

17h/85/1 ZÜLLIG

796
arith-50

JEAN ZÜLLIG

Geometrische Deutung unendlicher
Kettenbrüche

Geometrische Deutung
unendlicher Kettenbrüche
und ihre Approximation durch
rationale Zahlen

Von

Dr. JEAN ZÜLLIG

Inv.-Nr. 86 M 1329

Mathematisches Forschungsinstitut
D-7620 Oberwolfach-Walke
Lorenzenhof
Telefon 0 78 34 / 3 11, 5 12



ORELL FÜSSLI VERLAG
ZÜRICH UND LEIPZIG

*Meiner lieben Mutter
in herzlicher
Dankbarkeit*

Inhalts-Verzeichnis

| | Seite |
|--|-------|
| Literatur | 8 |
| Vorwort | 9 |
| § 1. Einleitendes über eine geometrische Figur zur Zahlentheorie | 11 |
| § 2. Die Abbildung der Kreisfigur durch lineare unimodulare Substitutionen | 15 |
| § 3. Geometrische Deutung sämtlicher Lösungen einer linearen diophantischen Gleichung | 21 |
| § 4. Das Maximum der positiven binären quadratischen Formen | 27 |
| § 5. Berührungspunkt, gemeinsame Tangente und Zentrale zweier Kreise | 30 |
| § 6. Geometrische Deutung eines regelmässigen Kettenbruches: Die Kettenbruchkurve | 33 |
| § 7. Zusammenhang mit dem <i>Klein'schen</i> Umrisspolygon des ω -Strahles im Gitter der ganzzahligen Punkte | 38 |
| § 8. Die Kurve eines halbregelmässigen Kettenbruches | 44 |
| § 9. Sätze über die regelmässigen Kettenbrüche | 49 |
| § 10. Die Kurve eines regelmässigen Kettenbruches als Analogon der Geraden | 53 |
| § 11. Die <i>Hurwitz'schen</i> Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{13}$ und ihre geometrische Deutung | 54 |
| § 12. Approximation einer Irrationalzahl durch rationale Brüche | 60 |
| § 13. Rechnerische Bestimmung des Parameters α für unendliche eingliedrig-periodische Kettenbrüche | 69 |
| § 14. Unendliche Kettenbrüche, die von einer endlichen Stelle an nur noch die Teilnenner 1 und 2 haben | 73 |
| § 15. Kettenbrüche, bei welchen von einer endlichen Stelle an unendlich oft ein kleinster und ein grösster Teilnenner vorkommt | 79 |
| § 16. Merkwürdige Koinzidenzen in der Kreisfigur | 82 |
| § 17. Die Zentralen und Tangenten in der Kreisfigur | 86 |
| Figuren-Verzeichnis | 90 |
| Bezeichnungen | 91 |

Literatur-Verzeichnis

- Bachmann P.* Die Arithmetik der quadratischen Formen. Abt. II.
- Fueter R.* Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation. Erster Teil.
- Hurwitz A.* Ueber eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Grössen. Acta Mathematica Bd. 12. S. 403.
Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Annalen Bd. 39. S. 279 ff.
- Klein F.* Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (Autogr. Vorlesung) Bd. I.
Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung. Göttinger Nachrichten. 1895 S. 375.
- Markoff A.* Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Math. Annalen Bd. 15. S. 381 ff.
- Minkowski H.* Ueber die Annäherung einer reellen Grösse durch rationale Zahlen. Math. Annalen 1899. Bd. 54. S. 117 ff.
- Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen.
- Speiser A.* Eine geometrische Figur zur Zahlentheorie. Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. 1923. pg. 113.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit soll rein auf dem Wege der Anschauung zu einigen wichtigen Sätzen aus der Theorie der Zahlen führen. Als Grundlage dient eine von *A. Speiser* erstmals in der Sitzung der Schweiz. Mathem. Gesellschaft¹⁾ in Zermatt im Jahre 1923 besprochene geometrische Figur zur Zahlentheorie, in der *Speiser* die unendlich vielen ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

als Annäherungen an die irrationale Zahl ω durch *Minkowski'sche* Kettenbrüche geometrisch deutet und durch Vergrösserung der Kreisradien zum Satz über das Maximum der positiven binären quadratischen Formen gelangt.

Diese Abhandlung will nun zeigen, dass man in dieser Kreisfigur jedem regelmässigen Kettenbruch, sei er endlich oder unendlich, eine ganz bestimmte Kurve eindeutig zuordnen kann, die uns so recht den ganzen Kettenbruch mit samt der Folge seiner Näherungsbrüche überschauen lässt und gewissermassen zu seinem wahren Werte hinführt. So ergeben sich z. B. die verschiedenen Kurven zu den *Hurwitz'schen* Kettenbruch-Entwicklungen für $\sqrt{13}$. Wird doch das wahre Wesen eines Kettenbruches nach der Meinung *Minkowski's* erst durch seine geometrische Veranschaulichung enthüllt. So gelangt *Minkowski* in seinem Buche über *Diophantische Approximationen*, geleitet durch ein rein geometrisches Verfahren, welches in der sukzessiven Konstruktion von Parallelogrammen besteht, zu einer neuen Art von Kettenbruchentwicklung für eine beliebige reelle Zahl ω . Hatte *Minkowski* das ganze von ihm erschlossene Gebiet *Geometrie der Zahlen* genannt, weil er zu den Methoden, aus denen seine arithmetischen Sätze fliessen, durch räumliche Anschauung geführt worden war, so blieb er auch bei der weiteren Erforschung dieses Gebietes stets dem Bestreben treu, durch engen Anschluss an die

¹⁾ Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. 1923. pg. 113.

geometrischen Vorstellungen und Bilder die Fruchtbarkeit seiner Methoden zu zeigen; er wird nicht müde, durch originelle Modifikationen seine ursprünglichen Ueberlegungen zu vertiefen, die gefundenen arithmetischen Sätze zu vervollkommen und neue zu ersinnen. (Abh. I. S. XVI.) Auch *Felix Klein* glaubt, dass die Zahlentheorie viel zugänglicher werden und viel mehr allgemeines Interesse finden würde, wenn man sie in Verbindung mit anschaulichen Elementen und geeigneten Figuren vortragen wollte; wenn ihre Sätze auch logisch von diesen Hilfsmitteln unabhängig sind, so dürfte doch das Verständnis durch sie sehr erleichtert werden ¹⁾).

Auf eine solche anschauliche Weise gibt uns die *Speiser'sche* Kreisfigur bei Variation der Radien Auskunft über den Grad der Annäherung an eine irrationale Zahl durch rationale Zahlen; auch lässt sich in ihr jeder Irrationellen ω eindeutig eine *Kurve* zuordnen, analog dem *Klein'schen* ω -Strahl im Gitter der ganzzahligen Punkte. Am Schlusse der Arbeit sind noch einige merkwürdige arithmetische Eigenschaften und geometrische Koinzidenzen in der Figur dargelegt.

¹⁾ Klein: Elementarmath. v. h. Standpunkt aus. I. S. 42.

§ 1

Einleitendes über eine geometrische Figur zur Zahlentheorie

Konstruiert man in der oberen Halbebene in jedem rationalen Punkt der x -Achse mit der Abszisse $\frac{p}{q}$ den diese Achse berührenden Kreis vom Radius $\frac{1}{2q^2}$, so berühren sich alle diese unendlich vielen Kreise; sie überdecken sich nirgends. Die nicht überdeckten Gebiete werden aus Kreisbogendreiecken gebildet. In Figur 1 sind einige dieser einander berührenden Kreise im Intervall $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$ dargestellt. Aus diesen beiden als Brüche angegebenen Abszissen der Endpunkte des Intervalls lassen sich aber bekanntlich alle nur möglichen Rationalzahlen dieses Bereiches mittels der sog. *Farey'schen* Reihen ¹⁾ folgendermassen gewinnen:

Man bilde die unbegrenzte Menge der Reihen

$$\begin{aligned}
 F_1: & \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1} \\
 F_2: & \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1} \\
 F_3: & \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{1} \\
 & \quad \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

indem man aus jeder schon gebildeten Reihe die nächste dadurch ableitet, dass man zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern $\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}$ das neue Glied $\frac{\beta + \alpha}{\delta + \gamma}$ einfügt; dann tritt jeder beliebige rationale irreduzible Bruch $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einer dieser Reihen und zwar zuerst in derjenigen Reihe F_n auf, deren Ordnung n gleich der grösseren der beiden Zahlen α, γ ist, um sodann in allen folgenden

¹⁾ Vergl. Bachmann, P. Arithmetik d. quadr. Formen. II. Abt. 1. Kap. Klein, Felix. Ausgew. Kap. d. Zahlentheorie I. S. 196—200.

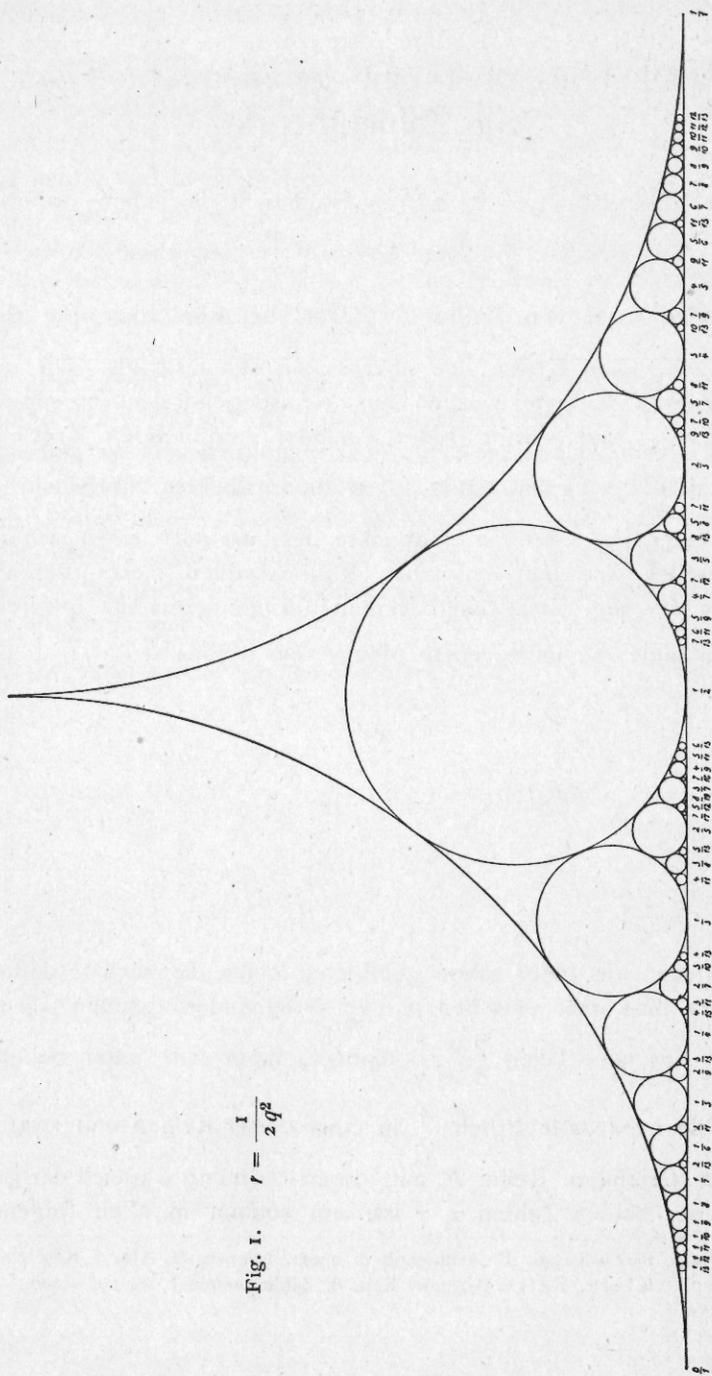


Fig. 1. $r = \frac{1}{2q^2}$

zu verbleiben. In jeder Reihe besteht für je zwei aufeinanderfolgende Glieder $\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}$ die Beziehung

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

denn, wenn dies für eine Reihe gilt, so gilt es auch noch für die folgende, da

$$\begin{aligned} \alpha(\delta + \gamma) - \gamma(\beta + \alpha) &= \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \\ (\beta + \alpha)\delta - (\delta + \gamma)\beta &= \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \end{aligned}$$

und es gilt somit allgemein, da es ersichtlich für die oben angegebenen ersten Farey'schen Reihen sich bestätigt. Sind umgekehrt $\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}$ zwei der Beziehung (1) genügende positive Brüche, so sind sie in derjenigen Farey'schen Reihe, in welcher sie zuerst beide auftreten, zwei aufeinanderfolgende Glieder, d. h. geometrisch gedeutet: die in den rationalen Punkten $\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}$ errichteten Kreise mit den Radien $r = \frac{1}{2\delta^2}$ bzw. $r' = \frac{1}{2\gamma^2}$ berühren einander.

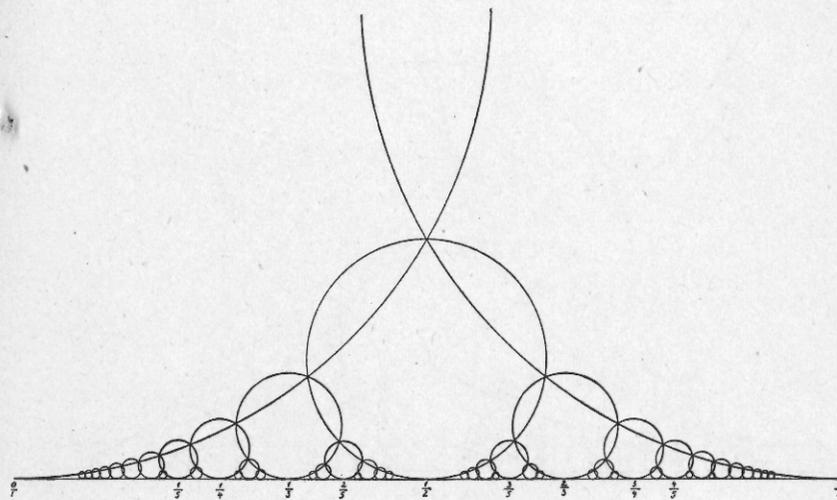


Fig. 2. $r = \frac{1}{\sqrt{3}q^2}$

Beweis: Wenn Berührung eintritt, so gilt

$$(r + r')^2 = (r - r')^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta}\right)^2,$$

was nach Einsetzung der Werte für r und r' und Berücksichtigung der Relation (1) auf eine Identität führt. Der Beweis lässt sich mittels der konformen Abbildung durch lineare unimodulare Substitutionen mit ganzen rationalen Koeffizienten eleganter durchführen, was im folgenden Paragraphen nachgeholt wird.

Vergrößert man die Radien zu $\frac{1}{\sqrt{3}q^2}$, so schliessen sich die Lücken; je 3 Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt (Fig. 2). Werden die Kreisradien noch mehr vergrößert, zu $\frac{1}{q^2}$, so tritt wieder Berührung ein, bei welcher ein Kreis übersprungen wird. Figur 3 stellt uns diesen Fall dar. Die Beweise ergeben sich analog wie derjenige der allgemeinen Berührung der Kreise mit $r = \frac{1}{2q^2}$.

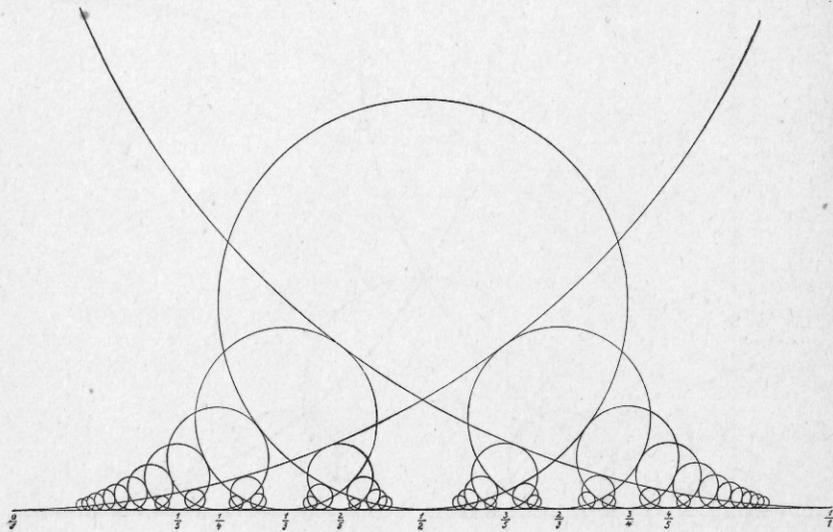


Fig. 3. $r = \frac{1}{q^2}$

§ 2

Die Abbildung der Kreisfigur durch lineare unimodulare Substitutionen

I. Jede Substitution S :

$$(2) \quad w = Sz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \text{ wobei } \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

vermittelt als Substitution der Modulgruppe eine konforme Abbildung der oberen Halbebene in sich. Da bei dieser Abbildung die reelle Axe in sich transformiert wird und Kreise und Geraden übergehen in Kreise und Geraden¹⁾, so vertauschen sich alle Kreise

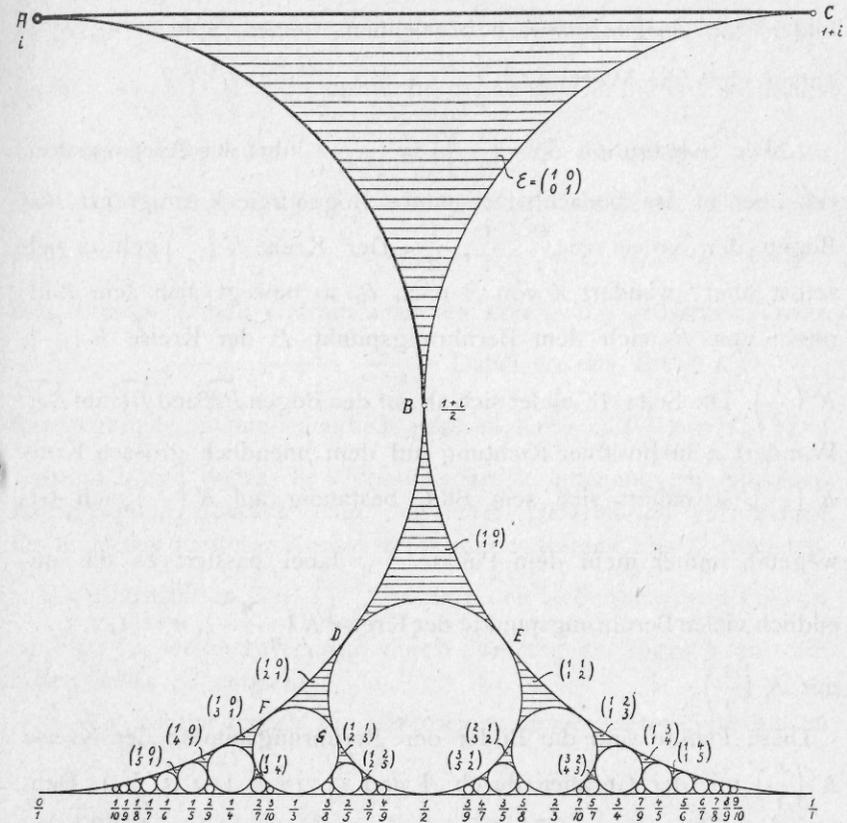


Fig. 4.

¹⁾ Vergl. Fueter: Vorlesg. üb. d. singulären Moduln und d. komplexe Multiplikation d. ellipt. Funkt. I. Teil, I. Kap.

der Figur 4. Die zur reellen Axe parallele Gerade $z = x + i$ ($-\infty < x < +\infty$) kann als Kreis errichtet im Punkte $\infty = \frac{1}{0}$ aufgefasst werden; dieser geht durch $w = Sz$ über in den Kreis, der im Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ errichtet ist [kürzer bezeichnet: Kreis $\frac{\alpha}{\gamma}$ oder $K\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$].

Der Kreis $\frac{0}{1}$ transformiert sich in $K\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$ und derjenige zu $\frac{1}{1}$ in $K\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}\right)$. Wir wollen im folgenden das Bogendreieck ABC , das die drei einander berührenden Kreise $K\left(\frac{1}{0}\right)$, $K\left(\frac{0}{1}\right)$, $K\left(\frac{1}{1}\right)$ bilden, mit *Ausgangsdreieck* bezeichnen; seinen Spitzen A, B, C entsprechen die Werte $i, \frac{1+i}{2}, 1+i$.

2. Die Substitution $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{z}{z+1}$ führt das Ausgangsdreieck über in das benachbarte untere Bogendreieck, umgrenzt von Bogen der Kreise zu $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}$. Der Kreis $K\left(\frac{0}{1}\right)$ geht in sich selbst über: wandert z von A nach B , so bewegt sich sein Bildpunkt von B nach dem Berührungspunkt D der Kreise $K\left(\frac{0}{1}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\right)$. Die Seite AC bildet sich ab auf den Bogen \widehat{BE} und \widehat{BC} auf \widehat{DE} . Wandert z in positiver Richtung auf dem unendlich grossen Kreis $K\left(\frac{1}{0}\right)$, so nähert sich sein Bild, beständig auf $K\left(\frac{1}{1}\right)$ sich bewegend, immer mehr dem Punkte $\frac{1}{1}$; dabei passiert es die unendlich vielen Berührungspunkte der Kreise $K\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ mit $K\left(\frac{1}{1}\right)$.

Diese Punkte sind die Bilder der Berührungspunkte der Kreise $K\left(\frac{n}{1}\right)$ mit der Geraden durch A und C ; ($n = 1, 2, 3, \dots$) Dem negativen Teil dieser Geraden ($x < 0$) entspricht als Abbild der Bogen $BC \frac{1}{1}$ (Fig. 4).

Wir sehen, dass die Substitution $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Vertauschung aller Kreise bewirkt, eine Drehung des ganzen Kreissystems um den sich selbst entsprechenden Kreis $K\left(\frac{0}{1}\right)$, zugleich mit einer Deformation verbunden. Diese Abbildung veranschaulicht uns Fig. 5 b, welche durch $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ aus Fig. 5 a hervorgeht, in welcher einzelne Kreisgruppen in alphabetischer Reihenfolge bezeichnet sind. Die Buchstabenbezeichnung der Kreise bleibt erhalten, nur ihre Lage und Grösse wird durch S verändert. Die gleich grossen Kreise, errichtet über den Punkten $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}$, welche die Gerade als $K\left(\frac{1}{0}\right) = \infty$ berühren, gehen über in die immer kleiner werdenden Bildkreise $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$; beide Kreisfolgen sind in den Figuren mit D, E, F, G bezeichnet. Die Kreise über den Punkten $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$ (K, \mathcal{J}, H, P, Q) zwischen den Kreisen D und C transformieren sich in die grösseren Kreise $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{3}{1}$. Dabei ist der Kreis $K\left(-\frac{1}{1}\right)$ übergegangen in den unendlich grossen Kreis $K\left(\frac{1}{0}\right) = C$. Die Figuren lassen durch die alphabetische Bezeichnung der einzelnen Kreisgruppen deutlich eine mit einer Deformation verbundene Drehung des gesamten Kreissystems um den festen Kreis D erkennen.

Die Substitution $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ bewirkt den Uebergang von Fig. 5 a zu Fig. 5 c, welche wiederum durch Drehung der Fig. 5 b um den festen Kreis ∞ entsteht.

3. Wir kehren zurück zur allgemeinen unimodularen Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Bei dieser geht das Ausgangsdreieck (Fig. 4) über in das von den drei sich berührenden Kreisen $K\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$, $K\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, $K\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}\right)$

Fig. 5 b.

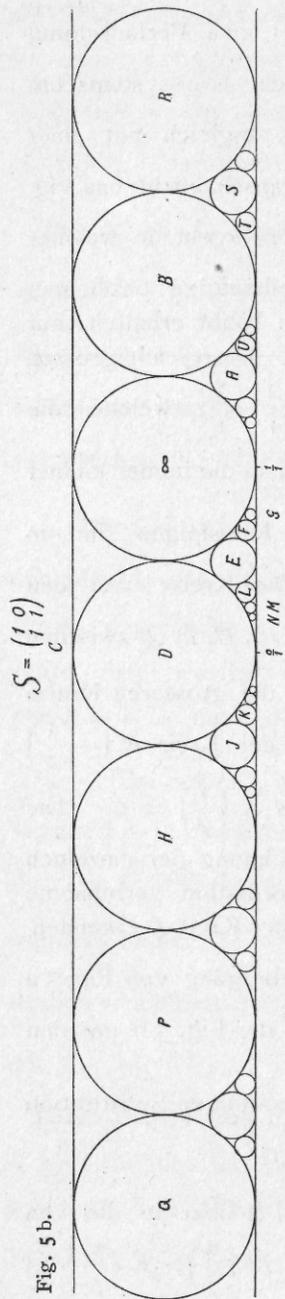


Fig. 5 a.

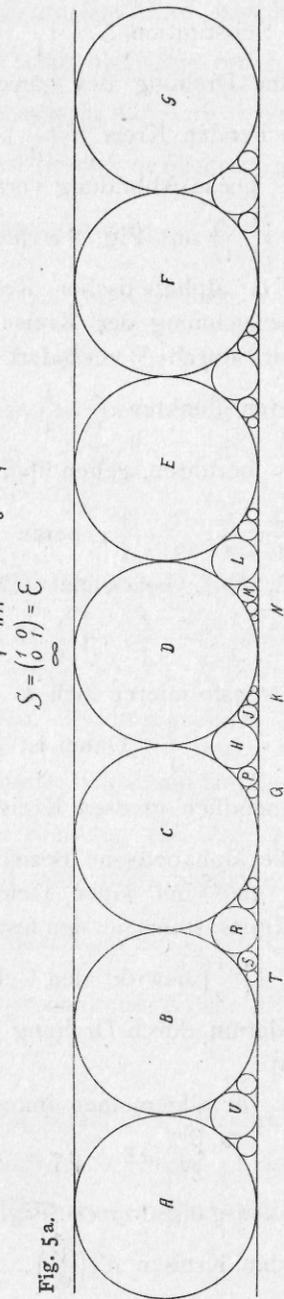
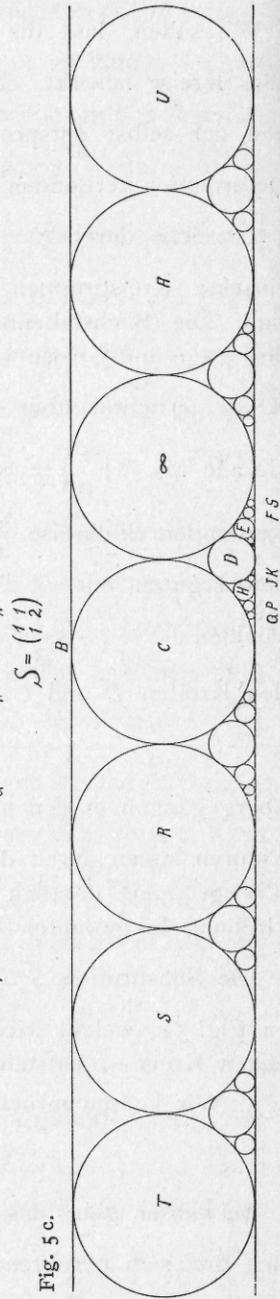


Fig. 5 c.



gebildete Bogendreieck, das wir mit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ bezeichnen. Diesem *Kreisbogendreieck* ordnen wir S zu. Da jede solche Substitution S den Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe auf ein durch Kreisbogen begrenztes Dreieck abbildet, die alle die obere Halbebene einfach und lückenlos überdecken, so bildet jede derartige Substitution das Ausgangsdreieck ab auf ein dieser eindeutig zugeordnetes Kreisbogendreieck. Durchläuft S die gesamte Modulgruppe, so erhalten wir als Abbilder die Gesamtheit aller Lücken unserer Fig. 4, die man sich beidseitig ins Unendliche fortgesetzt denkt. Jedem Kreisbogendreieck entspricht eine bestimmte Substitution der Modulgruppe. Die ganze Figur kann durch konforme Abbildung der drei ersten, das Ausgangsdreieck bildenden Kreise $K\left(\frac{1}{0}\right)$, $K\left(\frac{0}{1}\right)$, $K\left(\frac{1}{1}\right)$ erzeugt werden; berühren sich also drei benachbarte Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right)$ mit $r = \frac{1}{2q^2}$, was für die ersten Kreise der Fall ist, so gilt dies für alle Kreise. Die Behauptung zu Beginn des Paragraph 1 ist somit mit Hilfe der unimodularen Substitutionen bewiesen.

Fig. 6 zeigt die *Speiser'sche* Kreisfigur in Verbindung mit der bekannten *Dedekind'schen* Figur¹⁾. Der Mittelpunkt des Ausgangsdreiecks ist der nicht mehr zum Diskontinuitätsbereich gehörende

$$\text{Eckpunkt } -\rho^2 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

4. Die Substitutionen

$$(3) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

welchen die an $K\left(\frac{0}{1}\right)$ anliegenden Bogendreiecke zugeordnet sind, transformieren diesen in sich selbst. Jeder Berührungspunkt auf $K\left(\frac{0}{1}\right)$, den wir mit *Grundkreis* bezeichnen wollen, verschiebt sich um n seiner Teilbogen gegen den Nullpunkt und zwar hängt der Drehsinn vom Vorzeichen von n ab. Das gesamte Kreissystem dreht sich unter Deformation um den festen Grundkreis; je grösser

¹⁾ Vergl. Fueter, S. 17, Fussnote S. 5.

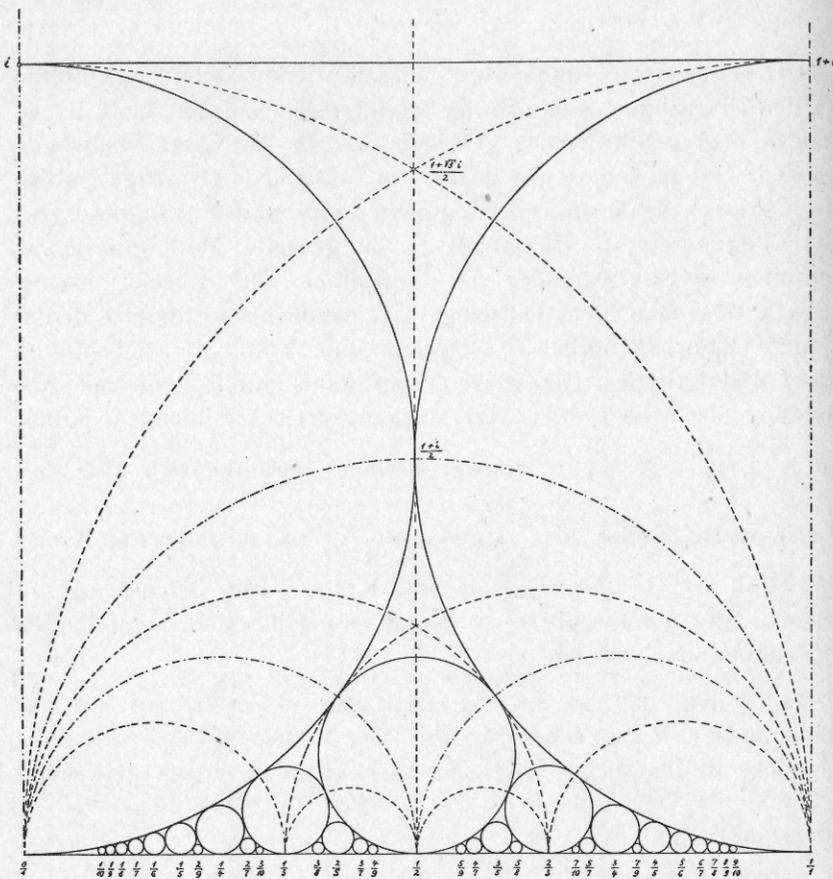


Fig. 6.

n ist, um so grösser die Drehung. Die Fig. 5 b zeigt diese Abbildung für $n = 1$.

5. Den Bogendreiecken, die an $K\left(\frac{1}{1}\right)$ liegen, entsprechen die Substitutionen $S = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix}$; diese transformieren $K\left(\frac{1}{0}\right)$ in $K\left(\frac{1}{1}\right)$ und somit die Kreise $K\left(\frac{n}{1}\right)$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), welche $K\left(\frac{1}{0}\right)$ berühren, in die Kreise um $K\left(\frac{1}{1}\right)$. Fig. 5 c zeigt diesen Fall für $n = 1$.

§ 3

Geometrische Deutung sämtlicher Lösungen einer linearen diophantischen Gleichung

Betrachten wir die unendlich vielen Kreise $K_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, welche einen festen Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ berühren, so ist stets

$$(4) \quad q p_n - p q_n = \pm 1,$$

und zwar gilt das $+$ oder $-$ Zeichen, je nachdem $\frac{p}{q} <$ oder $> \frac{p_n}{q_n}$ ist; d. h. je nachdem der Kreis K_n von rechts oder von links den Kreis K berührt. Nennen wir die Abszisse des Berührungspunktes eines Kreises mit der reellen Axe kurz *Abszisse des Kreises*, so folgt hieraus, dass die Determinante D , gebildet aus den Zählern und Nennern der Abszissen von zwei sich berührenden Kreisen, die wir in der Folge *Determinante dieser Kreise*, $D(K, K_n)$, bezeichnen, gleich ± 1 ist, wenn die erste Kolonne aus Zähler und Nenner der grösseren Abszisse besteht.

Geometrisch in unserer Figur gedeutet:

Den unendlich vielen Lösungen einer diophantischen Gleichung

$$(5) \quad qx - py = \pm 1$$

entsprechen die unendlich vielen Kreise $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots, K_n, \dots$, errichtet über den Punkten $\frac{x_n}{y_n}$ mit den Radien $r_n = \frac{1}{2y_n^2}$, die sich alle untereinander und den Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ mit $r = \frac{1}{2q^2}$ berühren. Die Lösungen selbst ergeben die Zähler und Nenner der einzelnen Abszissen dieser Kreise.

Stellt das Wertepaar x_1, y_1 eine Lösung unserer diophantischen Gleichung dar, so ist bekanntlich die allgemeine Lösung:

$$(6) \quad \begin{aligned} x_n &= x_1 + nq \\ y_n &= y_1 + np \end{aligned} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

und dieser entspricht die Gesamtheit der Abszissen $\frac{x_n}{y_n}$ der Kreise, welche den Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ umsäumend berühren.

So ersehen wir z. B. die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$5x - 3y = \pm 1$$

aus der Figur 7, welche uns die Umgebung des Kreises $K\left(\frac{3}{5}\right)$ vor Augen führt.

Lösungen: 8, 13; 5, 8; 2, 3; ...
7, 12; 4, 7; 1, 2; ...

Bekanntlich lässt sich die diophantische Gleichung

$$(7) \quad qx - py = 1$$

immer durch Kettenbruchentwicklung des Bruches $\frac{p}{q}$ nach der Formel

$$(8) \quad p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$$

lösen, worin $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte von $\frac{p}{q}$ sind. Der vorletzte Näherungsbruch ergibt dann durch seinen Zähler und seinen Nenner immer eine Lösung der diophantischen Gleichung, weil der letzte Näherungswert $\frac{p}{q}$ ist. Dieser vorletzte Näherungswert ist die Abszisse des grössten Kreises, der den Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ von rechts berührt. In unserem Zahlenbeispiel ist es der Kreis $K\left(\frac{2}{3}\right)$. Diese Lösung ist das Wertepaar, das die kleinsten positiven ganzen Zahlen enthält.

Für die Gleichung

$$(9) \quad qx - py = -1$$

wäre die Abszisse des grössten Kreises, der $K\left(\frac{p}{q}\right)$ von links be-

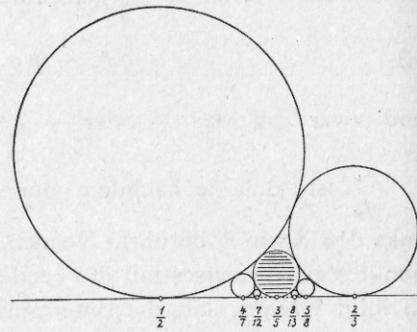


Fig. 7.

rührt, die Lösung in relativ kleinsten Zahlen. Aus diesen Betrachtungen folgt der

Satz I:

Die unendlich vielen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$qx - py = \pm 1$$

sind die Zähler und die Nenner der Abszissen $\frac{x}{y}$ der unendlich vielen Kreise, welche in der Speiser'schen Kreisfigur den festen Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ von rechts oder links berühren; dabei ergeben die grössten dieser Kreise die Lösung in kleinsten positiven ganzen Zahlen.

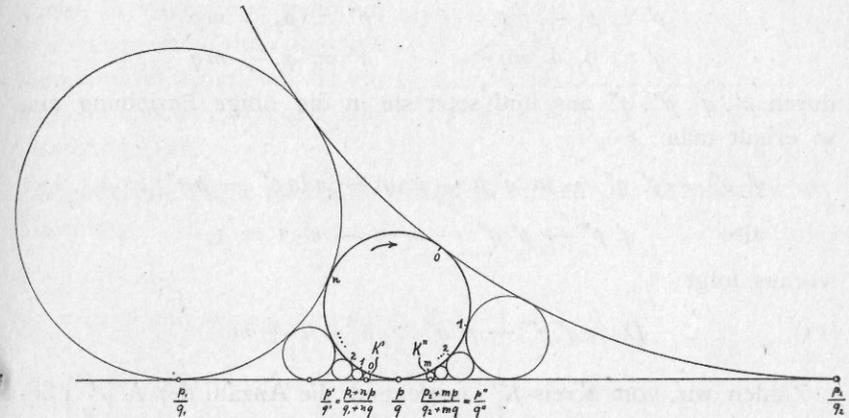


Fig. 8.

Betrachten wir in Figur 8 die Umgebung eines Kreises $K\left(\frac{p}{q}\right)$, wobei

$$(10) \quad \frac{p}{q} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} \text{ ist.}$$

Die beiden Kreise $K\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ und $K\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$ berühren diesen also von oben. Wir erhalten alle andern $K\left(\frac{p}{q}\right)$ berührenden Kreise, wenn wir nach der Bildung der Farey'schen Reihe zu Zähler und Nenner

der Abszissen von $K\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ und $K\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$ der Reihe nach gleiche Vielfache von p und q addieren.

So gelangen wir zu den Kreisen

$$K'\left(\frac{p'}{q'}\right) = K'\left(\frac{p_1 + np}{q_1 + nq}\right)$$

$$K''\left(\frac{p''}{q''}\right) = K''\left(\frac{p_2 + mp}{q_2 + mq}\right)$$

Da $K\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ und $K\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$ einander berühren, gilt nach (4)

$$D = q_1 p_2 - q_2 p_1 = 1.$$

Drückt man die Werte p_1, q_1, p_2, q_2 mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} p' &= p_1 + np & p'' &= p_2 + mp \\ q' &= q_1 + nq & q'' &= q_2 + mq \end{aligned}$$

durch p', q', p'', q'' aus und setzt sie in die obige Beziehung ein, so erhält man

$$q' p'' - p' q'' - m(q' p - p' q) - n(q p'' - p q'') = 1,$$

$$\text{also } q' p'' - p' q'' - m \cdot 1 - n \cdot 1 = 1,$$

woraus folgt

$$(11) \quad D = q' p'' - p' q'' = n + 1 + m.$$

Zählen wir, vom Kreis K' ausgehend, die Anzahl der $K\left(\frac{p}{q}\right)$ berührenden Kreise, bis wir zum Kreis K'' gelangen, so erhalten wir $n + 1 + m = v$. Wenn man solche Kreise: *Kreise in v-ter Lage* nennt, so erkennen wir den

Satz 2:

Die Determinante von Kreisen in v-ter Lage hat den Wert v.

Dieses Gesetz lässt uns alle Lösungen einer diophantischen Gleichung

$$(12) \quad q' x - p' y = \pm n$$

geometrisch interpretieren:

Der Kreis $K_0 = K\left(\frac{p'}{q'}\right)$ (in Fig. 8: K') berührt unendlich viele Kreise; z. B. den Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$. Wir zählen vom Kreis K_0 aus,

um den Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ in diesem oder jenem Sinne herumgehend, bis wir auf den Kreis in n -ter Lage K_n kommen. Dann ergeben Zähler und Nenner der Abszisse von K_n eine Lösung der Gleichung. Da aber K_0 unendlich viele Kreise berührt, also zu K_0 unendlich viele Kreise in n -ter Lage gehören, so ergeben die Zähler und die Nenner ihrer Abszissen die unendlich vielen Lösungen der Gleichung (12).

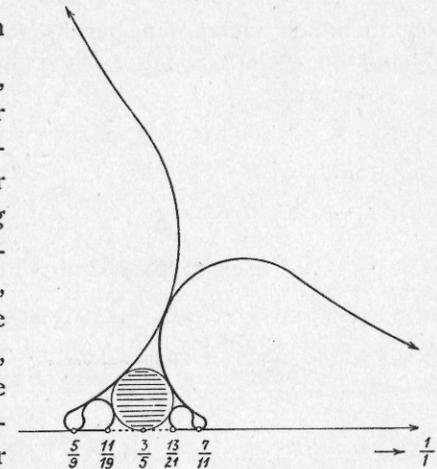


Fig. 9.

Figur 9 und Figur 10 zeigen einige Lösungen der diophantischen Gleichung

$$5x - 3y = \pm n$$

für $n = 2$ und $n = 3$ am Kreis $K\left(\frac{3}{5}\right)$.

$$\text{Lösungen: } \left. \begin{array}{l} 13, 21; 7, 11; 1, 1; \dots \\ 11, 19; 5, 9; \dots \end{array} \right\} n = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 18, 29; 12, 19; 9, 14; 3, 4; \dots \\ 15, 26; 9, 16; 6, 11; 0, 1; \dots \end{array} \right\} n = 3$$

Bei wachsendem n schliessen sich die den Kreis $K\left(\frac{p'}{q'}\right)$ umsäumenden Kurven immer mehr, ihre Endpunkte auf der reellen Axe nähern sich einander, ohne sich aber je zu treffen. Stets existieren zwei getrennte Endpunkte, deren Abszissen immer grösser werdende Zähler und Nenner erhalten. Im Grenzfall $n = \infty$ sind diese Endpunkte beidseitig unendlich benachbart der Lösung für $n = 1$, niemals aber die Lösungen selbst. Zusammenfassend erhalten wir:

Jede diophantische Gleichung

$$qx - py = n$$

führt in der Speiser'schen Kreisfigur auf einen Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$, der von unendlich vielen ihn berührenden, aus drei Kreisbogen bestehenden Kurven (Lösungskurven) umsäumt wird; aus dem mittleren

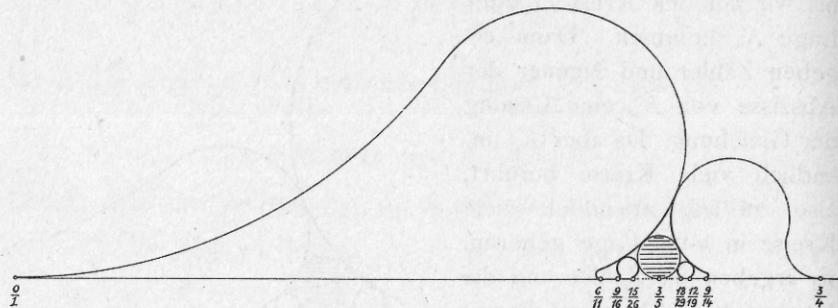


Fig. 10.

Kreisbogen befinden sich $2n + 1$, ($n > 1$) Berührungspunkte, während auf den beiden andern unendlich viele sich befinden. Die Endpunkte haben Abszissen $\frac{x}{y}$, deren Zähler und Nenner positive Lösungen der diophantischen Gleichung darstellen. Je nachdem n positiv oder negativ ist, gelten die den Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ von rechts oder links berührenden Lösungskurven. Ist $n = 1$, so sind diese Kurven geschlossene Kreise, die Endpunkte fallen zusammen in die Berührungspunkte $\frac{x}{y}$ dieser Kreise mit der reellen Axe (Grenzfall für $n = \infty$).

Die sämtlichen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$qx + py = n$$

ergeben sich aus den obigen Lösungen durch Vorzeichenänderung.

§ 4

Das Maximum der positiven binären quadratischen Formen

Aus der Theorie der quadratischen Formen ist bekannt¹⁾, dass jede positive binäre quadratische Form

$$(13) \quad (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

mit der Determinante

$$(14) \quad D = b^2 - ac = -\Delta$$

repräsentiert werden kann durch ihre erste Wurzel

$$(15) \quad z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a}$$

als Punkt der oberen Halbebene, dessen Koordinaten

$$\omega = \frac{-b}{a}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

sind. Es ist ferner

$$(16) \quad \omega^2 + \lambda^2 = \frac{c}{a}.$$

Bei dieser Zuordnung haben äquivalente Formen, als Formen, die durch unimodulare Substitutionen mit ganzzahligen Koeffizienten auseinander hervorgehen, auch äquivalente sie repräsentierende Punkte. Eine reduzierte positive Form (a, b, c) wird zufolge der für solche charakteristische Bedingung

$$(17) \quad |2b| \leq a \leq c$$

durch einen Punkt repräsentiert, dessen Koordinaten ω, λ die Ungleichheiten erfüllen:

$$(18) \quad |\omega| \leq \frac{1}{2}, \quad \omega^2 + \lambda^2 \geq 1;$$

d. h. der Punkt liegt im Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe; alle Punkte dieses Bereiches repräsentieren alle möglichen inäquivalenten positiven quadratischen Formen. Jede positive Form ist einer reduzierten positiven Form äquivalent; sie stellen dieselben Zahlen dar. Da diese Zuordnung von Form und Punkt eindeutig

¹⁾ Vergl. Bachmann: Die Arithmetik d. quadrat. Formen, II. Abtlg., I. Kap.

umkehrbar ist, entspricht jedem Punkt $P(\omega, \lambda)$ der oberen Halbebene eine positive binäre quadratische Form.

Konstruiert man (siehe Figur 2) in der oberen Halbebene zu jedem rationalen Punkt $\frac{x}{y}$ der reellen Axe den Kreis vom Radius $r = \frac{1}{\sqrt{3}y^2}$, welcher diesen Punkt berührt, so schneiden sich nach Paragraph 1 je drei dieser Kreise in einem Punkt. Jeder beliebige Punkt $P(\omega, \lambda)$ der oberen Halbebene liegt daher mindestens in einem dieser Kreise $K\left(\frac{x}{y}\right)$. Es gilt somit

$$(19) \quad \left(\omega - \frac{x}{y}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{3}y^2}\right)^2 \leq \frac{1}{3y^4}$$

(Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt \leq Radius), woraus folgt

$$\omega^2 y^2 - 2\omega xy + x^2 + \lambda^2 y^2 - 2\frac{\lambda}{\sqrt{3}} \leq 0$$

oder in Gestalt einer binären quadratischen Form

$$x^2 - 2\omega xy + (\omega^2 + \lambda^2)y^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda.$$

Da die Determinante dieser Form $D = -\lambda$ ist, folgt

$$(20) \quad x^2 - 2\omega xy + (\omega^2 + \lambda^2)y^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{|D|}.$$

Das ist der Satz über das Maximimum der positiven binären quadratischen Formen:

Für jede Form

$$(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

mit der Determinante

$$D = b^2 - ac = -\Delta$$

gibt es mindestens ein ganzzahliges System x, y der Unbestimmten (Zähler und Nenner der Abszisse $\frac{x}{y}$ des den Punkt $P(\omega, \lambda)$ einschliessenden Kreises), welche der Form (a, b, c) einen Wert $\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\Delta}$ erteilt.

Das Gleichheitszeichen gilt für die der Form

$$(21) \quad (1, 1, 1) = x^2 + xy + y^2 \rightarrow P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

äquivalenten Formen; diese werden repräsentiert durch die einander äquivalenten Schnittpunkte der Kreise. Der Punkt $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ist Schnittpunkt von $K\left(\frac{1}{0}\right)$, $K\left(\frac{0}{1}\right)$, $K\left(\frac{1}{1}\right)$ und Mittelpunkt des Ausgangsdreiecks (Figur 6). Liegt der Punkt $P(\omega, \lambda)$ zugleich in zwei Kreisen $K\left(\frac{x_1}{y_1}\right)$, $K\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$, so gibt es zwei ganzzahlige Wertepaare x_1, y_1 und x_2, y_2 , welche die Form zu einem Minimum $< \frac{2\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}}$ machen; fällt er zusammen mit einem Schnittpunkt der Kreise, so gibt es drei Lösungen.

Durch diese sehr einfachen und anschaulichen geometrischen Ueberlegungen sind wir zu einem wichtigen Satze aus der Theorie der quadratischen Formen gelangt.

Haben die Radien der Kreise $K\left(\frac{x}{y}\right)$ die Grösse $r = \frac{1}{\alpha y^2}$, wobei wir unter α einen variablen Wert verstehen, so verkleinern sich alle Kreise, wenn man α grösser werden lässt. In Fig. 2 hat α den Wert $\sqrt{3}$, nimmt α zu, so werden die Kreise kleiner, die Lücken zwischen diesen grösser. Für $\alpha = 2$ berühren sich alle Kreise. Wir stellen uns die Frage: Wie gross muss α gewählt werden, d. h. um wieviel müssen die Kreise verkleinert oder vergrössert werden, damit ein eine gegebene positive quadratische Form (a, b, c) repräsentierender Punkt $P(\omega, \lambda)$ auf die Peripherie des ihm nächsten Kreises $K\left(\frac{p}{q}\right)$ zu liegen kommt? Dieser Wert gibt das Minimum $\frac{2\sqrt{\Delta}}{\alpha}$ der Form (a, b, c) für das Zahlenpaar p, q .

Aus Formel (20) erhalten wir folgenden Wert für den Parameter α

$$(22) \quad \alpha = \frac{2\lambda}{q^2 \left[\left(\frac{p}{q} - \omega\right)^2 + \lambda^2 \right]}.$$

Für $\omega = \frac{p}{q}$, $\lambda =$ beliebig, muss $r = \frac{\lambda}{2}$ sein.

Setzen wir diese Werte ein in obige Formel, erhalten wir

$$\alpha = \frac{2}{q^2 \cdot \lambda},$$

woraus folgt:

$$r = \frac{1}{\alpha q^2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Liegt $P(\omega, \lambda)$ im Mittelpunkt eines Kreisbogensdreiecks der Ausgangsfigur 1 ($\alpha = 2$), dann muss α abnehmen bis auf $\alpha = \sqrt{3}$, damit er auf einen Kreis zu liegen kommt.

Beispiel: $\omega = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dieser Punkt liegt auf $K\left(\frac{0}{1}\right)$, $K\left(\frac{1}{1}\right)$ und $K\left(\frac{1}{0}\right)$. Setzt man diese Werte für p, q ein in der Formel (22), so erhält man in der Tat $\alpha = \sqrt{3}$.

§ 5

Berührungspunkt, gemeinsame Tangente und Zentrale zweier Kreise

Irgend zwei einander berührende Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right)$, $K\left(\frac{p'}{q'}\right)$ bestimmen in ihrem Berührungspunkt eine gemeinsame Tangente und eine Zentrale. Wir wollen die Koordinaten des Berührungspunktes und die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangente und der Zentralen mit der reellen Axe durch die Zähler und Nenner der Abszissen der beiden Kreise ausdrücken. Der Betrachtung liege die Figur 11 zugrunde.

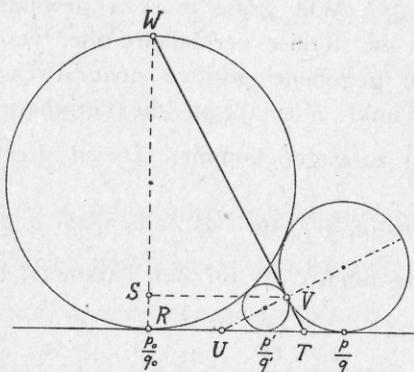


Fig. 11.

men in ihrem Berührungspunkt eine gemeinsame Tangente und eine Zentrale. Wir wollen die Koordinaten des Berührungspunktes und die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangente und der Zentralen mit der reellen Axe durch die Zähler und Nenner der Abszissen der beiden Kreise ausdrücken. Der Betrachtung liege die Figur 11 zugrunde.

1. Der Berührungspunkt V :

Dieser entsteht nach § 2 Abschnitt 3 durch Abbildung des Eckpunktes $A(0, 1)$ des Ausgangsdreiecks ABC (Fig. 4) vermittels der unimodularen Substitution $S = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$, wenn $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$.

Wir erhalten

$$V: \frac{p i + p'}{q i + q'} = \frac{p' q' + p q + i(p q' - q p')}{q'^2 + q^2};$$

da aber nach (2)

$$(23) \quad p q' - q p' = 1,$$

resultieren als Koordinaten ξ, η des Berührungspunktes V

$$\xi = \frac{p' q' + p q}{q'^2 + q^2} \quad \eta = \frac{1}{q'^2 + q^2}.$$

Es gilt der

Satz 1: Der Berührungspunkt der sich berührenden Kreise

$K\left(\frac{p}{q}\right)$, $K\left(\frac{p'}{q'}\right)$ hat die Koordinaten

$$(24) \quad V: \xi = \frac{p' q' + p q}{q'^2 + q^2} \quad \eta = \frac{1}{q'^2 + q^2}.$$

2. Der Zentralenschnittpunkt U :

Aus den Mittelpunktskoordinaten der beiden Kreise erhält man bei Anwendung des Strahlensatzes den

Satz 2: Die Zentrale der einander berührenden Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right)$, $K\left(\frac{p'}{q'}\right)$ schneidet die reelle Axe im Punkt¹⁾

$$(25) \quad U: \xi = \frac{p' q' - p q}{q'^2 - q^2}.$$

3. Der Tangentenschnittpunkt T :

Mit Benützung des Höhensatzes im Dreieck UVT gelangt man unter Berücksichtigung von (23) zu dem

Satz 3: Die gemeinsame Tangente der sich berührenden Kreise

¹⁾ Dieser Satz gilt auch für zwei ganz beliebige Kreise.

$K\left(\frac{p}{q}\right), K\left(\frac{p'}{q'}\right)$, wobei $p' > p, q' > q$ ist, schneidet die reelle Axe im Punkte

$$(26) \quad T: \quad \xi = \frac{2pq' - 1}{2qq'}$$

In Figur 11 bemerken wir noch eine merkwürdige geometrische Eigenschaft der Tangente der beiden Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right), K\left(\frac{p'}{q'}\right)$: diese schneidet den Kreis $K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$, den sie beide berühren, in seinem obersten Punkte W , dem Diametralpunkt vom Punkt R mit der Abszisse $\xi = \frac{p_0}{q_0}$.

Beweis: Ist die Behauptung richtig, so gilt die Proportion

$$\overline{RW} : \overline{SW} = \overline{RT} : \overline{SV},$$

wobei R, S und W die gleiche Abszisse $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p' - p}{q' - q}$ haben.

Es muss also sein

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q' - q)^2} : \left(\frac{1}{(q' - q)^2} - \frac{1}{q'^2 + q^2} \right) = \\ = \left(\frac{2pq' - 1}{2qq'} - \frac{p' - p}{q' - q} \right) : \left(\frac{p'q' + pq}{q'^2 + q^2} - \frac{p' - p}{q' - q} \right). \end{aligned}$$

Die Produktgleichung führt auf

$$\begin{aligned} (2pq' - 1)(q' - q) - 2qq'(p' - p) = \\ = (p'q' + pq)(q' - q) - (q'^2 + q^2)(p' - p), \end{aligned}$$

was unter mehrmaliger Berücksichtigung von (2) zu der Identität $q + q' = q + q'$ führt.

Daher gilt der

Satz 4: Die gemeinsame Tangente zweier sich berührenden Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right), K\left(\frac{p'}{q'}\right)$, die beide denselben Kreis $K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$ berühren, schneidet diesen in seinem höchsten Punkt, dem Diametralpunkt seines Berührungspunktes mit der reellen Axe.

Geometrische Deutung eines regelmässigen Kettenbruches: Die Kettenbruchkurve

Es sei ω eine reelle Grösse, die wir der Einfachheit halber als irrational voraussetzen wollen; ferner sei in regelmässiger Kettenbruchentwicklung

$$(27) \quad \omega = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Bricht man einen solchen regelmässigen Kettenbruch, den wir zur Abkürzung mit dem Symbole

$$(28) \quad \mathfrak{K}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots)$$

bezeichnen wollen, bei seinen einzelnen ganzzahligen Teilennern ab, so erhält man seine sogenannten Näherungsbrüche (auch Hauptnäherungsbrüche genannt in Unterscheidung von den Neben-
näherungsbrüchen):

$$(29) \quad \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots, \frac{p_\nu}{q_\nu}, \dots$$

Die einfachen Gesetze, welche diese befolgen und nach denen sie zu bilden sind, setzen wir aus der Theorie der Kettenbrüche als bekannt voraus. Danach bestehen die Beziehungen

$$(30) \quad \frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{a_\nu p_{\nu-1} + p_{\nu-2}}{a_\nu q_{\nu-1} + q_{\nu-2}}$$

und

$$(31) \quad p_{\nu-1}q_\nu - q_{\nu-1}p_\nu = (-1)^\nu,$$

der zufolge Zähler und Nenner der Näherungsbrüche (29) relativ prim sind. Denkt man sich zu allen diesen unendlich vielen Näherungsbrüchen $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$) als rationale Punkte auf

der reellen Achse, in der oberen Halbebene den Kreis mit dem Radius

$$(32) \quad r = \frac{1}{2q_\nu^2}$$

konstruiert, welcher diesen Punkt berührt, so entsteht wegen (31) nach § 1 eine Kette von unendlich vielen Kreisen, von denen mindestens zwei einander berühren; diese entsprechen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen von ω . Als Beispiel zeigt Figur 12 die geometrische Veranschaulichung der Kettenbruchentwicklung

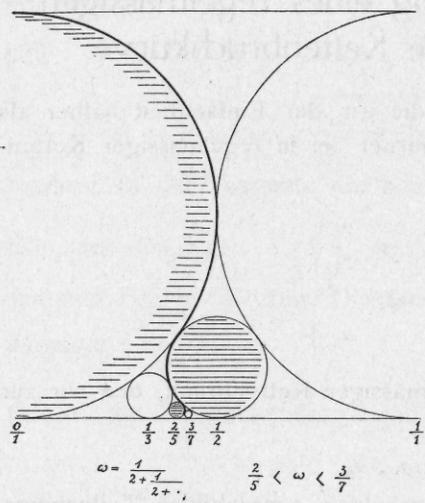


Fig. 12.

$$\omega = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

mit den Hauptnäherungsbrüchen

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2} \\ \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{5}$$

und den Nebennäherungsbrüchen

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3}$$

Jeder regelmässigen Kettenbruchentwicklung einer reellen Grösse ω ist somit eine ganz bestimmte unendliche Kette von einander berührenden Kreisen eindeutig zugeordnet. Da nach (30) die Zähler und ebenso die Nenner der sukzessiven Näherungsbrüche über jede Grenze hinauswachsen, nehmen die Radien in dieser Kreiskette beständig ab und werden schliesslich unendlich klein. Ist $a_v = 1$, so berührt der Kreis $K\left(\frac{p_v}{q_v}\right)$, den wir in der Folge mit K_v bezeichnen, seine beiden vorhergehenden Kreise K_{v-2} , K_{v-1} , weil beide Determinanten ± 1 sind. Nimmt der Teilnenner a_v die Werte 2, 3, ... n an, so schiebt sich der Kreis K_v , immer kleiner werdend, unter den Kreis K_{v-1} in die n -te Lage zu K_{v-2} . Je grösser also in einer regelmässigen Kettenbruchentwicklung die einzelnen Teilnehmer sind, umso rascher verkleinern sich die Kreise der zu-

gehörigen Kreiskette und umso rascher nähern sich die Näherungsbrüche dem eigentlichen Wert der reellen Zahl ω .

Den Nebennäherungsbrüchen

$$(33) \quad \frac{c p_{v-1} + p_{v-2}}{c q_{v-1} + q_{v-2}}, \quad (c = 1, 2, 3, \dots (a_v - 1); v \geq 1)$$

entsprechen die Kreise, die übersprungen worden sind. Wir nennen sie *Nebenkreise* zum Unterschied von den vorigen, die wir mit *Hauptkreise* bezeichnen. Die zu den Hauptnäherungsbrüchen gerader (ungerader) Ordnung gehörigen Hauptkreise erhalten mit wachsendem Index grössere (kleinere) Abszissen. Diese Kette von Hauptkreisen bestimmt eindeutig eine Kurve, die sich zwischen allen Gliedern der Kette hindurch windet: sie verläuft auf jedem dieser Hauptkreise so weit, bis sie beim Berührungspunkt des in der Kette folgenden Hauptkreises auf diesen überspringt. Jeder Wendepunkt der Kurve entspricht als Berührungspunkt zweier Hauptkreise einem Hauptnäherungsbruch; jedem der $(a_v - 1)$ auf dem einzelnen Hauptkreisbogen der Kurve befindlichen Berührungspunkt der Nebenkreise ist ein Nebennäherungsbruch zugeordnet. So durchläuft die dem regelmässigen Kettenbruch eindeutig zugeordnete Kurve, die wir in der Folge *regelmässige Kettenbruchkurve* bezeichnen wollen, alle seinen Näherungen zugeordneten Kreise und führt, was die Bedeutung dieses Kurvenzuges wesentlich erhöht, in der *Speiser'schen* Kreisfigur direkt zum Werte der durch sie dargestellten reellen Zahl ω . Die zu den Näherungsbrüchen gerader (ungerader) Ordnung gehörigen Hauptkreise befinden sich auf der rechten (linken) Seite der Kurve. Ist $a_0 = 0$, der 0-te Näherungsbruch also $\frac{0}{1}$, so geht man auf dem Kreis $K\left(\frac{0}{1}\right)$ a_1 Bogenteile weiter und kommt auf den Kreis $K_2 = K\left(\frac{1}{a_1}\right)$; auf diesem neuen Kreis um a_2 Bogenteile vorwärts schreitend gelangt man zum Kreis K_2 . Wenn man so weiter fährt, erreicht man jeden Hauptkreis K_v ($v = 3, 4, \dots$), dessen Abszisse jeweils der Hauptnäherungsbruch $\frac{p_v}{q_v}$ selbst ist.

Ist $a_0 \neq 0$, also bei Einführung von

$$\frac{p_{-2}}{q_{-2}} = \frac{0}{1} \quad \frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0},$$

(wodurch die Rekursionsformeln (30) schon für $v = 0$ Gültigkeit erlangen), darstellbar ist in der Form

$$a_0 = \frac{a_0 \cdot 1 + 0}{a_0 \cdot 0 + 1} = \frac{a_0}{1},$$

so heisst das in geometrischer Deutung: die Kurve beginnt bei $s = i$ mit a_0 Bogenteilen auf dem Kreis $K\left(\frac{1}{0}\right)$, der in unserer Figur als Gerade parallel zur reellen Achse im Abstand 1 erscheint (Kreis mit unendlich grossem Radius) und verläuft dann auf dem Hauptkreis $K\left(\frac{a_0}{1}\right)$ a_1 Bogenteile weiter u. s. w.

Bei einer negativen Zahl ω ist, weil 1)

$$(34) \quad \Re(0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_v) + \Re(0; 1, (a_1 - 1), a_2, a_3, \dots, a_v) = 1,$$

$$-\omega = -(a_0 + 1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(a_1 - 1) + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}}$$

Die Kurve geht zunächst auf $K\left(\frac{1}{0}\right)$ von $s = i$ aus nach *links* zu dem Kreis $K\left(-\frac{a_0 + 1}{1}\right)$, hier eine Spitze bildend auf diesem einen Bogenteil weiter, dann $(a_1 - 1)$ Bogenteile auf dem folgenden Kreis, u. s. w.

Bei einer rationalen Zahl $\xi = \frac{p}{q}$ gibt es in der geschlossenen regelmässigen Kettenbruchentwicklung einen letzten Teilnenner a_n , also einen letzten endlich grossen Hauptkreis $K\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = K\left(\frac{p}{q}\right)$. Um nun doch die Kurve im Punkte ξ enden zu lassen, können wir ξ auch darstellen in der Kettenbruchform

$$\xi = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{m}}}}, \quad \text{wobei } m \rightarrow \infty.$$

1) Vergl. Bachmann, Arithm. d. quadr. Formen II., Kap. 2., S. 49.

Auf dem letzten Kreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ gelangen wir, nachdem wir die unendlich vielen, immer kleiner werdenden Bogenteile durchschritten haben, auf den Punkt $\xi = \frac{p}{q}$ selbst, als Grenzwert einer konvergenten Reihe von Abszissenwerten.

Auf diese Weise haben wir jeder reellen Zahl ω eine im Punkt $s = i$ beginnende und auf der reellen Axe im Punkt ω endende, aus lauter Kreisbogen bestehende Kurve eindeutig zugeordnet. Dabei haben die Teilnenner die geometrische Bedeutung:

$$a_0 = \text{Anzahl der Strecken auf } K\left(\frac{1}{0}\right) = K\left(\frac{p-1}{q-1}\right)$$

$$a_1 = \text{Anzahl der Bogenteile auf } K\left(\frac{a_0}{1}\right) = K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_v = \text{Anzahl der Bogenteile auf } K\left(\frac{p_{v-1}}{q_{v-1}}\right)$$

$$\text{Summe aller Bogenteile} = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_v)$$

$$\text{Summe aller Hauptkreisbogen} = v + 1, \quad \text{bei } a_0 \geq 0$$

$$= v, \quad \text{bei } a_0 = 0$$

Dazu kommt noch der Endbogen auf $K\left(\frac{p_v}{q_v}\right)$, der zum Punkt $\frac{p_v}{q_v}$ selbst hinführt (aus unendlich vielen Bogenteilen bestehend).

Aus all diesen Ueberlegungen folgt der fundamentale

Satz: Jeder endliche oder unendliche regelmässige Kettenbruch bestimmt in der Speiser'schen Kreisfigur eine in $s = i$ beginnende, aus lauter Kreisbogen mit abnehmenden Radien zusammengesetzte Kurve, die zum reellen Punkt ω hinführt.

§ 7

Zusammenhang mit dem Klein'schen Umrisspolygon des ω -Strahles im Gitter der ganzzahligen Punkte

Jedem Kreis $K\left(\frac{x}{y}\right)$ in unserer Figur entspricht eine rationale Zahl $\frac{x}{y}$ als seine Abszisse. Wir wollen in der Folge als Träger dieses Wertes die Mittelpunkte M der Kreise wählen. Wie bei der Klein'schen Auffassung¹⁾ die Punkte (x, y) des ganzzahligen Punktgitters Träger der Quotienten $\frac{x}{y}$ sind, stellen die Mittelpunkte der Kreisfigur (Mittelpunktgitter) diese Werte dar, mit dem Unterschied, dass hier nur Repräsentanten der irreduziblen Brüche in der oberen Zahlenebene vorhanden sind, die sich längs der reellen Axe verteilen und zwar wächst ihre Dichtigkeit mit grösserer Annäherung gegen die Axe über alle Grenzen hinaus, während bei dem Punktgitter die Punkte $\frac{x}{y}$ gleichmässig in der ganzen oberen Halbebene verteilt sind. (Vergleiche Fig. 13 und Fig. 14).

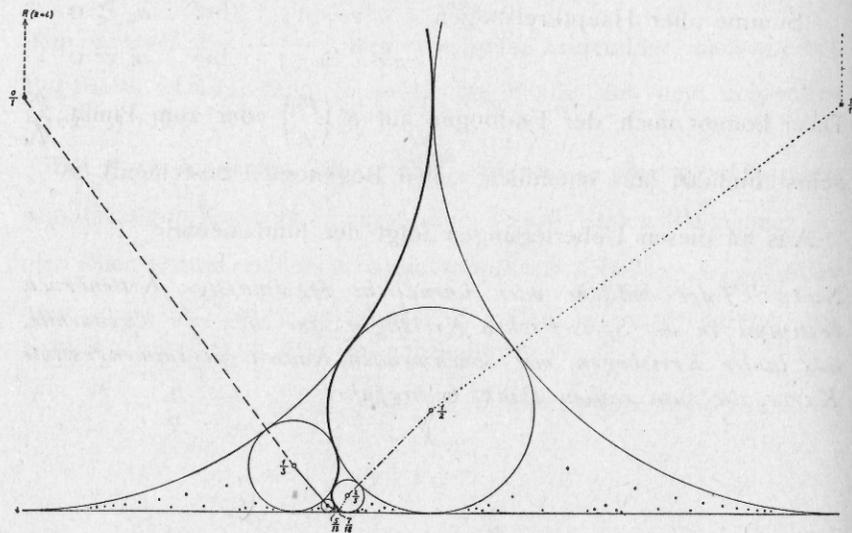


Fig. 13.

¹⁾ Klein, Vorl. üb. ausg. Kap. d. Zahlenth., Bd. I., S. 17 ff.

Es seien

$$P_{v-2} = \frac{p_{v-2}}{q_{v-2}}, \quad P_{v-1} = \frac{p_{v-1}}{q_{v-1}}$$

als aufeinanderfolgende Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung der Irrationalzahl ω ,

$$\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_v, \dots),$$

zwei Hauptnäherungspunkte P_{v-2}, P_{v-1} des Umrisspolygons. Dann erhält man den nächsten Hauptnäherungspunkt $P_v = \frac{p_v}{q_v}$ durch die Rekursionsformel

$$(37) \quad \frac{p_v}{q_v} = \frac{a_v p_{v-1} + p_{v-2}}{a_v q_{v-1} + q_{v-2}}$$

was geometrisch eine Addition von Vektoren bedeutet

$$(38) \quad \overline{OP}_v = a_v \cdot \overline{OP}_{v-1} + \overline{OP}_{v-2}$$

Wir müssen, um konstruktiv zu einem folgenden Hauptnäherungspunkt zu gelangen, die Strahlen OP_{v-2} und OP_{v-1} ziehen. Diesem „Strahl-Ziehen“ vom Punkt P_{v-1} nach O entspricht nun in unserer Deutung der Kettenbrüche das „Ziehen eines Kreises“ um den Punkt M_{v-1} , wobei der Radius durch die Ordinate von M_{v-1} bestimmt ist. Zu reduziiblen Zahlen im Punktgitter gehört derselbe Strahl, wie auch in unserer Figur zu solchen Zahlen der nämliche Kreis gehört. Wir denken uns also zunächst nur die Mittelpunkte der Kreisfigur als gegeben, wie im Punktgitter; erst hernach zieht man die Kreise (Strahlen). Der Vektor-Addition entspricht in unserer Figur folgende Operation:

Es ist

$$(39) \quad \frac{p_{v-1} + p_{v-2}}{q_{v-1} + q_{v-2}}$$

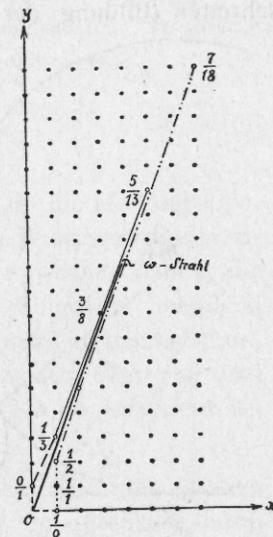


Fig. 14.

nach (10) die Abszisse des Kreises, der die Hauptkreise K_{v-2} und K_{v-1} berührt. Der Kreis

$$(40) \quad K_v = K \left(\frac{a_v p_{v-1} + p_{v-2}}{a_v q_{v-1} + q_{v-2}} \right)$$

ist nach (11) in a_v -ter Lage zum Hauptkreis K_{v-2} , d. h. wir verstehen unter der Operation (37) den Uebergang von K_{v-2} , K_{v-1} zum a_v -ten Kreis K_v , von den Näherungsmittelpunkten M_{v-2} , M_{v-1} , zum neuen Näherungsmittelpunkt M_v . Statt dass wir, wie bei der Vektor-Addition, Vielfache von Strecken aneinander reihen, müssen wir hier einfach, vorerst zu zeichnende Kreise (als Nebenkreise), abzählen. Man kann die Operation auch so darstellen:

$\frac{a_v p_{v-1} + p_{v-2}}{a_v q_{v-1} + q_{v-2}}$ heisst: a_v Nebenkreise unter K_{v-1} , von K_{v-2} aus, oder, da dem Vektor als Strecke auf einem Strahl in unserer Deutung ein *Kreisvektor* als Bogenteil auf einem Kreis entspricht: a_v Bogenteile vom Berührungspunkt K_{v-2} , K_{v-1} auf K_{v-1} weiter schreiten (Bildung der Kettenbruchkurve). Diesem Abzählen von

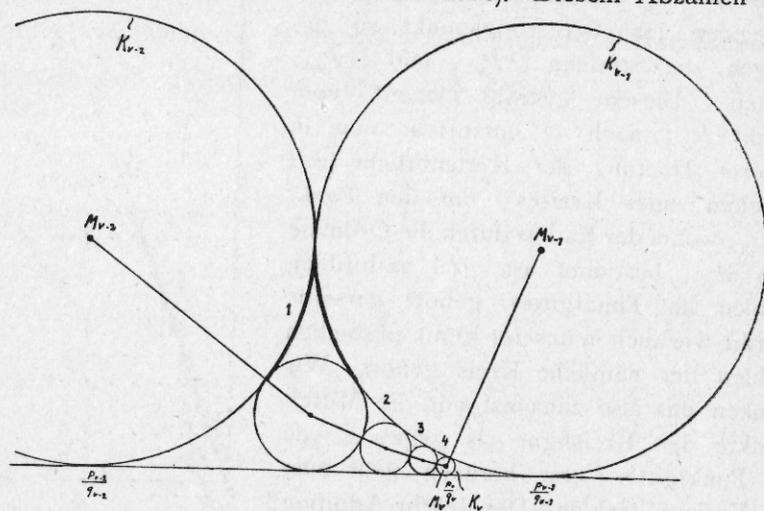


Fig. 15.

Bogenteilen auf einen Kreis entspricht das a_v -fache Abtragen eines Vektors auf seinem Strahl. Wir bemerken, dass die zu addierenden Kreisbogen kleiner werden. Ein Kreisvektor wird somit bei seinen sukzessiven Vielfachen kleiner. Man kann dieses geometrische

Verfahren *Addition von Kreisvektoren* nennen. Die Figur 15 zeigt uns das Beispiel: $a_v = 4$, was bedeutet:

$$K_v = 4 K_{v-1} + K_{v-2}$$

oder

$$M_v = 4 M_{v-1} + M_{v-2} .$$

Ganz analog wie man die aufeinander folgenden Näherungspunkte mit den Vektoren nach dem Verfahren von *F. Klein* konstruiert und zu allen Näherungspunkten von ω gelangt, führt uns die definierte Kreisvektoren-Addition zu allen Hauptnäherungsmittelpunkten M_v . Bei negativem a_v ändert sich die Konstruktionsrichtung, wie bei der gewöhnlichen Vektorenrechnung: man umgeht den Kreis K_{v-1} im entgegengesetzten Sinn wie bei positivem Teilnenner a_v .

Aus der Theorie der Kettenbrüche¹⁾ ist uns bekannt, dass jedem einzelnen dieser durch je zwei in der Kettenbruchentwicklung aufeinanderfolgenden Hauptnäherungsbrüche bestimmten Parallelogramm eine ganz bestimmte unimodulare Substitution S

$$S = \begin{pmatrix} p_{v-1} & p_{v-2} \\ q_{v-1} & q_{v-2} \end{pmatrix}$$

zugeordnet ist; in ihrer Gesamtheit ergeben sie die Modulgruppe. Den Parallelogrammen entsprechen nun in der Kreisfigur die Kreisbogendreiecke, denen, wie wir in Paragraph 2 gesehen haben, die gleichen Substitutionen zugeordnet sind. Die Folge der unendlich vielen Parallelogramme schliesst sich immer mehr an den ω -Strahl, die Kreisbogendreiecke nähern sich unbegrenzt dem Werte ω , dem als Irrationalzahl keiner der unendlich vielen Kreise entspricht (ω -Stelle der reellen Axe).

Der ω -Strahl wird umgeben von Strahlen, die sich diesem bei fortschreitender Kettenbruchentwicklung unbegrenzt nähern, ebenso wird die ω -Stelle von den unendlich vielen Hauptkreisen derart eingeschlossen, dass die aufeinanderfolgenden unendlich klein werdenden Kreise bei ω sich häufen und diese Stelle vollständig einhüllen. Auf dieser Schar von Hauptkreisen findet sich unsere

¹⁾ Vergl. Klein, Einleitg. zur Zahlentheorie I. Ausgew. Kap.

Kettenbruchkurve als kürzester Weg zur Stelle ω , vom Ursprung $z = i$ ausgehend, von einem Hauptkreis auf den in der Kette folgenden überspringend, ohne das Kreismittelpunktgitter zu treffen. Diesem Weg zu ω auf der Kettenbruchkurve entspricht der Weg zu ω auf dem ω -Strahl der *Klein'schen* Deutung der regelmässigen Kettenbruchentwicklung. (Vergl. Fig. 13 und Fig. 14.)

Offenbar macht auch hier eine solche Kurve, wie wir nach *Dedekinds* Definition der Irrationalzahlen sagen können, einen Schnitt im Gebiet aller irreduziblen Brüche $\frac{x}{y}$, indem sie das Mittelpunktgitter in einen links und einen rechts von ihr gelegenen Punkthaufen scheidet. Die Mittelpunkte der Haupt- und Nebenkreise entsprechen den Hauptnäherungspunkten und Nebenpunkten bei *Klein*. Die geradlinigen Verbindungen der aufeinanderfolgenden Haupt- und Nebenkreismittelpunkte auf der rechten und linken Seite der Kettenbruchkurve \mathfrak{C} ergeben einen dem *Klein'schen* Umrisspolygon¹⁾ des ω -Strahles analogen Polygonzug, der sich immer mehr an die Kurve anschmiegt und dieser schliesslich beliebig nahe kommt. (*Mittelpunktpolygon*.) Fassen wir den von diesem Polygonzug eingeschlossenen Raum ins Auge, so bemerken wir, dass auch beim Mittelpunktpolygon kein einziger der Gitterpunkte sich darin findet. Der Nebenpunkte enthaltende Streckenzug zwischen je zwei Hauptkreismittelpunkten als Hauptnäherungspunkte gerader oder ungerader Ordnung ist gegen \mathfrak{C} konkav; der einzelne solche Streckenzug des Mittelpunktpolygons, sagen wir etwa, um beim rechten Ast zu bleiben, der Streckenzug von $\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$ bis $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$, besteht aus a_{2n} Strecken; dieses ist wie bei *Klein* die einfache Deutung der bei der Kettenbruchentwicklung auftretenden Teilnenner. Wir haben in Paragraph 6 gesehen, dass auch dort die Teilnenner a_v , die Anzahl der Bogenstücke zwischen je zwei Hauptnäherungsbrüchen entsprechenden, Wendepunkten der Kettenbruchkurve bedeuteten.

Ein Vergleichschema möge den Zusammenhang der beiden geometrischen Deutungen der regelmässigen Kettenbruchentwicklung übersichtlich zusammenstellen:

¹⁾ Vergl. *Klein*, Göttinger Nachrichten 1895, S. 357 ff.

Fig. 14.

Klein'sches Punktgitter

O-Punkt des rechtwinkligen Koordinaten-Systems

Punkt $P \left(\frac{x}{y} \right)$

Strahl: $O \rightarrow \frac{x}{y} \rightarrow \infty$

Vektor \overline{OP}

Richtung des Strahles

Hauptnäherungspunkt P_v

Nebenpunkt

Parallelogramm

Richtung: ω -Strahl

Umrisspolygon

Fig. 13.

Mittelpunktgitter der Speiser'schen Kreisfigur

Ursprungspunkt: $z = i$

Mittelpunkt $M \left(\frac{x}{y} \right)$

Kreis um $M \left(\frac{x}{y} \right)$ mit $r = \frac{1}{2y^2}$

Kreisbogen nach dem Berührungspunkt mit Hauptkreis

Drehsinn auf dem Kreis

Hauptkreismittelpunkt M_v

Nebenkreismittelpunkt

Kreisbogendreieck

↖ Substitutionen der Modulgruppe ↗

Kettenbruchkurve zu $\omega = \omega$ -Kurve

Mittelpunktpolygon.

Diese anschaulichen Deutungen lassen die fundamentalen Gesetze aus der Theorie der regelmässigen Kettenbruchentwicklung und der sich an dieselben anschliessenden analytischen Verfahrensweisen ohne weitere Schwierigkeiten sogleich erkennen.

Die Kurve eines halbregelmässigen Kettenbruches

Wir vermuten, dass für Kettenbrüche mit den Teilzählern $b_\nu = \pm 1$, ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), die also nicht mehr regelmässig sind, auch eine eindeutig zugeordnete Kurve \mathfrak{C} existiert. Nach der Fundamentalformel aus der Theorie der Kettenbrüche ¹⁾

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{a_\nu p_{\nu-1} + b_\nu p_{\nu-2}}{a_\nu q_{\nu-1} + b_\nu q_{\nu-2}}$$

erhält man für $b_\nu = -1$

$$(41) \quad \frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{-a_\nu p_{\nu-1} + p_{\nu-2}}{-a_\nu q_{\nu-1} + q_{\nu-2}};$$

d. h. in unserer Figur: Die Nebenkreise sind nicht unter $K\left(\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}\right)$,

sie werden nicht sogleich kleiner, wie es für $b_\nu = +1$ der Fall ist, sondern sie umsäumen den Kreis zum Hauptnäherungsbruch im entgegengesetzten Drehsinn; sie werden zunächst grösser um hernach bei grossem a_ν wieder kleiner zu werden, indem sie sich von der anderen Seite der Abszisse $\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}$ nähern.

Beweis: Bei diesem entgegengesetzten Drehsinn (Rückkehr) nimmt nach der Farey'schen Reihe der Zähler und der Nenner der Abszisse eines den Hauptkreis $K\left(\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}\right)$ berührenden Kreises sukzessive um $p_{\nu-1}$ bzw. $q_{\nu-1}$ ab. Der Wert $a_\nu = 0$ ergibt den vorletzten Hauptkreis $K\left(\frac{p_{\nu-2}}{q_{\nu-2}}\right)$ selbst; $a_\nu = -1$ führt zum nächsten Hauptkreis, indem die Kurve \mathfrak{C} eine Spitze (Rückkehrpunkt) bildet im Berührungspunkt von $K_{\nu-2}$, $K_{\nu-1}$. Somit entspricht jedem negativen Teilzähler unseres Kettenbruches eine Spitze der Kurve. So hat z. B. der Kettenbruch

$$\mathfrak{R}(a_0; a_1, \overline{a_2}, \overline{a_3}, a_4, a_5, \dots),$$

wobei die Striche über den Teilennern angeben, welche Teilzähler negativ sind, eine ihm zugehörige Kurve mit Spitzen in den Be-

¹⁾ Vergl. Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, S. 15.

rührungspunkten von $K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$, $K\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ und $K\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$, $K\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$.

Es ergibt sich der verallgemeinerte

Satz 1: Jeder endliche oder unendliche Kettenbruch, dessen Teilzähler alle den absoluten Wert 1 haben, bestimmt in der Speiser'schen Kreisfigur eindeutig eine ihn repräsentierende Kurve; sind alle Teilzähler positiv, der Kettenbruch somit regelmässig, so hat sie keine oder nur eine Spitze, je nachdem das erste Glied der Kettenbruchentwicklung positiv oder negativ ist; jedem negativen Teilzähler entspricht eine Spitze, ein Rückwärtsschreiten der Kurve.

Ferner ergibt sich zur Bestimmung der Kurve folgende

Regel: Man gelangt zum Wert des Kettenbruches

$$(42) \quad \xi = \mathfrak{R}(a_0; \overset{\pm}{a_1}, \overset{\pm}{a_2}, \overset{\pm}{a_3}, \dots, \overset{\pm}{a_\nu}),$$

indem man vom Ursprung $s = z$ ausgehend zuerst a_0 Bogenteile auf dem Kreis (Gerade) $K\left(\frac{1}{0}\right)$, dann a_1 Stücke auf dem Kreis $K\left(\frac{a_0}{1}\right)$ hierauf, a_2 Bogenteile auf dem neuen Berührungskreis fortschreitet, u. s. w. Bei positivem Teilzähler geht man vorwärts, bei negativem rückwärts. Nach Durchschreitung der letzten a_ν Bogenteile wandert man auf dem letzten berührenden Kreis (Endkreis) vorwärts bis zu seiner Abszisse, die den Wert des durch die Kurve dargestellten Kettenbruches bedeutet. Ein Blick auf die Kreisfigur zeigt, dass in einem Kettenbruch die Teilnennerfolge $\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}$ (drei negative Teilzähler 1) sich aufhebt und somit weggelassen werden kann; die Kurve beschreibt ein Kreisbogendreieck, sie kehrt zum gleichen Punkt zurück. Folglich gilt

$$(43) \quad \mathfrak{R}(a_0; \overset{\pm}{a_1}, \dots, \overset{\pm}{a_\nu}, 1, 1, 1, \overset{\pm}{a_{\nu+4}}, \dots) = \mathfrak{R}(a_0; \overset{\pm}{a_1}, \dots, \overset{\pm}{a_\nu}, \overset{\pm}{a_{\nu+4}}, \dots).$$

Auf Grund dieser geometrischen Deutung sieht man ohne weiteres ein, dass sich jede reelle Zahl ξ auf unendlich viele Arten in derartige Kettenbrüche zerlegen lässt, da in der Kreisfigur unendlich viele mit Spitzen versehene Kurven, vom Punkt $s = z$ ausgehend, nach der reellen Zahl ξ hinführen. Mit Hilfe unserer Kreisfigur

kann man somit zu jeder beliebigen rationalen Zahl ξ in kurzer Zeit mühelos beliebig viele Kettenbrüche von der Form

$$a_0 \pm \frac{1}{a_1 \pm \frac{1}{a_2 \pm \frac{1}{a_3 \pm \dots \pm \frac{1}{a_n}}}}$$

finden, deren Werte mit ξ übereinstimmen.

Unter allen diesen möglichen Darstellungen finden sich bekanntlich die halbregelmässigen Kettenbrüche¹⁾, die den Bedingungen genügen:

- (44) 1. Teilzähler: $|b_v| = 1$, für $v \geq 1$,
 2. Teilnenner: $a_v \geq 1$, $a_v + b_{v+1} \geq 1$ für $v \geq 1$,
 3. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Letzter Teilnenner} > 1, \text{ falls er endlich ist} \\ (a_v + b_{v+1}) \text{ unendlich oft} \geq 1, \text{ falls er unendlich ist.} \end{array} \right.$

Die Bedingung 2. besagt, wenn $b_{v+1} = -1$ ist:

$$a_v \geq 2, \text{ für } v \geq 1;$$

das ergibt auf die Kurve \mathcal{C} übertragen den

Satz 2: Bei den Kurven zu den halbregelmässigen Kettenbrüchen kann eine Spitze immer nur nach mindestens 2 Bogenteilen desselben Kreises vorkommen. (*Spitzen-Satz*.)

Dieser Satz ermöglicht uns, sämtliche halbregelmässigen Kettenbrüche, in die sich eine vorgegebene rationale Zahl überführen lässt, auf geometrischem Wege zu bestimmen: man sucht einfach in der Kreisfigur die obigem Satze genügenden Kurven auf. Man sieht sogleich ein, dass die Anzahl der möglichen Lösungen endlich ist; aus Symmetriegründen erkennt man auch, dass die Anzahl nur vom Nenner der rationalen Zahl abhängen kann.

Sei $\frac{m}{n}$ die rationale Zahl in irreduzibler Form und mit positivem

¹⁾ Vergl. Perron, Kettenbrüche § 36.

Nenner, die Anzahl der halbregelmässigen Kettenbrüche sei

$$f\left(\frac{m}{n}\right),$$

dann ist offenbar $f\left(\frac{m}{1}\right) = 1$.

Ferner ist aus der Figur ersichtbar:

$$f\left(\frac{m}{2}\right) = 2;$$

denn zum Berührungspunkt $K\left(\frac{m-1}{2}\right)$, $K\left(\frac{m}{2}\right)$ führen nur 2 Kurven; eine davon hat keine Spitze, die andere eine solche im Berührungspunkt $K\left(\frac{m-1}{2}\right)$, $K\left(\frac{m+1}{2}\right)$.

Wir wollen durch Aufsuchen der zu den halbregelmässigen Kettenbrüchen von $\frac{1}{n}$, ($n = 2, 3, 4, 5$) gehörigen Kurven die Werte $f\left(\frac{1}{n}\right)$ bestimmen. Man findet:

$$\left. \begin{array}{l} n = 2 \quad \frac{1}{2} = (0; 2) \\ \quad \quad \quad = (1; -2) \end{array} \right\} f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 \quad \frac{1}{3} = (0; 3) \\ \quad \quad \quad = (1; -1, 2) \\ \quad \quad \quad = (1; -2, -2) \end{array} \right\} f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 4 \quad \frac{1}{4} = (0; 4) \\ \quad \quad \quad = (1; -1, 1, 1, -2) \\ \quad \quad \quad = (1; -2, -2, -2) \\ \quad \quad \quad = (1; -2, -1, 2) \end{array} \right\} f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 5 \quad \frac{2}{5} = (0; 2, 2) \\ \quad \quad \quad = (0; 3, -2) \\ \quad \quad \quad = (1; -1, 1, 2) \\ \quad \quad \quad = (1; -2, -3) \\ \quad \quad \quad = (1; -1, 2, -2) \end{array} \right\} f\left(\frac{2}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}\right) = 5.$$

¹⁾ Siehe Fig. 16 bis Fig. 20.

Die letzteren 4 halbregelmässigen Kettenbrüche für $\frac{2}{5}$ lassen sich bekanntlich durch Transformation¹⁾ in den ersten überführen. Die obigen Beispiele lassen das Gesetz vermuten:

$$(45) \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = n,$$

was in der Tat der Fall ist. Durch vollständige Induktion beweist Vahlen²⁾ den

Satz 3: Der irreduzible Bruch $\frac{m}{n}$ ($n > 0$) lässt genau n halbregelmässige Kettenbruchentwicklungen zu.

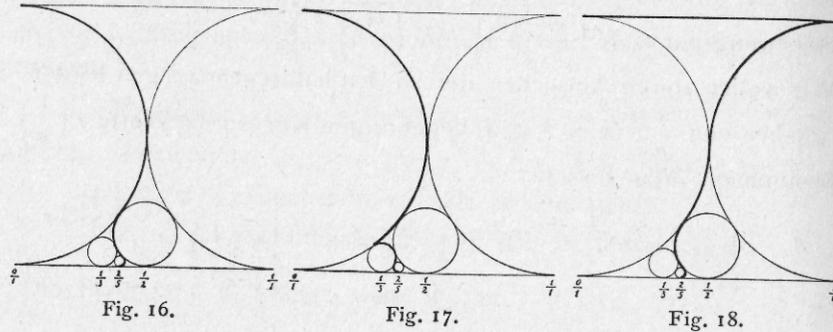


Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

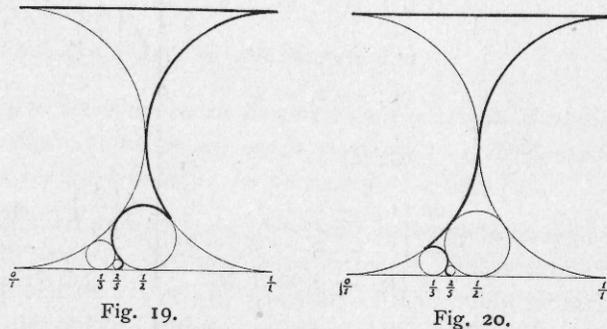


Fig. 19.

Fig. 20.

Die Figurenreihe Fig. 16 bis Fig. 20 zeigt die 5 möglichen halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen für die rationale Zahl $\frac{2}{5}$, unter denen auch die regelmässige mit inbegriffen ist. Ferner lassen

¹⁾ Vergl. Perron, Kettenbrüche § 37

²⁾ » Vahlen, K. Th. Ueber Näherungswerte und Kettenbrüche, J. f. Math. 115, 1895.

die Figuren den Satz erkennen, dass jeder Haupt- und Neben-näherungsbruch eines halbregelmässigen Kettenbruches gleich ist einem Haupt- oder Nebennäherungsbruch des die gleiche Zahl darstellenden regelmässigen Kettenbruches. Bezeichnen wir die Kurven durch das gleiche Prädikat wie die Kettenbrüche selbst, so lässt sich mit dieser Terminologie das Hauptergebnis der vorigen Paragraphen über die Form der Kettenbruchkurven folgendermassen aussprechen:

Satz 4: Die regelmässige Kettenbruchkurve zu einer reellen positiven Zahl hat nur Wendepunkte, diejenige zu einer negativen Zahl Wendepunkte und nur eine einzige Spitze, und die halbregelmässige Kettenbruchkurve hat Spitzen nur nach mindestens 2 Bogenteilen desselben Hauptkreises.

Satz 5: Die Anzahl der zu einer rationalen irreduziblen Zahl $\frac{m}{n}$ gehörigen halbregelmässigen Kettenbruchkurven ist n .

§ 9

Sätze über die regelmässigen Kettenbrüche

Durch Betrachtung der einem beliebigen regelmässigen Kettenbruch zugeordneten Kurve \mathfrak{C} können die Gesetze, welche eine solche Kettenbruchentwicklung beherrschen, in anschaulicher Weise gefunden und bewiesen werden.

Da die Kurve \mathfrak{C} eines die rationale Zahl $\xi = \frac{p_v}{q_v}$ darstellenden Kettenbruches

$$\mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{v-1}, a_v)$$

auf 2 Arten den letzten Kreis K_v (Endkreis der Kette) erreichen kann, ist bei $a_v > 1$

$$(46) \quad \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_v) = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, (a_v - 1), 1);$$

die Gliederzahl eines Kettenbruches kann also gerade oder ungerade gemacht werden, und weil unter der Voraussetzung $a_v > 1$ zum Punkt $\frac{p_v}{q_v}$ der reellen Achse nur eine einzige Kurve ohne Spitzen führt, gilt der

Satz 1: Jede rational gebrochene Zahl ξ lässt sich auf eine und nur eine Weise in einen endlichen regelmässigen Kettenbruch entwickeln, bei dem der letzte Teilnenner mindestens gleich 2 ist.

Ein irrationaler Punkt ω kann in unserer Figur niemals Abszisse eines der unendlich vielen, gegen die reelle Axe hin unbegrenzt klein werdenden Kreise sein; er kann also nur durch eine stets vorwärts schreitende Kurve mit unendlich vielen Kreisbogen auf unendlich vielen Hauptkreisen beliebig nahe erreicht werden. Aus diesem Verhalten schliessen wir auf den

Satz 2: Jeder unendliche regelmässige Kettenbruch konvergiert und ist eine irrationale Zahl. Umgekehrt lässt sich jede irrationale Zahl auf eine und nur eine Weise in einen regelmässigen Kettenbruch entwickeln, und dieser ist notwendig unendlich.

Ein endlicher Kettenbruch werde durch die Kurve \mathfrak{C} dargestellt, die also einen letzten Endkreis K_ν bestimmt. Ist die Gliederanzahl gerade, also $\nu = 2n$ (n positiv ganz), so ist der Endkreis K_ν auf der rechten Seite der Kurve, weil der Kreis K_0 , der zum Teilnenner a_0 gehört, auch rechts der Kurve gelegen ist und sich die Hauptkreise abwechselungsweise zu beiden Seiten von \mathfrak{C} befinden. Auf dem Endkreis K_ν führt \mathfrak{C} , unendlich viele, immer kleiner werdende Bogenteile treffend, weiter, bis sie zum Punkt $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ gelangt, dessen Abszissenwert sie darstellt. Wird aber die Gliederzahl des Kettenbruches noch um eine endliche oder unendliche Anzahl vergrössert, so entstehen neue Hauptkreise, deren Abszissenwerte alle grösser sind als $\frac{p_\nu}{q_\nu}$, so dass der Wert des neuen Kettenbruches mit der grösseren Gliederanzahl unbedingt grösser sein muss als $\frac{p_\nu}{q_\nu}$. Ist hingegen ν ungerade, so ändern sich die Lagenbeziehungen, und der Kettenbruch wird kleiner. Hieraus ergibt sich

Satz 3: Wenn man einem endlichen regelmässigen Kettenbruch noch endlich oder unendlich viele Glieder anhängt, so wird dadurch sein Wert vergrössert oder verkleinert, je nachdem er ursprünglich eine gerade oder ungerade Gliederzahl hatte.

Dieser Satz führt zusammen mit Satz 1 zum

Satz 4: Ein regelmässiger Kettenbruch wird grösser, wenn man einen der Teilnenner a_0, a_2, a_4, \dots vergrössert oder einen der Teilnenner a_1, a_3, a_5, \dots verkleinert.

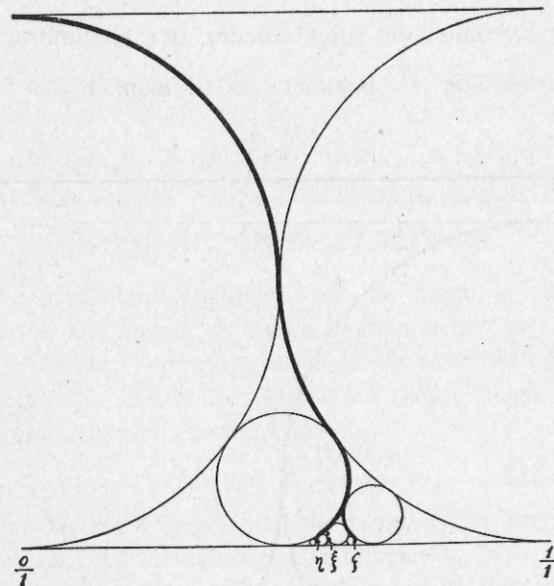


Fig. 21.

Weiter ergibt sich aus der Figur 21 rein anschauungsmässig der

Satz 5: Wenn die regelmässigen Kettenbrüche für die Zahlen η, ζ in den ersten ν Gliedern übereinstimmen, so beginnt der Kettenbruch für jede zwischen η und ζ gelegene Zahl ξ ebenfalls mit diesen ν Gliedern. Das nächste Glied muss zwischen den zwei entsprechenden Gliedern der Kettenbruchentwicklungen von η und ζ liegen, die Grenzen eingeschlossen.

Aus Symmetriegründen ergibt sich, wie Figur 22 zeigt, der

Satz 6: Es ist

$$(47) \quad \mathfrak{R}(0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + \mathfrak{R}(0; 1, (a_1 - 1), a_2, a_3, \dots, a_n) = 1.$$

Da im zweiten Kettenbruch die Teilnenner a_2, a_4, a_6, \dots zu Gliedern ungerader Ordnung geworden sind, so gilt auch hier Satz 4; bei deren Vergrösserung wird der zweite Kettenbruch kleiner, während

der erste um gleich viel grösser wird. Beide Werte sind symmetrisch gelegen zum Punkt $\xi = \frac{1}{2}$.

Kennt man den Kettenbruch einer rationalen Zahl $\frac{p}{q}$, so ist auch durch Verschiebung aller Glieder der Kettenbruch des reziproken Wertes von $\frac{p}{q}$ bekannt; es ist nämlich das Produkt

$$48) \quad \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \cdot \mathfrak{R}(0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = 1.$$

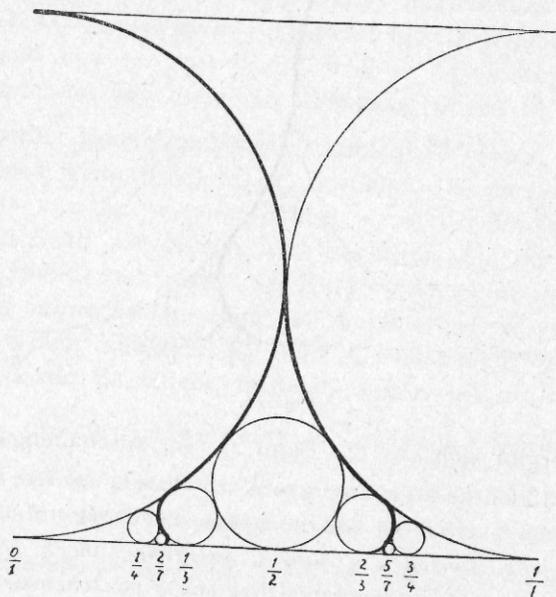


Fig. 22.

Wir gelangen durch Verfolgung der beiden Kettenbruchkurven zu reziproken Abszissenwerten. Die Kreisfigur ist somit auch ein bequemes Hilfsmittel zur geometrischen Bestimmung reziproker Zahlen ohne eigentliche Konstruktionen. Man braucht hier nur gegebene Wege, Kreuzungen abzählend, zu durchgehen und wird gewissermassen durch die „Teilnenner-Wegweiser“ zur Zahl hingeführt. Einfacher und sicherer könnte diese Führung im Labyrinth dieser unendlich dicht sich verzweigenden krummen Wege nicht sein.

Da nach einem Satz die regelmässigen Kettenbrüche für zwei äquivalente irrationale Zahlen η, ζ von einem gewissen Teilnenner an übereinstimmen, können wir den Satz aufstellen:

Satz 7: Äquivalente Irrationalzahlen haben ähnlich endende Kettenbruchkurven.

§ 10

Die Kurve eines regelmässigen Kettenbruches als Analogon der Geraden

1. In der Kreisfigur gelangen wir zu einer jeden beliebigen reellen Zahl ω auf unendlich vielen verschiedenen, aus Kreisbogen zusammengesetzten Wegen; jedem solchen entspricht eine Kettenbruchentwicklung. Die beiden kürzesten dieser Wege ergeben die beiden regelmässigen Kettenbrüche:

$$\mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ und } \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, (a_n - 1), 1),$$

die wir aber als nicht verschieden betrachten; für uns hat nur der erste Bedeutung mit dem letzten Teilnenner $a_n > 1$. Nur unter dieser Bedingung haben Satz 1 und Satz 2 im vorigen Paragraphen Gültigkeit. Diese Sätze behaupten also, dass es für eine jede reelle Zahl ω eine und nur eine kürzeste Kurve gibt, welche, auf den Kreisen verlaufend, $z = i$ mit ω verbindet. Diese entspricht dem einzigen regelmässigen Kettenbruch für ω . So können wir diese ausgezeichnete, aus unendlich vielen Kreisbogen zusammengesetzte Kurve ohne Rückkehrpunkte, gewissermassen als das Analogon der Geraden auffassen. Verbinden wir die beiden Punkte $z = i$, als Ursprungspunkt aller Kettenbruchkurven, mit dem reellen Punkt ω durch eine wirkliche Gerade, so schneidet diese den Grundkreis $K\left(\frac{1}{0}\right)$ im Punkte $\bar{\omega}$, dem Bildpunkt von ω bei der Abbildung

$$(50) \quad a : b : c = 1 : -\xi^2 : (\xi^2 + \eta^2)$$

der oberen Halbebene (ξ, η) auf das Innere des Kreises $K\left(\frac{0}{1}\right)$ mit den trimetrischen Koordinaten a, b, c . Der Ursprungspunkt

$A(z = i)$ entspricht dem Punkt ∞ . So liefert der Kettenbruch für ω (arithmetische Operation) nach Durchlaufung seiner Kurve (Bewegung) den Punkt ω auf der reellen Zahlenaxe und hernach die projizierende Gerade (geometrische Operation) das Abbild $\bar{\omega}$ dieses Punktes auf dem Grundkreis $K\left(\frac{0}{1}\right)$.

2. Die der regelmässigen Kettenbruchkurve als ausgezeichnete kürzeste Kurve ohne Spitzen am nächsten gelegenen Kettenbruchkurven sind offenbar diejenigen der halbregelmässigen Kettenbrüche, mit der Bedingung (44), in welche ω zerlegbar ist. Der *Spitzen-Satz 2* (§ 8) gewinnt hiernach erneute Bedeutung. Die Figurenreihe Figur 16 bis Figur 20 lässt uns deutlich ein Nahesein an \mathbb{C} erkennen. Schon diese Ueberlegungen lassen uns vermuten, dass eine Irrationalzahl unendlich viele halbregelmässige Kettenbruchentwicklungen zulässt, eine rationale Zahl hingegen nur endlich viele, was in der Tat der Fall ist. (Vergl. Satz 3, § 8.) Offenbar würden wir bei Aufstellung der Bedingung

$$a_v + b_{v+1} \geq 2$$

eine neue Art von Kettenbrüchen erhalten, deren Kurven sich in ihrem Gesamtverlauf weiter von der regelmässigen Kettenbruchkurve entfernen würden. Wir sehen aus all diesen Betrachtungen, dass der Vergleich der Kurve eines regelmässigen Kettenbruches mit einer Geraden vollauf gerechtfertigt ist.

§ 11

Die Hurwitz'schen Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{13}$ und ihre geometrische Deutung

In seiner Abhandlung: *Ueber eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Grössen* zeigt A. Hurwitz¹⁾, dass die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl D Kettenbruchentwicklungen 1. und 2. Art von der Gestalt:

$$(51) \quad \begin{aligned} \sqrt{D} &= \mathfrak{K}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_0 + b_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_0 + b_0; \dots) \\ \sqrt{D} &= \mathfrak{K}(b_0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 + b_0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 + b_0; \dots) \end{aligned}$$

¹⁾ Acta Mathematica, Bd. 12, S. 403.

besitzt. Bestimmt man die ganze Zahl a_0 so, dass \sqrt{D} zwischen $a_0 - \frac{1}{2} \dots a_0 + \frac{1}{2}$ liegt, so sind die beiden Fälle möglich

$$\sqrt{D} \geq a_0 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Im ersteren Fall sind die Zahlen a_0, b_0 , mit welchen die Entwicklungen (51) beginnen, einander gleich. Im letzteren Falle ist dagegen $a_0 = b_0 + 1$. Der erste Wert von D in der Reihe

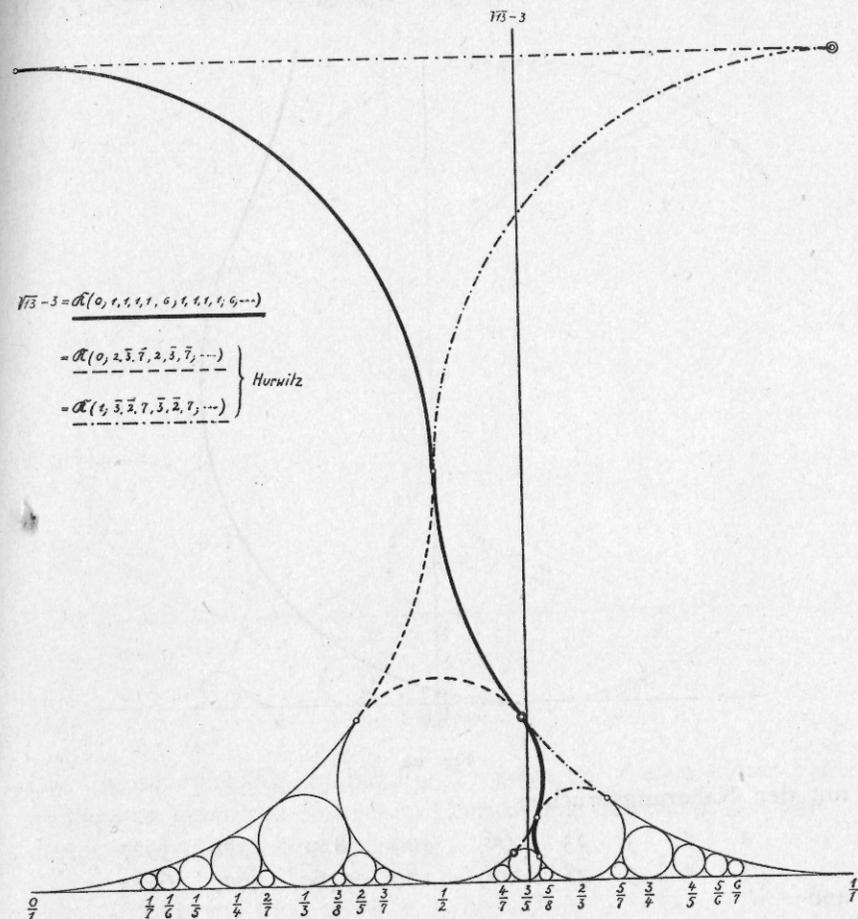


Fig. 23.

$D = 1, 2, 3, \dots$ für welchen der zweite Fall eintritt, ist der Wert $D = 13$. So findet Hurwitz in der Kettenbruchform

$$(52) \quad \sqrt{D} = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots}}}$$

für $\sqrt{13}$ die beiden Entwicklungen erster und zweiter Art:

$$\sqrt{13} - 3 = \mathfrak{R}(1; 3, 2, -7, -3, -2, 7; 3, 2, -7, -3, -2, 7; \dots)$$

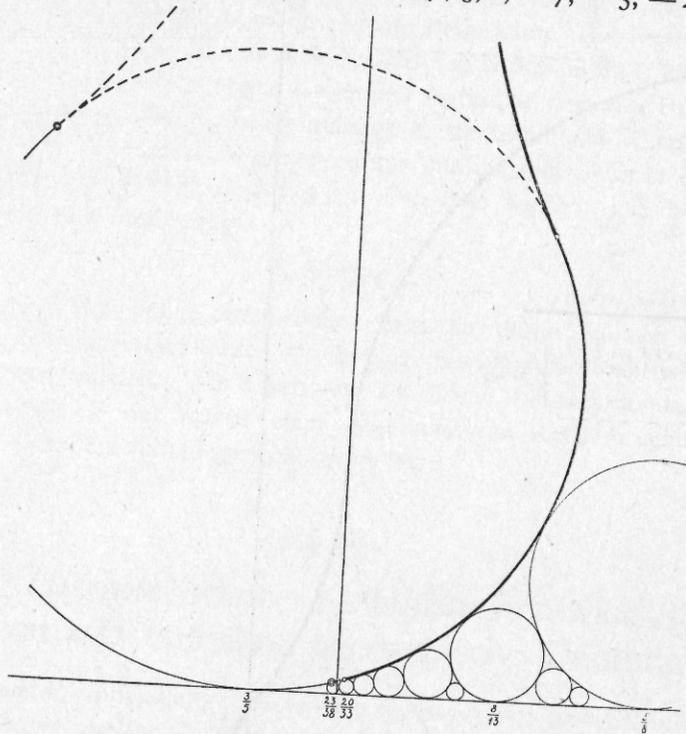


Fig. 24.

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{23}{38}, \frac{66}{109}, \frac{109}{180}, \frac{829}{1369}, \frac{2378}{3927}, \frac{3927}{6485}, \dots$$

und

$$\sqrt{13} - 3 = \mathfrak{R}(0; -2, -3, -7, 2, 3, 7; -2, -3, -7, 2, 3, 7; \dots)$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{20}{33}, \frac{43}{71}, \frac{109}{180}, \frac{720}{1189}, \frac{1549}{2558}, \frac{3927}{6485}, \dots$$

welche in unserer Kettenbruchform mit den Teilzählern ± 1 und positiven Teilennern sich verwandeln in

$$(53) \quad \sqrt{13} - 3 = \mathfrak{R}(1; \overset{-}{3}, \overset{-}{2}, \overset{+}{7}, \overset{-}{3}, \overset{-}{2}, \overset{+}{7}; \dots) \text{-----}$$

$$(54) \quad \sqrt{13} - 3 = \mathfrak{R}(0; \overset{+}{2}, \overset{-}{3}, \overset{-}{7}, \overset{+}{2}, \overset{-}{3}, \overset{-}{7}; \dots) \text{-----}$$

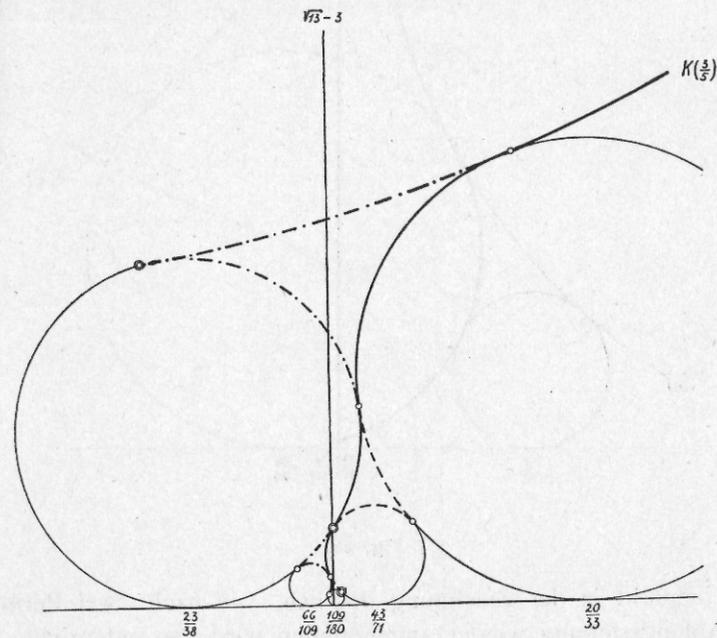


Fig. 25.

Die Figurenreihe Fig. 23 bis Fig. 27 zeigt uns die zu diesen Entwicklungen gehörigen Kettenbruchkurven mit der Kurve der regelmässigen Kettenbruchentwicklung

$$(55) \quad \sqrt{13} - 3 = \mathfrak{R}(3; 1, 1, 1, 1, 6; 1, 1, 1, 1, 6; \dots) \text{-----}$$

mit den Näherungsbrüchen

(56) $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{20}{33}, \frac{23}{38}, \frac{43}{71}, \frac{66}{109}, \frac{109}{180},$
 $\frac{720}{1189}, \frac{829}{1369}, \frac{1549}{2558}, \frac{2378}{3927}, \frac{3927}{6485}, \dots$

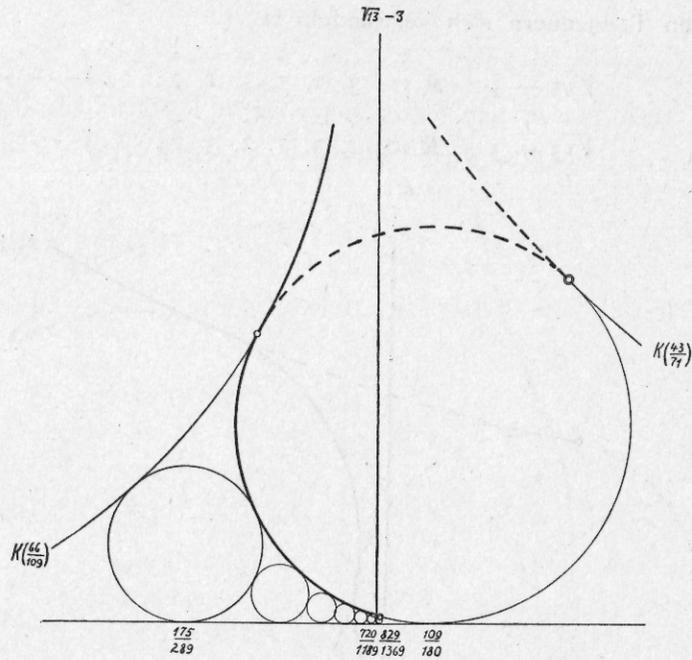


Fig. 26. $M. 23^2 : 1$

Man bemerkt in der Zeichnung deutlich, wie nach zwei Perioden die Anfangsstellung wieder angenommen wird; so entspricht dem Kreis $K\left(\frac{109}{180}\right)$ in Fig. 27 der Kreis $K\left(\frac{1}{0}\right)$ in Fig. 23. Die Kurve der regelmässigen Entwicklung bleibt stets in der Mittellage, während sich die beiden anderen Kurven abwechselungsweise links und rechts an dieser hinziehen, indem jeder Kurventeil einer Periode zu demjenigen der nächsten Periode „quasi-symmetrisch“ bezüglich der regelmässigen Kettenbruchkurve ist. Man erkennt an der Figur, dass die beiden Entwicklungen halbreghelmässig sind; sie erfüllen auch in der Tat die Bedingungen (44). Die zu überein-

stimmenden Näherungsbrüchen gehörigen Teilnenner mag die folgende Zusammenstellung durch Verbindungsstriche kenntlich machen:

| | | | | | | |
|---------|-----------------------------|----------------|-----------------------------|----------------|-----------------------------|-------------|
| 1; | $\frac{-}{3}, \frac{-}{2},$ | $\frac{+}{7};$ | $\frac{-}{2}, \frac{-}{2},$ | $\frac{+}{7};$ | $\frac{-}{3}, \frac{-}{2},$ | 1. Art |
| 0; | 1, 1, 1, 1, | 6; | 1, 1, 1, 1, | 6; | 1, 1, 1, 1, | regelmässig |
| 0; | $\frac{+}{2}, \frac{-}{3},$ | $\frac{-}{7}$ | $\frac{+}{2}, \frac{-}{3},$ | $\frac{-}{7};$ | $\frac{+}{2}, \frac{-}{3},$ | 2. Art |
| Fig. 23 | Fig. 24 | Fig. 25 | Fig. 26 | Fig. 27 | | |

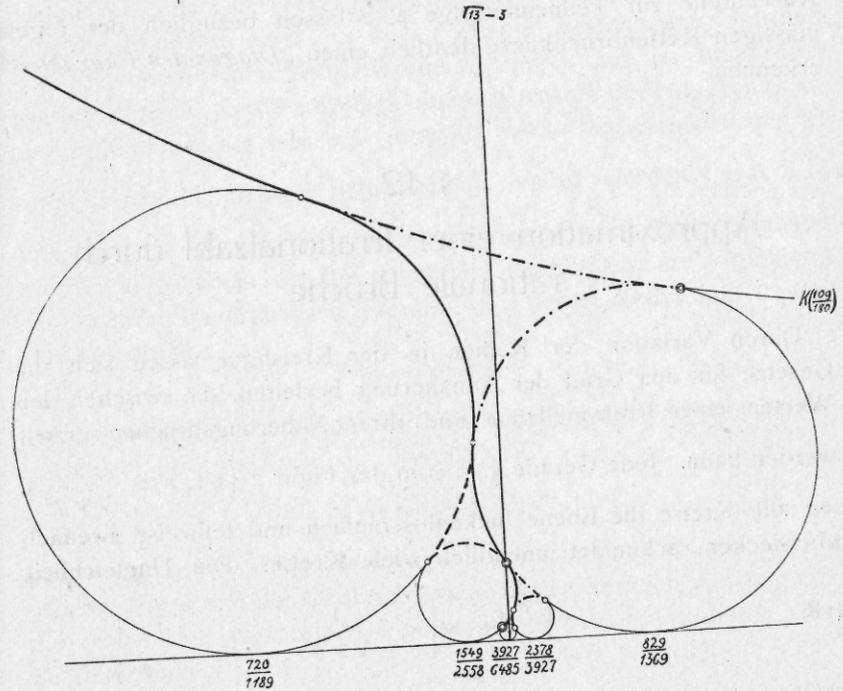


Fig. 27. $M. 25^2 : 1$

Fig. 23 → Fig. 27: Vergrößerung 781250 : 1.

In der Figurenreihe Fig. 23 bis Fig. 27 verfolgt man auch leicht der von Minkowski¹⁾ in der Abhandlung: *Ueber die Annäherung*

¹⁾ Math. Annalen 1899, Bd. 54, S. 117.

an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen definierte Diagonal-
kettenbruch für

$$(57) \quad \sqrt{13} - 3 = \mathfrak{D}\mathfrak{R}(1; \overset{-}{2}, \overset{+}{2}, \overset{-}{8}; \overset{-}{2}, \overset{+}{2}, \overset{-}{8}; \overset{-}{2}, \overset{+}{2}, \dots)$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{23}{38}, \frac{43}{71}, \frac{109}{180}, \frac{829}{1369}, \frac{1549}{2558}, \frac{3927}{6485}, \dots,$$

das ist dem $2, 3; 5, 7, 8; \dots$ $5k, 5k+2, 5k+3; \dots$ -ten
Näherungsbruch der regelmässigen Kettenbruchentwicklung (56). Die
Kurventeile zur Teilnennerfolge $\overset{-}{2}, \overset{+}{2}$ lassen bezüglich der regel-
mässigen Kettenbruchkurve deutlich einen „Diagonalen Charakter“
erkennen.

§ 12

Approximation einer Irrationalzahl durch rationale Brüche

Durch Variation der Radien in der Kreisfigur lassen sich die
Gesetze für den Grad der Annäherung herleiten, die zwischen den
Werten einer Irrationellen ω und ihren Näherungsbrüchen erzielt
werden kann. Jede Gerade $x = \omega$ in der Figur 2 ($\S 1, r = \frac{1}{\sqrt{3}q^2}$),
wo alle Kreise die Ebene lückenlos einfach und teilweise zweifach
überdecken, schneidet unendlich viele Kreise. Die Ungleichheit

$$(58) \quad \left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{\sqrt{3}q^2}$$

wird somit von unendlich vielen rationalen Brüchen $\frac{p_v}{q_v}$, ($v = 0, 1, 2, 3, \dots$)
als Näherungsbrüche des Kettenbruchs für ω erfüllt. Der Ungleich-
heit (58) kann man auch die Gestalt geben:

$$(59) \quad (p_v - \omega q_v) q_v < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

wonach man in den Zählern und Nennern der Näherungsbrüche

für ω unendlich viele Systeme ganzer Zahlen x, y besitzt, für welche
die quadratische Form

$$(60) \quad (x - \omega y) y < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist. In der ersten Gestalt gibt sie ein Gesetz für den Grad der
Approximation einer Irrationellen ω durch jene Näherungsbrüche.
Die Schranke 1 in dem erstmals von *Lagrange* festgestellten Gesetz:

$$(61) \quad (x - \omega y) y < 1,$$

das auf die einfachste Weise *Dirichlet* mittels der trivialen Tatsache,
dass die Elemente einer aus $n+1$ Dingen bestehenden Mehrheit
den Elementen einer Mehrheit von n Dingen nur so zugeordnet
werden können, dass wenigstens einem Elemente der letzteren mehr
als ein Element der ersteren zugeteilt wird, bewiesen wurde, ist
somit durch die kleinere Schranke $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ersetzt worden. Das Ge-
setz (58) hat *Hermite* ¹⁾ aufgestellt, indem er den Zusammenhang
wahrte, in welchem die Betrachtungen über das relative Minimum
der binären quadratischen Formen mit deren Reduktion stehen.
Der Ausdruck

$$(x - \omega y) y$$

ist eine unbestimmte Form, für welche die nach *Hermite* ihr zu-
geordnete positive Form die Gestalt

$$(x - \omega y)^2 + \lambda^2 y^2$$

hat, wobei λ als stetig veränderlicher Parameter auftritt und in
unserer Figur mit der Ordinate eines auf der Geraden $x = \omega$ gegen
die reelle Axe wandernden Punktes als Repräsentant dieser Form
übereinstimmt.

Eine einfache Ueberlegung auf Grund der Figur lässt uns den
Satz von *Hermite*, nach welchem es unendlich viele rationale
Brüche $\frac{p_v}{q_v}$ gibt, die der Ungleichheit (58) genügen, noch schärfer

¹⁾ Journ. f. Math. 41: «Introduction des variables continues dans la théorie des
nombres».

Bachmann: Arithm. d. quadr. Formen II. Kap. II. No. 14.

fassen. Verkleinern wir die Kreisradien, geben wir also dem Parameter α in

$$(62) \quad r = \frac{1}{\alpha q^2}$$

von $\alpha = \sqrt{3}$ an wachsend, immer grössere Werte, so tritt nach Paragraph 1 bei $\alpha = 2$ Berührung aller Kreise ein. Jede Gerade $x = \omega$ wird aber immer noch unendlich viele Kreise schneiden; d. h. der Ungleichheit

$$(63) \quad \left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{2q^2}$$

genügen unendlich viele rationale Brüche $\frac{p}{q}$, oder die Ungleichheit

$$(x - \omega y) y < \frac{1}{2}$$

wird von unendlich vielen ganzzahligen Systemen x, y erfüllt. Die *Hermite'sche* Schranke $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist verkleinert worden zu $\frac{1}{2}$ und damit das Näherungsgesetz noch schärfer gefasst.

Bei der geringsten Verkleinerung der Kreisradien berühren sich die Kreise nicht mehr, die vorher getrennten Lücken fliessen ineinander über zu einem zusammenhängenden Bereich, der die reelle Axe berührt. Jede Gerade $x = \omega$ wird aber immer noch unendlich viele Kreise schneiden, die Ungleichheit

$$(64) \quad \left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{\alpha q^2}, \text{ wobei } 2 < \alpha < 2 + \varepsilon, \varepsilon \text{ klein,}$$

wird stets noch unendlich viele Lösungen $\frac{p}{q}$ besitzen.

Wir fragen uns: bei welchem Wert α und an welcher Stelle ω kann man erstmals auf einer Geraden $x = \omega$ gegen die reelle Axe in das geöffnete Kreissystem eindringen, sodass nur endlich viele Kreise getroffen werden. Ist dies an einer Stelle ω möglich, so sagen wir, die Stelle ω ist *vertikal zugänglich*.

Definition: Eine Stelle ω heisst *vertikal zugänglich*, wenn die Gerade $x = \omega$ im Kreissystem $r = \frac{1}{\alpha q^2}$ keinen oder nur eine end-

liche Anzahl der Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right)$ schneidet, also von einer endlichen Stelle an keinen Kreis mehr trifft bis zum Schnittpunkt ω mit der reellen Axe.

Der Verlauf der Kettenbruchkurven zeigt uns, dass

$$(65) \quad \omega = \mathfrak{K}(0; 1, 1, 1, \dots) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

mit der Teilnennerfolge $1, 1, 1, \dots$ eine solche Stelle ist, die erstmals, also bei der geringsten Verkleinerung der Radien, vertikal zugänglich wird; und da äquivalente Zahlen in einer Kettenbruchentwicklung von einer endlichen Stelle an übereinstimmen, so sind

auch alle zu $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ äquivalenten Zahlen bei diesem Wert α vertikal zugänglich. Weiter erkennt man: Je grösser bei einem regelmässigen periodischen Kettenbruch der Unterschied zweier aufeinander folgenden Teilnenner ist, desto grösser muss auch α werden, umso kleiner somit die Kreise. Ebenso wird eine Stelle

$$\omega = \mathfrak{K}(0; n, n, n, \dots)$$

mit grossen Teilennern n weniger gut zugänglich sein als bei kleinen n , also einen grösseren Wert α beanspruchen. In der Tat sind nach *Markoff*¹⁾ und *Hurwitz*²⁾ die zu (65) äquivalenten Zahlen zuerst vertikal zugänglich, d. h. die am schlechtesten annäherungsfähigen Irrationalzahlen. Ist der Parameter $\alpha = \sqrt{5}$ (siehe Fig. 28), so berührt die Gerade $x = \omega$ noch unendlich viele Kreise; bei der geringsten Verkleinerung hingegen ist diese Stelle vertikal zugänglich.

Wir werden im folgenden auf geometrischem Wege zu einem allgemeinen Satz gelangen, der als Spezialfall die obige Tatsache in sich schliesst.

In Fig. 29 seien $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{p}{q}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche gerader Ordnung des die quadratische Irrationale ω darstellenden regelmässigen eingliedrig-periodischen Kettenbruches

$$(66) \quad \omega = \mathfrak{K}(0; n, n, n, \dots)$$

1) Math. Annalen Bd. 15, S. 381.

2) Math. Annalen Bd. 39, S. 279-284.

$$h = \frac{\delta}{tg \gamma} = \frac{pq - q'q' - \omega(q^2 - q'^2)}{\alpha nqq' - (q^2 - q'^2)}$$

Wenn nun die Gerade $x = \omega$ den Hauptkreis $K\left(\frac{p}{q}\right)$ nicht schneidet, so ist die Ordinatendifferenz g der Punkte B und S positiv; d. h. bei einer vertikal zugänglichen Stelle muss für alle benachbarten Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten:

$$g = \frac{[\alpha nqq' - (q^2 - q'^2)] - \alpha q^2 [pq - p'q' - \omega(q^2 - q'^2)]}{\alpha q^2 [\alpha nqq' - (q^2 - q'^2)]} = \frac{Z}{N} \geq 0$$

Der Zähler Z ist positiv, wenn

$$\alpha \geq \frac{q^2 - q'^2}{nqq' - q^2 [pq - p'q' - \omega(q^2 - q'^2)]}$$

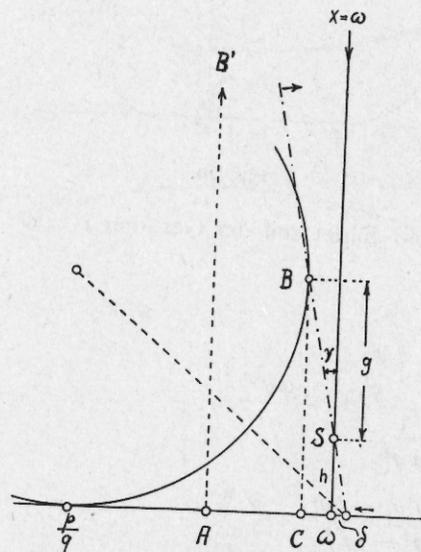


Fig. 30.

und da sich der Zentralschnittpunkt U bei fortschreiten der Kettenbruchentwicklung sehr rasch von der gleichen Seite her dem Werte ω nähert, wird

$$pq - p'q' - \omega(q^2 - q'^2)$$

rasch dem Werte Null zustreben. Daraus schliessen wir für benachbarte Näherungsbrüche gerader Ordnung

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p_{2\nu}}{q_{2\nu}}, \quad \frac{p}{q} = \frac{p_{2\nu+2}}{q_{2\nu+2}}$$

mit grossem Index ν :

$$\alpha \geq \frac{q_{2\nu+2}^2 - q_{2\nu}^2}{n q_{2\nu+2} q_{2\nu}}$$

Die gleiche Bedingung fliesst aus $N \geq 0$; ebenso erhalten wir die nämliche Beziehung, wenn wir die Hauptkreise zu benachbarten Näherungsbrüchen ungerader Ordnung (rechts der Geraden $x = \omega$) betrachten. Da diese Ueberlegungen für alle Irrationalzahlen ω

gelten, deren Kettenbruchentwicklungen mit lauter gleichen Teilennern n endigen, also zum reinperiodischen Kettenbruch (66) äquivalent sind, erhalten wir den

Satz 1: Die Irrationalstelle

$$\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_r; n, n, n, \dots)$$

ist in der Kreisfigur mit $r < \frac{1}{\alpha q^2}$ vertikal zugänglich, wenn

$$(69) \quad \alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{q_{2\nu+2}^2 - q_{2\nu}^2}{n q_{\nu+2} q_{\nu}}$$

ist.

Aus der bekannten Beziehung der Kettenbruchlehre über benachbarte Näherungsnenner:

$$\frac{q_{\nu}}{q_{\nu-1}} = \mathfrak{R}(0; a_{\nu}, a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, \dots, a_2, a_1),$$

wobei

$$\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n),$$

folgt in unserem Fall mit lauter gleichen Teilennern n :

$$(70) \quad \begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{q_{\nu+1}}{q_{\nu+2}} &= \omega \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{q_{\nu}}{q_{\nu+2}} &= \omega^2 \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{q_{\nu+2}}{q_{\nu}} &= \frac{1}{\omega^2} = \rho \end{aligned}$$

Die quadratische Irrationalzahl

$$\omega = \mathfrak{R}(0; n, n, n, \dots) = \frac{1}{n + \omega}$$

erfüllt die Gleichung

$$\omega^2 + n\omega - 1 = 0$$

oder

$$\frac{1}{\omega^2} - \frac{n}{\omega} - 1 = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{\rho} = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

$$\rho = \frac{n^2 + 2 \pm n \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n^2 + 2 \mp n \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

Somit ist nach (70)

$$\rho - \frac{1}{\rho} = \frac{q_{v+2}}{q_v} - \frac{q_v}{q_{v+2}} = \frac{q_{v+2}^2 - q_v^2}{q_{v+2} q_v} = n \sqrt{n^2 + 4}$$

und wir erhalten aus (69) als untere Grenze für den Parameter α

$$(71) \quad \alpha = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{q_{v+2}^2 - q_v^2}{n q_{v+2} q_v} = \sqrt{n^2 + 4}$$

Es ergibt sich der

Satz 2: Alle der Irrationalstelle $\omega = \mathfrak{R}(0; n, n, n, \dots)$ äquivalenten Stellen $\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_r, n, n, n, \dots)$ sind in der Kreisfigur mit $r < \frac{1}{\alpha q^2}$ vertikal zugänglich, wenn

$$\alpha = \sqrt{n^2 + 4}$$

ist.

So ergibt sich für $n = 1$ der Satz von Hurwitz mit dem Parameter $\alpha = \sqrt{5}$.

Für die Irrationalzahlen, die äquivalent sind

$$\omega = \mathfrak{R}(0; 2, 2, 2, \dots),$$

erhält man für α nach obiger Formel ($n = 2$) die untere Grenze

$$\alpha = \sqrt{8},$$

in Übereinstimmung mit den folgenden Sätzen, deren Beweis man den Markoff'schen Betrachtungen entnimmt:

1. Irrationalzahlen, welche in dieselbe Klasse gehören, entspricht dieselbe Zahl α .

2. Jede Irrationalzahl ω , mit Ausschluss der zu

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \mathfrak{R}(1; 1, 1, 1, \dots)$$

äquivalenten Zahlen, lässt sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots, \frac{p_v}{q_v}, \dots$$

derart annähern, dass

$$\left| \frac{p_v}{q_v} - \omega \right| < \frac{1}{\sqrt{8} q_v^2} \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

ist.

§ 13

Rechnerische Bestimmung des Parameters α für unendliche eingliedrig-periodische Kettenbrüche

Es seien hier einige Zahlenbeispiele zum vorigen Paragraphen zusammengestellt. Man sieht, dass die rechnerische Ermittlung des Parameters α wegen der raschen Konvergenz des Ausdrucks

$$\frac{q_{v+2}^2 - q_v^2}{n q_{v+2} q_v}$$

sehr rasch zum Grenzwert führt.

Im folgenden Schema sind je zwei benachbarte Näherungsbrüche

$$\frac{p_v}{q_v}, \frac{p_{v+2}}{q_{v+2}}$$

gerader (unten) und ungerader Ordnung (oben) durch

Striche miteinander verbunden; der zugehörige Zentralenschnittpunkt U :

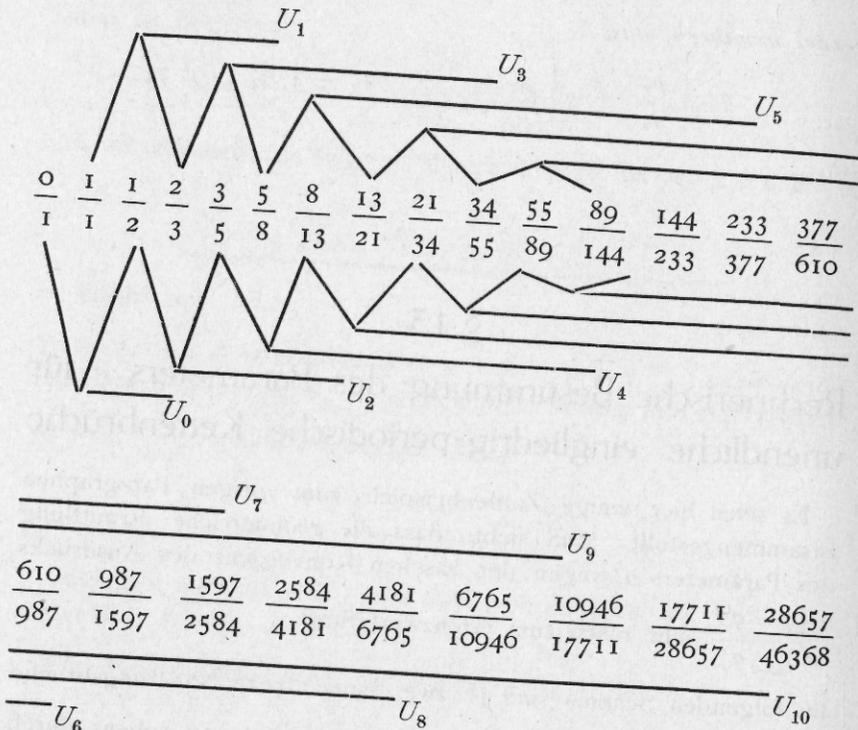
$$\xi = \frac{p_{v+2} q_{v+2} - p_v q_v}{q_{v+2}^2 - q_v^2}$$

befindet sich vertikal über oder unter dem Endpunkt des wagenrechten Striches.

1. Der goldene Schnitt:

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \mathfrak{R}(0; 1, 1, 1, \dots) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0,6180340\dots$$

Näherungsbrüche:



Die Zentralenschnittpunkte U_v nähern sich von rechts dem Werte ω .
 Reihe für die Parameterwerte $\alpha_v = \frac{q_{v+2}^2 - q_v^2}{q_{v+2} q_v}$:

$$\alpha_1 = \frac{8}{3} \quad \alpha_3 = \frac{55}{24} \quad \alpha_5 = \frac{377}{168} \quad \alpha_7 = \frac{2584}{1155}$$

2,666... 2,29 2,244 2,2372..

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} \quad \alpha_2 = \frac{21}{10} \quad \alpha_4 = \frac{144}{65} \quad \alpha_6 = \frac{987}{442} \quad \alpha_8 = \frac{6765}{3026}$$

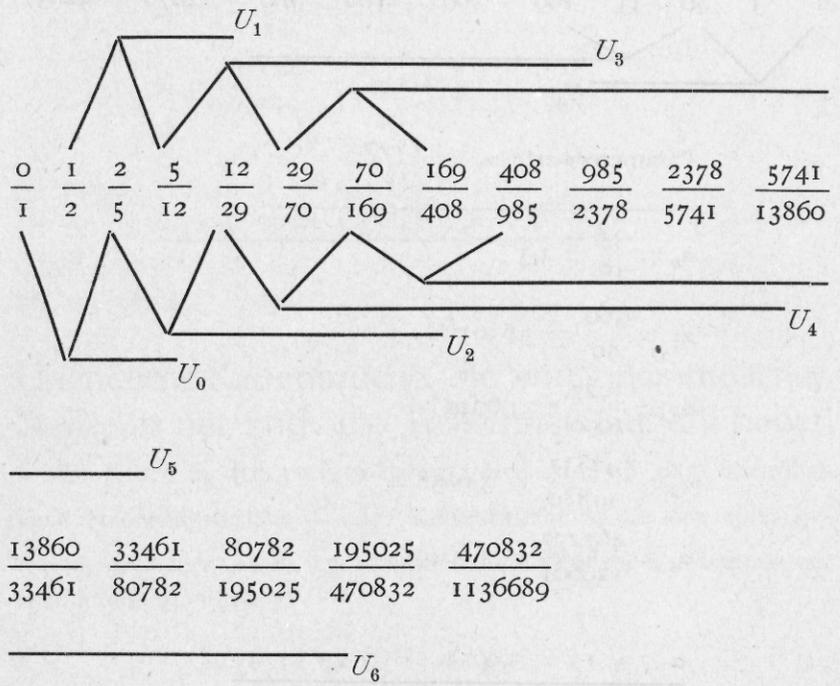
1,5 2,1 2,216 2,23303... 2,2356..

$$\alpha_9 = \frac{17711}{7920} \quad \dots \rightarrow \sqrt{5} = 2,236067\dots$$

$$\alpha_{10} = \frac{46368}{20737} \quad \dots \rightarrow 2,236004\dots$$

2. $\omega = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = \sqrt{2} - 1.$

Näherungsbrüche:



Diese Zahlen lassen sich also nicht derart annähern durch rationale Zahlen, so dass der Fehler kleiner ist als $\frac{1}{\sqrt{5} q^2}$. Für alle andern Irrationalzahlen gilt hingegen diese Annäherungsfähigkeit.

Ist der Teilnenner von einer gewissen Stelle an immer 2, ist also die durch diesen Kettenbruch dargestellte Zahl äquivalent $\sqrt{2} - 1$, so gilt

$$(73) \quad \left| \frac{p}{q} - \omega \right| \geq \frac{1}{\sqrt{8} q^2}.$$

Kommt in einem Kettenbruch der Teilnenner 3 immer wieder vor, so ist die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche

$$\left| \frac{p_v}{q_v} - \frac{p_{v-1}}{q_{v-1}} \right| = \frac{p_v q_{v-1} - p_{v-1} q_v}{q_v q_{v-1}} = \frac{1}{q_v q_{v-1}} = \frac{1}{a_v q^2_{v-1} + q_{v-1} q_{v-2}}$$

d. h.
$$\left| \frac{p_v}{q_v} - \frac{p_{v-1}}{q_{v-1}} \right| < \frac{1}{a_v q^2_{v-1}},$$

und es gibt unendlich viele rationale Brüche $\frac{p}{q}$, sodass

$$(74) \quad \left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{3 q^2}.$$

Diese Stelle ist bei $\alpha = 3$ nicht vertikal zugänglich; jeder Kettenbruch solcher Art somit annäherungsfähig durch $\frac{p}{q}$ mit einem Fehler $< \frac{1}{3 q^2}$.

Wir betrachten von nun an nur noch Zahlen ω , deren Kettenbruchentwicklung von einer gewissen endlichen Stelle a_v an die Teilnenner 1 und 2 haben

$$(75) \quad \omega = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_v + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_v + x}}}}}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_v + x}}}}$$

Wert = x

und fragen uns, wie die Folge der Teilnenner beschaffen sein muss, damit die Differenz zweier aufeinander folgenden Näherungsbrüche möglichst gross wird. Wir gehen aus von einem geraden Näherungsbruch $\frac{p_v}{q_v}$ (siehe Fig. 31). Folgt der Teilnenner 1, so ist der nächstfolgende Näherungsbruch weit weg von ω und die Differenz

$$\frac{p_{v+1}}{q_{v+1}} - \frac{p_v}{q_v}$$

ist möglichst gross. Damit ω selbst möglichst gross wird, müssen wir jetzt den Teilnenner 2 folgen lassen, wonach der folgende Näherungsbruch auch gross wird. Folgt jetzt wieder der Teilnenner 1, so wiederholt sich die Betrachtung, der Näherungswert wird gross u. s. w. Wir sehen, dass die Teilnennerfolge

$$1, 2; 1, 2; 1, 2; \dots$$

zu einem $\omega = \omega_1$ führt, das möglichst gross ist. In diesem Falle ist der Wert $x = x_1 = \mathfrak{R}(0; 1, 2; 1, 2; \dots) = \sqrt{3} - 1$.

Umgekehrt führt die Teilnennerfolge nach a_v

$$2, 1; 2, 1; 2, 1; \dots$$

zu einem Wert $\omega = \omega_2$, der möglichst klein ist.

Als zugehöriger Wert $x = x_2$ ergibt sich

$$x_2 = \frac{1}{2 + x_1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Der Wert x schwankt also bei beliebigen Verteilungen der Teilnenner 1 und 2 nach dem Teilnenner a_v zwischen den beiden positiven Werten $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ und $\sqrt{3} - 1$.

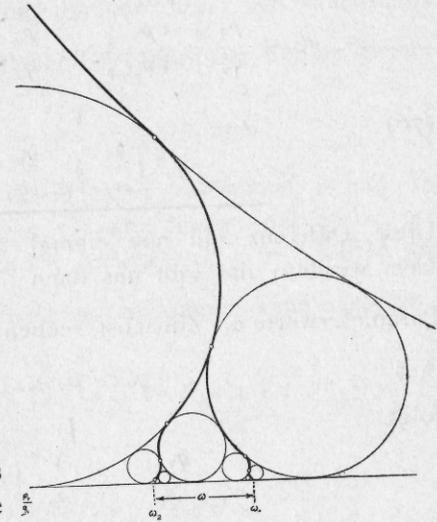


Fig. 31.

Wir bilden die Differenz zwischen dem wahren Wert ω und dem Näherungswert $\frac{p_v}{q_v}$ und erhalten:

$$d = \frac{p_{v-1}(a_v + x) + p_{v-2}}{q_{v-1}(a_v + x) + q_{v-2}} - \frac{p_{v-1}a_v + p_{v-2}}{q_{v-1}a_v + q_{v-2}}$$

$$d = \frac{p_v + x p_{v-1}}{q_v + x q_{v-1}} - \frac{p_v}{q_v} = \frac{x}{q_v(q_v + x q_{v-1})}$$

$$(76) \quad d = \frac{1}{q_v^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{q_{v-1}}{q_v} \right)} = \frac{1}{q_v^2 \cdot \alpha}$$

Diese Differenz soll nun einmal möglichst gross und möglichst klein werden: das gibt uns dann die beiden gesuchten äussersten Parameterwerte α . Zunächst suchen wir den Grenzwert für $\frac{q_{v-1}}{q_v}$.

Aus folgt

$$q_v = a_v q_{v-1} + q_{v-2}$$

$$\frac{q_{v-1}}{q_v} = \frac{1}{a_v} \left(1 - \frac{q_{v-2}}{q_v} \right)$$

d. h.

$$\frac{q_{v-1}}{q_v} > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4};$$

ferner gilt

$$\frac{q_{v-1}}{q_v} < 1.$$

Wir erhalten für x und $\frac{q_{v-1}}{q_v}$ die Intervalle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x \leq \sqrt{3}-1 \\ \frac{1}{4} < \frac{q_{v-1}}{q_v} < 1. \end{array} \right.$$

Die Differenz d (76) ist gross, bei grösstem Wert x und kleinstem Wert für $\frac{q_{v-1}}{q_v}$; also schliessen wir

$$\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{4} = \frac{3+2\sqrt{3}}{4} = \underline{1,61602 \dots}$$

Ebenso ergibt sich die kleinste Differenz bei den entgegengesetzten Werten für x und $\frac{q_{v-1}}{q_v}$. Man erhält

$$\alpha < \frac{2}{\sqrt{3}-1} + 1 = 2 + \sqrt{3} = \underline{3,73205 \dots}$$

Aus dem folgt, dass kein Kettenbruch von dieser Art sich derart annähern lässt durch rationale Brüche $\frac{p}{q}$, dass der Fehler kleiner

ist als $\frac{1}{(2+\sqrt{3})q^2}$.

Wir können die Grenzen für α noch enger bestimmen, indem wir den Kettenbruch weiter verfolgen als nur bis zu der Stelle, wo die Teilnenner die Werte 1 und 2 annehmen. Wir erhalten für den grössten Wert, den $\frac{q_{v-1}}{q_v}$ überhaupt annehmen kann nach (70):

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{q_{v-1}}{q_v} = \mathfrak{K}(0; 1, 2; 1, 2; \dots a_2, a_1) \leq \sqrt{3}-1,$$

und für den kleinsten Wert

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{q_{v-1}}{q_v} = \mathfrak{K}(0; 2, 1; 2, 1; \dots a_2, a_1) \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

also gilt

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{q_{v-1}}{q_v} < \sqrt{3}-1.$$

Differenz d :

| | |
|---|--|
| gross: | klein: |
| $\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}$ | $\alpha < \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3}-1 = \sqrt{12}$ |
| $= 1,732 \dots$ | $= 3,464 \dots$ |

somit

$$\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{12}.$$

Hieraus folgt der

Satz: Alle Irrationalzahlen ω , deren regelmäßige Kettenbruchentwicklungen von einer endlichen Stelle an nur noch die Teilnenner 1 und 2 haben, sind vertikal zugänglich für

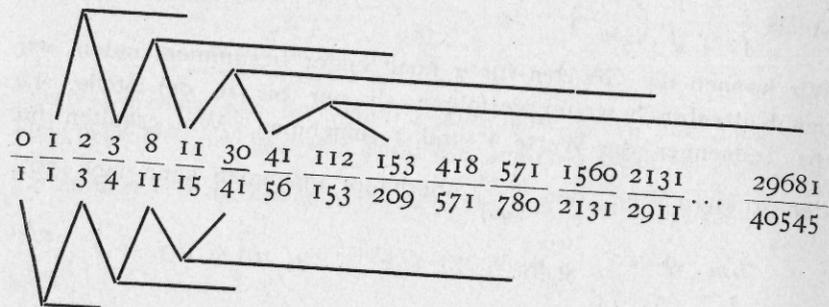
$$(77) \quad \alpha \geq \sqrt{12}$$

d. h. nicht mehr derart annäherungsfähig durch rationale Brüche $\frac{p}{q}$,
sodass der Fehler kleiner ist als $\frac{1}{\sqrt{12} q^2}$.

Beispiel:

$$\omega = \mathfrak{R}(0; 1, 2; 1, 2; \dots) = \sqrt{3} - 1.$$

Näherungsbrüche:



Der Zentralenschnittpunkt nähert sich von rechts dem Werte ω .
Als Parameterwerte erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{4}{3} \\ \alpha_1 &= \frac{15}{4} \\ \alpha_2 &= \frac{56}{33} \\ \alpha_3 &= \frac{209}{60} = 3,4833 \dots \\ \alpha_5 &= \frac{2911}{840} = 3,465 \\ \alpha_7 &= \frac{40545}{11704} = 3,46419 \dots \\ &\vdots \\ \alpha &= \sqrt{12} = 3,464101 \dots \end{aligned}$$

§ 15

Kettenbrüche, bei welchen von einer endlichen Stelle an unendlich oft ein kleinster und ein grösster Teilnenner vorkommt

1. Der Kettenbruch enthalte nach dem Teilnenner a_v nur noch die Zahlen 1, 2, 3 in beliebiger Folge.

$$\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots a_v; \dots (1, 2, 3) \dots)$$

Die Zahl ω ist sicher kleiner als

$$\omega_1 = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots a_v; 1, 3; 1, 3; \dots)$$

und grösser als

$$\omega_2 = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, a_3, \dots a_v; 3, 1; 3, 1; \dots).$$

Man erhält als grösster Wert von $x = x_1 = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$ und als kleinster Wert $x_2 = \frac{\sqrt{21} - 3}{6}$,

woraus sich die Grenzen ergeben:

$$\frac{\sqrt{21}}{3} < \alpha < \sqrt{21},$$

d. h. alle Kettenbrüche obiger Art sind vertikal zugänglich bei Kreisen $r < \frac{1}{\sqrt{21} q^2}$.

2. Kettenbrüche von der Art:

$$\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots a_v; \dots (1, 2, 3, 4) \dots)$$

In analoger Weise erhalten wir

$$\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{32}.$$

Beispiele:

1. $\mathfrak{R}(0; 2, 4; 2, 4; \dots) = \sqrt{6} - 2.$

Näherungsbrüche:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{9}{20}; \frac{40}{89}; \frac{89}{198}; \frac{396}{881}; \frac{881}{1960}; \frac{3920}{8721}; \frac{8721}{19402}; \frac{38804}{86329};$$

Werte für α :

$$\alpha_3 = \frac{19402}{3960} = 4,89949\dots$$

$$\alpha_5 = \frac{1901198}{388080} = 4,89897\dots$$

⋮

$$\alpha = \sqrt{24} = 4,89897\dots$$

2. $\mathfrak{R}(0; 1, 1, 1, 4; 1, 1, 1, 4; \dots) = \sqrt{7} - 2.$

Näherungsbrüche:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{9}{14}; \frac{11}{17}; \frac{20}{31}; \frac{31}{48}; \frac{144}{223}; \frac{175}{271}; \frac{319}{494}; \frac{494}{765}; \frac{2295}{3554}; \frac{2789}{4319};$$

Werte für α :

$$\alpha_2 = \frac{280}{51} = 5,49019 \quad \alpha_6 = \frac{71137}{13008} = 5,4686\dots \rightarrow \alpha = \sqrt{30} = 5,4685\dots$$

3. $\mathfrak{R}(0; 1, 4; 1, 4; \dots) = \sqrt{8} - 2.$

Werte für α :

$$\alpha_1 = \frac{35}{6} = 5,8333\dots \quad \alpha_3 = \frac{1189}{210} = 5,6619\dots \rightarrow \alpha = \sqrt{32} = 5,6568\dots$$

3. Kettenbrüche von der Art:

$$\mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_v; \dots (1, 2, 3, 4, 5, 6) \dots)$$

Bereich von α :

$$\frac{\sqrt{60}}{2} < \alpha < \sqrt{60}$$

Beispiele:

1. $\mathfrak{R}(0; 1, 6; 1, 6; \dots) = \sqrt{15} - 3 \quad \alpha = \sqrt{60}$

2. $\mathfrak{R}(0; 2, 6; 2, 6; \dots) = \sqrt{12} - 3 \quad \alpha = \sqrt{48}$

3. $\mathfrak{R}(0; 3, 6; 3, 6; \dots) = \sqrt{11} - 3 \quad \alpha = \sqrt{44}$

4. $\mathfrak{R}(0; 4, 6; 4, 6; \dots) = \sqrt{18} - 4 \quad \alpha = \sqrt{42}$

5. $\mathfrak{R}(0; 5, 6; 5, 6; \dots) = \frac{\sqrt{255} - 15}{5} \quad \alpha = \sqrt{41}$

6. $\mathfrak{R}(0; 6, 6, 6, \dots) = \sqrt{10} - 3 \quad \alpha = \sqrt{40}$

4. Allgemeiner Fall:

Kleinster Teilnenner = u

Grösster Teilnenner = v

$$\omega = \mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_v; \dots (u < c < d < \dots < v) \dots).$$

Man erhält den Bereich:

$$\sqrt{\frac{u(uv+4)}{v}} < \alpha < \sqrt{\frac{v(uv+4)}{u}}$$

Hieraus folgt der *allgemeine*

Satz: Alle Zahlen ω , bei deren regelmässigen Kettenbruchentwicklung von einer endlichen Stelle an unendlich oft ein kleinster Teilnenner u und unendlich oft ein grösster Teilnenner v vorkommt, wobei zwischen diesen in beliebiger Verteilung alle möglichen Zahlen t ($u < t < v$) als Teilnenner auftreten können, sind in der

Kreisfigur mit $r < \frac{1}{\alpha q^2}$ vertikal zugänglich, wenn

$$(78) \quad \alpha = \sqrt{\frac{v(uv+4)}{u}}$$

ist.

Als *Spezialfälle* erhalten wir:

1. $u = v = 1 \quad \alpha = \sqrt{5}$ } (Hurwitz, Markoff)

2. $u = v = 2 \quad \alpha = \sqrt{8}$ }

3. $u = v = n \quad \alpha = \sqrt{n^2 + 4}$

4. $u = 1 \quad \alpha = \sqrt{v(v+4)}$

Merkwürdige Koinzidenzen in der Kreisfigur

Es seien hier einige beachtenswerte Gesetzmässigkeiten in der Kreisfigur in kurzer Fassung dargelegt; die Beweise sind elementarer Natur und führen auf Identitäten (siehe Fig. 32).

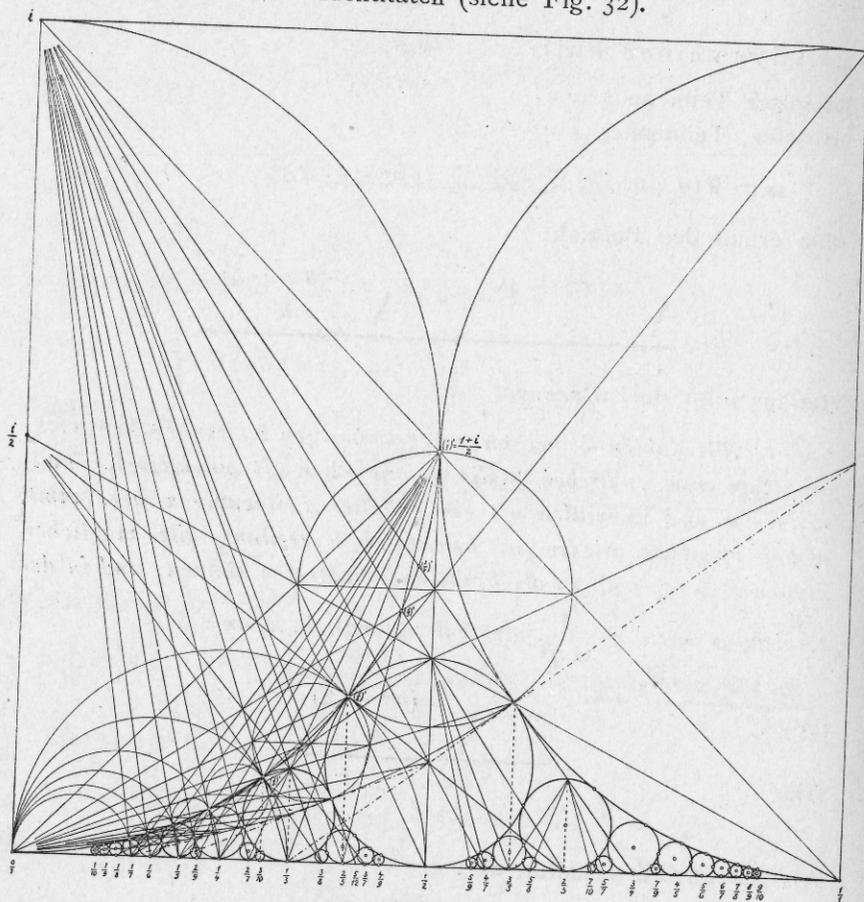


Fig. 32.

A. Koinzidenzen in Strahlbüscheln:

1. Zentrum: i .

a) Die Strahlen vom Punkt i nach den rationalen Punkten $\frac{1}{n}$

($n = 1, 2, 3, \dots$) der reellen Axe schneiden den Grundkreis $K\left(\frac{0}{1}\right)$ in den Berührungspunkten der Kreise $K\left(\frac{1}{n}\right)$.

In allgemeiner Fassung gilt der

Satz: Die Strahlen, ausgehend vom Diametralpunkt von $\frac{p_0}{q_0}$ nach den Berührungspunkten der Kreise $K\left(\frac{p}{q}\right)$ mit $K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$, gehen durch ihre Fusspunkte $\frac{p}{q}$.

b) Die Strahlen vom Punkt i nach den Berührungspunkten der Kreise $K\left(\frac{1}{n}\right)$, $K\left(\frac{1}{n+1}\right)$ sind gemeinsame Tangenten an diese, sie treffen die reelle Axe in Punkten $\frac{2n-1}{2n(n+1)}$ und gehen durch die Umkreismittelpunkte der Kreisbogendreiecke $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.¹⁾

c) Die Strahlen vom Punkt i nach den Diametralpunkten der Punkte $\frac{1}{n}$ treffen die reelle Axe in den Punkten $\frac{n}{n^2-1}$.

2. Zentrum: $\frac{0}{1}$.

a) Die Strahlen vom Punkt $\frac{0}{1}$ nach den Berührungspunkten des Grundkreises $K\left(\frac{0}{1}\right)$ mit den Kreisen $K\left(\frac{1}{2n}\right)$ gehen durch die Mittelpunkte der Kreise $K\left(\frac{1}{n}\right)$ und diejenigen nach den Berührungspunkten mit den Kreisen $K\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ durch die Berührungspunkte der Kreise $K\left(\frac{1}{n}\right)$, $K\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Wir wollen in der Folge die Projektionen der Punkte $\frac{p}{q}$ der

¹⁾ s. § 2, 3.

reellen Axe vom Zentrum i aus auf den Grundkreis mit $\left(\frac{p}{q}\right)'$ und kurz mit *Projektion von $\frac{p}{q}$* bezeichnen.

b) Die Strahlen vom Punkt $\frac{0}{1}$ nach den Projektionen der Punkte $\frac{2}{2n+1}$ treffen die Umkreismittelpunkte der Kreisbogendreiecke $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

3. Zentrum: $\frac{i}{2}$.

a) Die Strahlen vom Mittelpunkt des Grundkreises nach den Projektionen der Punkte $\frac{1}{n}$ treffen die reelle Axe in den Punkten $\frac{n}{n^2-1}$.

b) Die Strahlen vom Grundkreismittelpunkt nach den Mittelpunkten der Kreise $K\left(\frac{1}{n+2}\right)$ treffen die reelle Axe in den Punkten $\frac{n+2}{n^2+4n+3}$.

4. Zentrum: $\frac{1+i}{2}$.

Die Strahlen vom Punkt $\frac{1+i}{2}$ nach den Berührungspunkten der Kreise $K\left(\frac{1}{n}\right)$ mit dem Grundkreis treffen die reelle Axe in den Punkten $\frac{1}{n+1}$.

B. *Koinsidenzen auf Tangenten.*

1. Tangenten des Grundkreises:

Die Tangente im Punkte $\left(\frac{1}{n}\right)'$ geht durch den Punkt $\frac{1}{2n}$, durch die Diametralpunkte von $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n-1}$ und durch den Punkt $\frac{n}{2} + i$.

2. Die Tangente im Berührungspunkt zweier Kreise, welche den Kreis $K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$ berühren, geht durch den Diametralpunkt von $\frac{p_0}{q_0}$, also durch $\frac{p_0}{q_0} + \frac{i}{q_0^2}$. Daraus folgt:

Die Berührungspunkte aller Kreise K_r, K_{r+1} , welche $K\left(\frac{p_0}{q_0}\right)$ berühren, liegen auf einem Kreis mit dem Diametralpunkt von $\frac{p_0}{q_0}$ als Mittelpunkt und dem Radius $\frac{1}{q_0^2}$.

C. *Der Berührungspunkt $K\left(\frac{0}{1}\right)$ mit $K\left(\frac{1}{n}\right)$ als Treffpunkt von 5 Geraden.*

Im Punkt $\left(\frac{1}{n}\right)'$ des Grundkreises treffen sich die Verbindungsgeraden der Punkte:

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | $i \rightarrow \frac{1}{n}$ | Strahl von i aus |
| 2. | $\frac{i}{2} \rightarrow \frac{n}{n^2-1}$ | Zentrale |
| 3. | $\frac{1+i}{2} \rightarrow \frac{1}{n+1}$ | Sekante |
| 4. | $\frac{n}{2} + i \rightarrow \frac{1}{2n}$ | Tangente in $\left(\frac{1}{n}\right)'$ |
| 5. | $\frac{0}{1} \begin{cases} \nearrow \frac{2}{n} + \frac{2i}{n^2} \\ \searrow \frac{4n+i}{2(n^2+1)} \end{cases}$ | wenn n gerade wenn n ungerade. |

Ferner liegt $\left(\frac{1}{n}\right)'$ im Schnittpunkt des Halbkreises mit Mittelpunkt in $\frac{1}{2n}$ und dem Radius $r = \frac{1}{2n}$ mit dem Grundkreis.

Beweis: Jeder Kreis K_i (79) wird wiederum berührt von den Kreisen

$$(84) K_{i,\nu} = K \left(\frac{(2+\nu)p' + (2i-1+\nu i)p_0}{(2+\nu)q' + (2i-1+\nu i)q_0} \right), (\nu = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Der Zentralenschnittpunkt U der Kreise $K_i, K_{i,\nu}$ hat nach (25) die Abszisse

$$(85) \frac{p}{q} = \frac{[(2+\nu)^2-1]p'q' + [r^2-i^2]p_0q_0 + [(2+\nu)r-i](p'q_0 + p_0q')}{[(2+\nu)^2-1]q'^2 + [r^2-i^2]q_0^2 + 2[(2+\nu)r-i]q'q_0},$$

wobei zur Abkürzung

$$r = (2i-1 + \nu i)$$

gesetzt ist.

Ein fester Wert für ν ergibt die Schnittpunkte quasiparalleler Zentralen in ν -ter Lage mit der reellen Axe. Wählt man für $i=0, 1, 2, 3, \dots$, so erhält man bei den Zählern p folgende Glieder in der ersten Differenzenfolge

$$\begin{aligned} \Delta_1 p &= (\nu^2 + 2\nu - 1)p_0q_0 + (\nu^2 + 4\nu + 3)(p'q_0 + p_0q') \\ \Delta_2 p &= (3\nu^2 + 10\nu + 5)p_0q_0 + (\nu^2 + 4\nu + 3)(p'q_0 + p_0q') \\ &\dots \end{aligned}$$

woraus die von p', q' unabhängige zweite Differenz

$$(86) \quad \Delta\Delta p = (2\nu^2 + 8\nu + 6)p_0q_0$$

folgt. Ersetzt man im Zähler von (85) p' durch q' und p_0 durch q_0 , so erhält man den Nenner; aus (86) schliessen wir durch diese Vertauschung auf die zweite Nennerdifferenz

$$\Delta\Delta q = (2\nu^2 + 8\nu + 6)q_0^2.$$

Der Beweis zur Behauptung (83) ergibt sich direkt aus (84).

3. Strahlzentralen.

Die Zentralen vom Mittelpunkt eines festen Kreises $K \left(\frac{p_0}{q_0} \right)$ aus nach den Berührungskreisen schneiden die reelle Axe in Punkten $\frac{p}{q}$, deren Zähler und Nenner je eine arithmetische Reihe 2. Ordnung bilden mit den Differenzen

$$(87) \quad \begin{aligned} \Delta\Delta p &= 2p_0q_0 \\ \Delta\Delta q &= 2q_0^2. \end{aligned}$$

Der Quotient der Differenzen ist gleich der Abszisse des festen Kreismittelpunktes.

Beweis: Die Zentralen der Kreise $K_0 \rightarrow K_i$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) schneiden die reelle Axe in den Punkten

$$(88) \quad \frac{p}{q} = \frac{p'q' + (i^2-1)p_0q_0 + i(p'q_0 + p_0q')}{q'^2 + (i^2-1)q_0^2 + 2iq'q_0},$$

woraus die zweiten Differenzen (87) folgen.

4. Reihe von Tangenten.

Zieht man vom Diametralpunkt ¹⁾ von $\frac{p_0}{q_0}$ aus an die Kreise K_1, K_2, K_3, \dots , die alle den Kreis $K \left(\frac{p_0}{q_0} \right)$ berühren, die Tangenten, so schneiden diese die reelle Axe in Punkten $\frac{p}{q}$, deren Zähler und Nenner je eine arithmetische Reihe 2. Ordnung bilden mit den Differenzen

$$(89) \quad \begin{aligned} \Delta\Delta p &= 4p_0q_0 \\ \Delta\Delta q &= 4q_0^2. \end{aligned}$$

Beweis: Die Tangente im Berührungspunkt B der Kreise K_i, K_{i+1} hat nach (26) den Tangentenschnittpunkt T :

$$(90) \quad \frac{p}{q} = \frac{2[p'q' + i(i+1)p_0q_0 + (i+1)p'q_0 + ip_0q'] - 1}{2[q'^2 + i(i+1)q_0^2 + (2i+1)q'q_0]},$$

daraus ergeben sich für aufeinanderfolgende Werte von i die zweiten Differenzen (89).

¹⁾ Vergl. Satz 4. § 5.

Figuren-Verzeichnis

| | Seite |
|--|----------|
| Fig. 1 — 3 Kreisfigur $\alpha = 2, \sqrt{3}, 1$. | 12—14 |
| „ 4 Die unimodularen Substitutionen in der Kreisfigur | 15 |
| „ 5 a, b, c. Die Substitutionen $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 18 |
| „ 6 Die Kreisfigur $\alpha = 2$ und die <i>Dedekind'sche</i> Figur | 20 |
| „ 7 Geometr. Interpretation d. dioph. Gleichung $5x - 3y = \pm 1$ | 22 |
| „ 8 Die Determinante von Kreisen in n -ter Lage | 23 |
| „ 9 Geometr. Interpretation d. dioph. Gleichung $5x - 3y = \pm 2$ | 25 |
| „ 10 Geometr. Interpretation d. dioph. Gleichung $5x - 3y = \pm 3$ | 26 |
| „ 11 Berührungspunkt, Tangenten- und Zentralenschnittpunkt | 30 |
| „ 12 Die Kurve zum Kettenbruch $\omega = \mathfrak{R}(0; 2, 2, 2, \dots)$ | 34 |
| „ 13, 14 Kettenbruchkurve und ω -Strahl, ihr Zusammenhang | 38, 39 |
| „ 15 Analogon zur Konstruktion des Umrisspolygons | 40 |
| „ 16 — 20 Beispiel halbregelmässiger Kettenbrüche | 48 |
| „ 21 Figur zu einem Satz über Kettenbrüche: $\eta \leq \xi \leq \zeta$. | 51 |
| „ 22 Figur zu symmetrischen Kettenbrüchen | 52 |
| „ 23 — 27 Kettenbruchkurven zu den Entwicklungen von $\sqrt{13}$ | 55—59 |
| „ 28 Geöffnete Kreisfigur $\alpha = \sqrt{5}$, Stelle $\omega = \mathfrak{R}(0; 1, 1, 1, \dots)$ | 64 |
| „ 29 — 30 Benachbarte Näherungsbrüche gerader Ordnung | 65 u. 66 |
| „ 31 Der Kettenbruch $\mathfrak{R}(a_0; a_1, a_2, \dots, a_\nu; \dots (1, 2) \dots)$ | 75 |
| „ 32 Koinzidenzen in der Kreisfigur | 82 |
| „ 33 Tangenten und Zentralen in der Kreisfigur | 86 |

Bezeichnungen

| | Seite |
|---|-------|
| Abszisse eines Kreises | 21 |
| Ausgangsdreieck | 16 |
| Determinante zweier Kreise | 21 |
| Grundkreis | 19 |
| Hauptkreise | 35 |
| Kettenbruchkurve, regelmässig | 35 |
| Kettenbruchkurve, halbregelmässig | 44 |
| Kreis $\frac{\alpha}{\gamma}$ oder $K\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ | 16 |
| Kreise in ν -ter Lage | 24 |
| Kreisbogendreieck $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ | 19 |
| Kreisvektoren | 40 |
| Mittelpunktgitter | 38 |
| Mittelpunktpolygon | 42 |
| Nebenkreise | 35 |
| Projektion von $\frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)'$ | 83 |
| Quasiparallel in ν -ter Lage | 87 |
| <i>Speiser'sche</i> Kreisfigur | 9 |
| Spitzensatz | 46 |
| Tangentenschnittpunkt T | 31 |
| Vertikal zugängliche Stelle | 62 |
| Zentralenschnittpunkt U | 31 |