Andrew Ranicki

RIE

Tomes.

me et sur la
. I
de la Théorie
LET. . . . II
finies par des
. III
ogiques et ses
. IV
tielles réelles. V
. VI
riétés qui s'en VII
. . . . . .
riques. . . VIII
. IX
. X

laptation

ET C°.

SUR LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

Par WU WEN-TSUN.

INTRODUCTION

§ 1. Nous étudierons dans ce travail les espaces fibrés E (B, F, G, H) dont la fibre est une sphère de dimension $m-1$ et G le groupe orthogonal O_m ou un de ses sous-groupes [1] [12] (*). Nous dirons qu'un tel espace fibré définit une G-structure (fibrée sphérique) sur la base B, que nous désignerons par les symboles $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$, etc. Le problème central de la théorie des espaces fibrés est de classifier, étant donnés B, F et G, les structures fibrées par leurs invariants. Pour les O_m-structures le problème de classification se ramène à un autre grâce à un théorème fondamental de Steenrod-Whitney [2]. Soit en effet $R_{n,m}$ la variété grassmannienne des sous-espaces de dimension m dans l'espace numérique de dimension $n+m$. Le théorème de Steenrod-Whitney dit alors :

Les classes d'isomorphisme des O_m-structures qu'on peut définir sur un complexe B sont en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie des applications continues (1) de B dans $R_{n,m}$, pourvu que n soit assez grand.

Il en résulte que tous les invariants d'une classe d'homotopie des applications de B dans $R_{n,m}$ sont aussi des invariants des O_m-structures correspondantes. Ceci permet donc d'introduire la notion suivante :

Soit A une classe de cohomologie dans $R_{n,m}$. Soit $\mathfrak{S}$ une O_m-structure sur B correspondant à l'application $f: B \to R_{n,m}$ (2). La classe f^*A (image réciproque de A par f) est alors un invariant de $\mathfrak{S}$ et est appelée une *classe caractéristique* de $\mathfrak{S}$.

D'après Ehresmann [3], les classes d'homologie et de même les

(*) Voir la liste des références p. 11.

(1) Dorénavant nous dirons simplement *application* au lieu d'*application continue*.

(2) Une application f d'un espace X dans un espace Y sera généralement notée $f: X \to Y$.

classes de cohomologie de $R_{n,m}$ à coefficients entiers mod 2 peuvent être mises en correspondance biunivoque avec des suites d'entiers qui, dans nos notations sont des suites $\omega(1), \dots \omega(m)$ telles que

$$0 \leqslant \omega(1) \leqslant \dots \leqslant \omega(m) \leqslant n.$$

Les classes à coefficients entiers peuvent être aussi déterminées à l'aide de ces suites. Pourtant les seules classes qui importent sont celles qui figurent dans le tableau suivant :

Classes dans $R_{n,m}$.	Coefficients.	Suite correspondante.
$W_2^i (i = 1, \dots m)$	entiers mod 2	$\omega(1) = \dots = \omega(m-i) = 0$, $\omega(m-i+1) = \omega(m) = 1$.
$\overline{W}_2^i (i = 1, \dots n)$	entiers mod 2	$\omega(1) = \dots = \omega(m-1) = 0$, $\omega(m) = i$.
$P_0^{4k} (1 \leqslant k \leqslant m/2)$	entiers	$\omega(1) = \dots = \omega(m-2k) = 0$, $\omega(m-2k+1) = \dots = \omega(m) = 2$.
$\overline{P}_0^{4k} (1 \leqslant k \leqslant n/2)$	entiers	$\omega(1) = \dots = \omega(m-2) = 0$, $\omega(m-1) = \omega(m) = 2k$.

Les classes caractéristiques correspondantes seront désignées par $W_2^i(\mathfrak{S})$, $\overline{W}_2^i(\mathfrak{S})$, $P_0^{4k}(\mathfrak{S})$ et $\overline{P}_0^{4k}(\mathfrak{S})$ respectivement; elles sont indépendantes de la valeur de n. L'indice inférieur 0 ou 2 indiquera toujours que les coefficients de la classe de cohomologie ou d'homologie considérée sont respectivement entiers ou entiers mod 2, et l'indice supérieur désignera la dimension. De plus, étant donnée une classe à coefficients entiers A_0, la classe déduite de A_0 par réduction mod 2 sera désignée par A_2. Par exemple, la classe P_2^{4k} est ainsi déduite de P_0^{4k}.

L'importance de ces classes provient des raisons suivantes :

a) D'après Chern [4] les classes W_2^i forment une base pour l'anneau de cohomologie mod 2 de $R_{n,m}$.

b) Tous les coefficients de cotorsion de $R_{n,m}$ sont égaux à 2. Toutes les classes de cotorsion sont donc déduites de classes mod 2 par une certaine opération invariante λ définie de la manière suivante : soit A_2 une classe mod 2. Prenons une cochaîne A_0 à coefficients entiers telle que A_0 réduit mod 2 appartienne à A_2. On a alors $\delta A_0 = 2C_0$, où C_0 est un cocycle entier appartenant à une classe entière qui ne dépend que de A_2 et que nous désignons par $\lambda(A_2)$.

c) D'après les travaux de Pontrjagin et Chern, les classes P_0^{4k} ou $\overline{P}_0^{4k}$ engendrent les éléments de dimension $\leqslant n$ de l'anneau de cohomologie à coefficients réels de $R_{n,m}$.

Il en résulte que toutes les classes caractéristiques d'une O_m-structure $\mathfrak{S}$ sont complètement déterminées par les classes $W_2^i(\mathfrak{S})$ et $P_0^{4k}(\mathfrak{S})$; nous nous bornerons donc à l'étude de ces dernières.

§ 2. Le théorème de Steenrod-Whitney a été généralisé par Pontrjagin [5] au cas des G-structures fibrées sphériques, où G est le groupe des rotations O_m^+ et par Chern [6] au cas où G est le groupe unitaire O'_m, ce qui suppose $m = 2m'$. Ces structures seront appelées respectivement *orientées* ou *unitaires* pour les distinguer des structures *ordinaires* dont le groupe G est le groupe orthogonal. Dans le théorème de Steenrod-Whitney étendu, les variétés $R_{n,m}$ sont à remplacer respectivement par les variétés $\dot{R}_{n,m}$ et $\mathbf{C}_{n,m}$ (n assez grand) définies de la manière suivante :

$\dot{R}_{n,m}$ est la variété grassmannienne des sous-espaces *orientés* de dimension m dans l'espace numérique de dimension $n + m$;

$\mathbf{C}_{n,m}$ ($n = 2n'$, $m = 2m'$) est la variété grassmannienne des sous-espaces complexes de dimension complexe m' dans l'espace numérique complexe $C^{n'+m'}$ de dimension complexe $n' + m'$.

Les propriétés d'homologie des variétés $\dot{R}_{n,m}$ et $\mathbf{C}_{n,m}$ ont été étudiées par Pontrjagin [7], Ehresmann [8] et Hodge [9]. On peut aussi introduire un système de *classes caractéristiques :*

$W_2^i(\mathfrak{S})$, $\overline{W}_2^i(\mathfrak{S})$, $P_0^{4k}(\mathfrak{S})$, $\overline{P}_0^{4k}(\mathfrak{S})$ et $X_0^m(\mathfrak{S})$ pour une O_m^+-structure $\mathfrak{S}$;

$C_0^{2k}(\mathfrak{S})$, $\overline{C}_0^{2k}(\mathfrak{S})$ pour une O'_m-structure $\mathfrak{S}$.

Dans les applications les classes caractéristiques ainsi définies se présentent toujours ensemble, de sorte qu'il convient de les réunir sous la forme d'un polynome en introduisant une indéterminée t de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned}
W_2(\mathfrak{S}, t) &= \sum_{i=0}^{m} W_2^i(\mathfrak{S}) \cdot t^i \\
\overline{W}_2(\mathfrak{S}, t) &= \sum_{i \geqslant 0} \overline{W}_2^i(\mathfrak{S}) \cdot t^i \\
P_0(\mathfrak{S}, t) &= \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k P_0^{4k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{4k} \\
\overline{P}_0(\mathfrak{S}, t) &= \sum_{k \geqslant 0} \overline{P}_0^{4k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{4k}
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{pour une } O_m\text{- ou } O_m^+\text{-structure } \mathfrak{S} \,; \\ \quad [m/2] = \text{le plus grand entier} \\ \quad \text{contenu dans } m/2.\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
C_0(\mathfrak{S}, t) &= \sum_{k=0}^{m'} C_0^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k} \\
\overline{C}_0(\mathfrak{S}, t) &= \sum_{k \geqslant 0} \overline{C}_0^{2k}(\mathfrak{S}) \cdot t^{2k}
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{pour une } O'_m\text{-structure } \mathfrak{S} \,; \\ \quad m = 2m'.\end{array}$$

où $W_2^0(\mathfrak{S})$, $P_0^0(\mathfrak{S})$, $C_0^0(\mathfrak{S})$, $\overline{W}_2^0(\mathfrak{S})$, etc. sont des classes unités mod 2 ou entières de dimension o.

L'étude des classes caractéristiques constitue le but essentiel du présent travail. Nous remarquons que les classes $W_2^i(\mathfrak{S})$ sont en relation étroite avec les classes caractéristiques introduites par Stiefel [10] et Whitney [11], et la classe $X_0^m(\mathfrak{S})$ avec la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété orientable pour la « structure tangente » de cette variété orientée. Mais nous ne préciserons pas les relations exactes dans ce travail.

§ 3. Il est évident qu'on peut considérer une structure fibrée sphérique orientée comme une structure ordinaire et une structure unitaire comme une structure orientée ; cela veut dire qu'une structure orientée est subordonnée [1] à une structure ordinaire et une structure unitaire à une structure orientée. Le premier problème central que nous considérons dans ce travail est le problème inverse, à savoir :

Étant donnée une structure ordinaire (ou orientée) $\mathfrak{S}$, est-ce qu'il existe une structure orientée (resp. unitaire) $\mathfrak{S}'$ subordonnée à $\mathfrak{S}$?

Grâce au théorème fondamental de Steenrod-Whitney-Pontrjagin-Chern ce problème peut être ramené à un problème concernant les variétés grassmanniennes de la manière suivante :

Pour un élément X de $\dot{\mathrm{R}}_{n,m}$, soit $\varphi(\mathrm{X})$ le même élément mais non-orienté. $\varphi(\mathrm{X})$ est alors un élément de $\mathrm{R}_{n,m}$ et on obtient ainsi une application canonique $\varphi : \dot{\mathrm{R}}_{n,m} \to \mathrm{R}_{n,m}$.

Pour un élément Z de $\mathrm{C}_{n,m}$, soit $\varphi'(\mathrm{Z})$ le même élément en négligeant sa structure complexe mais muni de l'orientation naturelle. On peut alors considérer $\varphi'(\mathrm{Z})$ comme un élément de $\dot{\mathrm{R}}_{n,m}$. On a ainsi une application canonique $\varphi' : \mathrm{C}_{n,m} \to \dot{\mathrm{R}}_{n,m}$.

Notre problème est alors équivalent au suivant :

Étant donnée une application $f : \mathrm{B} \to \mathrm{R}_{n,m}$, est-ce qu'il existe une application $\hat{f} : \mathrm{B} \to \dot{\mathrm{R}}_{n,m}$ telle que $\varphi\hat{f} \simeq f$?

Étant donnée une application $f : \mathrm{B} \to \dot{\mathrm{R}}_{n,m}$, est-ce qu'il existe une application $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}_{n,m}$ telle que $\varphi' g \simeq f$?

Le premier pas vers la solution de notre problème est donc la détermination du type d'homologie des applications φ et φ'. D'après les raisons données plus haut, il suffit pour cela de déterminer les images inverses des classes W_2^i, P_0^{4k} et X_0^m. On est conduit ainsi aux résultats suivants :

Si la structure orientée $\mathfrak{S}'$ est subordonnée à la structure ordinaire $\mathfrak{S}$, on a

$$W_2(\mathfrak{S},\, t) = W_2(\mathfrak{S}',\, t), \qquad \overline{W}_2(\mathfrak{S},\, t) = \overline{W}_2(\mathfrak{S}',\, t),$$
$$P_0(\mathfrak{S},\, t) = P_0(\mathfrak{S}',\, t), \qquad \overline{P}_0(\mathfrak{S},\, t) = \overline{P}_0(\mathfrak{S}',\, t).$$

Si la structure unitaire $\mathfrak{S}'$ est subordonnée à la structure orientée $\mathfrak{S}$, on a

$$(1) \qquad \begin{cases} W_2(\mathfrak{S},\, t) = C_2(\mathfrak{S}',\, t), \\ P_0(\mathfrak{S},\, t) = C_0(\mathfrak{S}',\, t) \cup C_0(\mathfrak{S}',\, it), \\ X_0^m(\mathfrak{S}) = (-1)^{m'} C_0^m(\mathfrak{S}'), \qquad m = 2m'. \end{cases}$$

Ces dernières formules donnent quelques conditions nécessaires pour qu'une structure orientée $\mathfrak{S}$ admette une structure unitaire subordonnée ; par exemple, il est nécessaire que

$$(2) \qquad W_2^{2k+1}(\mathfrak{S}) = 0.$$

§ 4. Comme application nous étudierons les structures presque complexes des variétés différentiables [12] [13]. Nous dirons qu'une variété différentiable orientée est presque complexe si sa structure tangente $\mathfrak{S}$ admet une structure unitaire subordonnée. On déduit des formules (1) les conditions nécessaires suivantes pour qu'une variété orientée soit presque complexe :

Pour les variétés de dimension 4 : il existe une classe entière C_0^2 de dimension 2 telle que

$$(3) \qquad C_2^2 = W_2^2(\mathfrak{S}), \qquad C^2 \cup C_0^2 = P_0^4(\mathfrak{S}) + 2X_0^4(\mathfrak{S}) ;$$

Pour les variétés de dimension 6 : il existe une classe entière C_0^2 de dimension 2 telle que

$$(4) \qquad C_2^2 = W_2^2(\mathfrak{S}).$$

Une étude plus approfondie des propriétés d'homotopie des variétés grassmanniennes [14] [15] [16] montre que ces conditions sont non seulement nécessaires mais aussi suffisantes. De plus, pour la dimension 4 les structures presque complexes de la variété sont en correspondance biunivoque avec le système de classes C_0^2 vérifiant les conditions (3). Pour la dimension 6 le théorème est dû à Ehresmann, mais énoncé sous une autre forme et démontré par une autre méthode [12].

§ 5. Un autre problème étudié est la détermination des rapports entre les classes caractéristiques de certaines structures fibrées sphériques invariablement liées l'une à l'autre. Par exemple, la structure fibrée sphérique tangente d'une variété plongée dans un espace euclidien et sa structure fibrée sphérique normale fournissent un exemple de deux structures fibrées sphériques *duales* l'une de l'autre dont nous ne préciserons pas ici la définition. Pour deux telles structures $\mathfrak{S}$ et $\overline{\mathfrak{S}}$, on a :

$$(5)_1 \quad W_2(\mathfrak{S},\ t) = \overline{W}_2(\overline{\mathfrak{S}},\ t), \qquad \overline{W}_2(\mathfrak{S},\ t) = W_2(\overline{\mathfrak{S}},\ t);$$
$$(5)_2 \quad P_0(\mathfrak{S},\ t) = \overline{P}_0(\overline{\mathfrak{S}},\ t), \qquad \overline{P}_0(\mathfrak{S},\ t) = P_0(\overline{\mathfrak{S}},\ t).$$

De même, pour deux structures fibrées sphériques unitaires $\mathfrak{S}$ et $\overline{\mathfrak{S}}$ *duales* l'une de l'autre on a

$$(5)_3 \quad C_0(\mathfrak{S},\ t) = C_0(\overline{\mathfrak{S}},\ t), \qquad \overline{C}_0(\mathfrak{S},\ t) = C_0(\overline{\mathfrak{S}},\ t).$$

Ces formules forment une généralisation d'un théorème de dualité de Whitney [11] qui s'exprime par les formules $(5)_1$. Elles montrent que les classes $W_2^i(\mathfrak{S})$ présentent un caractère dual par rapport aux classes $\overline{W}_2^i(\mathfrak{S})$, ce qui justifie leur introduction.

§ 6. Le dernier problème que nous considérons est la détermination des classes caractéristiques de la structure fibrée sphérique qui est composée par deux autres structures fibrées sphériques. Par exemple, en *composant* deux structures ordinaires $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sur un même complexe K on obtiendra une structure ordinaire $\mathfrak{S}$, appelée le *produit* de $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. L'étude des classes caractéristiques de $\mathfrak{S}$ conduit à une formule importante due à Whitney [11] :

$$W_2(\mathfrak{S},\ t) = W_2(\mathfrak{S}_1,\ t) \cup W_2(\mathfrak{S}_2,\ t).$$

A l'aide de cette formule et de ses conséquences nous construisons un exemple d'une variété orientée de dimension 6 dont $W_2^3(\mathfrak{S}) \neq 0$ pour sa structure tangente $\mathfrak{S}$, ce qui montre que la condition nécessaire (2) (et aussi (4)) pour l'existence d'une structure presque complexe n'est pas triviale en général.

§ 7. Le présent travail est subdivisé en cinq chapitres. Dans le premier chapitre nous étudierons les propriétés d'homologie des variétés grassmanniennes. Comme point de départ, nous définissons les subdivisions canoniques des variétés $\mathring{R}_{n,m}$ et nous donnons les

formules de bords d
démonstration de Po
soit aussi complet qu
essentielle de ce tra
tiques des diverses str
tions entre elles pour
à l'autre. Le troisièm
des variétés grassman
presque complexes d
chapitre. La composit
dérée dans le dernier
les formules liant les
fibrées sphériques so
type d'homologie de c
grassmannienne (ou l
dans une autre.

Remarque. Les pr
constituent ma thèse
versité de Strasbourg
Docteur ès sciences. L
S. Chern et Ch. Ehres

[1] Ch. Ehresmann, Esp
764 ; Espaces fibrés
144-147.
[2] N. E. Steenrod, Cla
(1944), 294-311.
[3] Ch. Ehresmann, Sur l
Journal de Math., 1(
[4] S. Chern, On the m
bundle, *Annals of M*
[5] L. Pontrjagin, Chara
245.
[6] S. Chern, Characteris
47 (1946), 85-121.
[7] L. Pontrjagin, Mat. S
[8] Ch. Ehresmann, Sur l
Math., 35 (1934), 3

formules de bords dues à Pontrjagin [7]. Nous reproduisons la démonstration de Pontrjagin de ces formules pour que notre travail soit aussi complet que possible. Le deuxième chapitre est la partie essentielle de ce travail; nous y définissons les classes caractéristiques des diverses structures fibrées sphériques et étudions les relations entre elles pour des structures invariablement associées l'une à l'autre. Le troisième chapitre concerne les propriétés d'homotopie des variétés grassmanniennes, qui serviront à l'étude des structures presque complexes des variétés différentiables dans le quatrième chapitre. La composition des structures fibrées sphériques est considérée dans le dernier chapitre. Nous suivons une méthode unique : les formules liant les classes caractéristiques des diverses structures fibrées sphériques sont toujours obtenues par la considération du type d'homologie de certaines applications canoniques d'une variété grassmannienne (ou le produit de deux variétés grassmanniennes) dans une autre.

Remarque. Les premiers quatre chapitres du présent travail constituent ma thèse soutenue à la Faculté des Sciences de l'Université de Strasbourg le 16 juillet 1949 pour obtenir le grade de Docteur ès sciences. L'auteur tient à exprimer ses remerciements à S. Chern et Ch. Ehresmann et son grand respect à L. Pontrjagin.

Le 16 octobre 1949, Paris.

RÉFÉRENCES

[1] Ch. Ehresmann, Espaces fibrés associés, *C. R.*, Paris, 213 (1941), 762-764; Espaces fibrés de structures comparables, *C. R.*, Paris, 214 (1942), 144-147.

[2] N. E. Steenrod, Classification of sphere bundles, *Annals of Math.*, 4 (1944), 294-311.

[3] Ch. Ehresmann, Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *Journal de Math.*, 104 (1939), 69-100.

[4] S. Chern, On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, *Annals of Math.*, 49 (1948), 362-372.

[5] L. Pontrjagin, Characteristic cycles, *C. R.* U. R. S. S., 47 (1945), 242-245.

[6] S. Chern, Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Annals of Math.*, 47 (1946), 85-121.

[7] L. Pontrjagin, Mat. Sbornik. 21 (163) (1947), 233-284.

[8] Ch. Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Annals of Math.*, 35 (1934), 396-443.

[9] W. V. D. Hodge, The intersection formulae for a grassmannian variety, *Journal Lond. Math. Soc.*, 17 (1942), 48-64.

(La formule peut aussi être démontrée par la méthode utilisée par S. Chern dans (4).)

[10] E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Comm. Math. Helv.*, 8 (1935/36), 305-353.

[11] H. Whitney, On the topology of differentiable manifolds, *Lectures in Topology* (1941), 101-141.

[12] Ch. Ehresmann, Sur la théorie des espaces fibrés, *Colloque de Topologie Algébrique*, Paris (1947).

[13] H. Hopf, Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Courant *Anniversary volume* (1948), 167-185.

[14] G. W. Whitehead, Homotopy properties of the real orthogonal groups, *Annals of Math.*, 43 (1942), 132-146.

[15] B. Eckmann, Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, *Comm. Math. Helv.*, 14 (1841/42), 234-256.

[16] L. Pontrjagin, Classification of some skew products, *C. R.* U. R. S. S., 47 (1945), 322-325.

LES

DES V

§ 1. L

Soit R^{n+m} l'espace
sous-espaces vectorie
orientés) de R^{n+m} ser
Soit $C^{n'+m'}$ (resp.
quaternionien) de di
de dimension réelle
$m=4m''$). La variét
quaternioniens) de di
m, de $C^{n'+m'}$ (resp. Q
Les variétés $R_{n,m}$,
manniennes et seront
de les distinguer.
Les propriétés d'h
étudiées à l'aide des
(m, n, ω)-fonctions. (
des entiers 1, 2, ...
aux conditions :

$0 \leqslant \omega$

L'ensemble des (n
Nous poserons

(1)

a grassmannian variety,
la méthode utilisée par
ıus in n-dimensionalen
5/36), 305-353.
manifolds, *Lectures in*
s, *Colloque de Topologie*
igfaltigkeiten, Courant
real orthogonal groups,
ruppenräumen, *Comm.*
cts, *C. R.* U. R. S. S.,

CHAPITRE PREMIER

LES PROPRIÉTÉS D'HOMOLOGIE DES VARIÉTÉS GRASSMANNIENNES

§ 1. Les variétés grassmanniennes.

Soit R^{n+m} l'espace numérique de dimension $n+m$. La variété des sous-espaces vectoriels de dimension m non-orientés (respectivement orientés) de R^{n+m} sera désignée par $R_{n,m}$ (resp. $\hat{R}_{n,m}$).

Soit $C^{n'+m'}$ (resp. $Q^{n''+m''}$) l'espace numérique complexe (resp. quaternionien) de dimension $n'+m'$ (resp. $n''+m''$), c'est-à-dire de dimension réelle $n+m$, où $n=2n'$, $m=2m'$ (resp. $n=4n''$, $m=4m''$). La variété des sous-espaces vectoriels complexes (resp. quaternioniens) de dimension m' (resp. m'') ou de dimension réelle m, de $C^{n'+m'}$ (resp. $Q^{n''+m''}$) sera désignée par $C_{n,m}$ (resp. $Q_{n,m}$).

Les variétés $R_{n,m}$, $\hat{R}_{n,m}$, $C_{n,m}$ ou $Q_{n,m}$ sont appelées *variétés grassmanniennes* et seront désignées par $G_{n,m}$ s'il n'y a aucune nécessité de les distinguer.

Les propriétés d'homologie des variétés grassmanniennes ont été étudiées à l'aide des ω-fonctions ou, d'une façon plus précise, des (m, n, ω)-fonctions. Ce sont des fonctions définies dans l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots m$ et prenant des valeurs entières satisfaisant aux conditions :

$$0 \leqslant \omega(1) \leqslant \omega(2) \leqslant \ldots \leqslant \omega(m) \leqslant n.$$

L'ensemble des (m, n, ω)-fonctions sera désigné par $\Omega(n, m)$. Nous poserons

$$d(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega(i). \tag{1}$$

Les fonctions suivantes sont particulièrement importantes dans la théorie des structures fibrées sphériques :

$$(2)\quad \begin{cases} \omega(1) = \cdots = \omega(m-k) = 0, \\ \omega(m-k+1) = \cdots = \omega(m) = 1\,; \end{cases} \qquad (0 \leqslant k \leqslant m)$$

$$(\bar{2})\quad \omega(1) = \cdots = \omega(m-1) = 0, \qquad \omega(m) = k\,; \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

$$(3)\quad \begin{cases} \omega(1) = \cdots = \omega(m-2k) = 0, \\ \omega(m-2k+1) = \cdots = \omega(m) = 2\,; \end{cases} \qquad (0 \leqslant 2k \leqslant m)$$

$$(\bar{3})\quad \omega(1) = \cdots = \omega(m-2) = 0\,; \qquad \omega(m-1) = \omega(m) = 2k\,; \qquad (0 \leqslant 2k \leqslant n).$$

Nous désignerons ces fonctions respectivement par ω_k^m, $\bar{\omega}_k^m$, $\omega_{2k,\,2k}^m$ et $\bar{\omega}_{2k,\,2k}^m$.

En faisant la convention $\omega(0) = 0$, $\omega(m+1) = n$, nous appellerons *point sautant* de la fonction $\omega \in \Omega(n, m)$ un entier $i (0 \leqslant i \leqslant m)$ tel que $\omega(i+1) > \omega(i)$. Soient $i_0(\omega), \ldots, i_{s(\omega)}(\omega)$ la suite des points sautants de la fonction ω rangés dans l'ordre croissant. Nous désignerons par $\Omega_0(n, m)$, $\Omega_0^*(n, m)$, $\Omega_1(n, m)$ et $\Omega_1^*(n, m)$ les sous-ensembles de $\Omega(n, m)$ dont les fonctions ω satisfont respectivement aux conditions suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \omega(i_0+1)+i_0 \equiv \omega(i_1+1)+i_1 \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s-1}+1)+i_{s-1} \pmod 2 \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_s+1)+i_s \pmod 2 \ \text{si} \ \omega(m)=n. \end{cases}$$

$$(4)^*\quad \begin{cases} \omega(i_1)+i_1 \equiv \omega(i_2)+i_2 \equiv \cdots \equiv \omega(i_s)+i_s \pmod 2 \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_0)+i_0 \pmod 2 \ \text{si} \ \omega(1)=0. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \omega(i_0+1)+i_0 \equiv \omega(i_1+1)+i_1 \equiv \cdots \equiv \omega(i_{s-1}+1)+i_{s-1} \equiv m \pmod 2 \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_s+1)+i_s \pmod 2 \ \text{si} \ \omega(m)=n. \end{cases}$$

$$(5)^*\quad \begin{cases} \omega(i_1)+i_1 \equiv \omega(i_2)+i_2 \equiv \cdots \equiv \omega(i_s)+i_s \equiv m \pmod 2 \\ \text{et aussi} \equiv \omega(i_0)+i_0 \pmod 2 \ \text{si} \ \omega(1)=0. \end{cases}$$

(où $s = s(\omega)$, $i_r = i_r(\omega)$, $r = 0, 1, \ldots, s$).

Pour chaque fonction $\omega \in \Omega(n, m)$ nous définissons certaines fonctions associées $\omega_{(i)}$, $\omega^{(i)}$ et ω^* par les équations suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \omega_{(i)}(j) = \omega(j) \ \text{pour} \ j \neq i, & \omega_{(i)}(i) = \omega(i) - 1\,; \\ \omega^{(i)}(j) = \omega(j) \ \text{pour} \ j \neq i, & \omega^{(i)}(i) = \omega(i) + 1\,; \\ \omega^*(j) = n - \omega(m-j+1), & j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

En posant $s(\omega) = s$, on remarque que $\omega_{(i)}$ n'appartient à $\Omega(n, m)$ que pour $i = i_0(\omega)+1, \ldots, i_{s-1}(\omega)+1$ et aussi $i = i_s(\omega)+1$

si $\omega(m) = n$. De même, $\omega^{(i)}$ n'appartient à $\Omega(n, m)$ que pour $i = i_1(\omega), \ldots, i_s(\omega)$ et aussi $i = i_0(\omega)$ si $\omega(1) = 0$. On a

$$\omega^{**} = \omega, \qquad s(\omega^*) = s(\omega),$$
$$i_r(\omega^*) + i_{s-r}(\omega) = m, \qquad r = 0, 1, \ldots, s.$$

Il en résulte que $\omega \in \Omega_0(n, m)$ est équivalent à $\omega^* \in \Omega_0^*(n, m)$. Nous remarquons aussi

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \omega_m^m \in \Omega_0^*(n, m), \\ \omega_{2k,\,2k}^m \in \Omega_1^*(n, m) \subset \Omega_0^*(n, m), \\ \overline{\omega}_{2k,\,2k}^m \in \Omega_1^*(n, m) \subset \Omega_0^*(n, m). \end{cases}$$

§ 2. Subdivision cellulaire.

Soit M un espace compact. Une collection finie K de sous-espaces disjoints deux à deux, appelés *cellules* de M, forme une *subdivision cellulaire* de M si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° Chaque cellule σ est ou bien un point ou bien homéomorphe à une boule ouverte dont la dimension s'appelle la *dimension* de σ.

2° La réunion de toutes les cellules de la collection K est l'espace M tout entier.

3° Pour chaque cellule σ les points appartenant à l'adhérence de σ mais non à σ elle-même forment un sous-espace de M qui est une réunion de certaines cellules de dimension plus petite de K.

Soient H_p et H^p une théorie d'homologie et de cohomologie d'espaces topologiques au sens d'Eilenberg-Steenrod. A la subdivision K on peut alors associer canoniquement un complexe abstrait, désigné par le même symbole K, dont les groupes d'homologie et de cohomologie sont isomorphes aux groupes correspondants de l'espace M, de sorte qu'on peut les identifier. Ceci est vrai même pour des « subdivisions » plus générales que celles définies ci-dessus. Cf. Eilenberg-Steenrod, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 31 (1945), 117-120 ; H. Cartan, *Comm. Math. Helv.*, 18 (1945-46), 1-15, § 10 ; et aussi E. Spanier, *Annals of Math.*, 50 (1949), 203-245, § 10.

Deux subdivisions cellulaires K et L d'une variété compacte orientée M de dimension m seront dites *duales* s'il existe une *application cellulaire* D, appelée *opérateur de dualité*, du complexe K dans le complexe L telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

1° D est une application biunivoque de l'ensemble des cellules orientées de K sur l'ensemble des cellules orientées de L.

2° Pour chaque cellule σ de K, $\dim \sigma + \dim D(\sigma) = m$.

3° $D(-\sigma) = -D(\sigma)$, $\sigma \in K$.

4° Deux cellules orientées $\sigma \in K$ et $\tau \in L$ sont disjointes si $\dim \sigma + \dim \tau \leqslant m$ et $\tau \neq \pm D(\sigma)$; les deux cellules σ et $D(\sigma)$ ont un seul point commun dont l'indice d'intersection est égal à $+1$: $I_0(\sigma, D(\sigma)) = +1$, où I_0 signifie l'indice d'intersection dans la variété orientée M.

Les homomorphismes des groupes de chaînes de K dans ceux de L induits par D seront désignés par le même symbole D. Il résulte de 4° que, pour une chaîne A de dimension p de K et une chaîne B de dimension $m-p$ de L, on a $I_0(A, B) = \langle D(A), B \rangle$, où $\langle\ \rangle$ est le symbole du produit scalaire.

Nous supposons vérifiée de plus la condition suivante :

5° $I_0(\partial\sigma, \tau) = (-1)^p I_0(\sigma, \partial\tau)$, $\sigma \in K$, $\tau \in L$,

$$\dim \sigma = p, \qquad \dim \tau = m - p + 1.$$

Par exemple, cette condition est vérifiée pour les subdivisions duales des variétés grassmanniennes considérées dans §§ 3-5.

En supposant 5°, on aura :

$$\langle D\partial(\sigma), \tau \rangle = I_0(\partial\sigma, \tau) = (-1)^p I_0(\sigma, \partial\tau) = (-1)^p \langle D(\sigma), \partial\tau \rangle$$
$$= (-1)^p \langle \delta D(\sigma), \tau \rangle .$$

Les cellules σ, τ étant quelconques, on en déduit $D\partial = (-1)^p \delta D$. Il en résulte que D induit un isomorphisme de $H_p(K)$ sur $H^{m-p}(L)$. L'opérateur de dualité D établit donc d'une façon canonique une dualité entre l'homologie et la cohomologie de la variété orientée M, c'est-à-dire $H_p(M) \approx H^{m-p}(M)$; deux classes correspondantes dans cet isomorphisme sont dites *duales* l'une de l'autre. Remarquons que, M étant compacte et localement connexe dans toutes les dimensions, on peut considérer les groupes $H_p(M)$ comme groupes d'homologie singuliers de l'espace M, en partant d'une théorie d'homologie quelconque.

§ 3. Les variétés grassmanniennes $\mathring{R}_{n,m}$.

Nous commençons par l'étude des variétés $\mathring{R}_{n,m}$.

Soit $\mathring{R}_{n,m}$ la variété grassmannienne définie dans l'espace R^{n+m}. Prenons un système de coordonnées $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ et désignons par R^k le sous-espace vectoriel de dimension k défini par les équations :

$$(1) \qquad x_{k+1} = \cdots = x_{n+m} = 0, \qquad (0 < k \leqslant n+m).$$

Pour une fonction $\omega \in \Omega(n, m)$ l'ensemble des sous-espaces orientés X de dimension m tels que

$$(2) \qquad \dim(X \cap R^{\omega(i)+i}) \geqslant i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

est une pseudovariété de dimension $d(\omega)$ (cf. (1), § 1), que nous désignerons par $\overline{U_\omega}$. En particulier, $\vec{R}_{n,m} = \overline{U_{\omega_0}}$, où $\omega_0 = \omega_0^{m*}$ (cf. (2) et (6), § 1).

Soit $(e_1, \ldots, e_{n+m})$ la base de R^{n+m} correspondant à (x). Désignons par X_ω l'espace vectoriel de dimension m engendré par les vecteurs $e_{\bar{i}}$, où $\bar{i}$ est le i-ième nombre de la suite :

$$(3) \qquad \{\bar{i}(\omega)\} = \{\omega(1)+1, \omega(2)+2, \ldots, \omega(m)+m\}.$$

L'espace X_ω est aussi défini par les équations :

$$(4) \qquad x_{\bar{j}} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

où $\bar{j}$ est le j-ième nombre de la suite :

$$(3)' \quad \{\bar{j}(\omega)\} = \{1, \ldots, \omega(1); \omega(1)+2, \ldots, \omega(2)+1, \ldots; \omega(m)+m+1, \ldots, n+m\}.$$

Remarquons que $\{\bar{j}(\omega)\}$ et $\{\bar{i}(\omega)\}$ sont des suites complémentaires dans la suite des entiers de 1 à $n+m$. L'espace X_ω, muni d'une orientation déterminée par la suite des vecteurs $e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, \ldots, e_{\bar{m}}$, sera désigné par $\vec{X}_\omega$. Le même espace muni de l'orientation opposée sera désigné par $\overleftarrow{X}_\omega$.

L'ensemble des éléments de $\vec{R}_{n,m}$ ayant une projection orthogonale non-dégénérée sur X_ω et dont l'orientation se projette sur celle de $\vec{X}_\omega$ (resp. $\overleftarrow{X}_\omega$) forme un voisinage de $\vec{X}_\omega$ (resp. $\overleftarrow{X}_\omega$) dans $\vec{R}_{n,m}$ que nous désignerons par $\vec{N}_\omega$ (resp. $\overleftarrow{N}_\omega$). Les intersections

$$\vec{N}_\omega \cap \overline{U_\omega} = \vec{U}_\omega \qquad \text{et} \qquad \overleftarrow{N}_\omega \cap \overline{U_\omega} = \overleftarrow{U}_\omega$$

sont des cellules ouvertes dont la réunion a pour adhérence la pseudo-variété $\overline{U_\omega}$. Tout élément de $\vec{N}_\omega$ (resp. $\overleftarrow{N}_\omega$), en négligeant son orientation, est déterminé par un système d'équations :

$$(5) \qquad x_{\bar{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{\bar{i}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

où $\overset{+}{i}$ et $\overset{-}{j}$ parcourent respectivement les deux systèmes d'indices (3) et (3)'. On peut donc considérer les nombres ξ_{ji} comme les coordonnées de cet élément, appelées *coordonnées normales* dans le voisinage $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\overset{-}{N}_\omega$), dont l'orientation sera déterminée une fois pour toutes par l'ordre suivant de ses coordonnées :

$$(6) \qquad \xi_{11},\ \ldots,\ \xi_{1m},\ \xi_{21},\ \ldots,\ \xi_{2m},\ \ldots,\ \xi_{n1},\ \ldots,\ \xi_{nm}.$$

Dans le système des coordonnées normales du voisinage $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\overset{-}{N}_\omega$), l'ensemble $\overset{+}{U}_\omega$ (resp. $\overset{-}{U}_\omega$) se présente comme une variété linéaire définie par les équations

$$(7) \qquad \xi_{ji}=0, \qquad \text{pour} \qquad j>\omega(i), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ m.$$

Les nombres ξ_{ji} tels que $j\leqslant\omega(i)$, $i=1,\ \ldots,\ m$, forment une suite partielle de (6), qui détermine un système de coordonnées *normales* dans U_ω (resp. $\overset{-}{U}_\omega$) ainsi que l'orientation *normale* de $\overset{+}{U}_\omega$ (resp. $\overset{-}{U}_\omega$). L'élément $\overset{+}{X}_\omega\in\overset{+}{U}_\omega$ (resp. $\overset{-}{X}_\omega\in\overset{-}{U}_\omega$), correspondant aux coordonnées $\xi_{ji}=0$ pour tous les i et j, sera appelé *l'élément central* de $\overset{+}{U}_\omega$ (resp. $\overset{-}{U}_\omega$) ou $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\overset{-}{N}_\omega$).

D'après Pontrjagin, l'ensemble des cellules ouvertes $\overset{+}{U}_\omega$ et $\overset{-}{U}_\omega$, $\omega\in\Omega(n,\ m)$, forme une subdivision cellulaire *canonique* $\hat{K}_{(x)}$ de la variété $\hat{R}_{n,\,m}$ par rapport au système de coordonnées

$$(x)=(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}) \text{ de } R^{n+m}.$$

Les relations d'incidence entre les cellules du complexe $\hat{K}_{(x)}$, munies des orientations normales, ont été déterminées par Pontrjagin ; on peut les écrire sous la forme :

$$(8) \qquad \begin{cases} \partial\overset{+}{U}_\omega=\Sigma\varepsilon_{\omega,\,k}\Big[\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}+(-1)^{\omega(k)+k+m}\overset{-}{U}_{\omega_{(k)}}\Big], \\ \partial\overset{-}{U}_\omega=\Sigma\varepsilon_{\omega,\,k}\Big[\overset{-}{U}_{\omega_{(k)}}+(-1)^{\omega(k)+k+m}\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}\Big], \end{cases}$$

où $\varepsilon_{\omega,k}=+1$ ou -1 et où la sommation s'étend à l'ensemble des indices k tels que $\omega_{(k)}\in\Omega(n,\ m)$.

Esquisse de la démonstration. — On montre facilement que les formules donnant les bords sont de la forme :

$$\begin{cases} \partial\overset{+}{U}_\omega=\Sigma\big[\overset{+}{a}_{\omega,\,k}\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}+\overset{+}{b}_{\omega,\,k}\overset{-}{U}_{\omega_{(k)}}\big], \\ \partial\overset{-}{U}_\omega=\Sigma\big[\overset{-}{a}_{\omega,\,k}\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}+\overset{-}{b}_{\omega,\,k}\overset{-}{U}_{\omega_{(k)}}\big]. \end{cases} \qquad (\omega_{(k)}\in\Omega(n,\ m))$$

où $\overset{+}{a}_{\omega, k}$, $\overset{+}{b}_{\omega, k}$, etc., sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Les formules (8) sont donc équivalentes à :

$$\text{(9)} \qquad \overset{+}{a}_{\omega, k} \cdot \overset{-}{a}_{\omega, k} = (-1)^{\omega(k)+k+m};$$

$$\text{(10)} \qquad \overset{+}{a}_{\omega, k} = \overset{-}{b}_{\omega, k}, \ \overset{-}{a}_{\omega, k} = \overset{+}{b}_{\omega, k}.$$

Les équations (10) sont faciles à démontrer. En effet, considérons l'application ρ de $\hat{R}_{n,m}$ sur elle-même telle que pour $X \in \hat{R}_{n,m}$, $\rho(X)$ soit le même élément avec l'orientation opposée. Évidemment ρ applique les cellules orientées $\overset{+}{U}_{\omega}$, $\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}$ et $\overset{-}{U}_{\omega_{(k)}}$ respectivement sur les cellules orientées $\overset{-}{U}_{\omega}$, $\overset{-}{U}_{\omega_{(k)}}$ et $\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}$. Les équations résultent alors du fait que ρ conserve les coefficients d'incidence :

$$\rho\partial = \partial\rho.$$

Il reste donc à démontrer l'équation (9). Soit k un entier fixe tel que $\omega_{(k)} \in \Omega(n, m)$ et considérons l'ensemble U' des éléments $X' \in \hat{R}_{n,m}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(α) X' se projette *positivement sur* l'élément central $\overset{+}{X}_{\omega_{(k)}}$ de $\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}$.

(β) X' est représenté par l'ensemble des équations :

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} x_{\bar{j}} = \sum\limits_{i \neq k} \xi'_{ji} x_{\bar{i}} + \xi'_{jk} x_{\bar{k}-1}, & \text{pour} \quad j \neq \omega(k), \\ x_{\omega(k)+k} = \sum\limits_{i \neq k} \xi'_{\omega(k), i} x_{\bar{i}} + \xi'_{\omega(k), k} x_{\bar{k}-1}, \end{cases}$$

où

$$\text{(12)} \qquad \xi'_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad j > \omega(i)$$

et $\bar{j}$ et $\bar{i}$ sont respectivement le j-ième nombre de $(3)'$ et le i-ième nombre de (3); en particulier, $\bar{k} = \omega(k) + k$, $\bar{k}' = \omega(k) + k - 1$, où $k' = \omega(k)$.

En effet, X' est l'élément de $\hat{R}_{n,m}$ déterminé par la suite de vecteurs $\{e'_1, \dots e'_m\}$ où

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} e'_j = e_{\bar{i}} + \sum\limits_{j \neq \omega(k)} \xi'_{ji} e_{\bar{j}} + \xi'_{\omega(k), i} e_{\omega(k)+k}, \quad i \neq k; \\ e'_k = e_{\bar{k}-1} + \sum\limits_{j \neq \omega(k)} \xi'_{jk} e_{\bar{j}} + \xi'_{\omega(k), k} e_{\omega(k)+k}, \end{cases}$$

où les ξ'_{ji} satisfont à (12).

Considérons maintenant $\{\xi'_{ji}\}$, $j \leqslant \omega(i)$, comme un système de coordonnées dans U' et introduisons une orientation de U' en rangeant ces coordonnées dans un ordre tel que ξ'_{ji} précède $\xi'_{j'i'}$ si $j' > j$ ou $j' = j$, $i' > i$. Désignons par $U'_{(+)}$, $U'_{(-)}$ et U'_0 les sous-ensembles de U' dont les éléments X' satisfont respectivement aux conditions :

$$\xi'_{\omega(k), k} > 0, \qquad \xi'_{\omega(k), k} < 0 \qquad \text{et} \qquad \xi'_{\omega(k), k} = 0.$$

Orientons $U'_{(+)}$ et $U'_{(-)}$ par l'orientation induite de celle de U'. On voit alors que :

1° U'_0 n'est autre que la cellule $\overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}$. Par conséquent,

$$\text{(14)} \qquad \partial U'_{(+)} = \eta \overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}, \qquad \partial U'_{(-)} = -\eta \overset{+}{U}_{\omega_{(k)}}, \qquad \eta = \pm 1.$$

2° L'élément central $\overset{+}{X}_\omega$ de $\overset{+}{U}_\omega$ est déterminé par la suite de vecteurs

$$\{e_1^-, \ldots, e_m^-\}.$$

D'après (13), un élément $X' \in U'$ se projette *positivement sur* $\overset{+}{X}_\omega$ si et seulement si $\xi'_{\omega(k),k} > 0$. Par conséquent

$$U'_{(+)} = \overset{+}{U}_\omega \cap U'. \tag{15}$$

Soit $\{\xi_{ji}\}$ le système de coordonnées normales dans $\overset{+}{U}_\omega$. En comparant (11) et (5), on voit que les transformations de coordonnées pour les éléments communs aux U' et $\bar{U}_\omega$ sont données par les équations suivantes :

$$(16)\quad \begin{cases} \xi_{jk} = \xi'_{jk}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \qquad \text{pour } j \neq \omega(k), \text{ ou, ce qui revient au même, pour } j < \omega(k); \\ \xi_{ji} = \xi'_{ji} - \xi'_{jk}\xi'_{\omega(k),i}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \qquad \text{pour } j \neq \omega(k),\ i \neq k; \\ \xi_{\omega(k),k} = 1/\xi'_{\omega(k),k}; \\ \xi_{\omega(k),i} = -\xi'_{\omega(k),i}/\xi'_{\omega(k),k}, \\ \qquad \text{pour } i \neq k, \text{ ou, ce qui revient au même, pour } i > k; \end{cases}$$

où $\xi'_{\omega(k),k} > 0$.

Le jacobien de (16) est du signe de $(-1)^{m-k+1}$, c'est-à-dire les orientations de $\bar{U}_\omega$ et $U'_{(+)}$ coïncident ou ne coïncident pas dans leur partie commune suivant que $m-k+1$ est pair ou impair. D'après (14), on a alors :

$$\overset{+}{a}_{\omega,k} = (-1)^{m-k+1}\eta. \tag{17}$$

3° Pour $U'_{(-)}$ on a de même

$$U'_{(-)} = \bar{U}_\omega \cap U'.$$

Les transformations de coordonnées pour les éléments communs aux U' et $\bar{U}_\omega$ sont encore représentées par (16) mais où $\xi'_{\omega(k),k} < 0$. On trouve que le jacobien de (16) est du signe de $(-1)^{\omega(k)}$. On en déduit, en tenant compte de (14) :

$$\bar{a}_{\omega,k} = (-1)^{\omega(k)+1}\eta. \tag{18}$$

De (17) et (18) on déduit (9). Les formules (8) sont donc démontrées.

Il en résulte que la chaîne

$$\hat{R}_\omega = \overset{+}{U}_\omega + (-1)^{\omega(i_0+1)+i_0+m}.\bar{U}_\omega \qquad (i_0 = i_0(\omega)) \tag{19}$$

est un cycle mod 2 pour toutes les fonctions $\omega \in \Omega(n, m)$; elle est un cycle entier si et seulement si $\omega \in \Omega_0(n, m)$. Cette chaîne, dont la dimension est égale à $d(\omega)$, considérée comme un cycle mod 2 ou un cycle entier selon le cas, sera désignée par $[\omega]_0^{\cdot}$ ou $[\omega]_2^{\cdot}$ et sa classe d'homologie par $[\omega]_0^*$ ou $[\omega]_2^*$. Nous remarquons que ces classes (et aussi ces cycles) sont définis à partir d'un système de coordonnées

particulier $(x) = (x_1, \ldots$
aussi que le cycle $[\omega]_2^{\cdot}$ o
pseudo-variété $\bar{U}_\omega$.

A chaque fonction $\omega\in$
de la cellule $\ddot{N}_\omega$ (resp. $\bar{N}$
orientable $\hat{R}_{n,m} = \bar{U}_{\omega_0}$
toutes l'orientation de la
alors :

Proposition 1. — *L'o*
ou non avec celle de $\hat{R}_{n,m}$

(20) $m.(mn - d($
(resp. $m.(mn$

Démonstration. — La

$1, \ldots, \omega(1), \omega(1)+2, \ldots$

diffère de la suite $1, 2,$
impaire selon que $mn -$
mation orthogonale A dé

(21) A(
A(
A(

a un déterminant $+1$, c

(22) $A(\overset{+}{X}_\omega)$

Un élément X dans le
équations (5) est transfor
les équations :

(23) $x_1 = (-$
$x_j = \sum_{i=1}^{m}$

et appartenant par cons
L'image $A(N_\omega)$ [resp. $A(\ddot{N}$

particulier $(x) = (x_1, \ldots x_{n+m})$ de l'espace R^{n+m}. Nous remarquons aussi que le cycle $[\omega]_2^*$ ou $[\omega]_0^*$ est représenté géométriquement par la pseudo-variété $\overline{U_\omega}$.

A chaque fonction $\omega \in \Omega(n, m)$ nous avons associé une orientation de la cellule $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\bar{N}_\omega$) et par suite une orientation de la variété orientable $\acute{R}_{n,m} = \overline{U_{\omega_0}}$ où $\omega_0 = \omega_0^{m*}$. Nous choisirons une fois pour toutes l'orientation de la variété $\acute{R}_{n,m}$ induite par celle de $\overset{+}{N}_{\omega_0}$. On a alors :

Proposition 1. — *L'orientation de $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\bar{N}_\omega$) est en cohérence ou non avec celle de $\acute{R}_{n,m}$ selon que*

$$(20)\qquad \begin{cases} m.(mn - d(\omega)) & \textit{est pair ou impair,} \\ (\text{resp. } m.(mn - d(\omega)) + m + n & \textit{est pair ou impair}). \end{cases}$$

Démonstration. — La suite $\{\bar{j}(\omega), \bar{i}(\omega)\}$, c'est-à-dire la suite

$$1, \ldots, \omega(1), \omega(1) + 2, \ldots, \omega(m) + m + 1, \ldots, n + m,$$
$$\omega(1) + 1, \ldots, \omega(m) + m,$$

diffère de la suite $1, 2, \ldots n + m$ par une permutation paire ou impaire selon que $mn - d(\omega)$ est pair ou impair. Donc la transformation orthogonale A définie par les équations :

$$(21)\qquad \begin{cases} A(x_{\bar{1}}) = (-1)^{mn - d(\omega)}.x_1, \\ A(x_{\bar{j}}) = x_j, \qquad j = 2, \ldots n, \\ A(x_{\bar{i}}) = x_{n+i}, \qquad i = l, \ldots m, \end{cases}$$

a un déterminant $+1$, et on a

$$(22)\qquad A(\overset{+}{X}_\omega) = \overset{+}{X}_{\omega_0}, \qquad A(\bar{X}_\omega) = \bar{X}_{\omega_0}.$$

Un élément X dans le voisinage $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\bar{N}_\omega$) représenté par les équations (5) est transformé dans un élément A(X) représenté par les équations :

$$(23)\qquad \begin{cases} x_1 = (-1)^{mn - d(\omega)} . \sum\limits_{i=}^{m} \xi_{1i} x_{n+i}, \\ x_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{n+i}, \qquad j = 2, \ldots n, \end{cases}$$

et appartenant par conséquent au voisinage $\overset{+}{N}_{\omega_0}$ (resp. $\bar{N}_{\omega_0}$). L'image $A(N_\omega)$ [resp. $A(\bar{N}_\omega)$] a une orientation déduite de celle de

$\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\overline{N}_\omega$). En comparant les deux systèmes d'équations (5) et (23) et en tenant compte de l'équation (21) on voit que l'orientation de $A(\overset{+}{N}_\omega)$ [resp. $A(\overline{N}_\omega)$] est en cohérence ou non avec celle de $\overset{+}{N}_{\omega_0}$ (resp. $\overline{N}_{\omega_0}$) selon que $m[mn - d(\omega)]$ est pair ou impair. Puisque le déterminant de la transformation A est positif, on peut déformer A dans la transformation identique en parcourant une famille de transformations orthogonales de l'espace R^{n+m}. Par conséquent $A(\overset{+}{N}_\omega)$ [resp. $A(\overline{N}_\omega)$] est déformable en $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\overline{N}_\omega$) et les deux déterminent la même orientation de $\hat{R}_{n,m}$. Il en résulte que l'orientation de $\overset{+}{N}_\omega$ (resp. $\overline{N}_\omega$) est en cohérence ou non avec celle de $\overset{+}{N}_{\omega_0}$ (resp. $\overline{N}_{\omega_0}$) selon que $m(mn - d(\omega))$ est pair ou impair.

De la même façon la considération de la transformation orthogonale A' définie par les équations :

$$(24) \qquad \begin{cases} A'(x_1) = -x_1, \\ A'(x_i) = x_i, \qquad i = 2, \dots n+m-1, \\ A'(x_{n+m}) = -x_{n+m}, \end{cases}$$

nous donne

$$(25) \qquad A'(\overset{+}{X}_\omega) = \overline{X}_{\omega_0}, \qquad A'(\overline{X}_{\omega_0}) = \overset{+}{X}_{\omega_0}.$$

De (24) et (25) on déduit que l'orientation de $\overset{+}{N}_{\omega_0}$ est en cohérence ou non avec celle de $\overline{N}_{\omega_0}$ selon que $m+n$ est pair ou impair. Il en résulte que l'orientation de $\overline{N}_\omega$ est en cohérence ou non avec celle de $\overset{+}{N}_{\omega_0}$ selon que $m.(mn - d(\omega)) + m + n$ est pair ou impair. La proposition est ainsi démontrée.

Nous définissons maintenant une subdivision cellulaire *duale* à celle considérée ci-dessus. Pour cela introduisons un autre système de coordonnées $(x^*) = (x_1^*, \dots x_{n+m}^*)$ dans l'espace R^{n+m} tel que :

$$(26) \qquad x_i^* = x_{n+m+1-i}, \qquad i = 1, \dots n+m.$$

A partir de ce système on définit de même une subdivision cellulaire canonique $\hat{K}_{(x^*)}$ de la variété $\hat{R}_{n,m}$ dont les cellules, les cycles, etc., seront désignés respectivement par les mêmes symboles que dans le complexe $\hat{K}_{(x)}$ en ajoutant un astéristique. En particulier, R^{*k} $(0 < k \leqslant n+m)$ est le sous-espace de R^{n+m} de dimension k défini par les équations :

$$x_{k+1}^* = \dots = x_{n+m}^* = 0, \qquad \text{où} \qquad x_1 = \dots = x_{n+m-k} = 0.$$

PROPOSITION 2. —
prenant l'orientation de
l'opérateur de dualité D
vantes :

$$(27) \quad \begin{cases} D(\overset{+}{U}_\omega) = (- \\ \quad si \frac{1}{2} m(m - \\ D(\overset{+}{U}_\omega) = (- \\ \quad si \frac{1}{2} m(m - \end{cases}$$

où $\lambda(\omega^*)$ *est un entier q*
culier, on a (cf. (2), (

$$(28) \quad \lambda(\omega_{2k,2k}^m) = \lambda($$

Démonstration. Les
$l < n+m$) sont en po
et R^{*l} ont une intersec
sible :

dim(R^k ∩

D'après un raisonner

$$(29) \quad I_0(\overset{+}{U}_\omega, \overset{+}{U}_{\omega'}^*) = I$$

si $\omega' \neq$

où I_0 est l'indice d'inter
à partir du système (x).
Considérons mainte
$\overline{U}_\omega$ et $\overset{+}{U}_{\omega^*}^*$ ou $\overline{U}_{\omega^*}^*$ sont r

$$(30) \quad x_{\bar{j}} = \sum_{i=1}^m \xi_{ji} x_{\bar{i}},$$

$$(31) \quad x_{\bar{j}^*}^* = \sum_{i=1}^m \xi_{ji}^* x_{\bar{i}^*}^*$$

où $\bar{i}$, $\bar{i}^*$, $\bar{j}$, $\bar{j}^*$ parcourer

Proposition 2. — *Les subdivisions $\hat{K}_{(x)}$ et $\hat{K}_{(x^*)}$ sont duales. En prenant l'orientation de $\hat{R}_{n,m}$ à partir du système de coordonnées (x), l'opérateur de dualité* $D : \hat{K}_{(x)} \to \hat{K}_{(x^*)}$ *est donné par les équations suivantes :*

$$(27)\quad \begin{cases} D(\overset{+}{U}_{\omega}) = (-1)^{\lambda(\omega^*)} . \overset{+}{U}{}^*_{\omega^*}, \quad D(\bar{U}_{\omega}) = (-1)^{\lambda(\omega^*)+m+n} . \bar{U}^*_{\omega^*}, \\ \quad si\ \tfrac{1}{2}m(m-1)\ est\ pair\,; \\ D(\overset{+}{U}_{\omega}) = (-1)^{\lambda(\omega^*)} . \bar{U}^*_{\omega^*}, \quad D(\bar{U}_{\omega}) = (-1)^{\lambda(\omega^*)+m+n} . \overset{+}{U}{}^*_{\omega^*}, \\ \quad si\ \tfrac{1}{2}m(m-1)\ est\ impair\,; \end{cases}$$

où $\lambda(\omega^*)$ est un entier qui ne dépend que de la fonction ω^*. En particulier, on a (cf. (2), (3) et $(\bar{3})$ de § 1) :

$$(28)\quad \lambda(\omega^m_{2k,\,2k}) = \lambda(\bar{\omega}^m_{2k,\,2k}) \equiv 0, \quad \lambda(\omega^m_m) \equiv 1/2\, m(m+1) \bmod 2.$$

Démonstration. Les deux systèmes d'espaces R^k et R^{*l} $(0 < k, l < n+m)$ sont en position générale, c'est-à-dire deux espaces R^k et R^{*l} ont une intersection dont la dimension est la plus petite possible :

$$\dim(R^k \cap R^{*l}) = \sup(k+l-n-m,\ 0),$$

D'après un raisonnement d'Ehresmann, on a alors :

$$(29)\quad I_0(\overset{+}{U}_{\omega}, \overset{+}{U}{}^*_{\omega'}) = I_0(\overset{+}{U}_{\omega}, \bar{U}^*_{\omega'}) = I_0(\bar{U}_{\omega}, \overset{+}{U}{}^*_{\omega'}) = I_0(\bar{U}_{\omega}, \bar{U}^*_{\omega'}) = 0,$$
$$si\ \omega' \neq \omega^*, \qquad d(\omega') + d(\omega) \leqslant nm,$$

où I_0 est l'indice d'intersection calculé dans la variété $\hat{R}_{n,m}$ orientée à partir du système (x).

Considérons maintenant le cas $\omega' = \omega^*$. Les éléments de $\overset{+}{U}_{\omega}$ ou $\bar{U}_{\omega}$ et $\overset{+}{U}{}^*_{\omega^*}$ ou $\bar{U}^*_{\omega^*}$ sont respectivement représentés par les équations :

$$(30)\quad x_{\bar{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{\bar{i}}, \quad j = 1, \ldots m\,; \quad \xi_{ji} = 0 \quad pour \quad j > \omega(i)\,;$$

$$(31)\quad x^*_{\bar{j}^*} = \sum_{i=1}^{m} \xi^*_{ji} x^*_{\bar{i}^*}, \quad j = 1, \ldots m\,; \quad \xi^*_{ji} = 0 \quad pour \quad j > \omega^*(i),$$

où $\bar{i}$, $\bar{i}^*$, $\bar{j}$, $\bar{j}^*$ parcourent respectivement les suites :

$$\{\bar{i}(\omega)\} = \{\omega(1)+1, \ldots, \omega(m)+m\}.$$
$$\{\bar{i}^*(\omega^*)\} = \{\omega^*(1)+1, \ldots, \omega^*(m)+m\}.$$
$$= \{n+m+1-(\omega(m)+m), \ldots, n+m+1-(\omega(1)+1)\}.$$
$$\{\bar{j}(\omega)\} = \{1, \ldots, \omega(1);\quad \omega(1)+2, \ldots \omega(2)+1;\ \ldots \omega(m)+m+1, \ldots, n+m\}.$$
$$\{\bar{j}^*(\omega^*)\} = \{1, \ldots, \omega^*(1);\ \omega^*(1)+2, \ldots, \omega^*(2)+1;\ \ldots, \omega^*(m)+m+1, \ldots, n+m\},$$
$$= \{n+m+1-(n+m), \ldots, n+m+1-(\omega(m)+m+1);\quad \ldots, n+m+1-\omega(1), \ldots, n+m+1-1\}.$$

Les deux suites $\{\bar{i}^*(\omega^*)\}$ et $\{n+m+1-\bar{i}(\omega)\}$ sont donc en ordre inverse, c'est-à-dire $\bar{i}^* = n+m+1-\bar{i}'$, où $i' = m+1-i$. De même, $\bar{j}^* = n+m+1-\bar{j}'$, où $j' = n+1-j$. D'après (26), on a donc

$$x^*_{\bar{i}^*} = x_{\bar{i}'}, \qquad x^*_{\bar{j}^*} = x_{\bar{j}'}, \qquad i = 1, \ldots, m; \qquad j = 1, \ldots, n,$$

et (31) devient

$$(32) \qquad \begin{cases} x_{\bar{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi^*_{n+1-j,\, m+1-i}\, x_{\bar{i}}, & j = 1, \ldots, n; \\ \xi^*_{n+1-j,\, m+1-i} = 0 & \text{pour} \quad j \leqslant \omega(i). \end{cases}$$

En comparant les équations (30) et (32) on voit alors que le seul élément possible commun aux $\overset{+}{\mathrm{U}}_\omega$ ou $\overline{\mathrm{U}}_\omega$ et $\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}$ ou $\overline{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}$ est l'élément central $\overset{+}{\mathrm{X}}_\omega$ ou $\overline{\mathrm{X}}_\omega$. D'une façon plus précise, puisque les suites $\{\bar{i}(\omega)\}$ et $\{n+m+1-\bar{i}^*(\omega^*)\}$ diffèrent par une permutation paire ou impaire selon que $\frac{1}{2}m(m-1)$ est pair ou impair, on aura :

$$(33) \quad \begin{cases} \mathrm{I}_0(\overset{+}{\mathrm{U}}_\omega, \overline{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}) = \mathrm{I}_0(\overline{\mathrm{U}}_\omega, \overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}) = 0, \\ \overset{+}{\mathrm{U}}_\omega \cap \overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*} = \{\overset{+}{\mathrm{X}}_\omega\},\ \overline{\mathrm{U}}_\omega \cap \overline{\mathrm{U}}_\omega = \{\overline{\mathrm{X}}_\omega\}, \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2}m(m-1) \text{ pair}; \end{cases}$$

$$(33)' \quad \begin{cases} \mathrm{I}_0(\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_\omega, \overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}) = \mathrm{I}_0(\overline{\mathrm{U}}_\omega, \overline{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}) = 0, \\ \overset{+}{\mathrm{U}}_\omega \cap \overline{\mathrm{U}}_{\omega^*} = \{\overset{+}{\mathrm{X}}_\omega\},\ \overline{\mathrm{U}}_\omega \cap \overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*} = \{\overline{\mathrm{X}}_\omega\}, \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2}m(m-1) \text{ impair}. \end{cases}$$

Dans le cas où $\frac{1}{2}m(m-1)$ est pair(resp. impair), les ensembles $\ddot{\mathrm{U}}_\omega$ et $\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}$ (resp. $\overline{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}$) sont des variétés linéaires dans le voisinage $\ddot{\mathrm{N}}_\omega$, qui se coupent suivant le seul élément $\ddot{\mathrm{X}}_\omega$. Par un simple calcul on trouve que

$$\overset{+}{\mathrm{I}}_{\omega,0}\big(\ddot{\mathrm{U}}_\omega,\ \overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}\big)=(-1)^{\lambda'(\omega^*)},\qquad \big(\text{resp. } \overset{+}{\mathrm{I}}_{\omega,0}\big(\ddot{\mathrm{U}}_\omega,\ \overline{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}\big)=(-1)^{\lambda'(\omega^*)}\big),$$

où $\overset{+}{\mathrm{I}}_{\omega,0}$ désigne l'indice d'intersection calculé dans le voisinage orienté $\overset{+}{\mathrm{N}}_\omega$ et où $\lambda'(\omega^*)$ est un entier ne dépendant que de ω^* qui ne nous intéressera pas. En particulier, on a

$$(28)' \qquad \begin{cases} \lambda'(\omega^m_m)\equiv\frac{1}{2}m(m-1) \qquad \bmod 2\,; \\ \lambda'(\omega^m_{2k,\,2k})\equiv 0, \qquad \lambda'(\omega^m_{2k,\,2k})\equiv 0 \qquad \bmod 2. \end{cases}$$

D'après la proposition 1, $\overset{+}{\mathrm{I}}_{\omega,0}=(-1)^{m(mn-d(\omega))}\cdot \mathrm{I}_0$. On a donc

$$\mathrm{I}_0\big(\ddot{\mathrm{U}}_\omega,\ \overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}\big)=(-1)^{\lambda(\omega^*)},\qquad \big(\text{resp. } \mathrm{I}_0\big(\ddot{\mathrm{U}}_\omega,\ \overline{\mathrm{U}}{}^*_{\omega^*}\big)=(-1)^{\lambda(\omega^*)}\big),$$

où on a posé $\lambda(\omega^*)=\lambda'(\omega^*)+m(mn-d(\omega))=\lambda'(\omega^*)+m\cdot d(\omega^*)$, de sorte que (28) est une conséquence de (28)'. En définissant une application cellulaire $\mathrm{D}:\ \hat{\mathrm{K}}_{(x)}\to\hat{\mathrm{K}}_{(x^*)}$ par les équations (27), l'équation précédente devient $\mathrm{I}_0\big(\overset{+}{\mathrm{U}}_\omega,\ \mathrm{D}\big(\ddot{\mathrm{U}}_\omega\big)\big)=+1$. De même, on a $\mathrm{I}_0\big(\overline{\mathrm{U}}_\omega,\ \mathrm{D}\big(\overline{\mathrm{U}}_\omega\big)\big)=+1$. Il en résulte que D n'est autre que l'opérateur de dualité de $\hat{\mathrm{K}}_{(x)}$ dans $\hat{\mathrm{K}}_{(x^*)}$. Le théorème est ainsi démontré.

Il en résulte que la chaîne dans $\hat{\mathrm{K}}_{(x^*)}$ de dimension $d(\omega)$ (cf. (19)): $\mathrm{D}(\hat{\mathrm{R}}_{\omega^*})=(-1)^{\mu(\omega)}\cdot\big[\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_\omega+(-1)^{\omega^*(i_0^*+1)+i_0^*+n}\cdot\overline{\mathrm{U}}{}^*_\omega\big]$, où

$$(34) \qquad \hat{\mathrm{R}}^*_\omega=(-1)^{\mu(\omega)}.$$

où $i_0^*=i_0(\omega^*)$, $i_s=i_s(\omega)$, $s=s(\omega)$, et $\big[\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_\omega+(-1)^{\omega(i_s)+i_s+m}\cdot\overline{\mathrm{U}}{}^*_\omega\big]$,

$$(34)' \qquad \mu(\omega)=\lambda(\omega)+\frac{1}{2}m(m-1)\cdot[\omega(i_s)+i_s+m],$$

est toujours un cocycle mod 2 et est aussi un cocycle entier si et seulement si $\omega^*\in\Omega_0(n,\ m)$ ou $\omega\in\Omega_0^*(n,\ m)$. Nous le désignerons par $\{\omega\}_2^{\wedge}$ ou $\{\omega\}_0^{\wedge}$ et sa classe par $\{\omega\}_2^{\wedge}$ ou $\{\omega\}_0^{\wedge}$. En particulier, on a

$$(35) \qquad \{\omega\}_0^{\wedge}=\begin{cases}\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_\omega+\overline{\mathrm{U}}{}^*_\omega, & \text{pour} \quad \omega=\omega^m_{2k,\,2k} \quad \text{ou} \quad \overline{\omega}^m_{2k,\,2k}, \\ (-1)^m\cdot\big[\overset{+}{\mathrm{U}}{}^*_\omega-\overline{\mathrm{U}}{}^*_\omega\big], & \text{pour} \quad \omega=\omega^m_m,\ n>1.\end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, les classes $[\hat{\omega}]_i$ et $\{\omega\}_i^{\hat{}}$, $i=0$, 2, sont définies dans les complexes $\acute{K}_{(x)}$ et $\acute{K}_{(x^*)}$ respectivement et dépendent donc du système de coordonnées

$$(x)=(x_1, \ldots, x_{n+m})$$

choisi dans l'espace R^{n+m}. Pourtant on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 3. — *Dans le cas $\omega(m)<n$, $\omega\in\Omega_0(n, m)$, la classe $\{\omega\}_0^{\hat{}}$ est indépendante du système de coordonnées choisi dans R^{n+m}.*

Démonstration. Soit $(x')=(x'_1, \ldots, x'_{n+m})$ un autre système de coordonnées de l'espace R^{n+m}, par rapport auquel les cocycles et autres éléments définis seront distingués par un prime. Si (x) et (x') définissent la même orientation de R^{n+m}, la transformation orthogonale A telle que $A(x'_i)=x_i$, $i=1, \ldots, n+m$ est déformable dans la transformation identique en parcourant une famille de transformations orthogonales. On a ainsi

$$A^*\{\omega\}_0'^{\hat{}}=\{\omega\}_0'^{\hat{}}, \qquad \text{ou} \qquad \{\omega\}_0^{\hat{}}=\{\omega\}_0'^{\hat{}}$$

et le théorème est démontré.

Supposons au contraire que (x) et (x') définissent différentes orientations de R^{n+m}. Considérons un autre système de coordonnées $(x'')=(x''_1, \ldots, x''_{n+m})$ tel que

$$x''_i=x_i, \qquad i\neq 1\,; \qquad x''_1=-x_1,$$

et désignons les cocycles définis à partir de ce système par $\{\omega\}_0''^{\hat{}}$, etc. Les systèmes (x') et (x'') définissent alors la même orientation de R^{n+m} et par conséquent d'après le cas précédent on a

$$\{\omega\}_0'^{\hat{}}\sim\{\omega\}_0''^{\hat{}}. \tag{36}$$

Les systèmes (x'^*) et (x''^*) étant définis comme (x^*) (cf. 26)), et $\omega(m)$ étant $<n$, on voit facilement que $\overset{+}{X}{}^*_\omega=\overset{+}{X}{}''^*_\omega$, $\overline{X}{}^*_\omega=\overline{X}{}''^*_\omega$ et aussi, en tenant compte de l'orientation,

$$\overset{+}{U}{}^*_\omega=\overset{+}{U}{}''^*_\omega, \qquad \overline{U}{}^*_\omega=\overline{U}{}''^*_\omega, \qquad (\omega(m)<n),$$

d'où

$$\{\omega\}_0^{\hat{}}=\{\omega\}_0''^{\hat{}}.$$

En combinant avec (36), on obtient la proposition dans le présent cas.

Remarque 1. — La même méthode permet de démontrer que les classes $\{\omega\}_0^{\wedge}$ pour $\omega = \omega^m_{2k,\,2k}$, $\bar{\omega}^m_{2k,\,2k}$, $(\omega \in \Omega_0(n,\ m))$, même dans le cas $n = \omega(m)$, sont indépendantes du système de coordonnées choisi dans l'espace R^{n+m}. Pour les classes $\{\omega\}_2^{\wedge}$ l'indépendance est évidente.

Remarque 2. — On n'a pas encore déterminé une base même additive pour l'anneau de cohomologie de $\hat{R}_{n,m}$ aux coefficients entiers. Nous renvoyons le lecteur aux mémoires originaux de Pontrjagin concernant les résultats importants pour l'étude des structures fibrées sphériques que nous n'utiliserons pas dans notre travail.

§ 4. Les variétés grassmanniennes $R_{n,m}$.

Soit $R_{n,m}$ la variété grassmannienne définie dans l'espace numérique R^{n+m} de dimension $n+m$. Prenons un système de coordonnées $(x) = (x_1,\ \dots,\ x_{n+m})$ et supposons que les notations R^k, X_ω, $\bar{i}(\omega)$, $\bar{j}(\omega)$ ont le même sens que dans § 3 (cf. (1), (3), (3)' et (4) de § 3). L'ensemble N_ω des éléments X de $R_{n,m}$ ayant une projection orthogonale non-dégénérée sur X_ω est un voisinage de X_ω dans $R_{n,m}$ dont les éléments sont définis par les équations (5) de § 3. Le système des nombres ξ_{ji}, ((6) § 3) forme un système de *coordonnées normales* de N_ω qui, dans l'ordre considéré, détermine aussi son *orientation normale*. Le sous-ensemble U_ω de N_ω dont les éléments satisfont aux équations (2) § 3, est aussi une cellule ouverte de dimension $d(\omega)$ représentée par les équations (7) § 3, avec les coordonnées normales de N_ω. Nous orientons U_ω par ses coordonnées ξ_{ji} non-nulles rangées dans le même ordre que dans (6) § 3. L'élément X_ω, correspondant aux coordonnées $\xi_{ji} = 0$ dans U_ω, est appelé *élément central* de U_ω ou N_ω. L'ensemble des cellules ouvertes U_ω, $\omega \in \Omega\ (n,\ m)$, forme une subdivision cellulaire, $K_{(x)}$, de $R_{n,m}$ appelée la *subdivision canonique* par rapport au système de coordonnées (x).

La variété $\hat{R}_{n,m}$ définie dans R^{n+m} est évidemment un revêtement à deux feuillets de la variété $R_{n,m}$. De plus, le complexe $\hat{K}_{(x)}$ qui forme la subdivision cellulaire de $\hat{R}_{n,m}$, canonique par rapport au système de coordonnées (x), est aussi un complexe de revêtement du complexe $K_{(x)}$; la projection de $\acute{K}_{(x)}$ sur $K_{(x)}$ sera désignée par φ. Grâce aux orientations que nous avons adoptées pour les cellules U_ω, $\dot{U}_\omega$ et $\overline{U}_\omega$ on a algébriquement :

$$(1) \qquad \varphi\dot{U}_\omega = \varphi\overline{U}_\omega = U_\omega.$$

Puisque $\varphi\partial = \partial\varphi$, on déduit des formules (8) § 3 les formules correspondantes de $K_{(x)}$:

$$(2) \qquad \partial U_\omega = \sum \varepsilon_{\omega,i}(1 + (-1)^{\omega(i)+i+m})U_{\omega_{(i)}},$$
$$(\varepsilon_{\omega,i} = +1 \text{ ou } -1)$$

où la sommation s'étend aux indices i pour lesquels $\omega_{(i)} \in \Omega(n, m)$.
On en déduit de plus :

$$(2)' \qquad \delta U_\omega = \sum \eta_{\omega,i}(1 + (-1)^{\omega(i)+i+m+1})U_{\omega^{(i)}},$$

où $\omega^{(i)} \in \Omega(n, m)$, $\eta_{\omega,i} = +1$ ou -1.
Il résulte de ces formules que la chaîne U_ω est un cycle ainsi qu'un cocycle mod 2 pour chaque $\omega \in \Omega(n, m)$. C'est un cycle (resp. cocycle) entier si et seulement si $\omega \in \Omega_1(n, m)$ (resp. $\omega \in \Omega_1^*(n, m)$). Nous désignerons par $[\omega]_2$ (resp. $\{\omega\}_2$) le cycle (resp. cocycle) mod 2 représenté par la chaîne U_ω, $\omega \in \Omega(n, m)$, et sa classe par $[\omega]_2$ (resp. $\{\omega\}_2$). Pour $\omega \in \Omega_1(n, m)$ ou $\omega \in \Omega_1^*(n, m)$ nous poserons respectivement (cf. (1), § 3 et Proposition 2) :

$$(3) \qquad \begin{cases} [\omega]_0 = U_\omega, & \omega \in \Omega_1(n, m); \\ \{\omega\}_0 = (-1)^{\lambda(\omega)} \cdot U_\omega, & \omega \in \Omega_1^*(n, m). \end{cases}$$

Nous désignerons leurs classes entières correspondantes par $[\omega]_0$ et $\{\omega\}_0$ respectivement.

Comme dans la proposition 2, § 3, on peut démontrer que les classes $\{\omega\}_2$, $\omega \in \Omega(n, m)$, et $\{\omega\}_0$, $\omega \in \Omega(n, m)$, $\omega(m) < n$, sont indépendantes du choix du système de coordonnées dans R^{n+m}. On peut remarquer, comme à la fin du § 3, qu'il en est ainsi pour les classes $\{\omega\}_0$, où $\omega^m_{2k,2k}$ ou $\overline{\omega}^m_{2k,2k}$, même dans le cas $n = \omega(m)$.

Dans le cas $m + n \equiv 0$ mod. 2 la variété $R_{n,m}$ est orientable et par dualité on peut faire correspondre la classe $\{\omega^*\}_0$ à la classe $[\omega]_0$. D'une façon plus précise, on définit d'abord les subdivisions cellulaires duales $K_{(x)}$ et $K_{(x^*)}$ de $R_{n,m}$ canoniques par rapport aux systèmes de coordonnées (x) et (x^*) dans R^{n+m} liées par les relations (26) § 3. L'opérateur de dualité D : $K_{(x)} \to K_{(x^*)}$ qui applique une cellule de $K_{(x)}$ sur la cellule duale de $K_{(x^*)}$ est alors donné par

$$(4) \qquad D(U_\omega) = (-1)^{\lambda(\omega^*)} \cdot U^*_{\omega^*} \qquad \text{(cf. Proposition 2, § 3)},$$

en considérant $R_{n,m}$ orientée comme le voisinage N_{ω_0}, où $\omega_0 = \omega_0^{m^*}$. Les classes $[\omega]_0$ et $\{\omega^*\}_0$, définies respectivement dans $K_{(x)}$ et $K_{(x^*)}$, sont donc duales l'une de l'autre. Dans le cas mod 2, les classes $[\omega]_2$ et $\{\omega^*\}_2$ sont toujours duales, que $n+m$ soit pair ou impair.

L'anneau de cohomologie mod 2, $H^*(R_{n,m})$, de la variété $R_{n,m}$ a été déterminé par S. Chern. En particulier on a la proposition suivante :

Proposition 4. — *Les classes $\{\bar{\omega}_k^m\}_2$, où $k = 1, \dots, n$, engendrent l'anneau $H^*(R_{n,m})$. Pour la multiplication on a en particulier :*

$$(5) \qquad \{\omega\}_2 \cup \{\bar{\omega}_h^m\}_2 = \sum_{\omega'} \{\omega'\}_2,$$

où la sommation s'étend à toutes les fonctions $\omega' \in \Omega(n, m)$ telles que

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega(i) \leqslant \omega'(i) \leqslant \omega(i+1), \quad i = 1, \dots, m; \quad (\omega(m+1) = n)), \\ d(\omega') = d(\omega) + h. \end{cases}$$

§ 5. Les variétés grassmanniennes $C_{n,m}$ et $Q_{n,m}$.

Considérons maintenant la variété $C_{n,m}$ ($n = 2n'$, $m = 2m'$) définie dans $C^{n'+m'}$ de dimension complexe $n'+m'$. Prenons le système de coordonnées canoniques $(z) = (z_1, \dots, z_{n'+m'})$. Soit C^k ($k = 1, \dots, n'+m'$) l'espace complexe de dimension complexe k défini par $z_{k+1} = \dots = z_{n'+m'} = 0$. Pour chaque fonction $\omega \in \Omega(n', m')$, l'ensemble $\overline{W}_\omega$ des sous-espaces complexes Z de dimension complexe m' tels que

$$(1) \qquad \dim(Z \cap C^{\omega(i)+i}) \geqslant 2i, \qquad i = 1, \dots, m',$$

est une pseudo-variété de dimension $2d(\omega)$ qui est l'adhérence d'une cellule ouverte W_ω dont les éléments sont définis par les équations

$$z_{j'} = \sum_{i=0}^{m'} \zeta_{ji} z_{\bar{i}}, \qquad j = 1, \dots, n';$$

$$\zeta_{ji} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > \omega(i), \; i = 1, \dots, m',$$

où ζ_{ji} sont des nombres complexes et $\bar{i}$, $\bar{j}$ parcourent respectivement les suites

$$\{\bar{i}(\omega)\} = \{\omega(1)+1, \ \dots, \ \omega(m')+m'\},$$
$$\{\bar{j}(\omega)\} = \{1, \ \dots, \ \omega(1); \ \omega(1)+2, \ \dots, \ \omega(2)+1; \ \dots, \ \omega(m')+m'+1, \ \dots, \ n'+m'\}.$$

Puisque les nombres ζ_{ji}, $j \leq \omega(i)$, $i=1, \dots, m'$, qu'on considère comme formant un système de coordonnées dans la cellule W_ω, sont complexes, on peut attacher une orientation naturelle à chaque cellule W_ω. *L'élément central* est défini comme dans le cas des variétés $R_{n,m}$ ou $\hat{R}_{n,m}$.

L'ensemble des cellules W_ω, où $\omega \in \Omega(n', m')$, forme une subdivision cellulaire *canonique* de $C_{n,m}$. La chaîne W_ω représente un cycle entier ainsi qu'un cocycle entier que nous désignerons par $[\omega]_0^c$ et $\{\omega\}_0^c$ respectivement. Leurs classes seront désignées respectivement par $[\omega]_0^c$ et $\{\omega\}_0^c$; elles sont indépendantes du système de coordonnées choisi dans l'espace $C^{n'+m'}$. Ces classes sont linéairement indépendantes et forment une base du groupe d'homologie et de cohomologie respectivement. Pour déterminer une classe de cohomologie de dimension s, il suffit de connaître sa valeur sur chaque classe d'homologie $[\omega]_0^c$, $d(\omega)=2s$, qui est représentée géométriquement par la pseudo-variété $\overline{W}_\omega$ et qui est duale à la classe $\{\omega\}_0^c$. L'anneau de cohomologie entier $H^*(C_{n,m})$ de $C_{n,m}$ est engendré par les classes $\{\bar{\omega}_k^{m'}\}_0^c$, où $k=0, 1, \dots, n'$, et satisfait aux formules analogues à (5) et (6) de § 4, en remplaçant partout m par m' et n par n'.

La généralisation à la variété $Q_{n,m}$ ($n=4n''$, $m=4m''$) est immédiate. A chaque fonction $\omega \in \Omega(n'', m'')$ correspond une classe entière d'homologie $[\omega]_0^q$ et une classe entière de cohomologie $\{\omega\}_0^q$ de dimension $4d(\omega)$, qui sont duales. Les classes $\{\omega\}_0^q$, $\omega \in \Omega(n'', m'')$, forment une base du groupe de cohomologie et les classes $\{\bar{\omega}_k^{m''}\}_0^q$, $k=0, 1, \dots, n''$, engendrent l'anneau de cohomologie de $Q_{n,m}$.

§ 6. Relations entre deux variétés grassmanniennes duales.

Considérons les deux variétés grassmanniennes, dites *duales*, $\hat{R}_{n,m}$ et $\hat{R}_{m,n}$ définies dans le même espace numérique R^{n+m} de dimension $n+m$. Prenons une orientation fixe de R^{n+m} et définissons une application

$$\mathfrak{d} : \hat{R}_{n,m} \to \hat{R}_{m,n}$$

telle que, pour chaque élément $X \in \hat{R}_{n,m}$, $\mathfrak{d}(X)$ soit l'élément de $\hat{R}_{m,n}$ complètement orthogonal à X et que $I_0(\mathfrak{d}X, X)$ à l'origine de R^{n+m}, calculé dans cet espace orienté, soit égal à $+1$. Pour étudier le type d'homologie de cette application, prenons deux systèmes de coordonnées $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ et $(x') = (x'_1, \ldots, x'_{n+m})$ tels que

$$(1) \qquad x'_i = x_{n+m+1-i}, \qquad i = 1, \ldots, n+m.$$

Soient (e_i) et (e'_i) les bases correspondantes de l'espace R^{n+m}. Définissons les subdivisions cellulaires canoniques $\hat{K}_{(x)}$ et $\hat{K}_{(x')}$ par rapport à (x) pour $\hat{R}_{n,m}$ et par rapport à (x') pour $\hat{R}_{m,n}$. Les classes, cycles, etc., définis dans $\hat{R}_{m,n}$ par rapport à (x') seront distingués de celles de $\hat{R}_{n,m}$ par rapport à (x) en ajoutant un prime.

A chaque fonction $\omega \in \Omega(n, m)$ nous associons une fonction

$$\mathfrak{d}\omega \in \Omega(m, n)$$

de la manière suivante : Soient $i_0 = i_0(\omega), \ldots, i_s = i_s(\omega)$, où $s = s(\omega)$, l'ensemble des points sautants de ω (cf. § 1). La suite $\omega(1), \omega(2), \ldots, \omega(m)$ est alors de la forme :

$$\underbrace{0, \ldots, 0,}_{i_0} \quad \underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_1,}_{i_1 - i_0} \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \underbrace{\beta_s, \ldots, \beta_s,}_{i_s - i_{s-1}} \quad \underbrace{n, \ldots n,}_{m - i_s}$$

où $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_s < n$ (on peut avoir $i_0 = 0$ ou $i_s = m$ ou tous les deux). Par définition la suite $\mathfrak{d}\omega(1), \ldots, \mathfrak{d}\omega(n)$ pour la fonction associée $\mathfrak{d}\omega$ est de la forme :

$$\underbrace{m - i_s, \ldots, m - i_s,}_{n - \beta_s} \quad \underbrace{m - i_{s-1}, \ldots, m - i_{s-1},}_{\beta_s - \beta_{s-1}} \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \underbrace{m - i_1, \ldots, m - i_1,}_{\beta_2 - \beta_1} \quad \underbrace{m - i_0, \ldots, m - i_0.}_{\beta_1}$$

On peut vérifier que (cf. $(4)^*$, $(5)^*$ de § 1) :

(*a*) $\omega \in \Omega_0^*(n, m)$ resp. $\Omega_1^*(n, m)$ est équivalent à $\mathfrak{d}\omega \in \Omega_0^*(m, n)$ resp. $\Omega_1^*(m, n)$;

(*b*) En désignant les points sautants de $\mathfrak{d}\omega$ par

$$i'_0 = i_0(\mathfrak{d}\omega), \qquad i'_{s'} = i_{s'}(\mathfrak{d}\omega), \qquad \text{où} \qquad s' = s(\mathfrak{d}\omega),$$

on a $\mathfrak{d}\omega(i'_{s'}) + i'_{s'} + m \equiv \omega(i_s) + i_s + n \bmod 2$ pour $\omega \in \Omega_0^*(n, m)$;

(c) $\mathfrak{d}\mathfrak{d}\omega = \omega$;

(d) Pour $\omega = \omega_k^m$, on a $\mathfrak{d}\omega = \bar{\omega}_k^m$,
Pour $\omega = \bar{\omega}_k^m$, on a $\mathfrak{d}\omega = \omega_k^m$,
Pour $\omega = \omega_{2k,2k}^m$, on a $\mathfrak{d}\omega = \bar{\omega}_{2k,2k}^m$,
Pour $\omega = \bar{\omega}_{2k,2k}^m$, on a $\mathfrak{d}\omega = \omega_{2k,2k}^m$.

Un élément X dans une cellule $\ddot{\mathrm{U}}_\omega$ ou $\dot{\mathrm{U}}_\omega$, $\omega \in \Omega(n, m)$, du complexe $\hat{\mathrm{K}}_{(x)}$ est défini par les équations :

$$x_{\bar{j}} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} x_{\bar{i}}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\xi_{ji} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > \omega(i), \tag{3}$$

où $\bar{i}$ et $\bar{j}$ parcourent respectivement les systèmes d'indices suivants ;

$$\{\bar{i}(\omega)\} = \{\omega(1)+1,\ \omega(2)+2, \ldots, \omega(m)+m\}, \tag{4}$$

$$\{\bar{j}(\omega)\} = \{1, \ldots, \omega(1);\ \omega(1)+2, \ldots, \omega(2)+1;\ \ldots, \omega(m)+m+1, \ldots, n+m\}. \tag{5}$$

L'élément $\mathfrak{d}(\mathrm{X})$ de $\hat{\mathrm{R}}_{n,m}$ est évidemment défini par les équations :

$$x_{\bar{i}} = -\sum_{j=1}^{n} \xi_{ji} x_{\bar{j}}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

où les ξ_{ji} satisfont à (3).

Dans le système de coordonnées (x'), les équations (6) deviennent (cf. (1)) :

$$x'_{\bar{j}'} = -\sum_{i'=1}^{n} \xi'_{j'i'} x'_{\bar{i}'}, \qquad j' = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

où

$$\begin{cases} j' = m + 1 - i, \qquad i' = n + 1 - j, \\ \xi'_{j'i'} = \xi_{n+1-i',\ m+1-j'}, \\ \xi'_{j'i'} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j' > \mathfrak{d}\omega(i'), \end{cases} \tag{8}$$

$\bar{i}'$, $\bar{j}'$ parcourant respectivement les systèmes d'indices :

$$\{\bar{i}'\} = \{\mathfrak{d}\omega(1)+1, \ldots, \qquad \mathfrak{d}\omega(n)+n\},$$
$$\{\bar{j}'\} = \{1, \ldots, \mathfrak{d}\omega(1);\ \mathfrak{d}\omega(1)+2, \ldots, \mathfrak{d}\omega(2)+1,\ \ldots, \mathfrak{d}\omega(n)+n+1, \ldots, m+n\},$$

c'est-à-dire $\bar{i}'$ et $\bar{j}'$ parcourent respectivement les systèmes $\{\bar{i}(\mathfrak{d}\omega)\}$ et $\{\bar{j}(\mathfrak{d}\omega)\}$ correspondant à la fonction $\mathfrak{d}\omega \in \Omega(m, n)$. Il en résulte que $\mathfrak{d}$

est une application cellulaire du complexe $\hat{K}_{(x)}$ sur le complexe $\hat{K}_{(x')}$ qui applique $\overset{+}{U}_\omega$ (resp. $\overset{-}{U}_\omega$) sur $\overset{+}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}$ ou $\overset{-}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}$. Pour l'expliciter, nous observons que l'élément central $\overset{+}{X}_\omega$ de $\overset{+}{U}_\omega$ déterminé par la suite de vecteurs :

$$\{e_{\omega(1)+1}, \ldots, e_{\omega(m)+m}\},$$

est transformé par $\mathfrak{d}$ dans l'élément $\overset{+}{Y}$ de $\hat{R}_{m,n}$ déterminé par la suite de vecteurs

$$(9) \quad \{e_1, \ldots, e_{\omega(1)}, \quad e_{\omega(1)+2}, \ldots, e_{\omega(2)+1}, \ldots, e_{\omega(m)+m+1}, \ldots, e_{n+m}\}$$

ou dans l'élément $\overset{-}{Y}$ d'orientation opposée à $\overset{+}{Y}$ selon que $mn - d(\omega)$ est pair ou impair. La suite (9) est en effet la même que la suite

$$\{e'_{\mathfrak{d}\omega(n)+n}, \ldots, e'_{\mathfrak{d}\omega(1)+1}\}.$$

Par conséquent $\overset{+}{U}_\omega$ (resp. $\overset{-}{U}_\omega$) est appliqué sur $\overset{+}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}$ ou $\overset{-}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}$ (resp. $\overset{-}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}$ ou $\overset{+}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}$) selon que $mn - d(\omega) + \frac{1}{2} n(n-1) = \alpha(\omega)$ est pair ou impair. On a ainsi algébriquement :

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{d}\overset{+}{U}_\omega = (-1)^{\nu(\omega)} . \overset{+}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}, & \mathfrak{d}\overset{-}{U}_\omega = (-1)^{\nu(\omega)} . \overset{-}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}, \\ & \text{si } \alpha(\omega) \text{ est pair ;} \\ \mathfrak{d}\overset{+}{U}_\omega = (-1)^{\nu(\omega)} . \overset{-}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}, & \mathfrak{d}\overset{-}{U}_\omega = (-1)^{\nu(\omega)} . \overset{+}{U}_{\mathfrak{d}\omega}, \\ & \text{si } \alpha(\omega) \text{ est impair ;} \end{cases}$$

où $\nu(\omega)$ est un entier qui ne nous intéresse pas. En particulier, on a :

$$(11) \quad \nu(\omega^m_{2k,2k}) \equiv (-1)^k, \qquad \nu(\bar{\omega}^m_{2k,2k}) \equiv (-1)^k \quad \mod 2.$$

Par définition, on a (cf. (34) de § 3),

$$\{\mathfrak{d}\omega\}^\wedge_0 = (-1)^{\mu(\mathfrak{d}\omega)} . [\overset{+}{U}'_{\mathfrak{d}\omega} + (-1)^{\mathfrak{d}\omega(i'_s) + i'_s + m} . \overset{-}{U}'_{\mathfrak{d}\omega}],$$

pour $\mathfrak{d}\omega \in \Omega_0(m, n)$. Donc

$$\mathfrak{d}^*\{\mathfrak{d}\omega\}^\wedge_0 = \begin{cases} (-1)^{\mu(\mathfrak{d}\omega) + \nu(\omega)} . [\overset{+}{U}_\omega + (-1)^{\mathfrak{d}\omega(i'_s) + i'_s + m} . \overset{-}{U}_\omega], \\ \qquad \text{pour } \alpha(\omega) \text{ pair ;} \\ (-1)^{\mu(\mathfrak{d}\omega) + \nu(\omega)} . [\overset{-}{U}_\omega + (-1)^{\mathfrak{d}\omega(i'_s) + i'_s + m} . \overset{+}{U}_\omega], \\ \qquad \text{pour } \alpha(\omega) \text{ impair.} \end{cases}$$

D'après (*b*) et (34) de § 3 cette formule devient

$$(12) \quad \begin{array}{ll} \mathfrak{d}^*\{\mathfrak{d}\omega\}^\wedge_0 = (-1)^{\tau(\omega)} . \{\omega\}^\wedge_0, & \text{ou} \\ \mathfrak{d}^*\{\mathfrak{d}\omega\}^\wedge_0 = (-1)^{\tau(\omega)} . \{\omega\}^\wedge_0, & \end{array}$$

où $\tau(\omega)$ est un entier qui ne nous intéresse pas.

En particulier, on a

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}^*\{\omega^n_{2k,2k}\}^{\wedge}_0 = (-1)^k\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}^{\wedge}_0, \\ \mathfrak{d}^*\{\bar{\omega}^n_{2k,2k}\}^{\wedge}_0 = (-1)^k\{\omega^m_{2k,2k}\}^{\wedge}_0. \end{cases}$$

Nous remarquons que les classes intervenant dans ces dernières formules sont définies d'une façon invariante dans les variétés $\hat{R}_{m,n}$ et $\hat{R}_{n,m}$.

Pour les classes mod 2 on a tout simplement :

$$(14)\qquad \mathfrak{d}^*\{\mathfrak{d}\omega\}^{\wedge}_2 = \{\omega\}^{\wedge}_2, \qquad \omega\in\Omega(n, m), \qquad \mathfrak{d}\omega\in\Omega(m, n).$$

En particulier,

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}^*\{\omega^n_k\}^{\wedge}_2 = \{\bar{\omega}^n_k\}^{\wedge}_2, \\ \mathfrak{d}^*\{\bar{\omega}^n_k\}^{\wedge}_2 = \{\omega^n_k\}^{\wedge}_2. \end{cases}$$

De la même façon on peut aussi définir les applications canoniques

$$\mathfrak{d} : G_{n,m} \to G_{m,n},$$

où $G = R$, C, ou Q et déterminer son type d'homologie. Par exemple, les formules (15) deviennent

$$(15')\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}^*\{\omega^{n'}_k\}_0 = \{\bar{\omega}^{m'}_k\}^c_0, & \mathfrak{d}^*\{\bar{\omega}^{n'}_k\}_0 = \{\omega^{m'}_k\}^c_0, \quad \text{pour} \quad G = C; \\ \mathfrak{d}^*\{\omega^n_k\}_2 = \{\bar{\omega}^m_k\}_2, & \mathfrak{d}^*\{\bar{\omega}^n_k\}_2 = \{\omega^m_k\}_2, \quad \text{pour} \quad G = R. \end{cases}$$

Les formules ainsi obtenues montrent une certaine relation de dualité entre les classes de cohomologie des variétés grassmanniennes duales. Nous les appliquerons en particulier à l'anneau de cohomologie des variétés grassmanniennes. En effet, la proposition 4, appliquée à la variété $R_{m,n}$, montre que l'anneau de cohomologie mod 2 $H^*(R_{m,n})$ est engendré par les classes $\{\bar{\omega}^n_k\}_2$, $k = 1, \ldots, m$. En appliquant l'opération $\mathfrak{d}^*$ qui est un isomorphisme de $H^*(R_{m,n})$ sur $H^*(R_{n,m})$, on voit que l'anneau $H^*(R_{n,m})$, d'après (15)', est engendré par les classes

$$\mathfrak{d}^*\{\bar{\omega}^n_k\}_2 = \{\omega^m_k\}_2, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

De même, l'anneau de cohomologie à coefficients entiers de la variété $C_{n,m}$ est non seulement engendré par les classes $\{\bar{\omega}^{m'}_k\}^c_0$, $k = l, \ldots, n'$ mais aussi par les classes $\{\omega^{m'}_k\}^c_0$, $k = l, \ldots, m'$.

On peut aussi en déduire des formules analogues à (5), (6) de § 4 pour les produits avec les classes $\{\omega^m_k\}_2$. Nous nous contentons d'établir une formule particulière dont nous aurons besoin dans le chap. 2. D'après (5) et (6) de § 4, en appliquant à la variété $C_{m,n}$ $(m = 2m', \quad n = 2n')$, on a pour $h_1 \leqslant h_2, \quad h = h_1 + h_2,$

$$\{\bar{\omega}^{n'}_{h_1}\}^c_0 \smile \{\bar{\omega}^{n'}_{h_2}\}^c_0 = \sum_{i=0}^{h_1} \{\bar{\omega}^{n'}_{i,h-i}\}^c_0, \tag{16}$$

où $\bar{\omega}^{n'}_{i,h-i}$ est la fonction $\bar{\omega} \in \Omega(m', n')$ définie par

$$\bar{\omega}(1) = \ldots = \bar{\omega}(n'-2) = 0, \qquad \bar{\omega}(n'-1) = i, \qquad \bar{\omega}(n') = h - i.$$

En appliquant aux deux membres l'opération $\mathfrak{d}^*$, la formule (16) devient

$$\{\omega^{m'}_{h_1}\}^c_0 \smile \{\omega^{m'}_{h_2}\}^c_0 = \sum_{i=0}^{h_1} \{\omega^{m'}_{i,h-i}\}^c_0, \tag{17}$$

où $\omega^{m'}_{i,h-i}$ est la fonction $\omega \in \Omega(n'\, m')$ définie par

$$\begin{cases} \omega(1) = \ldots = \omega(m' - h + i) = 0, \\ \omega(m' - h + i + 1) = \ldots = \omega(m' - i) = 1, \\ \omega(m' - i + 1) = \ldots = \omega(m') = 2. \end{cases} \tag{18}$$

CHAPITRE II

LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

§ 1. Les structures fibrées sphériques.

Nous supposons connue la théorie générale des espaces fibrés et nous nous contentons d'expliquer quelques notations.

Soit E un espace fibré dont la base est B, la fibre type F, et le groupe structural G. Nous dirons alors qu'une *structure fibrée*, ou plus précisément une (F, G)-*structure*, a été définie sur la *base* B dans l'*espace fibré* E. Nous dirons aussi que E est l'espace fibré de cette structure. Nous écrirons $\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F}_2$ pour exprimer que les deux (F, G)-structures $\mathfrak{F}_i$ définies sur la même base sont *isomorphes*. Une application f d'un espace B′ dans la base B d'une (F, G)-structure $\mathfrak{F}$ *induit* une (F, G)-structure sur la base B′ que nous désignerons par $f^*\mathfrak{F}$. On aura $f^*\mathfrak{F} \cong g^*\mathfrak{F}$ si $f \simeq g$, c'est-à-dire f homotope à g, g étant une autre application de B′ dans B. Par conséquent la classe d'isomorphisme de $f^*\mathfrak{F}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f. La (F, G)-structure $\mathfrak{F}$ sur B est *p-universelle* si les classes d'isomorphisme des structures induites sur un complexe B′ quelconque de dimension $\leqslant p$ sont en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie des applications de B′ dans B. Soit G un sous-groupe de G′, où G′ est aussi un groupe d'automorphismes de F, à une (F, G)-structure $\mathfrak{F}$ est associée canoniquement une certaine (F, G′)-structure $\mathfrak{F}'$. $\mathfrak{F}$ est appelée une *structure subordonnée* de $\mathfrak{F}'$ et nous écrirons $\mathfrak{F} \prec \mathfrak{F}'$.

Dans le présent travail nous ne considérons que les structures dont la fibre type F est une sphère S_{m-1} de dimension $m-1$, considérée comme la sphère unité de l'espace euclidien R^m de dimension m. La structure sera appelée alors une *structure fibrée* *sphérique*. Nous supposons que le groupe structural est l'un des groupes suivants :

(*a*) Le groupe orthogonal O_m de S_{m-1} ;

(*b*) Le groupe des rotations $O_m^{\wedge}$ de S_{m-1}, c'est-à-dire la composante connexe de l'unité dans O_m ;

(*c*) Le groupe unitaire O'_m de S_{m-1}, dans le cas $m = 2m'$, R^m étant identifié avec $C^{m'}$;

d) Le groupe quaternionien O''_m de S_{m-1}, dans le cas $m = 4m''$, R^m étant identifié avec $Q^{m''}$.

Nous appellerons une telle structure (*a*) *une* O_m*-structure*, (*b*) *une* $O_m^{\wedge}$*-structure*, (*c*) *une* O'_m*-structure* et (*d*) *une* O''_m*-structure* dans les cas correspondants.

Puisque $O_m^{\wedge}$ est un sous-groupe de O_m, chaque $O_m^{\wedge}$-structure $\mathfrak{F}$ est une structure subordonnée d'une O_m-structure $\mathfrak{F}'$. Nous écrirons $\mathfrak{F}' = \varphi\mathfrak{F}$. De même chaque O'_m-structure (resp. O''_m-structure) $\mathfrak{F}$ est une structure subordonnée d'une $O_m^{\wedge}$-structure (resp. O'_m-structure) que nous désignerons par $\varphi'\mathfrak{F}$, (resp. $\varphi''\mathfrak{F}$), en supposant que $m = 2m'$ (resp. $m = 4m''$). Notre problème est alors le suivant :

Étant donnée une O_m-structure, une $O_m^{\wedge}$-structure, ou une O'_m-structure $\mathfrak{F}'$, existe-t-il respectivement une $O_m^{\wedge}$-structure, une O'_m-structure ou une O''_m-structure $\mathfrak{F}$ tel que

$$\mathfrak{F} \prec \mathfrak{F}',$$

c'est-à-dire $\mathfrak{F}' \cong \varphi\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}' \cong \varphi'\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{F}' \cong \varphi''\mathfrak{F}$?

Nous trouverons des conditions nécessaires pour qu'une telle structure subordonnée existe, et dans quelques cas particuliers des conditions nécessaires et suffisantes. Toutes les conditions ainsi obtenues sont exprimées en termes de *classes caractéristiques* d'une structure fibrée sphérique que nous allons définir dans la section suivante.

§ 2. Les classes caractéristiques.

Étant donnée la variété $R_{n,m}$, l'espace des couples (x, X), où $X \in R_{n,m}$ et x élément de la sphère unité dans X, est un espace fibré de base $R_{n,m}$ dont la fibre sur X est la sphère unité dans X. Sa structure fibrée est une O_m-structure que nous désignerons par $\mathfrak{R}_{n,m}$. De même nous désignerons par $\hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$, $\mathfrak{C}_{n,m}$ et $\mathfrak{Q}_{n,m}$ la

$\acute{O}_m$-structure, la O'_m-structure et la O''_m-structure définies d'une façon analogue sur les variétés grassmanniennes $\hat{R}_{n,m}$, $C_{n,m}$ et $Q_{n,m}$. L'importance de ces structures particulières résulte du théorème fondamental suivant :

Théorème I (*théorème de Steenrod-Whitney-Pontrjagin-Chern*). — *La structure* $\mathfrak{R}_{n,m}$ (*resp.* $\acute{\mathfrak{R}}_{n,m}$, $\mathfrak{C}_{n,m}$ *ou* $\mathfrak{Q}_{n,m}$) *est une* O_m*-structure* (*resp.* $\acute{O}_m$*-structure,* O'_m*-structure ou* O''_m*-structure*) *p-universelle pourvu que* $n > p$.

D'une façon plus précise, supposons que B est un complexe de dimension $p < n$. Chaque $\acute{O}_m$-structure $\mathfrak{F}$ définie sur B est induite par une application f : $B \to R_{n,m}$, c'est-à-dire $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{R}_{n,m}$. Deux O_m-structures $\mathfrak{F}_i \cong f_i^*\mathfrak{R}_{n,m} (i = 1, 2)$ sont isomorphes si et seulement si $f_1 \simeq f_2$. Il en est de même dans les autres cas. Dans la suite nous ne considérons que des structures fibrées ayant pour une base un complexe.

Il résulte de ce théorème qu'une O_m-structure $\mathfrak{F}$ sur un complexe B de dimension p induite par l'application f de B dans $R_{n,m}$, $n > p$, admet comme *invariants* les images réciproques des classes de cohomologie de $R_{n,m}$.

Ces classes de cohomologie dans la base B seront appelées les *classes caractéristiques* de la O_m-structure considérée. Les *classes caractéristiques* se définissent de la même façon dans les autres cas.

Considérons une O_m-structure $\mathfrak{F}$ sur un complexe B de dimension p et supposons que $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{R}_{n,m}$ $(n > p)$. A chaque fonction $\omega \in \Omega(n, m)$ ou $\Omega_1^*(n, m)$ correspond une classe $\{\omega\}_2$ ou $\{\omega\}_0$ dans $R_{n,m}$ et ainsi une classe caractéristique $f^*\{\omega\}_2$ ou $f^*\{\omega_0\}$ que nous désignerons par $\{\omega\}_2(\mathfrak{F})$ ou $\{\omega\}_0(\mathfrak{F})$, appelée la *classe caractéristique* mod 2 ou entière *du type* ω de la structure $\mathfrak{F}$. Puisque K est de dimension p, il ne faut considérer que des fonctions ω pour lesquelles $d(\omega) \leqslant p < n$. D'après Prop. 3, § 3, Chap. I, les classes caractéristiques correspondantes sont alors bien définies. De plus, nous démontrerons que *pour* $\omega \in \Omega(n, m)$, *où* $d(\omega) \leqslant p$, *la classe caractéristique du type* ω *est indépendante de la valeur* $n > p$.

En effet, soient n, n' deux nombres quelconques tels que

$$n > n' > p.$$

Considérons l'espace numérique R^{n+m} de dimension $n+m$ et le système de coordonnées $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$. Soit $R^{n'+m}$ le sous-espace de dimension $n'+m$ défini par les équations :

$$x_{n'+m+1} = \cdots = x_{n+m} = 0.$$

Prenons $(x)' = (x_1, \ldots, x_{n'+m})$ comme système de coordonnées dans $R^{n'+m}$ et définissons les variétés $R_{n',m}$ et $R_{n,m}$ dans $R^{n'+m}$ et R^{n+m} avec subdivisions cellulaires canoniques $K'_{(x)'}$ et $K_{(x)}$ définies par rapport aux systèmes $(x)'$ et (x) respectivement. Nous distinguons les classes, etc. dans $R_{n',m}$ de celles dans $R_{n,m}$ en ajoutant un prime. La variété $R_{n',m}$ est évidemment une sous-variété de $R_{n,m}$. Soit θ l'application identique de $R_{n',m}$ dans $R_{n,m}$. On voit facilement que θ est une application cellulaire de $K_{(x)'}$ dans $K_{(x)}$ telle qu'on ait algébriquement,

$$\theta U'_\omega = U_\omega, \qquad \omega \in \Omega(n', m),$$

d'où ($i = 0$ ou 2)

$$(1) \qquad \theta^*\{\omega\}_i = \begin{cases} \{\omega\}'_i, & \omega \in \Omega(n', m); \\ 0, & \omega \notin \Omega(n', m). \end{cases}$$

Soit maintenant $\mathfrak{F}$ une structure sur B induite par f' :

$$B \to R_{n',m} \; (n' > p)$$

et soit $f = \theta f'$. Alors

$$\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{R}_{n,m} \cong f'^*\mathfrak{R}_{n',m},$$

d'où

$$f^*\{\omega\}_i = f'^*\theta^*\{\omega\}_i = f^*\{\omega\}'_i,$$

où $\omega \in \Omega(n, m)$, $d(\omega) \leq p$, et $i = 0$ ou 2. Cette équation montre l'indépendance des classes caractéristiques de la valeur de $n > p$.

Remarque I. — Il peut arriver que $\mathfrak{F}$ soit induite par une application $f : B \to R_{n',m}$ où n' est $\leq p$. Soit $n > p$. La démonstration ci-dessus montre que (cf. (1)) :

$$(1)' \quad \{\omega\}_i(\mathfrak{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \in \Omega(n, m) \quad \text{mais} \quad \omega \notin \Omega(n', m).$$

Remarque II. — En faisant la convention que la classe $\{\omega\}_i$ dans $R_{n,m}$ est nulle pour $\omega \notin \Omega(n, m)$, on peut encore définir les classes caractéristiques du type ω pour $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{R}_{n,m}$ par les équations :

$$\{\omega\}_2(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_2,$$
$$\{\omega\}_0(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_0, \qquad \omega = \omega^m_{2k,2k} \quad \text{ou} \quad \overline{\omega}^m_{2k,2k},$$

même dans le cas $n \leq p$.

La considération précédente s'applique aussi bien pour les $\mathrm{O}_m^{\wedge}$-structures.

De même, pour une O'_m-structure (resp. O''_m-structure)

$$\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{C}_{n,m},$$

où $n = 2n'$, $m = 2m'$ (resp. $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{D}_{n,m}$, $n = 4n''$, $m = 4m''$) on associe à chaque fonction $\omega \in \Omega(n', m')$ (resp. $\omega \in \Omega(n'', m'')$), une *classe caractéristique* $\{\omega\}_i^c(\mathfrak{F})$ (resp. $\{\omega\}_i^q(\mathfrak{F})$), $i = 0$ ou 2, du type ω dans la base B de dimension p définie par

$$(2)\qquad \begin{cases} \{\omega\}_i^c(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_i^c, & \{\omega\}_i^c \text{ classe de } \mathrm{C}_{n,m}, \\ (\text{resp. } \{\omega\}_i^q(\mathfrak{F}) = f^*\{\omega\}_i^q, & \{\omega\}_i^q \text{ classe de } \mathrm{Q}_{n,m}). \end{cases}$$

On remarque que n n'est pas forcément $> p$ dans cette définition si l'on fait la convention que la classe $\{\omega\}_i^c$ dans $\mathrm{C}_{n,m}$ ou $\{\omega\}_i^q$ dans $\mathrm{Q}_{n,m}$ est nulle pour $\omega \notin \Omega(n', m')$ ou $\omega \notin \Omega(n'', m'')$. Les classes caractéristiques définies dans (2) sont aussi indépendantes de n. Il en est de même pour les $\mathrm{O}_m^{\wedge}$-structures et les O_m-structures.

Soit K une subdivision cellulaire canonique et K* la subdivision duale canonique de $\mathrm{R}_{n,m}$. Soit f une application cellulaire de B dans K*. Alors

$$(3)\qquad < \{\omega\}_i(f^*\mathfrak{N}_{n,m}),\ \sigma > = \mathrm{I}_i([\omega]_i,\ f(\sigma)); \qquad i = 0 \text{ ou } 2,$$

où I_i est l'indice d'intersection dans la variété $\mathrm{R}_{n,m}$ orientée à partir du système de coordonnées (x), en supposant $n + m \equiv 0 \bmod 2$. La formule (3) donne une définition équivalente des classes caractéristiques. De même pour les autres structures.

Les classes caractéristiques correspondant aux fonctions définies par les équations (2) et (3) de § 1 chap. 1 sont particulièrement importantes. Soient $\mathfrak{N}$, $\hat{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ respectivement une O_m-structure, etc. Nous poserons simplement :

$$(4)\qquad \mathrm{X}_0^m(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\omega_m^m\}_0^{\wedge}(\hat{\mathfrak{N}}).$$

$$(5)\qquad \mathrm{W}_2^k(\mathfrak{N}) = \{\omega_k^m\}_2(\mathfrak{N}), \qquad \overline{\mathrm{W}}_2^k(\mathfrak{N}) = \{\overline{\omega}_k^m\}_2(\mathfrak{N}).$$

$$(6)\qquad \mathrm{P}_0^{4k}(\mathfrak{N}) = \{\omega_{2k,2k}^m\}_0(\mathfrak{N}), \qquad \overline{\mathrm{P}}_0^{4k}(\mathfrak{N}) = \{\overline{\omega}_{2k,2k}^m\}_0(\mathfrak{N}).$$

$$(5)^{\wedge}\qquad \mathrm{W}_2^k(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\omega_k^m\}_0^{\wedge}(\hat{\mathfrak{N}}), \qquad \overline{\mathrm{W}}_2^k(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\overline{\omega}_k^m\}_2^{\wedge}(\hat{\mathfrak{N}}).$$

$$(6)^{\wedge}\qquad \mathrm{P}_0^{4k}(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\omega_{2k,2k}^m\}_0^{\wedge}(\hat{\mathfrak{N}}), \qquad \overline{\mathrm{P}}_0^{4k}(\hat{\mathfrak{N}}) = \{\overline{\omega}_{2k,2k}^m\}_0^{\wedge}(\hat{\mathfrak{N}}).$$

$$(7)\qquad \mathrm{C}_0^{2k}(\mathfrak{C}) = \{\omega_k^{m'}\}_0^c(\mathfrak{C}), \qquad \overline{\mathrm{C}}_0^{2}(\mathfrak{C}) = \{\overline{\omega}_k^{m'}\}_0^c(\mathfrak{C}), \qquad m = 2m'.$$

$$(8)\qquad \mathrm{Q}_0^{4k}(\mathfrak{D}) = \{\omega_k^{m''}\}_0^q(\mathfrak{D}), \qquad \overline{\mathrm{Q}}_0^{4k}(\mathfrak{D}) = \{\overline{\omega}_k^{m''}\}_0^q(\mathfrak{D}), \qquad m = 4m''.$$

Introduisons aussi une indéterminée t et posons :

$$(5)' \quad \mathrm{W}_2(\mathfrak{S}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathrm{W}_2^k(\mathfrak{S}) t^k,$$

$$(6)' \quad \mathrm{P}_0(\mathfrak{S}, t) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \mathrm{P}_0^{4k}(\mathfrak{S}) t^{4k},$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R} \text{ ou } \hat{\mathfrak{R}}. \qquad \begin{array}{l} \overline{\mathrm{W}}_2(\mathfrak{S}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \overline{\mathrm{W}}_2^k(\mathfrak{S}) t^k. \\ \overline{\mathrm{P}}_0(\mathfrak{S}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \overline{\mathrm{P}}_0^{4k}(\mathfrak{S}) t^{k4}. \end{array}$$

$$(7)' \quad \mathrm{C}_0(\mathfrak{C}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathrm{C}_0^{2k}(\mathfrak{C}) t^{2k}, \qquad \overline{\mathrm{C}}_0(\mathfrak{C}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \overline{\mathrm{C}}_0^{2k}(\mathfrak{C}) t^{2k}.$$

$$(8)' \quad \mathrm{Q}_0(\mathfrak{Q}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathrm{Q}_0^{4k}(\mathfrak{Q}) t^{4k}, \qquad \overline{\mathrm{Q}}_0(\mathfrak{Q}, t) = \sum_{k \geqslant 0} \overline{\mathrm{Q}}_0^{4k}(\mathfrak{Q}) t^{4k}.$$

Nous appellerons alors :

$\mathrm{W}_2^k(\mathfrak{S})$ *les classes de Stiefel-Whitney,*

$\overline{\mathrm{W}}_2^k(\mathfrak{S})$ *les classes duales de Stiefel-Whitney,*

$\mathrm{P}_0^{4k}(\mathfrak{S})$ ou $\overline{\mathrm{P}}_0^{4k}(\mathfrak{S})$ *les classes ou les classes duales de Pontrjagin ;*

$\mathrm{C}_0^{2k}(\mathfrak{C})$ ou $\overline{\mathrm{C}}_0^{2k}(\mathfrak{C})$ *les classes ou les classes duales de Chern ;*

$\mathrm{W}_2(\mathfrak{S}, t)$ ou $\overline{\mathrm{W}}_2(\mathfrak{S}, t)$ *le polynome ou le polynome dual de Whitney ;*

$\mathrm{P}_0(\mathfrak{S}, t)$ ou $\overline{\mathrm{P}}_0(\mathfrak{S}, t)$ *le polynome ou le polynome dual de Pontrjagin ;*

$\mathrm{C}_0(\mathfrak{C}, t)$ ou $\overline{\mathrm{C}}_0(\mathfrak{C}, t)$ *le polynome ou le polynome dual de Chern ;*

$\mathrm{X}_0^m(\hat{\mathfrak{R}})$ *la classe d'Euler-Poincaré.*

En particulier, pour une structure *simple*, c'est-à-dire une structure qui correspond à la classe d'homotopie d'une application constante dans les variétés grassmanniennes correspondantes, les classes caractéristiques de dimension non nulle sont toutes nulles et par conséquent on a respectivement :

$$\mathrm{W}_2(\mathfrak{S}, t) = \overline{\mathrm{W}}_2(\mathfrak{S}, t) = 1 ;$$
$$\mathrm{P}_0(\mathfrak{S}, t) = \overline{\mathrm{P}}_0(\mathfrak{S}, t) = 1.$$
$$\mathrm{C}_0(\mathfrak{C}, t) = \overline{\mathrm{C}}_0(\mathfrak{C}, t) = 1 ;$$
$$\mathrm{X}_0^m(\hat{\mathfrak{R}}) = 0.$$

Si g est une application d'un complexe K′ dans un autre sur lequel est définie une G-structure $\mathfrak{S}$ induite par une application f de K dans les variétés grassmanniennes $\mathrm{G}_{n,m}$ correspondantes, la structure $g^*\mathfrak{S}$ est isomorphe à $(fg)^*\mathfrak{G}_{n,m}$ et par conséquent on a

$$\mathrm{W}_2(g^*\mathfrak{S}, t) = g^*\mathrm{W}_2(\mathfrak{S}, t), \text{ etc.}$$
$$(\mathrm{G} = \mathrm{O},\ \mathrm{O}^{\wedge},\ \mathrm{O}',\ \mathrm{O}''; \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{R},\ \hat{\mathfrak{R}},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{Q}).$$

Soit maintenant ρ l'application de la variété $\hat{\mathrm{R}}_{n,m}$ définie dans l'espace numérique R^{n+m} sur elle-même telle que pour chaque élément $\mathrm{X} \in \hat{\mathrm{R}}_{n,m}$, $\rho(\mathrm{X})$ soit le même élément, muni de l'orientation opposée. A chaque $\mathrm{O}_m^{\wedge}$-structure $\mathfrak{S}$ définie sur une base B induite par une application $f\colon \mathrm{B} \to \hat{\mathrm{R}}_{n,m}$, c'est-à-dire $\mathfrak{S} \cong f^*\hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$, on peut associer une autre $\mathrm{O}_m^{\wedge}$-structure sur la même base B, à savoir $(\rho f)^*\hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$. Cette structure est en effet canoniquement liée à la structure donnée $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire elle est définie à un isomorphisme près et est indépendante de la valeur de n suffisamment grande. Nous la désignerons par $-\mathfrak{S}$. On a évidemment $-(-\mathfrak{S}) \cong \mathfrak{S}$. Pour déterminer les relations entre les classes caractéristiques de ces deux structures, prenons un système de coordonnées (x) dans R^{n+m} par rapport auquel nous définissons la subdivision canonique de la variété $\hat{\mathrm{R}}_{n,m}$. On voit alors que ρ est une application cellulaire telle que, algébriquement, on ait

$$\rho^*\overset{+}{\mathrm{U}}_\omega = \overline{\mathrm{U}}_\omega, \qquad \rho^*\overline{\mathrm{U}}_\omega = \overset{+}{\mathrm{U}}_\omega,$$

d'où, d'après (34) de § 3 chap. I,

$$\begin{aligned} &\rho^*\{\omega\}_0^{\wedge} = (-1)^{\omega(i_s)+i_s+m}\{\omega\}_0^{\wedge}, \qquad \omega \in \Omega_0^*(n, m), \\ &\rho^*\{\omega\}_2^{\wedge} = \{\omega\}_2^{\wedge}, \qquad \omega \in \Omega(n, m). \end{aligned}$$

Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 2 (*Pontrjagin*) — *Pour deux $\mathrm{O}_m^{\wedge}$-structure $\mathfrak{S}$ et $-\mathfrak{S}$ définies sur la base* B *de dimension p on a*

$$\{\omega\}_0^{\wedge}(\mathfrak{S}) = (-1)^{\omega(i_s)+i_s+m}\{\omega\}_0^{\wedge}(-\mathfrak{S}),$$

où $\qquad \omega \in \Omega_0^*(n, m), \qquad s = s(\omega), \qquad i_s = i_s(\omega), \qquad n > p;$

$$\{\omega\}_2^{\wedge}(\mathfrak{S}) = \{\omega\}_2^{\wedge}(-\mathfrak{S}), \qquad \omega \in \Omega'(n, m).$$

En particulier, on a pour les classes de Pontrjagin et la classe d'Euler-Poincaré,

$$\mathrm{P}_0^{4k}(\mathfrak{S}) = \mathrm{P}_0^{4k}(-\mathfrak{S}), \qquad \overline{\mathrm{P}}_0^{4k}(\mathfrak{S}) = \overline{\mathrm{P}}_0^{4k}(-\mathfrak{S})$$

et $$\mathrm{X}_0^m(\mathfrak{S}) = -\mathrm{X}_0^m(-\mathfrak{S}).$$

De la même façon on peut associer canoniquement à chaque O'_m-structure $\mathfrak{S}$ une autre O'_m-structure sur la même base que nous désignerons par $\mathfrak{S}$ de la manière suivante : soit $\mathfrak{C}_{n,m}$ la variété définie dans l'espace unitaire $C^{n'+m'}$ de dimension complexe

$$n'+m' (n=2n',\ m=2m').$$

Prenons un système de coordonnées unitaires (z) quelconque dans l'espace $C^{n'+m'}$. Un élément Z de la variété $\mathfrak{C}_{n,m}$ est alors défini par un système d'équations linéaires, soit : $\sum_{j=1}^{n+m} \xi_{ij} z_j = 0$, $i=1, \ldots, s$. Le système des équations $\sum_{j=1}^{n+m} \bar{\xi}_{ij} z_j = 0$, $i=1, \ldots, s$ ($\bar{\xi}_{ij}$ conjugués complexes de ξ_{ij}) définit alors un élément de $\mathfrak{C}_{n,m}$ que nous désignerons par $\gamma(Z)$. Si la structure $\mathfrak{S}$ sur la base B est induite par l'application $f : B \rightarrow \mathfrak{C}_{n,m}$, la structure $\gamma\mathfrak{S}$ est alors celle qui est induite par l'application $\gamma f : B \rightarrow \mathfrak{C}_{n,m}$. On voit que $\gamma\mathfrak{S}$ ne dépend que de la structure $\mathfrak{S}$ à un isomorphisme près.

Définissons la subdivision cellulaire canonique de la variété $\mathfrak{C}_{n,m}$ par rapport au système de coordonnées (z) ; on voit que γ est une application cellulaire. En effet, un élément Z dans le voisinage W_ω d'équations

$$\begin{cases} z_j = \sum_i \xi_{ji} z_i, \\ \xi_{ji} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > \omega(i), \end{cases}$$

est appliquée par l'application γ sur l'élément $\gamma(Z)$ d'équations

$$\begin{cases} z_j = \sum_i \bar{\xi}_{ji} z_i, \\ \bar{\xi}_{ji} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > \omega(i). \end{cases}$$

L'ensemble $\gamma(W_\omega)$ coïncide donc avec W_ω et algébriquement on aura

$$\gamma^* W_\omega = (-1)^{d(\omega)} W_\omega.$$

On en déduit ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME 2'. — *Pour deux* O'_m*-structures* $\mathfrak{S}$ *et* $\gamma\mathfrak{S}$ *sur la base de dimension* p *on a* $\{\omega\}_0^c(\mathfrak{S}) = (-1)^{d(\omega)} \{\omega\}_0^c(\gamma\mathfrak{S})$, $\omega \in \Omega(n', m')$. *En particulier on a pour les classes de Chern :*

$$\mathfrak{C}_0^{2k}(\mathfrak{S}) = (-1)^k \overline{\mathfrak{C}}_0^{2k}(\gamma\mathfrak{S}), \qquad \overline{\mathfrak{C}}_0^{2k}(\mathfrak{S}) = (-1)^k \mathfrak{C}_0^{2k}(\gamma\mathfrak{S}).$$

Soient $\hat{R}_{n,m}$ et $\hat{R}_{m,n}$ les deux variétés grassmanniennes définies dans le même espace numérique R^{n+m} de dimension $n+m$, et $\mathfrak{d}$ l'application étudiée dans § 6 chap. I, en prenant une orientation fixe de l'espace R^{n+m}. Pour une O'_m-structure $\mathfrak{S}$ sur B induite par f :

$B \to \dot{R}_{n,m}$, on a une $\dot{O}_m$-structure $\overline{\mathfrak{S}}$ sur B induite par $\mathfrak{d}f : B \to \dot{R}_{m,n}$. Deux structures qui se correspondent de cette manière seront appelées *duales* l'une de l'autre. De la même façon on définit les O-structures *duales* pour $O = O_m$, O'_m ou O''_m. D'après § 6, chap. I, on a :

THÉORÈME 3 (*théorème de dualité*). — *Pour une G-structure* $\mathfrak{S}$ *et une G-structure* $\overline{\mathfrak{S}}$($G = O$, $\dot{O}$, O' *ou* O'') *duales l'une de l'autre on a*

$$\left.\begin{array}{ll} W_2(\mathfrak{S}, t) = \overline{W}_2(\overline{\mathfrak{S}}, t), & \overline{W}_2(\mathfrak{S}, t) = W_2(\overline{\mathfrak{S}}, t), \\ P_0(\mathfrak{S}, t) = \overline{P}_0(\overline{\mathfrak{S}}, t), & \overline{P}_0(\mathfrak{S}, t) = P_0(\overline{\mathfrak{S}}, t), \end{array}\right\} G = O \text{ ou } \dot{O}\,;$$
$$\begin{array}{lll} C_0(\mathfrak{S}, t) = \overline{C}_0(\overline{\mathfrak{S}}, t), & \overline{C}_0(\mathfrak{S}, t) = C_0(\overline{\mathfrak{S}}, t), & G = O'. \\ Q_0(\mathfrak{S}, t) = \overline{Q}_0(\overline{\mathfrak{S}}, t), & \overline{Q}_0(\mathfrak{S}, t) = Q_0(\overline{\mathfrak{S}}, t), & G = O''. \end{array}$$

§ 3. Les classes caractéristiques des structures subordonnées.

L'espace numérique R^{n+m} s'identifie canoniquement à $C^{n'+m'}$ dans le cas $n = 2n'$, $m = 2m'$, et à $Q^{n''+m''}$ dans le cas $n = 4n''$, $m = 4m''$. Les variétés $R_{n,m}$, $\dot{R}_{n,m}$, $C_{n,m}$ et $Q_{n,m}$ sont définies respectivement dans R^{n+m}, $C^{n'+m'}$ et $Q^{n''+m''}$.

Étant donné l'élément $X \in R_{n,m}$, soit φX le même élément considéré sans orientation. On obtient ainsi une application canonique (la projection) $\varphi : \dot{R}_{n,m} \to R_{n,m}$. Considérons un élément de $C_{n,m}$, muni de son orientation naturelle, comme un élément de $\dot{R}_{n,m}$ en négligeant sa structure unitaire. On a ainsi une application canonique

$$\varphi' : C_{n,m} \to \dot{R}_{n,m}.$$

De la même façon on définit une application canonique

$$\varphi'' : Q_{n,m} \to C_{n,m}.$$

Le problème énoncé dans § 1 revient à l'étude des applications φ, φ' et φ'' à cause du théorème suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème de Steenrod-Whitney-Pontrjagin-Chern :

THÉORÈME 4. — *Pour qu'une G-structure* ($G = O_m$, $\dot{O}_m$ ou O'_m) *sur B induite par* $f : B \to G_{n,m}$ ($G = R$, $\dot{R}$ *ou* C) *admette une G'-structure subordonnée* ($G' = \dot{O}_m$, O'_m ou O''_m), *il faut et il suffit qu'il existe* *une application* $f' : \mathrm{B} \to \mathbf{G}'_{n,m}$, $\mathbf{G}' = \hat{\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}$ *ou* $\mathbf{Q}$ *telle que*

$$(1) \qquad \psi f' \simeq f \qquad (\psi = \varphi,\ \varphi' \text{ ou } \varphi'').$$

Dans le cas $\mathrm{G} = \mathrm{O}_m$ on peut énoncer le théorème précédent sous une forme plus précise en remplaçant la condition (1) par la condition suivante :

$$(2) \qquad \varphi f' = f.$$

En effet, $\hat{\mathrm{R}}_{n,m}$ est un revêtement à deux feuillets sur $\mathrm{R}_{n,m}$ dont la projection est φ. L'existence d'une $\mathrm{O}_m^{\cdot}$-structure subordonnée exige celle d'une application $f'' : \mathrm{B} \to \hat{\mathrm{R}}_{n,m}$ telle que $\varphi f'' \simeq f$. D'après un théorème fondamental de déformation, f'' est homotope à une application f' vérifiant (2).

On a $\pi_1(\hat{\mathrm{R}}_{n,m}) = 0$, $\pi_1(\mathrm{R}_{n,m}) \approx \mathrm{Z}_2 (nm > 1)$, où Z_2 est le groupe des entiers mod 2. Un générateur de $\pi_1(\mathrm{R}_{n,m})$ est représenté par un cycle de la classe $[\omega_1^m]_2$ duale à la classe $\{\omega_1^m\}_2$. Une courbe fermée dans $\mathrm{R}_{n,m}$ est homotope à zéro si et seulement si le cycle mod 2 qu'elle représente est homotope à zéro. On voit facilement que la condition (2) est équivalente à la condition suivante :

$$(3) \qquad f\pi_1(\mathrm{B}) = 0.$$

Pour une courbe fermée quelconque dans B représentant un cycle mod 2, b, la condition (3) est équivalente à $f(b) \simeq 0$, d'où

$$(4) \qquad \{\omega_1^m\}_2(\mathfrak{F}) = 0.$$

On a donc :

Théorème 5. — *Pour qu'une* O^m*-structure* $\mathfrak{F}$ *admette une* $\mathrm{O}_m^{\cdot}$*-structure subordonnée, il faut et il suffit que la condition* (4) *soit vérifiée.*

Théorème 6. — *Soit* $\mathfrak{F}'$ *une* $\mathrm{O}_m^{\cdot}$*-structure subordonnée à la* O_m*-structure* $\mathfrak{F}$, *on a*

$$(5) \qquad \{\omega\}_i^{\cdot}(\mathfrak{F}') = \{\omega\}_i(\mathfrak{F}), \qquad i = 0 \text{ ou } 2, \qquad \omega \in \Omega(p,\ m)$$

où p *est la dimension de la base* B. *En particulier,*

$$(6) \qquad \mathrm{W}_2(\mathfrak{F}',\ t) = \mathrm{W}_2(\mathfrak{F},\ t), \qquad \overline{\mathrm{W}}_2(\mathfrak{F}',\ t) = \overline{\mathrm{W}}_2(\mathfrak{F},\ t);$$
$$(7) \qquad \mathrm{P}_0(\mathfrak{F}',\ t) = \mathrm{P}_0(\mathfrak{F},\ t), \qquad \overline{\mathrm{P}}_0(\mathfrak{F}',\ t) = \overline{\mathrm{P}}_0(\mathfrak{F},\ t).$$

Démonstration. — Soient $\hat{\mathrm{K}}$ et K les subdivisions cellulaires canoniques des variétés $\hat{R}_{n,m}$ et $R_{n,m}$ définies dans le même espace numérique R^{n+m} par rapport au même système de coordonnées (x). La projection φ est une application cellulaire de $\hat{K}$ sur K telle qu'on ait algébriquement,

$$\varphi \overset{+}{U}_\omega = \varphi \overline{U}_\omega = U_\omega.$$

D'après (4)*, (5)* § 1, (34), (34') § 3 et (4) § 4 de chap. I, on en déduit

$$\begin{aligned} \varphi^*\{\omega\}_0 &= (-1)^{\lambda(\omega)}\varphi^* U_\omega = (-1)^{\lambda(\omega)}[\overset{+}{U}_\omega + \overline{U}_\omega] \\ &= (-1)^{\mu(\omega)}[\overset{+}{U}_\omega + (-1)^{\omega(i_s)+i_s+m}\overline{U}_\omega] \\ &= \{\omega\}_0^{\wedge}, \end{aligned}$$

où $\omega \in \Omega_1^*(n, m)$, $n > p$. D'où

$$\varphi^*\{\omega\}_0 = \{\omega\}_0^{\wedge}, \qquad \omega \in \Omega_1^*(n, m).$$

De même,

$$\varphi^*\{\omega\}_2 = \{\omega\}_2^{\wedge}, \qquad \omega \in \Omega(n, m).$$

Supposons que $\mathfrak{F}' \cong f'^*\hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$. Alors $\mathfrak{F} \cong f^*\mathfrak{R}_{n,m}$ où $f = \varphi f'$. Donc

$$\begin{aligned} \{\omega\}_i(\mathfrak{F}) &= f^*\{\omega\}_i = f'^*\varphi^*\{\omega\}_i \\ &= f'^*\{\omega\}_i^{\wedge} = \{\omega\}_i^{\wedge}(\mathfrak{F}'), \qquad i = 0,\ 2. \end{aligned}$$

C. q. f. d.

THÉORÈME 7. — *Si la O'_m-structure $\mathfrak{F}'$ $(m = 2m')$ est subordonnée à la $\hat{O}_m$-structure $\mathfrak{F}$, on a*

$$(8)_1 \qquad \underline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \underline{C}_2(\mathfrak{F}', t),$$

$$(8)_2 \qquad \overline{\overline{W}}_2(\mathfrak{F}, t) = \overline{C}_2(\mathfrak{F}', t).$$

Démonstration. — Soient $\hat{R}_{n,m}$ et $C_{n,m}$ $(n = 2n',\ m = 2m')$ les variétés grassmanniennes définies respectivement dans l'espace numérique R^{n+m} et dans l'espace unitaire $C^{n'+m'}$ associé à R^{n+m}. Soit $\varphi' : C_{n,m} \to \hat{R}_{n,m}$ l'application canonique définie au début de cette section. Puisque $\bar{\omega}\{{}^{m}_{2k+1}\}_2^{\wedge}$ et $\{\omega^m_{2k+1}\}_2^{\wedge}$ sont de dimension impaire, il est évident que

$$(9) \qquad \varphi'^*\{\bar{\omega}^m_{2k+1}\}_2^{\wedge} = 0, \qquad \varphi'^*\{\omega^m_{2k+1}\}_2^{\wedge} = 0.$$

Prenons maintenant dans R^{n+m} un sous-espace R^{n-2k+1} de dimension $n-2k+1$ tel que la somme de R^{n-2k+1} et de son conjugué complexe $\overline{R}^{n-2k+1}$ soit un espace complexe T de dimension complexe $n'-k+1$. L'ensemble des espaces vectoriels orientés X de dimension m tel que

$$(10) \qquad \dim. (X \cap R^{n-2k+1}) \geqslant 1$$

définit un cycle $[\overline{\omega}_{2k}^{m*}]_2^{\wedge} \in [\overline{\omega}_{2k}^{m*}]_2^{\wedge}$. De même, l'ensemble des espaces complexes Z de dimension complexe m' tel que

$$(11) \qquad \dim. (Z \cap T) \geqslant 2$$

définit un cycle $[\overline{\omega}_k^{m'*}]_2^c \in [\overline{\omega}_k^{m'*}]_2^c$. Pour un $X = \varphi'(Z)$ les conditions (11) et (10) sont équivalentes grâce à notre choix des espaces R^{n-2k+1} et T. Il en résulte que l'intersection dans $\hat{R}_{n,m}$ du cycle $[\overline{\omega}_{2k}^{m*}]_2^{\wedge}$ avec la sous-variété $\varphi'\mathrm{C}_{n,m}$ est le cycle $\varphi'[\overline{\omega}_k^{m'*}]_2^c$ dans $\varphi'\mathrm{C}_{n,m}$.

D'où

$$(12) \qquad \varphi'^*\{\overline{\omega}_{2k}^m\}_2^{\wedge} = \{\overline{\omega}_k^{m'}\}_2^c.$$

Puisque $\mathfrak{F}'$ est subordonnée à $\mathfrak{F}$, on a $\mathfrak{F}' = f'^*\mathfrak{C}_{n,m}$ et

$$\mathfrak{F} = f^*\hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$$

où $f : B \to \hat{R}_{n,m}$, $f' : B \to \mathrm{C}_{n,m}$ et $f = \varphi' f'$, B étant la base de $\mathfrak{F}$ ainsi que de $\mathfrak{F}'$. On déduit alors de (9) et (12) :

$$\overline{W}_2^{2k+1}(\mathfrak{F}) = 0, \qquad \overline{W}_2^{2k}(\mathfrak{F}) = \overline{C}_2^{2k}(\mathfrak{F}').$$

En les combinant dans une seule formule, on obtient $(8)_2$.

Pour démontrer $(8)_1$, prenons dans R^{n+m} un sous-espace R^{n+2k-1} de dimension $n+2k-1$ qui rencontre son conjugué complexe $\overline{R}^{n+2k-1}$ dans un sous-espace complexe T' de dimension complexe $n'+k-1$. Les éléments $X \in \hat{R}_{n,m}$ tel que

$$(13) \qquad \dim. (X \cap R^{n+2k-1}) \geqslant 2k,$$

définit un cycle $[\omega_{2k}^{m*}]_2^c \in [\omega_{2k}^{m*}]_2^{\wedge}$. De même, les éléments $Z \in \mathrm{C}_{n,m}$ tel que

$$(14) \qquad \dim. (Z \cap T') \geqslant 2k,$$

définit un cycle $[\omega_k^{m'*}]_2^c \in [\omega_k^{m'*}]_2^c$. Il est évident que pour $X = \varphi'(Z)$ les deux conditions (13) et (14) sont équivalentes. On en déduit

$$\varphi'^*\{\omega_{2k}^m\}_2^{\wedge} = \{\omega_k^{m'}\}_2^c,$$

et par conséquent

$$\mathfrak{W}_2^{2k}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{C}_2^{2k}(\mathfrak{F}'). \tag{15}$$

La formule $(8)_1$, est une conséquence de (9) et (15).

C. q. f. d.

Le théorème implique quelques conditions nécessaires pour qu'une O_m^*-structure $\mathfrak{F}$ admette une O'_m-structure subordonnée. Par exemple il est nécessaire que

$$\mathfrak{W}_2^{2k+1}(\mathfrak{F}) = \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_2^{2k+1}(\mathfrak{F}) = 0.$$

Nous donnerons plus loin un exemple qui montre que ces conditions ne sont pas triviales, même pour les structures associées aux variétés différentiables orientables. Pour obtenir des conditions plus fortes il faut considérer le type d'homologie à *coefficients entiers* de l'application φ' que nous déterminerons dans la section suivante. Bien que ce type d'homologie soit un peu difficile à déterminer pour φ', on peut le déterminer complètement pour φ''. On démontre en effet :

THÉORÈME 8. — *Si la O''_m-structure $\mathfrak{F}'$ sur la base* B *est subordonnée à la O'_m-structure $\mathfrak{F}$, on a :*

$$\mathfrak{C}_0(\mathfrak{F}, t) = \mathfrak{Q}_0(\mathfrak{F}', t),$$
$$\overline{\mathfrak{C}}_0(\mathfrak{F}, t) = \overline{\mathfrak{Q}}_0(\mathfrak{F}', t).$$

§ 4. — Étude de l'application canonique $\varphi' : \mathfrak{C}_{n,m} \to \hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$ $(n = 2n', \quad m = 2m')$.

Pour déterminer le type d'homologie à coefficients entiers de l'application canonique $\varphi' : \mathfrak{C}_{n,m} \to \hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$ il suffit en général de déterminer $\varphi'^*\{\omega_{2k,2k}^m\}_0^\wedge$ ou $\varphi'^*\{\overline{\omega}_{2k,2k}^m\}^\wedge$ et $\varphi'^*\{\omega_m^m\}_0^\wedge$. Puisque l'ensemble des cycles $[\omega']_0^c$, $d(\omega') = 2k$, forme une base d'homologie de dimension $4k$ dans $\mathfrak{C}_{n,m}$, il suffit pour cela de déterminer les indices d'intersection :

$$I_0([\overline{\omega}_{2k,2k}^{m\,*}]_0^\wedge,\ \varphi'[\omega']_0^c), \qquad d(\omega') = 2k, \qquad \omega' \in \Omega(n', m') ;$$

et

$$I_0([\omega_m^{m*}]_0^\wedge,\ \varphi'[\omega']_0^c), \qquad d(\omega') = m', \qquad \omega' \in \Omega(n', m').$$

Nous définissons les cycles $[\omega']_0^c$ par rapport à un système de coordonnées unitaires $(z) = (z_1, \ldots z_{n'+m'})$ choisi dans $C^{n'+m'}$ une fois pour toutes. Pourtant pour définir les cycles $[\bar{\omega}^{m}_{2k,\overset{*}{2k}}]^{\wedge}_{0}$ et $[\omega^{m*}_{m}]^{\wedge}_{0}$ nous choisirons dans R^{n+m} des systèmes de coordonnées $(x)=(x_1, \ldots, x_{n+m})$ appropriés permettant la détermination des indices d'intersection et que nous préciserons chaque fois par la donnée des relations explicites entre les z_i et les x_i. Nous désignerons les bases des vecteurs dans $C^{n'+m'}$ et R^{n+m} correspondant aux systèmes de coordonnées choisis respectivement par (g_i) et (e_i). Remarquons que les cycles seront représentés par les pseudo-variétés définies par (2) § 3 ou (1) § 5 de chap. 1.

LEMME. $$\varphi'^{*}\{\omega^{m}_{m}\}^{\wedge}_{0}=(-1)^{m'}\{\omega^{m'}_{m'}\}^{c}_{0}.$$

Démonstration. Choisissons les coordonnées (x_i) tel que

$$(1)\quad \begin{cases} z_1 = x_{n-1} + \mathrm{i}x_{n+m}, \\ z_j = x_{n+2j-4} + \mathrm{i}x_{n+2j-3}, & j = 2, \ldots, m'+1, \\ z_j = x_{2j-m-3} + \mathrm{i}x_{2j-m-2}, & j = m'+2, \ldots, n'+m'. \end{cases}$$

Pour une fonction $\omega'\in\Omega(n', m')$ avec $d(\omega')=m'$ on a ou bien $\omega'(1)=0$ ou bien $\omega'(i)=1$, $i=1, \ldots, m'$. Dans le premier cas chaque élément $Z\in[\omega']^{c}_{0}$ contient le vecteur g_1 et donc e_{n-1} et e_{n+m} à cause de la première équation de (1). Puisque tous les éléments de $[\omega^{m*}_{m}]^{\wedge}_{0}$ sont contenus dans l'espace R^{n+m-1} qui ne contient pas le vecteur e_{n+m}, on voit que $[\omega^{m*}_{m}]^{\wedge}_{0}$ et $\varphi'([\omega']_0)$ n'ont aucun élément en commun, donc

$$(2)\qquad I_0([\omega^{m*}_{m}]^{\wedge}_{0},\ \varphi'[\omega']^{c}_{0})=0 \qquad \text{pour} \qquad \omega'(1)=0.$$

Dans le deuxième cas $\omega'(i)=1$, $i=1, \ldots, m'$, $[\omega^{m'}_{m'}]^{c}_{0}$ est l'ensemble des espaces complexes de dimension complexe m' contenus dans

$$C^{m'+1} : z_{m'+2}=\ldots=z_{n'+m'}=0.$$

On voit que le seul élément commun aux ensembles $\varphi'([\omega^{m'}_{m'}]^{c}_{0})$ et $[\omega^{m*}_{m}]^{\wedge}_{0}$ est, d'après (1), l'espace complexe déterminé par les vecteurs $g_2, \ldots, g_{m'+1}$, ou l'espace orienté déterminé par la suite de vecteurs $\{e_n, \ldots, e_{n+m-1}\}$, c'est-à-dire l'élément central $\overset{+}{X}_{\omega}$ du voisinage $\overset{+}{U}=\overset{+}{U}_{\omega}$, ainsi que du voisinage $W=W_{\omega'}$, où $\omega=\omega^{m*}_{m}$, $\omega'=\omega^{m'}_{m'}$. Nous rappelons que les éléments du voisinage $\overset{+}{N}=\overset{+}{N}_{\omega}$ sont représentés par les équations :

$$x_{\bar{j}} = \sum \xi_{ji} x_{\bar{i}},$$
$$\{\bar{i}\}=\{n, n+1, \ldots, n+m-1\},$$
$$\{\bar{j}\}=\{1, \ldots, n-1, n+m\}.$$

Considérons les coordonnées normales (ξ_{ji}) de $\check{\mathrm{N}}$ comme un système de coordonnées dans un espace numérique; soit (u_{ji}) la base de vecteurs correspondante. Le voisinage $\check{\mathrm{N}}$ est alors orienté par la séquence :

$$\mathrm{A} = \{u_{11}, \ldots, u_{1m}; \quad u_{21}, \ldots, u_{2m}; \quad \ldots u_{n1}, \ldots, u_{nm}\}.$$

Le voisinage $\check{\mathrm{U}}$ est une variété linéaire dans $\check{\mathrm{N}}$ représentée par

$$\xi_{n1} = \ldots = \xi_{nm} = 0$$

dont l'orientation est déterminée par la suite des vecteurs suivants :

$$\mathrm{B} = \{u_{11}, \ldots, u_{1m}; \quad \ldots, u_{n-1,1}, \ldots, u_{n-1,m}\}.$$

Les éléments Z de W sont représentées par les équations :

$$\begin{cases} z_1 = \xi_{11} z_2 + \ldots + \xi_{1m'} z_{m'+1}, \\ z_{m'+2} = \ldots = z_{n'+m'} = 0. \end{cases}$$

En posant $\xi_{ji} = \xi'_{ji} + i\xi''_{ji}$, ξ'_{ji} et ξ''_{ji} réelles, $\varphi'(\mathrm{Z})$ est défini par les équations :

$$\begin{cases} x_1 = \ldots = x_{n-2} = 0, \\ x_{n-1} = \xi'_{11} x_n - \xi''_{11} x_{n+1} + \ldots + \xi'_{1m'} x_{n+m-2} - \xi''_{1m'} x_{n+m-1}, \\ x_{n+m} = \xi''_{11} x_n + \xi'_{11} x_{n+1} + \ldots + \xi''_{1m'} x_{n+m-2} + \xi'_{1m'} x_{n+m-1}. \end{cases}$$

L'ensemble $\varphi'(\mathrm{W})$ est donc aussi une variété linéaire dont l'orientation *naturelle* est déterminée par la suite des vecteurs suivante :

$$\mathrm{C} = \{u_{n-1,1} + u_{n,2},\ u_{n,1} - u_{n-1,2}, \ldots, u_{n-1,m-1} + u_{n,m},$$
$$u_{n,m-1} - u_{n-1,m}\}.$$

En comparant avec les systèmes A et B, on trouve

$$\check{\mathrm{I}}(\check{\mathrm{U}}\quad, \varphi'\mathrm{W}\quad) = (-1)^{m'}, \quad \text{ou}$$
$$\check{\mathrm{I}}([\omega_m^{m*}]_0^{\cdot}, \varphi'[\omega_{m'}^{m'}]_0^c) = (-1)^{m'},$$

où $\check{\mathrm{I}}$ est l'indice d'intersection calculé dans $\check{\mathrm{N}}$. D'après proposition 1 § 3 chap. 1, $\check{\mathrm{I}}$ est le même que l'indice d'intersection I_0 calculé dans la variété $\hat{\mathrm{R}}_{n,m}$ orientée par rapport au système de coordonnées (x), puisque m est pair. Il en résulte

$$(3) \qquad \mathrm{I}_0([\omega_m^{m*}]_0^{\cdot}, \varphi'[\omega_{m'}^{m'}]_0^c) = (-1)^{m'}.$$

Notre lemme est évidemment une conséquence de (2) et (3),

C. q. f. d.

Déterminons maintenant $\varphi'^*\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}^{\wedge}_0$. Remarquons d'abord qu'on a

$$(4) \qquad \varphi'^*\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}^{\wedge}_0 = \bar{\varphi}^*\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}_0,$$

où $\bar{\varphi} = \varphi\varphi' : \mathfrak{C}_{n,m} \to \mathrm{R}_{n,m}$. Puisque l'ensemble des classes $\{\omega\}^c_0$ avec $d(\omega) = 2k$, $\omega \in \Omega(n'\, m')$, forme une base d'homologie de $\mathfrak{C}_{n,m}$ pour la dimension $4k$, on a

$$(5) \qquad \varphi^*\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}_0 = \sum_{h=0}^{k} \varepsilon_{h,k}\{\bar{\omega}'_{h,2k-h}\}^c_0 + \sum_{\omega'} \varepsilon_{\omega'}\{\omega'\}^c_0,$$

où

$$(6) \qquad \begin{cases} \bar{\omega}'_{h,2k-h}(1) = \ldots = \bar{\omega}'_{h,2k-h}(m'-2) = 0, \\ \qquad \bar{\omega}'_{h,2k-h}(m'-1) = h, \quad \bar{\omega}'_{h,2k-h}(m') = 2k-h, \\ \varepsilon_{h,k} = \mathrm{I}_0([\bar{\omega}^{m\,*}_{2k,2k}]_0, \quad \bar{\varphi}[\bar{\omega}'_{h,2k-h}]^c_0); \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \omega'(m'-2) > 0, \quad d(\omega') = 2k, \\ \varepsilon_{\omega'} = \mathrm{I}_0([\bar{\omega}^{m\,*}_{2k,2k}]_0, \quad \bar{\varphi}[\omega']^c_0). \end{cases}$$

Démontrons d'abord que

$$(8) \qquad \varepsilon_{\omega'} = 0.$$

En effet, pour que la fonction ω' existe, il faut que $m > 4$. Dans ce cas on a

$$\omega'(m'-2) > 0, \qquad d(\omega') = 2k, \qquad \omega'(m'-1) \leqslant \omega'(m'),$$

d'où les inégalités

$$\omega'(m'-1) + \omega'(m') \leqslant 2k-1, \qquad \omega'(m'-1) \leqslant k-1.$$

Il est donc toujours possible de choisir le système de coordonnées $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ et $z = (z_1, \ldots, z_{n'+m'})$ tels que, les espaces R^s et C^s étant définis comme dans § 3 et § 5 de chap. I on ait :

(*a*) R^{h-2k+2} et $\mathrm{C}^{\omega'(m'-1)+m'-1}$ sont disjoints ;

(*b*) l'intersection de R^{n-2k+2} et $\mathrm{C}^{\omega'(m')+m'}$, soit Y, est de dimension $2\omega'(m') - 2k + 2$;

(*c*) Y ne contient aucune droite complexe et le sous-espace complexe engendré par Y n'a aucun vecteur en commun avec

$$\mathrm{C}^{\omega'(m'-1)+m'-1}.$$

Le cycle $[\bar{\omega}^{m\,*}_{2k,2k}]_0$ défini dans $\mathrm{R}_{n,m}$ par rapport au système (x) est représenté géométriquement par la pseudo-variété des éléments $\mathrm{X} \in \mathrm{R}_{n,m}$ satisfaisant à la condition

$$\dim. \quad (\mathrm{X} \cap \mathrm{R}^{n-2k+2}) \geqslant 2.$$

De même, le cycle $[\omega']^c_0$ défini dans $\mathfrak{C}_{n,m}$ par rapport au système

(z) est représenté géométriquement par la pseudo-variété des éléments $Z \in C_{n,m}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \dim. \quad (Z \cap C^{\omega'(m'-1)+m'-1}) \geqslant m-2, \\ Z \subset C^{\omega'(m')+m'}, \text{ etc.} \end{cases}$$

Il en résulte que, en tenant compte de (a), pour un élément $\bar{\varphi}(Z) = X$ commun à $[\bar{\omega}^m_{2k, \overset{*}{2k}}]_0$ et $\bar{\varphi}[\omega']_0$, X a une intersection avec $C^{\omega'(m'-1)+m'-1}$ d'une dimension égale à $m-2$ et une intersection avec R^{n-2k+2} d'une dimension égale à 2. X étant complexe, sa dimension, d'après (b) et (c), est alors nécessairement égale à $(m-2)+2+2 = m+2$, ce qui est absurde. Par conséquent les deux cycles ne peuvent avoir aucun élément en commun et la formule (8) est ainsi démontrée.

Il en résulte que l'équation (5) se réduit à

$$(8) \qquad \bar{\varphi}^*\{\bar{\omega}^m_{2k, 2k}\}_0 = \sum_{h=0}^{k} \varepsilon_{h,k} \{\bar{\omega}'_{h, 2k-h}\}^c_0 ;$$

où

$$(9) \qquad \varepsilon_{h,k} = I_0([\bar{\omega}^m_{2k, \overset{*}{2k}}]_0, \ \bar{\varphi}[\bar{\omega}'_{h, 2k-h}]^c_0).$$

Pour déterminer $\varepsilon_{h,k}$, prenons le système de coordonnées (x) défini par :

$$(10)_1 \qquad z_j = x_{n+2j+3} + \mathrm{i}x_{n+2j+4}, \qquad j = 1, \ldots, m'-2 ;$$

$$(10)_2 \qquad z_j = x_{n-m+2j-2h+5} + \mathrm{i}x_{n-m+2j-2h+6}, \quad j = m'-1, \ldots, m'+h-2 ;$$

$$(10)_3 \qquad z_j = x_{n-m'+j+h-4k+1} + \mathrm{i}x_{n-m'+j-2k-h+3}, \quad j = m'+h, \ldots, m'+2k-h-1 ;$$

$$(10)_4 \qquad z_j = x_{2j-m-4k+2h-1} + \mathrm{i}x_{2j-m-4k+2h}, \quad j = m'+2k-h+1, \ldots, n'+m' ;$$

$$(10)_5 \qquad z_{m'+h-1} = x_{n-2k+2} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(x_{n+4} + x_{n-2k+1}) ;$$

$$(10)_6 \qquad z_{m'+2k-h} = x_{n-2k+1} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(-x_{n+3} + x_{n-2k+2}).$$

Pour $h = 0$, on supprime le système $(10)_2$, et pour $h = k$, on supprime $(10)_3$.

Nous avons ainsi choisi les systèmes de coordonnées (z) et (x) de telle façon que, comme il est facile à vérifier, le seul élément commun à $[\bar{\omega}^m_{2k, \overset{*}{2k}}]_0$ et $\bar{\varphi}[\bar{\omega}'_{h, 2k-h}]^c_0$ soit l'élément central du voisinage $N_{\bar{\omega}} = N$ ou $U_{\bar{\omega}} = U$, où $\bar{\omega} = \bar{\omega}^m_{2k, \overset{*}{2k}}$, qui est aussi l'élément central du voisinage $W_{\omega'} = W$, où $\omega' = \overline{\omega}_{h,2k-h}$. Dans le voisinage N les éléments sont de la forme :

$$\begin{cases} x_j = \xi_{j1}x_{n-2k+1} + \xi_{j2}x_{n-2k+2} + \xi_{j3}x_{n+3} + \ldots + \xi_{jm}x_{n+m}, \\ \qquad\qquad j = 1, \ldots, n-2k; \\ x_{j+2} = \xi_{j1}x_{n-2k+1} + \xi_{j2}x_{n-2k+2} + \xi_{j3}x_{n+3} + \ldots + \xi_{jm}x_{n+m}, \\ \qquad\qquad j = n-2k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

La variété linéaire U dans N est représentée par :

$$(11) \qquad \xi_{j1} = \xi_{j2} = 0, \quad j = n-2k+1, \ldots, n.$$

Dans l'espace vectoriel de coordonnées (ξ_{ji}) soit (u_{ji}) la base de vecteurs correspondante, Les orientations de N et U sont alors déterminées respectivement par les suites des vecteurs suivantes :

$$A = \{u_{11}, \ldots u_{1m}; \quad \ldots u_{n1}, \ldots, u_{nm}\};$$
$$B = \{u_{11}, \ldots u_{1m}; \quad \ldots u_{n-2k,1}, \ldots, u_{n-2k,m};$$
$$u_{n-2k+1,3}, \ldots, u_{n-2k+1,m}; \quad \ldots, u_{n3}, \ldots, u_{nm}\}.$$

Les éléments du voisinage W sont de la forme :

$$\begin{cases} z_{j+m'-2} = \zeta_{j,m'-1}z_{m'+h-1} + \zeta_{j,m'}z_{m'+2k-h}, & j = 1, \ldots, h; \\ z_{j+m'-1} = \qquad\qquad \zeta_{j,m'}z_{m'+2k-h}, & j = h+1, \ldots, 2k-h; \\ z_j = 0, \qquad j = m'+2k-h+1, \ldots, n'+m', \end{cases}$$

ou, d'après (10), en posant $\zeta_{ji} = \zeta'_{ji} + i\zeta''_{ji}$, ζ'_{ji} et ζ''_{ji} réelles,

$$x_1 = \ldots = x_{n-4k+2h} = 0,$$

$$x_{n+h-4k+j} = \zeta'_{jm'}x_{n-2k+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta''_{j,m'}x_{n-2k+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta''_{j,m'}x_{n+3},$$
$$j = h+1, \ldots, 2k-h;$$

$$x_{n-2k-h+j+2} = \zeta''_{j,m'}x_{n-2k+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'}x_{n-2k+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'}x_{n+3},$$
$$j = h+1, \ldots, 2k-h;$$

$$x_{n-2h+2j+1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta''_{j,m'-1} + \zeta'_{j,m'}\right)x_{n-2k+1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta''_{j,m'} + \zeta'_{j,m'-1}\right)x_{n-2k+2}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta''_{j,m'}x_{n+3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta''_{j,m'-1}x_{n+4}, \qquad j = 1, \ldots, h;$$

$$x_{n-2h+2j+2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'-1} + \zeta''_{j,m'}\right)x_{n-2k+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'} + \zeta''_{j,m'-1}\right)x_{n-2k+2}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'}x_{n+3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'_{j,m'-1}x_{n+4}, \qquad j = 1, \ldots, h.$$

Dans l'espace vectoriel complexe de coordonnées complexes (ζ_{jt}) soit (w_{jt}) la base de vecteurs correspondante. Le système de vecteurs contenus dans W :

$$\{w_{1,m'-1},\ \mathrm{i}w_{1,m'-1},\ \ldots\ w_{h,m'-1},\ \mathrm{i}w_{h,m'-1};\quad w_{1,m'},\ \mathrm{i}w_{1m'},\ \ldots\ w_{2k-h,m'},\ \mathrm{i}w_{2k-h,m'}\}$$

correspond à un système de vecteurs contenus dans $\bar{\varphi}$W, qui par son ordre détermine aussi l'orientation naturelle de $\bar{\varphi}$W. La projection de ce système sur la variété linéaire complètement orthogonale à (11) dans N est le système suivant :

$$\begin{aligned} C = \Big\{ & \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-2h+2,1} + u_{n-2h+1,2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-2h+1,1} + u_{n-2h+2,2};\ \ldots \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n,1} + u_{n-1,2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-1,1} + u_{n,2}; \\ & u_{n-2h+1,1} + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-2h+2,2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-2k+1,2} + u_{n-2k+2,1};\ \ldots \\ & u_{n-1,1} + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n,2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-1,2} + u_{n,1}; \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-2k+1,2},\ u_{n-2k+1,1};\ \ldots\ \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-2h,2},\ u_{n-2h,1} \Big\}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que la suite composée $\{B, C\}$ détermine la même orientation que A ou l'orientation opposée selon que h est pair ou impair. Par conséquent (cf. Proposition 1, § 3, chap. 1).

$$I_0(U, \bar{\varphi}W) = I_{\bar{\omega}:0}(U, \varphi W) = (-1)^h,$$

ou

$$\varepsilon_{h,k} = (-1)^h \qquad (\text{cf. } (9)).$$

L'équation (8) devient alors

$$\bar{\varphi}^*\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}_0 = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \{\bar{\omega}'_{h,2k-h}\}^c_0. \tag{12}$$

D'après les formules de multiplication pour l'anneau de cohomologie dans $\mathfrak{C}_{n,m}$ (cf. § 5, chap. 1), on a

$$\{\bar{\omega}'_{h,2k-h}\}^c_0 = \{\bar{\omega}^m_h\}^c_0 \cup \{\bar{\omega}^{m'}_{2k-h}\}^c_0 - \{\bar{\omega}^{m'}_{h-1}\}^c_0 \cup \{\bar{\omega}^{m'}_{2k-h+1}\}^c_0. \tag{13}$$

On déduit de (12) et (13) par une simple réduction que

$$\bar{\varphi}^*\{\bar{\omega}^m_{2k,2k}\}_0 = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \{\bar{\omega}^m_h\}^c_0 \cup \{\bar{\omega}^{m'}_{2k-h}\}^c_0,$$

ou, d'après (4),

$$(14)\qquad \varphi'^{*}\{\overline{\omega}^{m}_{2k,2k}\}^{*}_{0}=\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{h}\{\overline{\omega}^{h}_{m'}\}^{c}_{0}\cup\{\overline{\omega}^{m'}_{2k-h}\}^{c}_{0}.$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ est une O^{*}_{m}-structure sur B admettant une O'_{m}-structure subordonnée $\mathfrak{S}'$ induite par une application $f\colon B\to \mathbf{C}_{n,m}$. On déduit de (14) (cf. théorème 4 de § 3) :

$$\{\overline{\omega}^{m}_{2k,2k}\}^{*}_{0}(\mathfrak{S})=\sum_{h=0}^{2k}(-1)\{\overline{\omega}^{m'}_{h}\}_{0}(\mathfrak{S}')\cup\{\overline{\omega}^{m'}_{2k-h}\}_{0}(\mathfrak{S}'),$$

ou, d'après (6) et (7) de § 2,

$$(15)\qquad \overline{P}^{4k}_{0}(\mathfrak{S})=\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{h}\overline{\mathbf{C}}^{2h}_{0}(\mathfrak{S}')\cup\overline{\mathbf{C}}^{4k-2h}_{0}(\mathfrak{S}').$$

En utilisant le polynome de Pontrjagin et le polynome de Chern définis par (6)' et (7)' de § 2, on peut réunir les formules (15) dans une seule formule, à savoir, la formule (17) du théorème suivant ;

THÉORÈME 9. — *Si une O'_{m}-structure $\mathfrak{S}$ admet une O'_{m}-structure subordonnée $\mathfrak{S}'$, on a*

$$(16)\qquad P_{0}(\mathfrak{S}',\ t)=\mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}',\ t)\cup\mathbf{C}_{0}(\mathfrak{S}',\ \mathrm{i}t);$$

$$(17)\qquad \overline{P}_{0}(\mathfrak{S}',\ t)=\overline{\mathbf{C}}_{0}(\mathfrak{S}',\ t)\cup\overline{\mathbf{C}}_{0}(\mathfrak{S}',\ \mathrm{i}t);$$

et

$$(18)\qquad X^{m}_{0}(\mathfrak{S})=(-1)^{m'}\mathbf{C}^{m}_{0}(\mathfrak{S}'),\qquad m=2m'.$$

Évidemment la formule (18) est une conséquence immédiate du lemme. La formule (16) est équivalente au système des formules suivantes :

$$(19)\qquad (-1)^{k}P^{4k}_{0}(\mathfrak{S})=\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{h}\mathbf{C}^{2h}_{0}(\mathfrak{S}')\cup\mathbf{C}^{4k-2h}_{0}(\mathfrak{S}').$$

Pour la démontrer, on peut partir de la formule (17) § 6 chap. I, et, en utilisant la méthode par laquelle nous avons démontré (17), obtenir une formule analogue à (14), et en déduire (19). Pourtant nous allons démontrer cette formule à partir de (15) à l'aide du théorème de dualité de § 2 (théorème 3).

Démonstration de (16).

Supposons que la O'_{m}-structure $\mathfrak{S}'$ est induite par l'application f' de la base B dans la variété $\mathbf{C}_{n,m}$ définie dans l'espace unitaire

$C^{n'+m'}$ ($n=2n'$, $m=2m'$). En identifiant $C^{n'+m'}$ à l'espace numérique R^{n+m} de dimension $n+m$, on a les variétés $\mathfrak{C}_{n,m}$, $\hat{\mathfrak{R}}_{n,m}$ et $\hat{\mathfrak{R}}_{m,n}$ définies dans $C^{n'+m'}$ ou R^{n+m}. Soient

$$\mathfrak{d}' : \mathfrak{C}_{n,m} \to \mathfrak{C}_{m,n},$$
$$\mathfrak{d} : \hat{\mathfrak{R}}_{n,m} \to \hat{\mathfrak{R}}_{m,n},$$
$$\varphi' : \mathfrak{C}_{n,m} \to \hat{\mathfrak{R}}_{n,m},$$

et

$$\varphi_1' : \mathfrak{C}_{m,n} \to \hat{\mathfrak{R}}_{m,n},$$

les applications canoniques introduites dans § 5 chap. I et § 3 où $\mathfrak{d}$ est définie par rapport à l'orientation de R^{n+m} correspondant à la structure complexe de $C^{n'+m'}$. On a

$$(20) \qquad \varphi_1'\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}\varphi'.$$

La formule (14) étant déjà démontrée, on obtient, en l'appliquant aux variétés $\mathfrak{C}_{m,n}$, $\hat{\mathfrak{R}}_{m,n}$ et à l'application φ_1', la formule suivante :

$$(21) \qquad \varphi_1'^*\{\bar{\omega}^n_{2k,2k}\}^{\wedge}_0 = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \{\bar{\omega}^{n'}_h\}^c_0 \cup \{\bar{\omega}^{n'}_{2k-h}\}^c_0.$$

D'après § 6 chap. I, on a

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathfrak{d}^*\{\bar{\omega}^n_{2k,2k}\}^{\wedge}_0 = (-1)^k\{\omega^m_{2k,2k}\}_0, \\ \mathfrak{d}'^*\{\bar{\omega}^{n'}_i\}^c_0 = \{\omega^{m'}_i\}^c_0. \end{cases}$$

En appliquant l'opération $\mathfrak{d}'^*$ aux deux membres de (21) et en utilisant (20), (22), on obtient

$$(-1)^k\varphi'^*\{\omega^m_{2k,2k}\}^{\wedge}_0 = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \{\omega^{m'}_h\}^c_0 \cup \{\omega^{m'}_{2k-h}\}^c_0,$$

d'où les formules (19) ou, en les combinant dans une seule, la formule (16).

C. q. f. d.

CHAPITRE III

LES PROPRIÉTÉS D'HOMOTOPIE DES VARIÉTÉS GRASMANNIENNES

§ 1. Les groupes d'homotopie des variétés $R_{n,m}$ et $\dot{R}_{n,m}$.

Soit $V_{n+m,m}$ la variété de Stiefel définie dans l'espace numérique R^{n+m}, c'est-à-dire la variété des suites de m vecteurs orthonormés $(v_j)=(v_1, \ldots, v_m)$, $v_j \in R^{n+m}$ La variété $V_{n+m,m}$ a une fibration naturelle dont la base est la variété $\dot{R}_{n,m}$ définie dans R^{n+m}, la fibre est homéomorphe au groupe de rotation O_m^+ de la sphère S_{m-1}, et la projection p applique $[v_1, \ldots, v_m]$ sur l'espace vectoriel orienté déterminé par les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ dans cet ordre. Soient $\overline{F}$ la fibre sur l'espace orienté $\overline{R}^m = p([\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m])$ et supposons qu'il existe un élément $[\bar{e}'_j]=[\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_m]$ de $V_{n+m,m}$ tel que, pour chaque élément $[v_j] \in \overline{F}$,

$$(1) \qquad h_t([v_j]) = [\alpha_j(v_j \cos 1/2\,\pi t + \bar{e}'_j \sin 1/2\,\pi t)],$$

$$\alpha_j = (1 + v_j \cdot \bar{e}'_j \cdot \sin \pi t)^{\frac{1}{2}},$$

soit un élément bien défini de $V_{n+m,m}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Dans ce cas on a

$$h_0([v_j]) = [v_j], \qquad h_1([v_j]) = [\bar{e}'_j].$$

Il en résulte que h_t définit une homotopie dans $V_{n+m,m}$ de $\overline{F}$ sur un seul point $[\bar{e}'_j]$ de $V_{n+m,m}$, c'est-à-dire,

$$(2) \qquad \overline{F} \simeq 0 \qquad \text{dans} \qquad V_{n+m,m}.$$

Nous remarquons que ceci est toujours possible dans le cas $n \geqslant m$, en prenant par exemple

$$(1)' \qquad [\bar{e}_j] = [e_1, \ldots, e_m], \qquad [\bar{e}'_j] = [e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}],$$

où $e_1, \ldots, e_{n+m}$ est une base de vecteurs quelconque de R^{n+m}.

Soit maintenant σ^k une cellule de dimension k bordée par la sphère unité s^{k-1} : $y_1^2+\cdots y_k^2=1$ dans un espace euclidien de dimension k de coordonnées $y_1, \ldots, y_k$. Le point de σ^k de coordonnées $y_1 t, \ldots, y_k t$, $(0\leqslant t\leqslant 1)$, sera désigné par le couple (y, t). En particulier, $(y, 1)=y$ est un point de s^{k-1}. Étant donnée une application $f: s^{k-1}\rightarrow \bar{\mathrm{F}}$, soit

$$h_f: \sigma^k \rightarrow \hat{\mathrm{R}}_{n,m}$$

l'application définie par l'équation

$$(3) \qquad h_f(y, t)=ph_{1-t}f(y), \qquad y\in s^{k-1}.$$

On a alors

$$h_f(y)=\bar{\mathrm{R}}^m, \qquad \text{et} \qquad h_f(y, 0)=p([\bar{e}'_j]).$$

Par conséquent on peut considérer h_f comme une application appartenant à un élément du groupe d'homotopie $\pi_k(\hat{\mathrm{R}}_{n,m})$ et il est clair qu'on a ainsi un homomorphisme pour $k>1$, soit :

$$\mathrm{H}: \pi_{k-1}(\bar{\mathrm{F}})\rightarrow \pi_k(\hat{\mathrm{R}}_{n,m}).$$

De même, la projection induit un homomorphisme

$$\mathrm{P}: \pi_k(\mathrm{V}_{n+m,m})\rightarrow \pi_k(\hat{\mathrm{R}}_{n,m}), \qquad k>0.$$

Supposons $n\geqslant m$ de façon que la condition (2) soit vérifiée. D'après un théorème d'Eckmann, H et P sont alors des isomorphismes et on a

$$\pi_k(\hat{\mathrm{R}}_{n,m})=\mathrm{P}\pi_k(\mathrm{V}_{n+m,m})+\mathrm{H}\pi_{k-1}(\bar{\mathrm{F}}), \qquad k>1, \qquad n\geqslant m.$$

En faisant correspondre à chaque élément $[v_j]$ de $\bar{\mathrm{F}}$ la rotation qui transforme la suite $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m$ dans la suite $v_1, \ldots, v_m$, ou la matrice correspondante, on identifie $\bar{\mathrm{F}}$ à O_m^+, ou l'ensemble des matrices orthogonales unimodulaires à m lignes. La dernière formule devient alors :

$$(4) \qquad \begin{gathered}\pi_k(\hat{\mathrm{R}}_{n,m})=\mathrm{P}\pi_k(\mathrm{V}_{n+m,m})+\mathrm{H}\pi_{k-1}(\mathrm{O}_m^+),\\ k>1, \quad n\geqslant m, \quad mn>1.\end{gathered}$$

Nous remarquons que, dans le cas n assez grand, H est indépendant du choix de $[\bar{e}'_j]$ et que pour définir $\mathrm{H}([f])$, $[f]\in\pi_{k-1}(\mathrm{O}_m^+)$, il suffit de supposer que h_f soit défini seulement pour $[v_j]\in f(s^{k-1})$.

D'après § 6, chap. 1, la variété $\hat{\mathrm{R}}_{n,m}$ et la variété $\hat{\mathrm{R}}_{m,n}$ définies dans le même espace R^{n+m} sont homéomorphes. On peut donc déterminer les groupes d'homotopie de $\hat{R}_{n,m}$ dans le cas $n \leqslant m$ en utilisant les formules (4) pour $\hat{R}_{m,n}$. De plus, la variété $\hat{R}_{n,m}$ est un revêtement de la variété $R_{n,m}$. On a ainsi la proposition suivante :

PROPOSITION 5. —

$$\pi_1(\hat{R}_{n,m}) = 0, \qquad \pi_1(R_{n,m}) \cong Z_2, \qquad nm > 1\,;$$
$$\pi_k(\hat{R}_{n,m}) \approx \pi_k(R_{n,m}) \approx \pi_k(V_{n+m,m}) + \pi_{k-1}(O_m^+), \qquad n \geqslant m, \qquad k > 1,$$
$$\pi_k(\hat{R}_{n,m}) \approx \pi_k(R_{n,m}) \approx \pi_k(V_{n+m,m}) + \pi_{k-1}(O_n^+), \qquad n \leqslant m, \qquad k > 1.$$

Dans le cas $k < n$ la formule (4) devient :

$$(5) \qquad \pi_k(\hat{R}_{n,m}) = H\pi_{k-1}(O_m^+), \qquad n > k > 1, \qquad n \geqslant m.$$

Pour $m = 4$ on a :

$$(6) \qquad \pi_1(O_4^+) \approx Z_2, \qquad \pi_2(O_4^+) = 0, \qquad \pi_3(O_4^+) \approx Z_0 + Z_0,$$

$$(6)' \qquad \left.\begin{cases} \pi_1(\hat{R}_{n,4}) = 0, & \pi_2(\hat{R}_{n,4}) \approx Z_2, \\ \pi_3(\hat{R}_{n,4}) = 0, & \pi_4(\hat{R}_{n,4}) \approx Z_0 + Z_0, \end{cases}\right\} n \geqslant 4,$$

où Z_0 est le groupe des entiers.

Pour $\pi_1(O_4^+)$ et $\pi_3(O_4^+)$ on peut prendre les générateurs

$$f\colon s^1 \to O_4^+, \qquad \text{et} \qquad f_i\colon s^3 \to O_4^+, \qquad (i = 1, 2)$$

définies par les équations suivantes :

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_1, & -y_2, & 0, & 0 \\ y_2, & y_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (y \in s^1),$$

$$f_1(y) = \begin{pmatrix} y_4^2 - y_3^2 - y_2^2 + y_1^2, & 2(y_1y_2 - y_3y_4), & 2(y_1y_3 + y_2y_4, & 0 \\ 2(y_1y_2 + y_3y_4), & y_4^2 - y_3^2 + y_2^2 - y_1^2, & 2(y_2y_3 - y_1y_4), & 0 \\ 2(y_1y_3 - y_2y_4), & 2(y_1y_4 + y_2y_3), & y_4^2 + y_3^2 - y_2^2 - y_1^2, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$(y \in s^3)$;

$$f_2(y) = \begin{pmatrix} y_1, & -y_2, & -y_3, & -y_4 \\ y_2, & y_1, & -y_4, & y_3 \\ y_3, & y_4, & y_1, & -y_2 \\ y_4, & -y_3, & y_2, & y_1 \end{pmatrix}, \qquad (y \in s_3).$$

Aux générateurs f, $f_i (i = 1, 2)$ nous ferons correspondre les générateurs

$$h_f : \sigma^2 \to \hat{\mathrm{R}}_{n,4}, \qquad \text{et} \qquad h_{f_i} : \sigma_4 \to \hat{\mathrm{R}}_{n,4} (i = 1, 2),$$

de $\pi_2(\hat{\mathrm{R}}_{n,4})$ et $\pi_4(\hat{\mathrm{R}}_{n,4})$ en précisant chaque fois l'homotopie h_t ou les éléments $[\bar{e}, \ldots, \bar{e}_4]$ et $[\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_4]$ de $\mathrm{V}_{n+4,4}$. Soit $(x) = (x_1, \ldots, x_{n+4})$ un système de coordonnées de l'espace R^{n+4} et soit $e_1, \ldots, e_{n+4}$ la base de vecteurs correspondante. Nous poserons respectivement :

(a) pour h_f : $[\bar{e}_j] = [e_1, e_{n+2}, e_{n+3}, e_{n+4}]$,
$[\bar{e}'_j] = [e_n, e_{n+1}, e_{n+3}, e_{n+4}]$;

(b) pour h_{f_1} : $[\bar{e}_j] = [e_{n+1}, e_{n+2}, e_3, e_{n+4}]$,
$[\bar{e}'_j] = [3/5\, e_{n-1} - 4/5\, e_{n+2},\ 4/5\, e_n - 3/5\, e_{n+1}, \cdot e_{n+3}, e_{n+4}]$;

(c) pour h_{f_2} : $[\bar{e}_j] = [e_1, e_2, e_3, e_{n+4}]$, $[\bar{e}'_j] = [\bar{e}_n, e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}]$.

Les éléments $h_f(y, t)$, $y \in s^1$ et $h_{f_i}(y, t)$, $y \in s^3 (i = 1, 2)$ sont alors représentés respectivement par les équations suivantes :

(7) $h_f(y, t)$: $(y \in s^1)$,

$$\begin{cases} x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0, \\ x_1 \cos 1/2\, \pi t = x_n \cdot y_1 \sin 1/2\, \pi t + x_{n+1} \cdot y_2 \sin 1/2\, \pi t, \\ x_{n+2} \cos 1/2\, \pi t = - x_n \cdot y_2 \sin 1/2\, \pi t + x_{n+1} \cdot y_1 \sin 1/2\, \pi t ; \end{cases}$$

$(7)_1$ $h_{f_1}(y, t)$: $(y \in s^3)$,

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_4 \cdots = x_{n-2} = 0, \\ x_{n+1} \cos 1/2\, \pi t = 5/3 x_{n-1} \cdot (y_4^2 - y_3^2 - y_2^2 - y_1^2) \sin 1/2\, \pi t \\ \qquad + 5/4\, x_n \cdot [2(y_1 y_2 + y_3 y_4) \sin 1/2\, \pi t - 3/5 \cos 1/2\, \pi t] \\ \qquad + x_{n+3} \cdot 2(y_1 y_3 - y_2 y_4) \sin 1/2\, \pi t, \\ x_{n+2} \cos 1/2\, \pi t = 5/3\, x_{n-1} \cdot [2(y_1 y_2 - y_3 y_4) \sin 1/2\, \pi t - 4/5 \cos 1/2\, \pi t] \\ \qquad + 5/4\, x_n \cdot (y_4^2 - y_3^2 + y_2^2 - y_1^2) \sin 1/2\, \pi t \\ \qquad + x_{n+3} \cdot 2(y_1 y_4 + y_2 y_3) \sin 1/2\, \pi t, \\ x_3 \cos 1/2\, \pi t = 5/3\, x_{n-1} \cdot 2(y_1 y_3 + y_2 y_4) \sin 1/2\, \pi t \\ \qquad + 5/4\, x_n \cdot 2(y_2 y_3 - y_1 y_4) \sin 1/2\, \pi t \\ \qquad + x_{n+3} \cdot (y_4^2 + y_3^2 - y_2^2 - y_1^2) \sin 1/2\, \pi t ; \end{cases}$$

$(7)_2$ $h_{f_2}(y, t)$: $(y \in s^3)$,

$$\begin{cases} x_4 = \cdots = x_{n-1} = 0, \\ x_1 \cos 1/2\, \pi t = (y_1 x_n + y_2 x_{n+1} + y_3 x_{n+2} + y_4 x_{n+3}) \sin 1/2\, \pi t, \\ x_2 \cos 1/2\, \pi t = (- y_2 x_n + y_1 x_{n+1} + y_4 x_{n+2} - y_3 x_{n+3}) \sin 1/2\, \pi t, \\ x_3 \cos 1/2\, \pi t = (- y_3 x_n - y_4 x_{n+1} + y_1 x_{n+2} + y_2 x_{n+3}) \sin 1/2\, \pi t, \\ x_{n+4} \cos 1/2\, \pi t = (- y_4 x_n + y_3 x_{n+1} - y_2 x_{n+2} + y_1 x_{n+3}) \sin 1/2\, \pi t. \end{cases}$$

Les images $h_f(\sigma^2)$ et $h_{f_i}(\sigma^4)$, $i = 1, 2$, représentent respectivement un cycle mod 2 et deux cycles entiers que nous désignerons par S^2 et $S^4_i (i = 1, 2)$. Soient $\omega_2^{4*} = \omega$, $\omega_{2,2}^{4*} = \omega_1$, $\omega_4^{4*} = \omega_2$, les fonctions appartenant à $\Omega(n, 4)$ définies dans § 1 Chap. 1; on a alors :

$$(8) \quad h_f(y) = p([e_1, e_{n+2}, e_{n+3}, e_{n+4}]) \in \bar{U} = \bar{U}_\omega, \qquad y \in s^1;$$

$$(8)_1 \quad h_{f_1}(y) = p([e_{n+1}, e_{n+2}, e_3, e_{n+4}]) \in \bar{U}_1 = \bar{U}_{\omega_1}, \qquad y \in s^3;$$

$$(8)_2 \quad h_{f_2}(y) = p([e_1, e_2, e_3, e_{n+4}]) \in \bar{U}_2 = \bar{U}_{\omega_2}, \qquad y \in s^3;$$

$$(9) \quad S^2 - \{h_f(s^1)\} \subset \overset{+}{N} = \overset{+}{N}_\omega;$$

$$(9)_1 \quad S^4_1 - h_{f_1}(s^3) \subset \overset{+}{N}_1 = \overset{+}{N}_{\omega_1};$$

$$(9)_2 \quad S^4_2 - h_{f_2}(s^3) \subset \overset{+}{N}_2 = \overset{+}{N}_{\omega_2}.$$

Posons maintenant :

$$(10) \quad \begin{cases} [\omega_2^{4*}]^{\wedge}_2 = \mathfrak{r}, & [\omega_{2,2}^{4*}]^{\wedge}_0 = \mathfrak{r}_1, \quad [\omega_4^{4*}]^{\wedge}_0 = \mathfrak{r}_2; \\ I_2(\mathfrak{r}, S^2) = a, & I_0(\mathfrak{r}_i, S^4_j) = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \end{cases}$$

Nous démontrerons les résultats suivants :

$$(11) \qquad a \neq 0, \qquad a_{11} \neq 0, \qquad a_{21} = 0, \qquad a_{22} \neq 0.$$

D'une façon plus précise, on a :

$$(11)' \quad a = 1; \qquad a_{11} = -4, \qquad a_{21} = 0, \qquad a_{22} = 1.$$

Démonstration de (11)'.

1° $$a = 1.$$

Les éléments du voisinage $\overset{+}{N}$ sont représentés par les équations :

$$\begin{cases} x_j = \xi_{j1} x_n + \xi_{j2} x_{n+1} + \xi_{j3} x_{n+3} + \xi_{j4} x_{n+4}, & j = 1, \ldots, n-1, \\ x_{n+2} = \xi_{n1} x_n + \xi_{n2} x_{n+1} + \xi_{n3} x_{n+3} + \xi_{n4} x_{n+4}, \end{cases}$$

L'ensemble $\overset{+}{U}$ est la variété linéaire dans $\overset{+}{N}$ représentée par les équations :

$$\xi_{n1} = \xi_{n2} = 0,$$

et l'ensemble $S^2 - \{h_f(s^1)\}$, d'après (7), est la variété linéaire représentée par :

$$\xi_{11} = \xi_{n2} (= y_1 \operatorname{tg} 1/2\, \pi t), \qquad \xi_{12} = -\xi_{n1} (= y_2 \operatorname{tg} 1/2\, \pi t),$$
$$\xi_{ji} = 0 \text{ pour } (ji) \neq (1, 1), (1, 2), (n, 1) \text{ ou } (n, 2).$$

Il en résulte que le seul élément commun aux ensembles $\ddot{\mathrm{U}}$ et $\mathrm{S}^2 - \{h_f(s^1)\}$ est l'élément central $\ddot{\mathrm{X}} = \ddot{\mathrm{X}}_\omega(\xi_{ji} = 0)$ de $\ddot{\mathrm{U}}$, qui est aussi le seul élément commun à la pseudo-variété $\overline{\mathrm{U}}$ et à S^2 [cf. (8), (9)]. L'indice d'intersection mod 2 de ces deux ensembles en cet élément commun est évidemment 1 ; on a ainsi $a = 1$.

2° $a_{21} = 0$.

D'après $(7)_1$ tout élément de S_1^4 contient le vecteur e_{n+4} tandis que tout élément de la pseudo-variété $\overline{\mathrm{U}}_2$ est contenu dans R^{n+3}, l'espace vectoriel déterminé par les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n+3}$ (cf. § 2, chap. 1). Il en résulte que S_1^4 et $\overline{\mathrm{U}}_2$ n'ont aucun élément en commun et par conséquent $a_{21} = \mathrm{I}_0(r_2, \mathrm{S}_1^4) = 0$.

3° $a_{22} = 1$.

Les éléments de $\ddot{\mathrm{N}}_2$ sont de la forme :

$$\begin{cases} x_j = \xi_{j1}x_n + \xi_{j2}x_{n+1} + \xi_{j3}x_{n+2} + \xi_{j4}x_{n+3}, & j = 1, \ldots n-1\,; \\ x_{n+4} = \xi_{n1}x_n + \xi_{n2}x_{n+1} + \xi_{n3}x_{n+2} + \xi_{n4}x_{n+3}. \end{cases}$$

Considérons $\ddot{\mathrm{N}}_2$ comme un espace euclidien de coordonnées ξ_{ji} et désignons la base de vecteurs correspondante par u_{ji}. L'orientation normale de $\ddot{\mathrm{N}}_2$ est alors déterminée par la suite de vecteurs suivante :

$$\mathrm{A} = \{u_{11}, \ldots, u_{14}, \quad u_{21}, \ldots, u_{24}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{n4}\}.$$

L'ensemble $\ddot{\mathrm{U}}_2$ est la variété linéaire représentée par

$$(12) \qquad \xi_{n1} = \xi_{n2} = \xi_{n3} = \xi_{n4} = 0,$$

dont l'orientation est déterminée par la suite de vecteurs suivante :

$$\mathrm{B} = \{u_{11}, \ldots, u_{14}, \quad u_{21}, \ldots, u_{24}, \ldots, u_{n-1,1}, \ldots, u_{n-1,4}\}.$$

D'après $(7)_2$, et $(9)_2$ l'ensemble $\mathrm{S}_2^4 - \{h_{f_2}(s^3)\}$ est aussi une variété linéaire dans $\ddot{\mathrm{N}}_2$ représentée par :

$$(13) \begin{cases} \xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = \xi_{n4}(= y_1 \operatorname{tg} 1/2\,\pi t), \\ \xi_{12} = -\xi_{21} = \xi_{34} = -\xi_{n3}(= y_2 \operatorname{tg} 1/2\,\pi t), \\ \xi_{13} = -\xi_{24} = -\xi_{31} = \xi_{n2}(= y_3 \operatorname{tg} 1/2\,\pi t), \\ \xi_{14} = \xi_{23} = -\xi_{32} = -\xi_{1n}(= y_4 \operatorname{tg} 1/2\,\pi t), \end{cases}$$

les autres $\xi_{ji} = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ y_1^2 + \ldots + y_4^2 = 1)$.

Cette variété contient évidemment le système de vecteurs :

$$\mathrm{C} = \{u_{11} + u_{22} + u_{33} + u_{n4}, \quad u_{12} - u_{21} + u_{34} - u_{n3}, \quad u_{13} - u_{24} - u_{31} + u_{n2}, \quad u_{14} + u_{23} - u_{32} - u_{n1}\},$$

qui, dans cet ordre, détermine aussi son orientation. Puisque la suite composée $\{B, C\}$ détermine évidemment la même orientation de $\overset{+}{\mathrm{N}}_2$ que le système A, l'indice d'intersection de $\overset{+}{\mathrm{U}}_2 = \overset{+}{\mathrm{U}}_{\omega_2}$ et $\mathrm{S}_2^4 - \{h_{f_2}(s^3)\}$, calculé dans $\overset{+}{\mathrm{N}}_2$ pour leur seul point commun $\overset{+}{\mathrm{X}}_2$, à savoir leur élément central, est égal à $+1$. D'après proposition 1, chap. 1, cet indice d'intersection reste le même en le considérant comme étant calculé dans $\hat{\mathrm{R}}_{n,4}$. Donc

$$a_{22} = \mathrm{I}_0(b_2, \mathrm{S}_2^4) = \mathrm{I}_0\left(\overset{+}{\mathrm{U}}_2, \mathrm{S}_2^4 - \{h_{f_2}(s^3)\}\right) = +1, \text{ (cf. } (8)_2 \text{ et } (9)_2).$$

4° $a_{11} = -4$.

Tout élément de $\overset{+}{\mathrm{N}}_1$ est défini par les équations :

$$\begin{aligned}
x_j &= \xi_{j1}x_{n-1} + \xi_{j2}x_n + \xi_{j3}x_{n+3} + \xi_{j4}x_{n+4}, \qquad j = 1, \dots n-2,\\
x_{n+1} &= \xi_{n-1,1}x_{n-1} + \xi_{n-1,2}x_n + \xi_{n-1,3}x_{n+3} + \xi_{n-1,4}x_{n+4},\\
x_{n+2} &= \xi_{n1}x_{n-1} + \xi_{n2}x_n + \xi_{n3}x_{n+3} + \xi_{n4}x_{n+4}.
\end{aligned}$$

Les ensembles $\overset{+}{\mathrm{U}}_1 = \overset{+}{\mathrm{U}}_{\omega_1}$ et $\mathrm{S}_1^4 - \{h_{f_1}(s^3)\} = \mathfrak{B}_1$ sont des variétés dans $\overset{+}{\mathrm{N}}_1$ représentées respectivement par les équations suivantes (cf. $(7)_1$) :

$$\overset{+}{\mathrm{U}}_1 : \xi_{n-1,1} = \xi_{n-1,2} = \xi_{n1} = \xi_{n2} = 0\ ;$$

$$\mathfrak{B}_1 : \begin{cases}
3/5 \quad \xi_{31} = 2(y_1'y_3' + y_2'y_4'),\\
\qquad 4/5\,\xi_{32} = 2(y_2'y_3' - y_1'y_4'), \qquad \xi_{33} = y_4'^2 + y_3'^2 - y_2'^2 - y_1'^2,\\
3/5\,\xi_{n-1,1} = y_4'^2 - y_3'^2 - y_2'^2 + y_1'^2,\\
\qquad 4/5\,\xi_{n-1,2} = 2(y_1'y_2' + y_3'y_4') - 3/5,\ \xi_{n-1,3} = 2(y_1'y_3' - y_2'y_4'),\\
3/5 \quad \xi_{n,1} = 2(y_1'y_2' - y_3'y_4') - 4/5,\\
\qquad 4/5\,\xi_{n,2} = y_4'^2 - y_3'^2 + y_2'^2 - y_1'^2,\ \xi_{n3} = 2(y_1'y_4' + y_2'y_3'),
\end{cases}$$

les autres $\xi_{ji} = 0$ où $0 \leqslant y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 + y_4'^2 \leqslant 1$,

(on a en effet posé $y_i' = y_i(\operatorname{tg} 1/2\,\pi t)^{\frac{1}{2}}$).

Par un simple calcul on trouve que les deux variétés se coupent suivant quatre points :

$$(y_1', y_2', y_3', y_4') = (\varepsilon_1 . \sqrt{7/10},\ \varepsilon_1 . \sqrt{7/10},\ \varepsilon_2 . \sqrt{1/10},\ -\varepsilon_2 . \sqrt{1/10}),$$
$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = +1/2 \text{ ou } -1/2,$$

où les indices d'intersection, calculés soit dans $\overset{+}{\mathrm{N}}_1$ soit dans $\bar{\mathrm{R}}_{n,4}$ (cf. Proposition 1, chap. 1), sont tous égaux à -1. D'où

$$a_{11} = -4.$$

§ 2. Les groupes d'homotopie des variétés $\mathfrak{C}_{n,4}$ et $\mathfrak{Q}_{n,4}$.

Soient $\mathfrak{C}_{n,m}$ la variété grassmannienne définie dans l'espace $C^{n'+m}$ munie d'une structure unitaire par la forme d'Hermite

$$z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_{n'+m'}\bar{z}_{n'+m'}$$

où (z) est le système de coordonnées canoniques. Soit $U_{n'+m',m'}$ la variété des suites de m' vecteurs orthonormés de $C^{n'+m'}$. La variété $U_{n'+m',m'}$ admet une fibration naturelle dont la base est $\mathfrak{C}_{n,m}$ et dont la fibre est homéomorphe à $U_{m',n'}$ qu'on peut identifier avec le groupe unitaire O'_m. Dans le cas $n \geqslant m$, la fibre est homotope à zéro dans $U_{n'+m',m'}$ par une homotopie qui induit un isomorphisme H du groupe $\pi_{k-1}(U_{m',m'})$ dans $\pi_k(\mathfrak{C}_{n,m})$, $k > 1$. La projection p de la fibration induit aussi un isomorphisme P du groupe $\pi_k(U_{n'+m',m'})$ dans $\pi_k(\mathfrak{C}_{n,m})$ et on a

$$\pi_k(\mathfrak{C}_{n,m}) = \mathrm{P}\pi_k(U_{n'+m',m'}) + \mathrm{H}\pi_{k-1}(O'_m), \qquad n \geqslant m, \qquad k > 1.$$

En particulier,

$$(1) \qquad \pi_k(\mathfrak{C}_{n,m}) = \mathrm{H}\pi_{k-1}(O'_m), \qquad n \geqslant m, \qquad n \geqslant k > 1,$$

et évidemment $\pi_1(\mathfrak{C}_{n,m}) = 0$.

Dans le cas $m = 4$, O'_4 est homéomorphe à $s^3 \times s^1$. Donc :

$$(2) \qquad \pi_1(O'_4) \approx Z_0, \qquad \pi_2(O'_4) = 0, \qquad \pi_3(O'_4) \approx Z_0,$$

dont les générateurs sont déterminés respectivement par les applications suivantes :

$$f_1(y) = \begin{Bmatrix} y_1 + iy_2, & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{où } y = (y_1, y_2) \in s^1 : y_1^2 + y_2^2 = 1\,;$$

$$f_3(y) = \begin{Bmatrix} y_1 + iy_2 & y_3 + iy_4 \\ -y_3 + iy_4 & y_1 - iy_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{où } y = (y_1, \ldots y_4) \in s^3 : y_1^2 + \ldots + y_4^2 = 1.$$

Soient maintenant $g_1, \ldots, g_{n'+2}$ la base canonique de vecteurs de $C^{n'+2}$ et σ^2, σ^4 les cellules bordées respectivement par s^1 et s^3, dont les points sont désignés par les couples (y, t), où $(y, 1) = y \in s^1$ ou s^3, et $0 \leqslant t \leqslant 1$. D'après (1) et (2), on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \pi_1(\mathfrak{C}_{n,4}) = \pi_3(\mathfrak{C}_{n,4}) = 0\,; \\ \pi_k(\mathfrak{C}_{n,4}) = \mathrm{H}\pi_{k-1}(O'_4) \approx Z_0, \qquad k = 2, 4. \end{cases}$$

Aux applications f_1 et f_3 nous ferons correspondre les applications $h_{f_1} : \sigma^2 \to \mathbf{C}_{n,4}$ et $h_{f_3} : \sigma^4 \to \mathbf{C}_{n,4}$ représentant les générateurs de $\pi_2(\mathbf{C}_{n,4})$ et $\pi_4(\mathbf{C}_{n,4})$ définies par les équations suivantes :

$$(4)\quad h_{f_1}(y, t) = p([g_{n'+1}(y_1 + iy_2)\sin 1/2\,\pi t + g_{n'}\cos 1/2\,\pi t,\ g_{n'+2}]);$$

ou

$$(4)'\quad h_{f_1}(y, t) : \begin{cases} z_1 = \dots = z_{n'-1} = 0, \\ z_{n'+1}\cos 1/2\,\pi t = z_{n'}, \qquad (y_1 + iy_2)\sin 1/2\,\pi t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(5)\quad h_{f_3}(y, t) = p([&g_{n'}(y_1 + iy_2)\sin 1/2\,\pi t + g_{n'+1}(y_3 + iy_4)\sin 1/2\,\pi t \\ &\qquad + g_{n'-1}\cos 1/2\,\pi t, \\ &g_{n'}(-y_3 + iy_4)\sin 1/2\,\pi t + g_{n'+1}(y_1 - iy_2)\sin 1/2\,\pi t \\ &\qquad + g_{n'+2}\cos 1/2\,\pi t]).\end{aligned}$$

ou,

$$(5)'\quad h_{f_3}(y, t) : \begin{cases} z_1 = \dots = z_{n'-2} = 0, \\ z_{n'}\cos 1/2\,\pi t = z_{n'-1}(y_1 + iy_2)\sin 1/2\,\pi t \\ \qquad\qquad + z_{n'+2}(-y_3 + iy_4)\sin 1/2\,\pi t, \\ z_{n'+1}\cos 1/2\,\pi t = z_{n'-1}(-y_3 + iy_4)\sin 1/2\,\pi t \\ \qquad\qquad + z_{n'+2}(y_1 - iy_2)\sin 1/2\,\pi t. \end{cases}$$

Les images $h_{f_1}(\sigma^2)$ et $h_{f_3}(\sigma^4)$ représentent des cycles entiers que nous désignerons respectivement par S_0^2 et S_0^4. Définissons les cycles $[\omega]_0^c$, $\omega \in \Omega(n', m')$ par rapport au système des coordonnées (z) ; on aura :

$$(6)\qquad I_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ S_0^2) = 1,$$

$$(7)\qquad I_0([\overline{\omega}_2^{2*}]_0^c,\ S_0^4) = 1.$$

Démontrons par exemple l'équation (7). En supposant $\omega = \overline{\omega}_2^{2*}$, soit $N_\omega = N$ l'ensemble des éléments $Z \in \mathbf{C}_{n,m}$ représentés par un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} z_j = \zeta_{j1} z_{n'-1} + \zeta_{j2} z_{n'+2}, \qquad j = 1, \dots, n'-2, \\ z_{n'} = \zeta_{n'-1,1} z_{n'-1} + \zeta_{n'-1,2} z_{n'+2}, \\ z_{n'+1} = \zeta_{n',1} z_{n'-1} + \zeta_{n',2} z_{n'+2}. \end{cases}$$

Les ensembles $W_\omega = W(\subset N)$ et $S_0^4 \cap N$ sont alors des variétés linéaires dans N représentées respectivement par les équations suivantes :

$$W : \zeta_{n'-1,1} = \zeta_{n',1} = 0 ;$$

$$S_4^0 \cap N : \begin{cases} \zeta_{ji} = \xi_{j2} = 0, \qquad j = 1, \dots n'-2, \\ \zeta_{n'-1,1} = -\bar{\zeta}_{n',2} (= (y_1 + iy_2)\operatorname{tg} 1/2\,\pi t), \\ -\bar{\zeta}_{n-1,2} = \zeta_{n',1} (= (y_3 + iy_4)\operatorname{tg} 1/2\,\pi t), \end{cases}$$

où ζ_{ji} et $\bar{\zeta}_{ji}$ seront des nombres complexes conjugués.

Le seul élément commun aux ensembles W et $S_0^4 \cap N$ est l'élément central Z de N : $z_j = 0$, $j = 1, \ldots, n'-2, n'+1$, où l'indice d'intersection calculé soit dans N, soit dans $C_{n,4}$ est égal à $+1$. Puisque l'adhérence de W est une pseudo-variété représentant géométriquement le cycle $[\bar{\omega}_2^{0*}]_0^c$, qui n'a aucun élément en commun avec S_0^4 n'appartenant pas à N (cf. (5)), on obtient (7).

Les considérations précédentes se généralisent naturellement au cas d'une variété grassmannienne $Q_{n,4}$. En effet, on a : $(n \geqslant 4)$.

$$(8) \qquad \pi_1(Q_{n,4}) = \pi_2(Q_{n,4}) = \pi_3(Q_{n,4}) = 0, \qquad \pi_4(Q_{n,4}) \approx Z_0.$$

Supposons $Q_{n,4}$ définie dans l'espace quaternionien $Q^{n''+1}$ $(n = 4n'')$ de dimension quaternionienne $n''+1$ et les cycles $[\omega]_0^q$ $(\omega \in \Omega(n'', 1))$ définis par rapport à un système de coordonnées quaternioniennes $(q) = (q_1, \ldots q_{n''+1})$. Prenons une sphère s^3 et la cellule σ^4 bordée par s^3. Représentons les points de s^3 par les quaternions y de norme 1 et les points de σ^4 par (y, t) où $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $(y, t) = y \in s^3$. Un générateur de $\pi^4(Q_{n,4})$ est alors déterminé par l'application $f : \sigma^4 \to Q_{n,4}$ telle que $f(y, t)$ soit la droite quaternionienne représentée par les équations suivantes :

$$q_1 = \ldots = q_{n''-2} = 0, \quad q_{n''+1} \cos 1/2\, \pi t = q_{n''} \cdot y \sin 1/2\, \pi t.$$

Désignons par S_q^4 le cycle entier porté par l'image $f(\sigma^4)$. On peut démontrer que :

$$(9) \qquad I_0([\omega_1^{1*}]_0^q \cdot S_q^4) = 1.$$

Identifions maintenant $C^{n'+3}$ à l'espace R^{n+6} $(n = 2n' \geqslant 6)$. Soient $\acute{R}_{n,6}$ et $C_{n,6}$ les variétés grassmanniennes définies respectivement dans R^{n+6} et $C^{n'+3}$. L'application canonique φ' de $C_{n,6}$ dans $\acute{R}_{n,6}$ induit l'homomorphisme des groupes d'homotopie $\pi_k(C_{n,6})$ dans $\pi_k(\acute{R}_{n,6})$, $k > 0$, qui sera désigné par Φ_k. Nous démontrerons :

Proposition 6. — *Pour $4 \leqslant k \leqslant 6$, Φ_k est un isomorphisme sur ; pour $k = 2$, Φ_2 est un homomorphisme sur, en supposant $n \geqslant 6$.*

Démonstration.

Soit $\tilde{\varphi} : U_{n'+3,3} \to V_{n+6,6}$ l'application définie par

$$\varphi([w_1, w_2, w_3]) = [w_1, iw_1, w_2, iw_2, w_3, iw_3].$$

Prenons maintenant un élément fixe $Z \in C_{n,6}$ et désignons par $\overline{U}_{3,3}$ la fibre sur Z dans la fibrationde $U_{n'+3,3}$ et par $\overline{V}_{6,5}$ la fibre sur $\varphi'(Z) \in \acute{R}_{n,6}$

dans la fibration de $V_{n+6,6}$. La restriction de $\tilde{\varphi}$ à $\overline{U}_{3,3}$ définit alors une application $\overline{\varphi} : \overline{U}_{3,3} \to \overline{V}_{6,5}$.

Puisque $n \geqslant 6$, on a $\overline{U}_{3,3} \simeq 0$ dans $U_{n'+3,3}$ et $\overline{V}_{6,5} \simeq 0$ dans $V_{n+6,6}$. Il est clair qu'on peut choisir la déformation (h'_t) de $\overline{U}_{3,3}$ en un point et (h_t) de $\overline{V}_{6,5}$ en un point de telle façon qu'on ait $\tilde{\varphi}h'_t = h_t\tilde{\varphi}$. On a aussi $\varphi'p' = p\tilde{\varphi}$ où $p : V_{n+6,6} \to \hat{R}_{n,6}$ et $p' : U_{n'+3,3} \to C_{n,6}$ sont les projections dans les fibrations correspondantes. Il en résulte :

$$(10) \qquad \varphi'p'h'_t = ph_t\tilde{\varphi}.$$

Les applications $\overline{\varphi}$, φ' et les homotopies (h_t), (h'_t) définissent respectivement les homomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_k &: \pi_{k-1}(\overline{U}_{3,3}) \to \pi_{k-1}(\overline{V}_{6,5}), \quad k > 1,\\
\Phi_k &: \pi_k \quad (C_{n,6}) \to \pi_k(\hat{R}_{n,6}),\\
H_k &: \pi_{k-1}(\overline{V}_{6,5}) \to \pi_k(\hat{R}_{n,6}), \quad k > 1,\\
H'_k &: \pi_{k-1}(\overline{U}_{3,3}) \to \pi_k(C_{n,6}), \quad k > 1.
\end{aligned}$$

De (10) on déduit :

$$(11) \qquad H_k\overline{\Phi}_k = \Phi_k H'_k, \qquad k > 1.$$

On peut considérer $\overline{U}_{3,3}$ et $\overline{V}_{6,5}$ respectivement comme un groupe unitaire et un groupe de rotations. En considérant $\overline{U}_{3,3}$ comme un sous-groupe de $\overline{V}_{6,5}$, on sait que l'espace homogène $\overline{V}_{6,5}/\overline{U}_{3,3}$ est homéomorphe à l'espace projectif complexe K_3 de dimension complexe 3. Puisque $\pi_k(K_3) = 0$, pour $k = 1, 3, \dots 6$, et que l'application identique du groupe $\overline{U}_{3,3}$ dans $\overline{V}_{6,5}$ est autre que l'application $\overline{\varphi}$, on en déduit :

$\overline{\Phi}_2$ est un homomorphisme sur ;

$\overline{\Phi}_k$ est un isomorphisme sur pour $k = 4, \dots 6$.

Dans le cas $k \leqslant 6 \leqslant n$, H_k et H'_k sont aussi des isomorphismes surs. En tenant compte de (11), il en résulte que Φ_k est un homomorphisme sur pour $k = 2$ et est un isomorphismes sur pour $k = 4, 5, 6$.

C. q. f. d.

Remarquons qu'on a en effet $\pi_1(\overline{U}_{3,3}) \approx Z_0$, $\pi_2(\overline{U}_{3,3}) = 0$. D'où

$$(12) \qquad \pi_2(C_{n,6}) \approx Z_0, \qquad \pi_3(C_{n,6}) = 0, \qquad n \geqslant 6.$$

On peut représenter un générateur de $\pi_1(\overline{\mathrm{U}}_{3,3})$ par l'application suivante :

$$f : y \to \begin{Bmatrix} y_1 + i y_2, & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad y \in s^1 : y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Soit σ^2 la cellule bordée par s^1 dont les points sont représentés par (y, t), où $y = (y, 1) \in s^1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. A f correspond une application $h_f : \sigma^2 \to \mathfrak{C}_{n,6}$ telle que, $(z) = (z_1, \ldots z_{n'+3})$ étant un système de coordonnées dans $C^{n'+3}$, $h_f(y, t)$ est l'élément $Z \in \mathfrak{C}_{n,6}$ représenté par les équations (4)′. Soit S^2_c le cycle entier de $\mathfrak{C}_{n,6}$ représenté par l'image sphérique de h_f ; on aura alors (cf. (6)) :

$$(13) \qquad I_0([\omega_1^{3*}]_0^c,\ S_c^2) = 1.$$

De même, on a $\pi_1(\overline{\mathrm{V}}_{6,5}) \approx \pi_2(\mathring{\mathrm{R}}_{n,6}) \approx Z_2$, et

$$(14) \qquad \pi_2(\overline{\mathrm{V}}_{6,5}) = \pi_3(\mathring{\mathrm{R}}_{n,6}) = 0.$$

Un générateur de $\pi_1(\overline{\mathrm{V}}_{6,5})$ est représenté par l'application

$$\bar{\varphi} f : y \to \begin{Bmatrix} y_1 & y_2 & 0, \\ -y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_4 \end{Bmatrix}$$

où $y \in s^1$, et E_4 est la matrice unité à 4 lignes. Le générateur correspondant de $\pi_2(\mathring{\mathrm{R}}_{n,6})$ définit un cycle mod 2 de dimension 2 dans $\mathring{\mathrm{R}}_{n,6}$, soit S^2_R. On vérifie facilement :

$$(15) \qquad I_2([\omega_2^{6*}]_2^{\wedge},\ S_R^2) = 1.$$

§ 3. La classification des applications d'un complexe de dimension 4 dans les variétés grassmanniennes $\mathfrak{C}_{n,4}$.

Soit K^4 un complexe de dimension 4. Nous allons démontrer que les classes d'homotopie des applications de K^4 dans $\mathfrak{C}_{n,4}$ $(n = 2n' \geqslant 4)$ sont en correspondance biunivoque avec les couples de deux classes entières de cohomologie C^2, C^4 dans K^4. D'une façon plus précise, on a :

Proposition 7. — *a) A chaque couple de classes entières de coho-*

mologie $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}^4$ *dans* K^4 *correspond une application* $g : K^4 \to \mathbf{C}_{n,4}$ *telle que :*

$$(1) \qquad g^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c = \mathbf{C}^2, \qquad g^*\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c = \mathbf{C}^4,$$

où $\overline{\omega}_1^2$, $\overline{\omega}_2^2 \in \Omega(n', 2)$.

b) Deux applications $g_i : K^4 \to \mathbf{C}_{n,4}$ $(i = 1, 2)$ *sont homotopes si et seulement si*

$$(2) \qquad \begin{cases} g_1^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c = g_2^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c, \\ g_1^*\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c = g_2^*\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c. \end{cases}$$

Démonstration de a). — Prenons deux subdivisions cellulaires duales $L_{(\sigma)}$ et $L_{(\sigma^*)}$ de $\mathbf{C}_{n,4}$ et définissons les cycles $[\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c$, $[\overline{\omega}_2^{2*}]_0^c$ dans $L_{(\sigma)}$, les cocycles $\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c$, $\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c$ dans $L_{(\sigma^*)}$ (cf. chap. 1). Dans ce qui suit toutes les applications dans $\mathbf{C}_{n,4}$ seront, en prenant, si nécessaire, des subdivisions plus fines du complexe considéré, des applications cellulaires dans $L_{(\sigma^*)}$.

Soit K^i le squelette de K de dimension i. Définissons $g'(K^1) =$ un sommet de $L_{(\sigma^*)}$. Choisissons un cocycle $C^2 \in \mathbf{C}^2$ et étendons g' au squelette K^2 de façon que, en considérant $g'(\sigma^2)$, $\sigma^2 \in K^2$, comme un cycle, on ait $g'(\sigma^2) \sim C^2(\sigma^2).S_0^2$, où S_0^2 est le cycle sphérique défini dans § 2. D'après (6) § 2, on a alors

$$I_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ g'(\sigma^2)) = C^2(\sigma^2) \cdot I_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ S_0^2) = C^2(\sigma^2),$$

ou

$$(3) \qquad g'^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c = C^2.$$

De plus, on a, si $\partial\sigma^3 = \sum \sigma_i^2$,

$$g'(\partial\sigma^3) \simeq g'(\textstyle\sum \sigma_i^2) \simeq \sum g'(\sigma_i^2) \simeq \sum C^2(\sigma_i^2) \cdot S_0^2 = \partial C^2(\sigma^3) \cdot S_0^2 = 0.$$

Il en résulte qu'on peut étendre g'/K^2 à l'intérieur de chaque $\sigma^3 \in K^3$ et puis à K^4 puisque $\pi_3(\mathbf{C}_{n,4}) = 0$.

Prenons maintenant un cocycle $C^4 \in \mathbf{C}^4$ et définissons une application $g : K^4 \to \mathbf{C}_{n,4}$ telle que :

$$(4) \qquad g/K^3 = g'/K^3,$$

(5) pour $\sigma^4 \in K^4$, $g(\sigma^4)$ et $g'(\sigma^4)$ forment une sphère

$$\simeq [C^4(\sigma^4) - I_0([\omega_2^{2*}]_0^c,\ g'(\sigma^4))] \cdot S_0^4,$$

où S_0^4 est le cycle sphérique défini dans § 2.

De (7) § 2 on déduit

$$\mathrm{I}_0([\overline{\omega}^{2*}]_0^c,\ g(\sigma^4)) - \mathrm{I}_0([\overline{\omega}_2^{2*}]_0^c,\ g'(\sigma^4)) = \mathrm{C}^4(\sigma^4) - \mathrm{I}_0([\overline{\omega}_2^{2*}]_0^c,\ g'(\sigma^4))$$

d'où

$$\mathrm{C}^4(\sigma^4) = \mathrm{I}_0(\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c,\ g(\sigma^4)) = g^*\{\overline{\omega}_2^2\}_0^c(\sigma^4)$$

pour chaque $\sigma^4 \in \mathrm{K}^4$, ou

$$(6) \qquad g^*\{\omega_2^2\}_0^c = \mathrm{C}^4.$$

D'après (3), (4) et (6), g est une application vérifiant (1).

Démonstration de b). — Soit J le segment $1 \leqslant t \leqslant 2$. Puisque $\mathrm{G}_{n,4}$ est connexe et simplement connexe, on peut définir une application

$$f:\ \mathrm{K}^4 \times \partial\mathrm{J} + \mathrm{K}^1 \times \mathrm{J} \to \mathrm{G}_{n,4}$$

telle que

$$(7) \qquad f/\mathrm{K}^4 \times (j) = g_j/\mathrm{K}^4, \qquad j = 1,\ 2.$$

D'après (2), il existe une cochaîne entière D^1 dans K^4 telle que

$$(8) \qquad g_1^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c - g_2^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c = \delta\mathrm{D}^1.$$

Remplaçons maintenant l'application f par une application

$$f'/\mathrm{K}^4 \times \mathrm{J} + \mathrm{K}^1 \times \mathrm{J}$$

tels que

$$(\alpha) \qquad f'/\mathrm{K}^4 \times \partial\mathrm{J} + \mathrm{K}^0 \times \mathrm{J} = f,$$

(β) pour $\sigma^1 \in \mathrm{K}^1$, $f'/\sigma^1 \times \mathrm{J}$ et $f/\sigma^1 \times \mathrm{J}$ forment une sphère $\simeq [\mathrm{D}^1(\sigma^1) - \mathrm{I}_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ f(\sigma^1 \times \mathrm{J}))] \cdot \mathrm{S}_0^2$.

On en déduit (cf. (6) § 2) :

$$\mathrm{I}_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ f'\sigma' \times \mathrm{J})) = \mathrm{D}^1(\sigma^1).$$

D'où, en tenant compte de (8), pour $\sigma^2 \in \mathrm{K}^2$,

$$\mathrm{I}_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ f'(\partial\sigma^2 \times \mathrm{J})) = \mathrm{D}^1(\partial\sigma^2) = \delta\mathrm{D}^1(\sigma^2) = g_1^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c(\sigma^2) - g_2^*\{\overline{\omega}_1^2\}_0^c(\sigma^2),$$

ou, d'après (7),

$$\mathrm{I}_0([\overline{\omega}_1^{2*}]_0^c,\ f'(\partial(\sigma^2 \times \mathrm{J}))) = 0.$$

Il en résulte que (cf. (3), (6), § 2),

$$f'(\partial(\sigma^2 \times \mathrm{J})) \simeq 0, \qquad \text{pour chaque} \qquad \sigma^2 \in \mathrm{K}^2.$$

On peut donc étendre f' à $K^2 \times J$ et puis à $K^3 \times J$, puisque $\pi^3(C_{n,4}) = 0$.

Le procédé précédent s'appuie sur la première équation de (2) et le fait que S_0^2 forme un générateur de $\pi_2(C_{n,4})$ vérifiant l'équation (6) § 2. En tenant compte de la deuxième équation de (1) et du fait que S_0^4 forme un générateur de $\pi_4(C_{n,4})$ vérifiant (7) § 2, on peut aussi remplacer f' par une application

$$f'' : K^4 \times J \rightarrow C_{n,4}$$

telle que $f''/K^4 \times \partial J + K^2 \times J \equiv f'$. Cette application définit alors une homotopie de g_1 à g_2 (cf. (7)) et (b) est ainsi démontré.

D'après (8) et (9) de § 2, on a aussi le théorème suivant :

Proposition 7'. — *A chaque classe entière de cohomologie* Q^4 *d'un complexe* K *de dimension 4 correspond une application* $g : K \rightarrow Q_{n,4}$ $(n = 4n'' \geqslant 4)$ *tel que* $g^*\{\omega_1^4\}_0^q = Q^4$. *Deux applications* $g_i : K \rightarrow Q_{n,4}$ $(i = 1, 2)$ *sont homotopes si et seulement si* $g_1^*\{\omega_1^4\}_0^q = g_2^*\{\omega_1^4\}_0^q$.

En appliquant cette méthode à la classification des applications d'un complexe K^4 dans $\hat{R}_{n,4}$ ou $R_{n,4}$ $(n > 4)$, on ne trouve que des résultats partiels. Pourtant, à propos du problème qui nous intéresse dans ce travail, il suffit de démontrer le théorème suivant :

Proposition 7''. — *Supposons que le complexe* K^4 *n'admette aucune co-torsion de dimension 4. Alors deux applications*

$$f_i : K^4 \rightarrow R_{n,4} (i = 1, 2)$$

sont homotopes si

$$f_1^*\{\omega_2^4\}_0^{\wedge} = f_2^*\{\omega_2^4\}_2^{\wedge}, \tag{9}$$

$$f_1^*\{\omega_4^4\}_0^{\wedge} = f_2^*\{\omega_4^4\}_0^{\wedge}, \qquad f_1^*\{\omega_{2,2}^4\}_0^{\wedge} = f_2^*\{\omega_{2,2}^4\}_0^{\wedge}. \tag{10}$$

Démonstration. — Nous définirons les cycles $[\omega_2^{4*}]_2^{\wedge}$, etc. dans une subdivision cellulaire $\hat{K}_{(x)}$ de $\hat{R}_{n,4}$ canonique par rapport à un certain système de coordonnées (x), les cocycles $\{\omega_2^4\}_2^{\wedge}$, etc., dans la subdivision duale $\hat{K}_{(x^*)}$ et nous supposons que f_i ainsi que toutes les applications considérées dans ce qui suit sont des applications cellulaires dans $\hat{K}_{(x^*)}$, en passant si nécessaire aux subdivisions plus fines du complexe considéré. D'après (6)', (10), (11)' de § 1 on peut démontrer qu'il existe une application

$$f : K^4 \times \partial J + K^3 \times J \rightarrow \hat{R}_{n,4}$$

tel que

$$f/K^4 \times (j) = f_j/K^4, \qquad j = 1, 2. \tag{11}$$

Soient A_i^3 $(i = 1, 2)$ les cochaînes entières dans K^4 tel que

$$(12) \qquad f_1^* \mathfrak{y}_i - f_2^* \mathfrak{y}_i = \delta A_i^3, \qquad (\text{cf. } (10)),$$

où on a posé (cf. § 1 (10)) :

$$\{\omega_{2,2}^4\}_0^\wedge = \mathfrak{y}_1, \qquad \{\omega_4^4\}_0^\wedge = \mathfrak{y}_2, \qquad [\omega_{2,2}^{4*}]_0^\wedge = \mathfrak{r}_1, \qquad [\omega_{4*}^4]_0^\wedge = \mathfrak{r}_2.$$

Supposons que la sphère $f(\partial(\sigma^4 \times J))$ est

$$\simeq B_1(\sigma^4) \cdot S_1^4 + B_2(\sigma^4) \cdot S_2^4 \qquad (\text{cf. § } 1),$$

où B_i peuvent être considérés comme des cochaînes entières de dimension 4. Définissons deux autres cochaînes entières C_i^3 par

$$(13) \qquad C_i^3(\sigma^3) = I_0(b_i, f(\sigma^3 \times J)).$$

On déduit ainsi (cf. (10), (11) de § 1) :

$$\begin{aligned} a_{i_1} B_1(\sigma^4) + a_{i_2} B_2(\sigma^4) &= I_0(b_i, f(\partial(\sigma^4 \times J))) \\ &= I_0(\mathfrak{r}_i, f(\sigma^4 \times 1)) - I_0(\mathfrak{r}_i, f(\sigma^4 \times 2)) - I_0(\mathfrak{r}_i, f(\partial\sigma^4 \times J)) \\ &= I_0(\mathfrak{r}_i, f_1(\sigma^4)) - I_0(\mathfrak{r}_i, f_2(\sigma^4)) - I_0(\mathfrak{r}_i, f(\partial\sigma^4 \times J)) \\ &= \delta A_i^3(\sigma^4) - \delta C_i^3(\sigma^4), \end{aligned}$$

d'où (cf. $11)'$ § 1), $b_i B_i \sim 0$, où b_i sont des entiers non nuls. Par hypothèse il n'existe pas de co-torsion de dimension 4 dans K. Il en résulte que $B_i \sim 0$. Par le procédé classique on peut alors remplacer l'application f par une autre

$$f' : K^4 \times \partial J + K^3 \times J \to \hat{R}_{n,4}$$

telle que

$$(\alpha)' \qquad f'/K^4 \times \partial J + K^3 \times J \equiv f,$$

$$(\beta)' \qquad f'(\partial(\sigma^4 \times J)) \simeq 0 \qquad \text{pour chaque } \sigma^4 \in K^4.$$

Par conséquent cette application peut être étendue à $K^4 \times J$, ce qui réalise l'homotopie de f_1 et f_2. Notre théorème est ainsi démontré.

CHAPITRE IV

LA STRUCTURE TANGENTE A UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE ET SES STRUCTURES SUBORDONNÉES

§ 1. Les structures presque complexes ou presque quaternioniennes d'une variété différentiable.

A une variété différentiable M de dimension m, munie d'une structure riemannienne on associe d'une manière évidente une O_m-structure appelée la *structure tangente* de M, dont la base est M, les fibres étant les sphères unités dans les espaces tangents de M ; cette structure est indépendante de la structure riemannienne. Si M est orientable et $+$M et $-$M les deux variétés *orientées* déduites de M, la structure tangente de M admet alors deux O_m^+-structures subordonnées correspondant à $+$M et $-$M respectivement. Les classes caractéristiques et les polynômes de Stiefel-Whitney et de Pontrjagin seront alors désignés respectivement par $\{\omega\}_i(M)$, $\{\omega\}_i^+(+M)$, $W_2(M)$, etc. Ce sont des invariants de la structure différentiable de la variété M. Le théorème 5 de § 3 chap. II est pour la structure tangente équivalent à :

Une variété différentiable M *de dimension* m *est orientable si et seulement si* $W_2^1(M) = 0$.

Si la variété *orientée* $+$M admet une O'_m-structure $\mathfrak{S}$ subordonnée à sa O_m^+-structure correspondante, nous dirons que $+$M est *presque complexe* et que $\mathfrak{S}$ est une *structure presque complexe de* $+$M. Le théorème 7 de § 3 chap. II et le théorème 9 de § 4 chap. II donnent quelques conditions nécessaires pour l'existence d'une structure presque complexe. En particulier, si M est de dimension 4, ces conditions deviennent :

$$(1) \qquad X_0^4(+M) = C_0^4(\mathfrak{S}),$$
$$(2) \qquad W_2^2(+M) = C_2^2(\mathfrak{S}),$$
$$(3) \qquad P_0^4(+M) = C_0^2(\mathfrak{S}) \cup C_0^2(\mathfrak{S}) - 2C_0^4(\mathfrak{S}).$$

Il résulte de (1) et (3) :

$$(4)\qquad P_0^4(+M) + 2X_0^4(+M) = C_0^2(\mathfrak{S}) \cup C_0^2(\mathfrak{S}).$$

Nous démontrerons que les conditions (2) et (4) sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes. D'une façon plus précise, on a

THÉORÈME 10. — *(a) Pour qu'une variété orientée $+M$ admette une structure presque complexe $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit qu'il existe une classe de cohomologie entière C_0^2 de dimension 2 telle que*

$$(5)\qquad W_2^2(+M) = C_2^2,$$

et

$$(6)\qquad P_0^4(+M) + 2X_0^4(+M) = C_0^2 \cup C_0^2,$$

où C_2^2 est la classe mod 2 déduite de C_0^2 par réduction mod 2.

(b) Le système des structures presque complexes de $+M$ est en correspondance biunivoque avec le système des classes C_0^2 satisfaisant aux conditions (5) et (6).

Démonstration. — Nos conditions étant évidemment nécessaires, démontrons qu'elles sont suffisantes. Soient $\hat{R}_{n,4}$ ($n = 2n'$ assez grand) défini dans un espace vectoriel R^{n+4} de dimension $n+4$ et $C_{n,4}$ défini dans le même espace muni d'une structure unitaire. La O_4^+-structure correspondant à la variété orientée $+M$ est alors induite par une certaine application, soit f, de M dans $\hat{R}_{n,4}$. D'après proposition 7, § 3 chap. III il existe une application

$$g : M \to C_{n,4}$$

telle que

$$(7)\qquad \begin{cases} g^*\{\bar{\omega}_1^2\}_0^c = C_0^2, \\ g^*\{\bar{\omega}_2^2\}_0^c = P_0^4(+M) + X_0^4(+M). \end{cases}$$

Il en résulte, en désignant par φ' l'application canonique de $C_{n,4}$ dans $\hat{R}_{n,4}$ et en posant $\varphi' g = f$:

$$\begin{aligned} f^*\{\omega_4^4\}_0^{\wedge} &= g^*\varphi'^*\{\omega_4^4\}_0^{\wedge} = g^*\{\omega_2^2\}_0^c \quad &&\text{(lemme, § 4, chap. II)} \\ &= g^*\{\bar{\omega}_1^2\}_0^c \cup g^*\{\bar{\omega}_1^2\}_0^c - g^*\{\bar{\omega}_2^2\}_0^c \quad &&\text{(cf. § 4, (5), chap. I)} \\ &= C_0^2 \cup C_0^2 - P_0^4(+M) - X_0^4(+M) &&\text{(cf. (7))} \\ &= X_0^4(+M), &&\text{(cf. (6))} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(8)\qquad \bar{f}^*\{\omega_4^4\}_0^{\wedge} = f^*\{\omega_4^4\}_0^{\wedge}.$$

De même, on a :

$$(9) \qquad \bar{f}^*\{\omega^4_{2,2}\}^{\wedge}_0 = f^*\{\omega^4_{2,2}\}^{\wedge}_0,$$

et

$$(10) \qquad \bar{f}^*\{\omega^4_2\}^{\wedge}_2 = f^*\{\omega^4_2\}^{\wedge}_2.$$

D'après proposition $7''$, § 3, chap. III, on déduit de (8), (9) et (10)

$$f \simeq \bar{f} = \varphi' g.$$

La structure $g^*\mathfrak{C}_{n,4}$ est donc subordonnée à la structure $f^*\hat{\mathfrak{R}}_{n,4}$, ou la $O^{\wedge}_4$-structure tangente correspondant à $+M$. Ceci démontre (a).

(b). La correspondance biunivoque entre les structures presque complexes et les classes C^2_0 vérifiant (5) et (6) résulte du fait que $C^4_0(g^*\mathfrak{C}_{n,4})$ est complètement déterminé par les classes C^2_0 et $P^4_0(+M)$ (cf. la proposition 7 (b), § 4, chap. III et (3)).

Nous dirons qu'une variété orientée $+M$ admet une *structure presque quaternionienne* (ou qu'elle est *presque quaternionienne*) si sa structure tangente en admet une. On peut démontrer alors le théorème suivant en partant de la proposition $7'$, § 3, chap. III et théorème 8 de § 3, chap. II.

THÉORÈME 11. — *Pour qu'une variété orientée $+M$ de dimension 4 admette une structure presque quaternionienne, il faut et il suffit que :*

$$W^2_2(+M) = 0, \qquad P^4_0(+M) + 2X^4_0(+M) = 0.$$

Il n'existe alors qu'une seule structure presque quaternionienne de $+M$.

Pour les variétés de dimension 6, on a

THÉORÈME 12. — *Pour qu'une variété orientée $+M$ de dimension 6 ait une structure presque complexe, il faut et il suffit qu'il existe une classe entière C^2_0 de la variété M telle que*

$$(12) \qquad C^2_2 = W^2_2(+M).$$

Démonstration. — La nécessité de la condition (12) étant impliquée dans théorème 7 § 3, chap. II, nous démontrerons qu'elle est aussi suffisante. On suppose donc l'existence de C^2_0 vérifiant (12).

Soient $C_{n,6}$ ($n = 2n' > 6$) et $\hat{R}_{n,6}$ les variétés grassmanniennes définies dans $C^{n'+3}$ et son espace associé R^{n+6} respectivement, et φ' l'application canonique de $C_{n,6}$ dans $\hat{R}_{n,6}$. Soit f : $M \to \hat{R}_{n,6}$ l'application qui induit la structure tangente de $+M$. Désignons par M^k le squelette de M de dimension k. En utilisant (13) de § 2, chap. III, on peut définir une application $g : M^3 \to \mathfrak{C}_{n,6}$ tel que $g^*\{\omega_1^3\}_0^c = \mathfrak{C}_0^c$. Il en résulte

$$f^*\{\omega_2^6\}_2^{\wedge} = (\varphi' g)^*\{\omega_2^6\}_2^{\wedge}, \qquad (= \mathfrak{C}_2^2)$$

et par conséquent en utilisant (15) de § 2 chap. III (cf. la démonstration de proposition 7″, chap. III)

$$f/M^2 \simeq \varphi' g/M^2 \qquad \text{dans} \qquad \dot{\mathrm{R}}_{n,6}.$$

On peut donc déformer f dans une application $f_2 : M \to \dot{\mathrm{R}}_{n,6}$ telle que $f_2/M^2 \equiv \varphi' g/M^2$. Puisque $\pi^3(\dot{\mathrm{R}}_{n,6}) = 0$ (cf. (14), § 2, chap. III), on peut déformer donc f_2 dans $f_3 : M \to \dot{\mathrm{R}}_{n,6}$ tel que $f_3/M^3 \equiv \varphi' g/M^3$, d'où $f_3(M^3) \subset \varphi'(\mathfrak{C}_{n,6})$. Supposons maintenant que nous ayons déformé f dans $f_k : M \to \dot{\mathrm{R}}_{n,6}$ tel que $f_k(M^k) \subset \varphi'(\mathfrak{C}_{n,6})$, où $3 \leqslant k < 6$. Pour une cellule $\sigma = \sigma^{k+1} \in M^{k+1}$ quelconque l'application $f_k/\partial\sigma$ définit une application $g_k : \partial\sigma \to \mathfrak{C}_{n,6}$ telle que $\varphi' g/\partial\sigma \equiv f_k/\partial\sigma$ soit homotope à zéro dans $\dot{\mathrm{R}}_{n,6}$. D'après proposition 6 ou (12) § 2, chap. III, on a donc $g_k \simeq 0$ dans $\mathfrak{C}_{n,6}$ et par conséquent on peut l'étendre à une application $g_k : \sigma \to \mathfrak{C}_{n,6}$. Les applications f_k/σ et $\varphi' g_k/\sigma$ définissent un certain élément α de $\pi_{k+1}(\dot{\mathrm{R}}_{n,6})$. D'après la proposition 6, il existe un élément α' de $\pi_{k+1}(\mathfrak{C}_{n,6})$ tel que $\Phi_{k+1}\alpha' = \alpha$. Définissons maintenant une application $g'_k : \sigma \to \mathfrak{C}_{n,6}$ telle que $g'_k(\sigma)$ et $g_k(\sigma)$ forment une image sphérique appartenant à l'élément α'. L'élément de $\pi_{k+1}(\dot{\mathrm{R}}_{n,6})$ représenté par $f_k(\sigma)$ et $\varphi' g'_k(\sigma)$ est alors $\alpha - \Phi_k \alpha' = 0$. Il en résulte que $f_k/\sigma \simeq \varphi' g'_k/\sigma$ rel. $\partial\sigma$. On peut donc déformer f_k en une application $f_{k+1} : M \to \dot{\mathrm{R}}_{n,6}$, telle que $f_{k+1}/M^{k+1} \cong \varphi' g_k/M^{k+1}$ et par conséquent $f_{k+1}(M^{k+1}) \subset \varphi'(\mathfrak{C}_{n,6})$.

Par récurrence on obtient enfin une application $g' : M \to \mathfrak{C}_{n,6}$ telle que $f \simeq \varphi' g'$. La structure $g'^*\mathfrak{S}_{n,6}$ est alors une structure presque complexe de la variété $+M$.

C. q. f. d.

§ 2. Quelques exemples.

Nous énonçons d'abord deux lemmes dont le premier est une simple conséquence de la définition des classes caractéristiques (cf.

(1) de § 2, chap. II) et dont le deuxième sera admis sans démonstration.

Lemme 1. — Si une variété orientée $+M$ de dimension m peut être plongée dans un espace euclidien de dimension $m+1$, on a

$$\{\omega\}_i^{\wedge}(+M)=0, \qquad i=0 \text{ ou } 2, \qquad \omega \neq \omega_m^m \in \Omega(m, m).$$

Lemme 2. — Pour une variété orientée $+M$ de dimension m la valeur de la classe $X_0^m(+M)$ sur le cycle $+M$ est égal à $(-1)^m\gamma$, où γ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété M.

Exemples.

(*a*) Pour une sphère orientée S^{4k} de dimension $4k$ soit s la classe engendrant le groupe de cohomologie de dimension $4k$, qui prend la valeur $+1$ pour le cycle S^{4k}. On a alors, d'après les lemmes 1 et 2

$$X_0^{4k}(S^{4k})=2s.$$

$$\{\omega\}_0^{\wedge}(S^{4k})=0, \qquad \text{pour} \qquad \omega \neq \omega_{4k}^{4k} \in \Omega(4k, 4k).$$

Il en résulte

$$P_0(S^{4k}, t)=1.$$

Si la sphère S^{4k} admet une structure presque complexe $\mathfrak{S}$, on aura

$$C_0^{4k}(\mathfrak{S})=X_0^{4k}(S^{4k})=2s,$$

d'où

$$C_0(\mathfrak{S}, t)=C_0(\mathfrak{S}, it)=1+2s\cdot t^{4k}.$$

Mais alors on a

$$C_0(\mathfrak{S}, t) \cup C_0(\mathfrak{S}, it)=(1+2s\cdot t^{4k})^2=1+4s\cdot t^{4k} \neq P_0(S^{4k}, t),$$

ce qui est contraire au théorème 9. Donc :

Une sphère de dimension $4k$ n'admet aucune structure presque complexe.

Un théorème général concernant les structures presque complexes des sphères contient notre théorème comme cas particulier (cf. A. Kirchhoff, Sur l'existence de certains champs tensoriels sur les sphères, *C. R. Paris*, 225 (1947), 1258-1260).

(*b*) Plus généralement, si une variété orientée M de dimension $4k$ est telle que

$$X_0^{4k}(M) \neq 0,$$

et

$$P_0^{4j}(M)=0, \qquad 0<j<k,$$

la variété $+M$ ainsi que $-M$ n'admet aucune structure presque complexe. Un exemple autre que S^{4k} est fourni par les variétés $H_p^{4k}(p > 1)$ de dimension $4k$ définies de la façon suivante :

Prenons une sphère S^{4k} avec $2p$ trous symétriques deux à deux par rapport au plan équatorial de la sphère S^{4k}. Identifions par symétrie les bords de chaque paire de trous. La variété orientable ainsi obtenue est H_p^{4k}. On a alors :

(α) $$X_0^{4k}(+H_p^{4k}) = 2(1-p)\cdot s,$$

(β) H_p^{4k} peut être plongé dans un espace euclidien de dimension $4k+1$, où s est la classe engendrant le groupe de cohomologie de dimension $4k$, qui prend la valeur $+1$ pour le cycle représenté par la variété orientée $+H_p^{4k}$.

(c) Soit K le plan projectif complexe de dimension réelle $4k$. Cette variété douée d'une orientation naturelle conformément à sa structure complexe $\mathfrak{S}$ donnée sera désignée par $+K$. Soient z_0^2 et z_0^4 les classes de cohomologie correspondant à la droite complexe et au plan complexe respectivement. On a alors

$$X_0^4(+K) = 3z_0^4,$$
$$C_0^2(\mathfrak{S}) = 3z_0^2, \qquad C_0^4(\mathfrak{S}) = 3z_0^4,$$

d'où

$$W_2^2(+K) = C_2^2(\mathfrak{S}) = z_2^2,$$

et

$$P_0^4(+K) = C_0^2(\mathfrak{S}) \cup C_0^2(\mathfrak{S}) - 2C_0^4(\mathfrak{S}),$$
$$= 9z_0^2 \cup z_0^2 - 6z_0^4 = 3z_0^4.$$

Pour la variété $-K$ on a (cf. théorème 2) :

$$X_0^4(-K) = -X_0^4(+K) = -3z_0^4,$$
$$P_0^4(-K) = P_0^4(+K) = 3z_0^4.$$

Supposons que $-K$ admette aussi une structure presque complexe $\mathfrak{S}'$. Alors

$$C_0^4(\mathfrak{S}') = X_0^4(-K) = -3z_0^4,$$
$$C_2^2(\mathfrak{S}') = W_2^2(-K) = W_2^2(+K) = z_2^2,$$

d'où

$$C_0^2(\mathfrak{S}') = (2a+1)z_0^2,$$

où a est un entier. Puisque

$$P_0^4(-K) = C_0^2(\mathfrak{S}') \cup C_0^2(\mathfrak{S}') - 2C_0^4(\mathfrak{S}'),$$

on aura

$$3z_0^4 = (2a+1)^2 z_0^2 \cup z_0^2 + 6z_0^4,$$

ou

$$a^2 + a + 1 = 0,$$

ce qui est impossible. Donc :

Le plan projectif complexe K *n'admet aucune structure presque complexe pour l'orientation non conforme à sa structure complexe.*

De plus, si $\mathfrak{S}'$ est une structure presque complexe quelconque de la variété orientée $+K$, on peut démontrer comme précédemment que les classes $C_0^2(\mathfrak{S}')$ et $C_0^4(\mathfrak{S}')$ sont nécessairement égales à $+3z_0^2$ et $3z_0^4$ respectivement. Il en résulte que :

Il n'existe que deux structures presque complexes de $+K$ *dont l'une,* $\mathfrak{S}$, *correspond à sa structure complexe et l'autre est* $\gamma\mathfrak{S}$.

(*d*) D'après théorème 12, il existe deux structures presque complexes de la sphère S^6 correspondant aux deux orientations de S^6. *Ce sont les seules possibles.* Cela résulte de Proposition 6, § 2, chap. III : Φ_6 est un isomorphisme de $\pi_6(C_{n,6})$ sur $\pi_6(\mathring{R}_{n,6})$. Si α, $\bar{\alpha}\in\pi_6(\mathring{R}_{n,6})$ sont les deux classes d'applications de S^6 dans $\mathring{R}_{n,6}$ engendrant les deux structures tangentes de $+S^6$ et $-S^6$, les deux structures presque complexes de S^6 sont alors engendrées par les classes d'homotopie $\overset{-1}{\Phi}_6(\bar{\alpha})$ et $\overset{-1}{\Phi}_6(\alpha)$ de $\pi_6(C_{n,6})$.

Les résultats suivants sont démontrés à l'aide de quelques théorèmes concernant les produits de structures fibrées sphériques, démontrés au chap. V.

(*e*) Dans § 4 chap. V nous indiquerons une variété orientable de dimension $2n$, $n \geqslant 3$ quelconques, dont $W_2^3(M) \neq 0$. D'après théorème 7, on a donc :

Pour tous les $n \geqslant 3$, *il existe des variétés orientables de dimension* $2n$ *qui n'admettent aucune structure presque complexe.*

(*f*) Une variété différentiable parallélisable de dimension 4 est nécessairement presque quaternionienne, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, pour une surface algébrique M d'ordre 4 sans singularité dans un espace projectif complexe de dimension complexe 3 on peut démontrer que, $\mathfrak{S}$ étant la structure presque complexe naturelle de M, $C_0^2(\mathfrak{S}) = 0$. D'après théorèmes 7 et 9, on a donc

$$W_2^3(M) = C_2^2(\mathfrak{S}) = 0,$$

$$2X_0^4(M) + P_0^4(M) = C_0^2(\mathfrak{S}) \cup C_0^2(\mathfrak{S}) = 0.$$

D'après théorème 12, M est donc presque quaternionienne. Pourtant on a $X_0^4(M)\cdot M = 24 \neq 0$. Par conséquent M est non-parallélisable.

CHAPITRE V

LA COMPOSITION DES STRUCTURES FIBRÉES SPHÉRIQUES

§ 1. Le $\times$-produit de deux structures fibrées sphériques.

Soient $R_1^{n_1}$ et $R_2^{n_2}$ deux espaces numériques et $R^n (n = n_1 + n_2)$ leur somme directe. Prenons une base de vecteurs $(e_1^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)})$ dans $R_i^{n_i}$ qui, dans cet ordre, détermine une certaine orientation de $R_i^{n_i}$. L'espace R^n muni de l'orientation définie par l'ordre de la base de vecteurs $e_1^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)}$ sera appelé la *somme orientée* de ces deux espaces orientés $R_1^{n_1}$ et $R_2^{n_2}$.

Soient $S_i (i = 1, 2)$ et S les sphères-unités respectivement dans les espaces $R_i^{n_i}$ et R^n. Nous dirons que S est le joint de S_1 et S_2. Si nous orientons S_i en concordance avec l'orientation de $R_i^{n_i}$ et puis S en concordance avec l'orientation de la somme orientée R^n des espaces orientés $R_1^{n_1}$ et $R_2^{n_2}$, la sphère orientée S sera appelée alors le *joint orienté* des deux sphères orientées S_1 et S_2.

Soient $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2$, deux G-structures fibrées sphériques ($G = O$, O^+, O', ou O'') définies respectivement sur les bases B_i. On peut alors définir canoniquement une G-structure $\mathfrak{S}$ sur le produit $B_1 \times B_2$ telle que la sphère fibre de $\mathfrak{S}$ sur un point $p = p_1 \times p_2$ de $B_1 \times B_2$ soit le *joint* (ou le joint orienté pour $G = O^+$) des deux sphères fibres de $\mathfrak{S}_i$ sur les points p_i de B_i. Nous dirons que $\mathfrak{S}$ est le $\times$-*produit* de $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ et nous le noterons $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$.

Le problème que nous envisageons dans cette section est le suivant :

Déterminer les classes caractéristiques de $\mathfrak{S}$ en termes de celles de $\mathfrak{S}_i$:

Nous n'envisageons que les deux cas particuliers suivants :

1° Détermination des classes de Stiefel-Whitney ou des classes de Chern de la structure $\mathfrak{S}$ pour des structures $\mathfrak{S}_i$ quelconques ;

2° Détermination des classes caractéristiques quelconques de $\mathfrak{S}$ lorsque $\mathfrak{S}_1$ est une structure simple.

Considérons d'abord le problème 1° pour les O-structures.

Prenons pour cela deux espaces numériques $R_i^{n_i+m_i}$ dont la somme directe est R^{n+m} $(n=n_1+n_2,\ m=m_1+m_2)$. Soient $R_{n,m}$, R_{n_i,m_i} les variétés grassmanniennes définies respectivement dans ces espaces ; les cycles et éléments analogues dans R_{n_i,m_i} seront distingués de ceux de $R_{n,m}$ en ajoutant des superindices. Pour un élément X_1 de R_{n_1,m_1} et un élément X_2 de R_{n_2,m_2} soit X l'élément de $R_{n,m}$ qui est la somme de ces deux éléments X_1 et X_2. On obtient ainsi une application canonique Ψ de la variété produit $R_{n_1,m_1}\times R_{n_2,m_2}$ dans la variété $R_{n,m}$ en posant $\Psi(X_1\times X_2)=X$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{S}_i (i=1,\ 2)$ sont des O-structures induites respectivement par des applications $f_i:\ B_i\to R_{n_i,m_i}$. Soit

$$f':\ B_1\times B_2\to R_{n_1,m_1}\times R_{n_2,m_2}$$

l'application définie par

$$f'(p_1\times p_2)=f_1(p_1)\times f_2(p_2),\qquad p_i\in B_i.$$

Il est alors évident que le $\times$-produit $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_2$ est induit par l'application

$$(1)\qquad f=\Psi f':\ B_1\times B_2\to R_{n,m}.$$

Nous étudions donc le type d'homologie de l'application canonique Ψ. Dans le cas mod 2 ce type d'homologie est donné par les équations suivantes

$$(2)\qquad \Psi^*\{\bar\omega_k^m\}_2=\sum\{\bar\omega_{k_1}^{m_1}\}_2^{(1)}\otimes\{\bar\omega_{k_2}^{m_2}\}_2^{(2)},$$

où la sommation est étendue aux couples $(k_1,\ k_2)$ tels que $k_1+k_2=k$, $k_i\geqslant 0$.

Démonstration. — La formule (2) est en effet équivalente aux formules suivantes :

$$(3)\quad I_2=I_2(\Psi([\omega^{(1)}]_2^{(1)}\otimes[\omega^{(2)}]_2^{(2)}),\ [\bar\omega_k^{m*}]_2)$$
$$=\begin{cases}0 \text{ pour } \omega^{(1)}(m_1)+\omega^{(2)}(m_2)<k,\\ 1 \text{ pour } \omega^{(1)}(m_1)+\omega^{(2)}(m_2)=k,\end{cases}$$

où $\omega^{(i)}\in\Omega(n_i,\ m_i)$, $d(\omega^{(1)})+d(\omega^{(2)})=k$.

Pour démontrer (3), considérons d'abord le cas

$$(4)\qquad \omega^{(1)}(m_1)+\omega^{(2)}m_2)<k.$$

Prenons dans $R_i^{n_i+m_i}$ ($i=1, 2$) un sous-espace vectoriel R_i de dimension $\omega^{(i)}(m_i)+m_i$ et dans R^{n+m} un sous-espace vectoriel R_0 de dimension $n-k+1$ tels que

$$(5) \qquad \dim. (R_0 \cap (R_1 \oplus R_2)) = 0,$$

ce qui est toujours possible à cause de (4). Considérons maintenant le cycle $[\bar{\omega}_k^{m*}]_2 \in [\bar{\omega}_k^{m*}]_2$ représenté géométriquement par la pseudo-variété de l'ensemble des $X \in R_{n,m}$ tels que

$$(6) \qquad \dim. (X \cap R_0) \geqslant 1.$$

De même, nous prenons les cycles $[\omega^{(i)}]_2^{(i)} \in [\omega^{(i)}]_2^{(i)}$ représentés géométriquement par les pseudo-variétés ensembles des éléments $X_i \in R_{n_i, m_i}$ satisfaisant respectivement aux conditions $X_i \subset R_i$, etc. Pour $X_i \in [\omega^{(i)}]_2^{(i)}$, on voit donc que $X = \Psi(X_1 \times X_2)$ est contenu dans $R_1 \oplus R_2$ et par conséquent ne satisfait pas (6), d'après (5). Il en résulte que $\Psi([\omega^{(1)}]_2^{(1)} \times [\omega^{(2)}]_2^{(2)})$ n'a aucun élément en commun avec $[\bar{\omega}_k^{m*}]_2$. Donc:

$$(7) \qquad I_2 = 0 \qquad \text{pour} \qquad \omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) < k,$$

Supposons maintenant

$$\omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) = k.$$

On a alors nécessairement

$$\omega^{(i)} = \bar{\omega}_{k_i}^{m_i}, \qquad k_1 + k_2 = k.$$

Dans $R_i^{n_i+m_i}$ prenons un système de coordonnées $(x^{(i)}) = (x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i+m_i}^{(i)})$ correspondant à la base de vecteurs $(e^i) = (e_1^{(i)}, \ldots, e_{n_i+m_i}^{(i)})$ et désignons par R_i^s le sous-espace de $R_i^{n_i+m_i}$ déterminé par les vecteurs $e_1^{(i)}, \ldots, e_s^{(i)}$.

Soit R^{n-k+1} le sous-espace de R^{n+m} déterminé par les vecteurs :

$$e_{m_1+k_1+1}^{(1)}, \ldots, e_{n_1+m_1}^{(1)}; \qquad e_{m_2+k_2+1}^{(2)}, \ldots, e_{n_2+m_2}^{(2)}; \qquad e_{m_1}^{(1)} + e_{m_2}^{(2)}.$$

Nous définirons les cycles $[\bar{\omega}_{k_i}^{m_i}]_2^{(i)}$ ($i=1, 2$) et $[\bar{\omega}_k^{m*}]_2$ comme l'ensemble des éléments $X_i \in R_{n_i, m_i}$ et $X \in R_{n,m}$ satisfaisant respectivement aux conditions suivantes :

$$R_i^{m_i-1} \subset X_i \subset R_i^{m_i+k_i};$$
$$\dim. (X \cap R^{n-k+1}) \geqslant 1.$$

On voit facilement que le seul élément commun aux deux ensembles $[\bar{\omega}_k^{m*}]_2$ et $\Psi([\bar{\omega}_{k_1}^{m_1}]_2^{(1)} \times [\bar{\omega}_{k_2}^{m_2}]_2^{(2)})$ est l'élément $X_0 \in R_{n,m}$ déterminé par les vecteurs $e_1^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}; e_1^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}$. On peut réaliser ces deux ensembles au voisinage de X_0 dans $R_{n,m}$ par des variétés linéaires et par conséquent leur indice d'intersection mod 2 est égal à 1, c'est-à-dire,

$$(8) \qquad I_2 = 1 \qquad \text{pour} \qquad \omega^{(1)}(m_1) + \omega^{(2)}(m_2) = k.$$

De (7) et (8) on déduit la formule (2).

D'après (1), il en résulte que

$$\begin{aligned}\overline{W}_2^k(\mathfrak{S}) &= f^*\{\overline{\omega}_k^m\}_2 = f'^*\Psi'^*\{\overline{\omega}_k^m\}_2 \\ &= \sum f'^*(\{\overline{\omega}_{k_1}^{m_1}\}_2^{(1)} \otimes \{\overline{\omega}_{k_2}^{m_2}\}_2^{(2)}) \\ &= \sum f_1^*\{\overline{\omega}_{k_1}^{m_1}\}_2^{(1)} \otimes f_2^*\{\overline{\omega}_{k_2}^{m_2}\}_2^{(2)} \\ &= \sum \overline{W}_2^{k_1}(\mathfrak{S}_1) \otimes \overline{W}_2^{k_2}(\mathfrak{S}_2).\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{W}^2(\mathfrak{S}, t) = \overline{W}^2(\mathfrak{S}_1, t) \otimes \overline{W}^2(\mathfrak{S}_2, t).$$

En appliquant le théorème de dualité (Théorème 3, § 2, Chap. II) on en déduit :

$$W_2(\mathfrak{S}, t) = W_2(\mathfrak{S}_1, t) \otimes W_2(\mathfrak{S}_2, t).$$

(Cf. la démonstration de la formule (16), Théorème 3, § 4, Chap. II.)

De la même façon on peut déduire les formules analogues pour les G-structures, où $G = O'$ ou O'' et pour les $O^{\wedge}$-structures à l'aide du théorème 5. On arrive ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME 13. — *Si la structure $\mathfrak{S}$ est le $\times$-produit de deux G-structures $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$, on a*

$$\begin{aligned}&W_2(\mathfrak{S}, t) = W_2(\mathfrak{S}_1, t) \otimes W_2(\mathfrak{S}_2, t),\\ &\qquad \overline{W}_2(\mathfrak{S}, t) = \overline{W}_2(\mathfrak{S}_1, t) \otimes \overline{W}_2(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour} \qquad G = O \textit{ ou } O^{\wedge};\\ &C_0(\mathfrak{S}, t) = C_0(\mathfrak{S}_1, t) \otimes C_0(\mathfrak{S}_2, t),\\ &\qquad \overline{C}_0(\mathfrak{S}, t) = \overline{C}_0(\mathfrak{S}_1, t) \otimes \overline{C}_0(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour} \qquad G = O';\\ &Q_0(\mathfrak{S}, t) = Q_0(\mathfrak{S}_1, t) \otimes Q_0(\mathfrak{S}_2, t),\\ &\qquad \overline{Q}_0(\mathfrak{S}, t) = \overline{Q}_0(\mathfrak{S}_1, t) \otimes \overline{Q}_0(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour} \qquad G = O''.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le problème 2° pour des $O^{\wedge}$-structures. Supposons que $\hat{R}_{n_i, m_i}$ et $\hat{R}_{n,m}$ sont les variétés grasmanniennes définies respectivement dans les espaces numériques $R_i^{n_i+m_i}$ et dans leur somme R^{n+m} ($n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$). Prenons les systèmes de coordonnées $(x^{(i)})$ et (x) dans $R_i^{n_i+m_i}$ et R^{n+m} correspondant aux bases de vecteurs $(e^{(i)})$ et (e) tels que

$$\begin{array}{ll} x_i = x_i^{(1)}, & i = 1, \ldots, m_1; \\ x_i = x_{i-m_1}^{(2)}, & i = m_1 + 1, \ldots, n_2 + m; \\ x_i = x_{i-n_2-m_2}^{(1)}, & i = n_2 + m + 1, \ldots, n + m. \end{array}$$

Nous définissons les subdivisions canoniques $\hat{K}^{(i)}$ et $\hat{K}$ de ces variétés grassmanniennes par rapport à ces systèmes de coordonnées. Pour X_2 élément de $\hat{R}_{n_2, m_2}$ soit X l'élément de $\hat{R}_{n,m}$ qui est la somme orientée de $R_1^{m_1}$ et X_2, où $R_1^{m_1}$ est le sous-espace orienté de $R_1^{n_1+m_1}$ déterminé par la suite de vecteurs $e_1^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}$. Soit

$$\Psi' : \hat{R}_{n_2, m_2} \to \hat{R}_{n, m}$$

l'application définie par $\Psi' : X_2 \to X$. On voit facilement que Ψ' est une application cellulaire de $\hat{K}^{(2)}$ dans $\hat{K}$ telle que

$$\Psi' \overset{+}{U}{}^{(2)}_{\omega^{(2)}} = \overset{+}{U}_\omega, \qquad \Psi' \overline{U}{}^{(2)}_{\omega^{(2)}} = \overline{U}_\omega,$$

où $\omega^{(2)} \in \Omega(n_2, m_2)$ et $\omega \in \Omega(n, m)$ sont liés par les équations suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega(i) = 0, & i = 1, \ldots, m_1; \\ \omega(i) = \omega^{(2)}(i - m_1), & i = m_1 + 1, \ldots, m. \end{cases}$$

On voit donc que, d'après $(4)^*$ § 1, Chap. 1,

$$\omega \in \Omega_0^*(n, m), \qquad \text{si} \qquad \omega^{(2)} \in \Omega_0^*(n_2, m_2) \qquad \text{et} \qquad \omega^{(2)}(m_2) < n_2.$$

De plus, on a

$$s(\omega^{(2)}) = s(\omega) [= s],$$
$$\omega(i_s) + i_s + m = \omega^{(2)}(i_s^{(2)}) + i_s^{(2)} + m_2.$$

D'après $(34)_4'$ § 3, Chap. 1, les cocycles $\{\omega\}_0$ et $\{\omega^{(2)}\}_0^{(2)}$ définis respectivement dans $\hat{K}$ et $\hat{K}^{(2)}$ sont donnés par les équations suivantes :

$$\{\omega\}_0 = (-1)^{\mu(\omega)} \cdot [\overset{+}{U}_\omega + (-1)^{\omega(i_s) + i_s + m} \cdot \overline{U}_\omega],$$
$$\{\omega^{(2)}\}_0^{(2)} = (-1)^{\mu(\omega^{(2)})} \cdot [\overset{+}{U}{}^{(2)}_{\omega^{(2)}} + (-1)^{\omega^{(2)}(i_s^{(2)}) + i_s^{(2)} + m_2} \cdot \overline{U}{}^{(2)}_{\omega^{(2)}}].$$

Il en résulte : $\Psi'^* \{\omega\}_0 = \pm \{\omega^{(2)}\}_0^{(2)}$, ou

$$(10) \qquad \Psi'^* \{\omega\}_0 = \{\omega^{(2)}\}_0^{(2)} \quad \text{pour} \quad \omega^{(2)} \in \Omega_0^*(n_2, m_2) \quad \text{et} \quad \omega^{(2)}(m_2) < n_2.$$

En outre, il est évident que

$$(11) \qquad \begin{cases} \Psi'^* \{\omega\}_2 = \{\omega^{(2)}\}_2^{(2)} & \text{pour} \quad \omega^{(2)} \in \Omega(n_2, m_2); \\ \Psi'^* \{\omega\}_i = 0, & \text{si } \omega(1), \ldots, \omega(m_1) \text{ ne sont pas tous nuls} \end{cases}$$

$(i = 0$ ou $2)$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{S}_i$ sont des $O_{m_i}^*$-structures sur les bases B_1, $\mathfrak{S}_1$ étant simple. On peut supposer alors que $\mathfrak{S}_1$ est induite par une application $f_1 : B_1 \to \hat{R}_{n_1, m_1}$ telle que $f_1(p_1)$ soit constamment l'élément $R_1^{m_1} \in \hat{R}_{n_1, m_1}$. Si $f_2 : B_2 \to \hat{R}_{n_2, m_2}$ est l'application qui induit la structure $\mathfrak{S}_2$, le produit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ est alors induit par l'application

$$f' = \Psi' f_2 \pi : B_1 \times B_2 \to \hat{R}_{n, m},$$

où π est la projection canonique de $B_1 \times B_2$ sur B_2. De (9), (10) et (11) on peut déduire alors le théorème suivant :

THÉORÈME 14. — *Si $\mathfrak{S}_i$ sont des O^*-structures, $\mathfrak{S}$ le $\times$-produit $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1$ étant simple, on a :*

$$\text{(12)} \qquad P_0(\mathfrak{S}, t) = 1 \otimes P_0(\mathfrak{S}_2, t),$$

$$\text{(12)}' \qquad W_2(\mathfrak{S}, t) = 1 \otimes W_2(\mathfrak{S}_2, t),$$

etc. De même pour les O-structures.

§ 2. Le théorème de Whitney.

Soient $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2)$ deux G-structures fibrées sphériques ($G = O, O^*, O'$, ou O'') sur un même complexe K. On peut construire alors une autre G-structure $\mathfrak{S}$ sur K dont la sphère fibre sur un point $x \in K$ est le joint (orienté dans le cas $G = O^*$) des deux sphères fibres sur x de $\mathfrak{S}_i$. Cette structure $\mathfrak{S}$ sera appelée le $\cup$-produit des $\mathfrak{S}_i$ et sera désignée par $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$.

Soit $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ le $\times$-produit des $\mathfrak{S}_i$ sur le complexe produit $K \times K$. Considérons l'application diagonale $d : K \to K \times K$ définie par $d : x \times x$, $x \in K$. Il est évident alors que

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{S} \simeq d^* \mathfrak{S}'.$$

Pour deux classes de cohomologie quelconques X et Y dans K on aura

$$X \cup Y = d^*(X \otimes Y).$$

Par conséquent d'après (1) et théorème 13 on obtient :

THÉORÈME 15 (*Whitney*). — *Si $\mathfrak{S}$ est le $\cup$-produit de deux G-structures $\mathfrak{S}_i$ ($G = O, O^*$, O' ou O'') sur le même complexe, on a*

$$W_2(\mathfrak{S}, t) = W_2(\mathfrak{S}_1, t) \cup W_2(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour } G = O \text{ ou } O^*;$$

$$C_0(\mathfrak{S}, t) = C_0(\mathfrak{S}_1, t) \cup C_0(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour } G = O';$$

$$Q_0(\mathfrak{S}, t) = Q_0(\mathfrak{S}_1, t) \cup Q_0(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour } G = O''.$$

$$P_0(\mathfrak{S}, t) = P_0(\mathfrak{S}_2, t), \qquad \textit{pour } G = O \textit{ ou } O^* \textit{ et } \mathfrak{S}_1 \textit{ simple.}$$

§ 3. Les classes caractéristiques des variétés fibrées différentiables à structure fibrée sphérique.

Soit M une variété différentiable de dimension n dont la O_n-structure tangente est $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{S}$ une O_m-structure différentiable définie dans une variété $\widetilde{M}$ sur la base M, la projection étant f. $\widetilde{M}$ est alors une variété différentiable de dimension $n+m-1$. Nous désignerons par $\widetilde{\mathfrak{M}}$ la O-structure tangente de la variété $\widetilde{M}$.

Considérons la structure fibrée $\mathfrak{V}$ associée à $\mathfrak{S}$ définie sur M dont la fibre-type est un espace vectoriel de dimension m. On peut alors considérer la sphère $S(x)$ sur un point $x \in M$ dans $\mathfrak{S}$ comme étant la sphère unité de la fibre $V(x)$ sur x dans $\mathfrak{V}$. Soit $o(x)$ l'origine de l'espace $V(x)$. L'ensemble de $o(x)$ forme un espace évidemment homéomorphe à M ; on peut donc identifier $o(x)$ à x.

Considérons maintenant $S(x)$ comme une sous-variété différentiable de la variété $\widetilde{M}$. Pour un point $y \in S(x)$ soit $T(y)$ l'élément de contact tangent à $S(x)$ au point y. Il existe un champ transversal de la structure $\mathfrak{S}$; soit $N(y)$ l'élément de contact de ce champ au point y. Soit $L(y)$ la droite dans $V(x)$ joignant y et $o(x)$. On obtient alors les O-structures suivantes :

a) Une O_{m-1}-structure $\mathfrak{T}$ sur la base $\widetilde{M}$ dont la fibre sur $y \in S(x)$ est la sphère unité dans $T(y)$;

b) Une O_n -structure $\mathfrak{N}$ sur la base $\widetilde{M}$ dont la fibre sur $y \in S(x)$ est la sphère unité dans $N(y)$;

c) Une O_0 -structure $\mathfrak{L}$ sur la base $\widetilde{M}$ dont la fibre sur $y \in S(x)$ est une o-sphère dans la droite $L(y)$.

Le $\cup$-produit $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T}$ est une structure définie sur $\widetilde{M}$ dont la fibre sur $y \in S(x)$ est constituée de toutes les directions dans $V(x)$ issues de y. A chaque direction l dans $V(x)$ issue de y soit $g(l)$ le point où $S(x)$ rencontre la direction issue de $o(x)$ et parallèle à l. g est alors une application de l'espace fibré de la structure $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T}$ sur l'espace fibré $\widetilde{M}$ de la structure $\mathfrak{S}$. En désignant la projection de $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T}$ par p, on voit que $fg = fp$, où g applique les fibres sphères de $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{S}$ homéomorphiquement et linéairement sur les fibres sphères correspondantes de la structure $\mathfrak{S}$. On en déduit :

$$(1) \qquad \mathfrak{L} \cup \mathfrak{T} \cong f^*\mathfrak{S}.$$

De même, l'application $f : \widetilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}$ induit une application des directions dans $\mathrm{N}(y)$ issues de $y \in \mathrm{S}(y)$ sur des directions tangentes à M issues de x et donc une application de l'espace fibré de la structure $\mathfrak{N}$ sur l'espace fibré de la structure $\mathfrak{M}$. Il en résulte :

$$(2) \qquad \mathfrak{N} \cong f^*\mathfrak{M}.$$

D'autre part, il est évident que

$$(3) \qquad \mathfrak{T} \cup \mathfrak{N} \cong \widetilde{\mathfrak{M}}.$$

Des équations (1), (2) et (3) on déduit :

$$(4) \qquad \mathfrak{L} \cup \widetilde{\mathfrak{M}} \cong f^*(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{M}).$$

La structure $\mathfrak{L}$ est évidemment simple. On a donc :

$$\mathrm{W}_2(\mathfrak{L}, t) = 1.$$

D'après théorème 15, on a

$$\mathrm{P}_0(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = \mathrm{P}_0(\mathfrak{L} \cup \widetilde{\mathfrak{M}}, t).$$

En utilisant théorème 15, on déduit de (4) le théorème suivant :

THÉORÈME 16. — *Si $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est la structure tangente de l'espace fibré d'une O-structure différentiable $\mathfrak{S}$ sur une variété différentiable M dont la structure tangente est $\mathfrak{M}$, on a*

$$\mathrm{W}_2(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = f^*\mathrm{W}_2(\mathfrak{S}, t) \cup f^*\mathrm{W}_2(\mathfrak{M}, t),$$
$$\mathrm{P}_0(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) = f^*\mathrm{P}_0(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{M}, t)$$

où f est la projection de la structure $\mathfrak{S}$.

§ 4. Quelques exemples.

Soit P_n l'espace projectif de dimension n dont la structure tangente est $\mathfrak{P}_{(n)}$. D'après Stiefel, on a alors :

$$\mathrm{W}_2^r(\mathfrak{T}_{(n)}) = \binom{n+1}{r}\mathrm{X}^r, \qquad r = 1, 2, \ldots n,$$

où X est la classe qui engendre le groupe de cohomologie $\mathrm{H}_2^1(\mathrm{P}_n)$ mod 2 de dimension 1 de P_n. Puisque $\mathrm{X}^{n+1} = 0$, on a

$$\mathrm{W}_2(\mathfrak{P}_{(n)}, t) = (1 + \mathrm{X}t)^{n+1}.$$

EXEMPLE 1. — Soient $P^{(i)}$ $(i=1,2)$ deux copies du plan projectif, dont les structures tangentes sont $\mathfrak{P}^{(i)}$ et les classes qui engendrent $H^1(P^{(i)})$ sont X_i. D'après le théorème 13, le polynome de Whitney de la structure tangente $\mathfrak{M}$ de la variété produit $M = P^{(1)} \times P^{(2)}$ est alors donné par

$$\begin{aligned} W_2(\mathfrak{M}, t) &= W_2(\mathfrak{P}^{(1)}, t) \otimes W_2(\mathfrak{P}^{(2)}, t) \\ &= (1 + X_1 t)^3 \otimes (1 + X_2 t)^3 \\ &= 1 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3' t^3 + A_4 t^4. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \otimes X_1 + X_2 \otimes 1 \\ A_2 &= 1 \otimes X_2^2 + X_1 \otimes X_2 + X_1^2 \otimes 1 \\ A_3 &= X_1 \otimes X_2^2 + X_1^2 \otimes X_2 \\ A_4 &= X_1^2 \otimes X_2^2. \end{aligned}$$

Construisons maintenant, ce qui est toujours possible, des O_1-structure $\mathfrak{S}_i$ $(i=1,2)$ sur la base $M = P_1 \times P_2$ telle que $W_2^1(\mathfrak{S}_1) = 0$, $W_2^1(\mathfrak{S}_2) = A_1$. Pour $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ on a alors

$$W_2(\mathfrak{S}, t) = 1 + A_1 t.$$

Soient $\widetilde{M}$ l'espace fibré de $\mathfrak{S}$, f la projection de $\mathfrak{S}$, et $\widetilde{\mathfrak{M}}$ la structure tangente de la variété $\widetilde{M}$. On a alors, d'après théorème 16,

$$\begin{aligned} (1) \qquad W_2(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) &= f^* W_2(\mathfrak{M}, t) \cup f^* W_2(\mathfrak{S}, t) \\ &= f^*[(1 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4) \cup (1 + A_1 t)]. \end{aligned}$$

Puisque $W^1(\mathfrak{S}_1) = 0$, il existe une section dans $\mathfrak{S}$. Il en résulte que f^* est un isomorphisme (dans) et on déduit de (1) :

$$\begin{aligned} W_2^1(\widetilde{\mathfrak{M}}) &= f^*(2A_1) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire } \widetilde{M} \text{ est orientable;} \\ W_2^5(\widetilde{\mathfrak{M}}) &= f^*(A_1 \cup A_2 + A_3) = f^*(X_1^2 \times X_2 + X_1 \times X^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Donc :

Il existe des variétés différentiables orientables de dimension 5 dont la classe caractéristique de Whitney de dimension 5 n'est pas nulle.

D'après théorème 13, la classe de Stiefel-Whitney de dimension 3 du produit topologique $M \times S$, où M est la variété considérée dans Ex. 1 et où S est une sphère de dimension impaire, est aussi non nulle. Cette variété orientable de dimension $\geqslant 6$ n'admet donc aucune structure presque complexe, cf. Ex. de § 2 Chap. IV.

Rappelons que, d'après Whitney, la classe de Stiefel-Whitney de dimension 3 d'une variété différentiable orientable de dimension 4 est toujours nulle.

EXEMPLE 2. — On peut construire des structures $\mathfrak{S}_i (i = 1, 2, 3)$ sur un espace projectif P_3 tels que

$$W^1(\mathfrak{S}_1) = 0, \qquad W_2^1(\mathfrak{S}_2) = X_2, \qquad W^1(\mathfrak{S}_3) = X_2.$$

Soient $\mathfrak{S}$ le produit $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3$, $\widetilde{M}$ l'espace fibré de $\mathfrak{S}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ la structure tangente de $\widetilde{M}$ et f la projection de $\mathfrak{S}$. On a alors

$$\begin{aligned} W_2(\mathfrak{S}, t) &= W_2(\mathfrak{S}_1, t) \cup W_2(\mathfrak{S}_2, t) \cup W_2(\mathfrak{S}_3, t) \\ &= (1 + Xt)^2 \\ &= 1 + X^2 t^2. \end{aligned}$$

La nullité de $W_2^1(\mathfrak{S}_1)$ montre que $\mathfrak{S}$ a une section et par conséquent f^* est un isomorphisme dans. D'après théorème 16, on a

$$\begin{aligned} W_2(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) &= f^* W_2(\mathfrak{S}, t) \cup f^* W_2(\mathfrak{P}_{(3)}, t) = l + f^* X^2 t^2, \\ P_0(\widetilde{\mathfrak{M}}, t) &= f^* P_0(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}, t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &W_2^1(\widetilde{\mathfrak{M}}) = 0 \text{ ou } \widetilde{M} \text{ est orientable}, \\ &W_2^2(\widetilde{\mathfrak{M}}) = f^* X^2 \neq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, $P_0(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}, t) = 1$, c'est-à-dire $P_0^{4k}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}) = 0$ pour $k > 0$, puisque la base P_3 de la structure $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}_{(3)}$ est de dimension 3. Cela montre que :

Les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney sont en général indépendantes des classes de Pontrjagin, même pour la structure tangente d'une variété différentiable orientable.
