à M issues de x et donc une application de l'espace fibré de la structure  $\mathfrak{N}$  sur l'espace fibré de la structure  $\mathfrak{N}$ . Il en résulte :

$$\mathfrak{N} \cong f^*\mathfrak{M}.$$

D'autre part, il est évident que

$$\mathfrak{T} \cup \mathfrak{N} \cong \widetilde{\mathfrak{M}}.$$

Des équations (1), (2) et (3) on déduit :

$$\mathfrak{L} \cup \widetilde{\mathfrak{M}} \cong f^*(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{M}).$$

La structure & est évidemment simple. On a donc :

$$\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{L},t) = \mathbf{I}.$$

D'après théorème 15, on a

$$\mathbf{P}_{o}(\widehat{\mathfrak{M}},t) = \mathbf{P}_{o}(\mathfrak{L} \cup \widehat{\mathfrak{M}},t).$$

En utilisant théorème 15, on déduit de (4) le théorème suivant :

Théorème 16. — Si  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  est la structure tangente de l'espace fibré d'une O-structure différentiable  $\mathfrak{S}$  sur une variété différentiable  $\mathfrak{M}$  dont la structure tangente est  $\mathfrak{M}$ , on a

$$\mathbf{W}_{2}(\widetilde{\mathfrak{M}},t) = f^{*}\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S},t) \cup f^{*}\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{M},t),$$

$$\mathbf{P}_{0}(\widetilde{\mathfrak{M}},t) = f^{*}\mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{M},t)$$

où f est la projection de la structure S.

## § 4. Quelques exemples.

Soit  $P_n$  l'espace projectif de dimension n dont la structure tangente est  $\mathfrak{P}_{(n)}$ . D'après Stiefel, on a alors :

$$\mathbf{W}_{2}^{r}(\mathfrak{T}_{(n)}) = \binom{n+1}{r} \mathbf{X}^{r}, \qquad r = 1, 2, \ldots n,$$

où X est la classe qui engendre le groupe de cohomologie  $H_2(P_n)$  mod 2 de dimension 1 de  $P_n$ . Puisque  $X^{n+1} = 0$ , on a

$$\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{P}_{(n)}, t) = (\mathbf{1} + \mathbf{X}t)^{n+1}.$$

EXEMPLE 1. — Soient  $P^{(i)}(i=1,2)$  deux copies du plan projectif, dont les structures tangentes sont  $\mathfrak{P}^{(i)}$  et les classes qui engendrent  $H^i(P^{(i)})$  sont  $X_i$ . D'après le théorème 13, le polynome de Whitney de la structure tangente  $\mathfrak{M}$  de la variété produit  $M = P^{(i)} \times P^{(i)}$  est alors donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{M},t) &= \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{P}^{(1)},t) \otimes \mathbf{W}_{2}(\mathfrak{P}^{(2)},t) \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{X}_{1}t)^{3} \otimes (\mathbf{I} + \mathbf{X}_{2}t)^{3} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_{1}t + \mathbf{\Lambda}_{2}t^{2} + \mathbf{\Lambda}_{3}'t^{3} + \mathbf{\Lambda}_{4}t^{4}. \end{aligned}$$
 où 
$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{1} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{X}_{1} + \mathbf{X}_{2} \otimes \mathbf{I} \\ \mathbf{\Lambda}_{2} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{X}_{2}^{2} + \mathbf{X}_{1} \otimes \mathbf{X}_{2} + \mathbf{X}_{2} \otimes \mathbf{I} \\ \mathbf{\Lambda}_{3} &= \mathbf{X}_{1} \otimes \mathbf{X}_{2}^{2} + \mathbf{X}_{1}^{2} \otimes \mathbf{X}_{2} \\ \mathbf{\Lambda}_{4} &= \mathbf{X}_{4}^{2} \otimes \mathbf{X}_{2}^{2}. \end{aligned}$$

Construisons maintenant, ce qui est toujours possible, des  $O_i$ -structure  $\mathfrak{S}_i(i=1,2)$  sur la base  $M=P_i\times P_2$  telle que  $W_2^i(\mathfrak{S}_i)=0$ ,  $W_2^i(\mathfrak{S}_2)=A_i$ . Pour  $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_i\cup\mathfrak{S}_2$  on a alors

$$\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S},t)=\mathbf{I}+\mathbf{A}_{1}t.$$

Soient  $\widetilde{M}$  l'espace fibré de  $\mathfrak{S}$ , f la projection de  $\mathfrak{S}$ , et  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  la structure tangente de la variété  $\widetilde{M}$ . On a alors, d'après théorème 16,

Puisque  $W^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{o}$ , il existe une section dans  $\mathfrak{S}$ . Il en résulte que  $f^*$  est un isomorphisme (dans) et on déduit de  $(\mathfrak{g})$ :

$$\begin{aligned} & W_{2}^{!}\!(\widehat{\mathfrak{M}}) \!=\! f^{*}\!(2\Lambda_{1}) \!\equiv\! 0, \quad \text{c'est-à-dire } \widetilde{M} \text{ cst orientable}; \\ & W_{2}^{3}\!(\widehat{\mathfrak{M}}) \!\equiv\! f^{*}\!(\Lambda_{1} \cup \Lambda_{2} + \Lambda_{3}) \!\equiv\! f^{*}\!(X_{1}^{2} \times X_{2} + X_{1} \times X^{2}) \!\neq\! 0. \end{aligned}$$

#### Done :

Il existe des variétés dissérentiables orientables de dimension 5 dont la classe caractéristique de Whitney de dimension 5 n'est pas nulle.

D'après théorème 13, la classe de Stiefel-Whitney de dimension 3 du produit topologique  $M \times S$ , où M est la variété considérée dans Ex. 1 et où S est une sphère de dimension impaire, est aussi non nulle. Cette variété orientable de dimension  $\geqslant 6$  n'admet donc aucune structure presque complexe, cf. Ex. de  $\S$  2 Chap. Iv.

Rappelons que, d'après Whitney, la classe de Stiefel-Whitney de dimension 3 d'une variété dissérentiable orientable de dimension 4 est toujours nulle.

CLASSES CARACTÉRI

Exemple 2. — Or sur un espace projec

$$W'(\mathfrak{S}_i) = c$$

Soient S le produ structure langente de

$$W_{2}(\mathfrak{S},\,t)$$
 :

La nullité de W<sub>2</sub>(© quent f\* est un isom

$$W_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = \mathbb{Q}$$

$$P_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = \mathbb{Q}$$

$$W_{2}^{!}(\widetilde{\mathfrak{M}}) = 0 \text{ ou } \widetilde{\mathfrak{M}}$$
  
 $W_{2}^{2}(\widetilde{\mathfrak{M}}) = f^{*}X^{2} \neq$ 

D'autre part, Po (E pour k > 0, puisque sion 3. Cela montre q Les classes caractérique pendantes des classes que

d'une variété différent.

nies du plan projectif, lasses qui engendrent olynome de Whitney oduit M=P<sup>(t)</sup>×P<sup>(c)</sup>

$$\S^{(2)}, t$$
  
 $X_3 t$ )<sup>2</sup>  
 $\Lambda_3' t^3 + + \Lambda_4 t^4$ .

oossible, des O,-strucdle que W,(S,) == 0,

de S, et M la strucrès théorème 16,

t)
$$A_i t^i \cup (1 + A_i t)$$
].
ans S. Il en résulte it de  $(1)$ :

orientable;

$$-X_1 \times X^2 \neq 0.$$

s de dimension 5 dont n 5 n'est pas nulle.

hitney de dimension ariété considérée dans apaire, est aussi non \$6 n'admet donc \$2 Chap. IV.

e Stiefel-Whitney de ole de dimension / est

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES 89

Exemple 2. — On peut construire des structures  $\mathfrak{S}_i(i=1,2,3)$  sur un espace projectif  $P_3$  tels que

$$W^{\scriptscriptstyle 1}\!(\mathfrak{S}_{{}_{\scriptscriptstyle 1}})\!=\!{}_{\scriptscriptstyle 0}, \qquad W^{\scriptscriptstyle 1}\!_{\scriptscriptstyle 2}\!(\mathfrak{S}_{{}_{\scriptscriptstyle 2}})\!=\!X_{{}_{\scriptscriptstyle 2}}, \qquad W^{\scriptscriptstyle 1}\!(\mathfrak{S}_{{}_{\scriptscriptstyle 3}})\!=\!X_{{}_{\scriptscriptstyle 2}}.$$

Soient  $\mathfrak{S}$  le produit  $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3$ ,  $\widetilde{M}$  l'espace fibré de  $\mathfrak{S}$ ,  $\widetilde{M}$  la structure tangente de  $\widetilde{M}$  et f la projection de  $\mathfrak{S}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}, t) &= \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{1}}, t) \cup \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{z}}, t) \cup \mathbf{W}_{\mathbf{z}}(\mathfrak{S}_{\mathbf{3}}, t) \\ &= (\mathbf{1} + \mathbf{X}t)^{2} \\ &= \mathbf{1} + \mathbf{X}^{2}t^{2}. \end{aligned}$$

La nullité de  $W^1_2(\mathfrak{S}_1)$  montre que  $\mathfrak{S}$  a une section et par conséquent  $f^*$  est un isomorphisme dans. D'après théorème 16, on a

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}_{2}(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = f^{*}\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{S}, t) \cup f^{*}\mathbf{W}_{2}(\mathfrak{P}_{(3)}, t) = l + f^{*}\mathbf{X}^{2}t^{2}, \\ &\mathbf{P}_{0}(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = f^{*}\mathbf{P}_{0}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}, t), \end{aligned}$$

d'où

$$W_{2}^{!}(\widetilde{\mathfrak{M}}) = 0$$
 ou  $\widetilde{\mathfrak{M}}$  est orientable,  $W_{2}^{2}(\widetilde{\mathfrak{M}}) = f^{*}X^{2} \neq 0$ .

D'autre part,  $P_0(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}, t) = 1$ , c'est-à-dire  $P_0^{ik}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}) = 0$  pour k > 0, puisque la base  $P_0$  de la structure  $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}$  est de dimension 3. Cela montre que :

Les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney sont en général indépendantes des classes de Pontrjagin, même pour la structure tangente d'une variété dissérentiable orientable.

