MANNIGFALTIGKEITEN UND DUALITÄT

ANDREW RANICKI

- Klassifikation von Mannigfaltigkeiten
- Eindeutigkeitsfrage
- Existenzfrage
- Quadratische Algebra
- Anwendungsgebiete

Mannigfaltigkeiten

- Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M^n ist ein topologischer Raum der lokal zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.
  - kompakt, orientiert, zusammenhängend.

- Klassifikation der Mannigfaltigkeiten bis auf Homöomorphismus:
  - Für $n = 1$: Kreis
  - Für $n = 2$: Sphäre, Torus, $\ldots$, Henkelkörper.
  - Für $n \geq 3$: im allgemeinen unmöglich.

Eindeutigkeitfrage

- *Ist eine Homotopieäquivalenz $f : M^n \to N^n$ von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu einem Homöomorphismus homotop?*
  - Für $n = 1, 2$: Ja.
  - Für $n \geq 3$: im allgemeinen Nein.

Die Vermutung von Poincaré

- *Eine Homotopieäquivalenz $f : M^3 \to S^3$ ist zu einem Homöomorphismus homotop.*
  - 1904 aufgestellt und immer noch ungelöst!

- **Satz**
  ($n \geq 5$: Smale, 1960, $n = 4$: Freedman, 1983)
  Eine Homotopieäquivalenz $f : M^n \to S^n$ ist zu einem Homöomorphismus homotop.

Alte Lösung der Eindeutigkeitsfrage

- Chirurgietheorie für $n \geq 5$ allgemeingültig.
  - Von jetzt an sei $n \geq 5$.

- **Satz**
  (Browder, Novikov, Sullivan, Wall, 1970)
  Eine Homotopieäquivalenz $f : M^n \to N^n$ ist zu einem Homöomorphismus homotop genau dann, wenn zwei Hindernisse verschwinden.

- Die 2 Hindernisse der Chirurgietheorie:

  1. In der topologischen K-Theorie der Vektorbündel über N.

  2. In der algebraischen L-Theorie der quadratischen Formen über dem Fundamentalgruppenring $\mathbb{Z}[\pi_1(N)]$.

Traditionelle Chirurgietheorie

- Vorteil:
  - Geeignet für <u>Berechnungen</u>.

- Nachteile:
  - <u>Unzugänglich</u>.
  - Eine <u>komplizierte</u> Mischung von Topologie und Algebra.
  - Übergang von Homotopieäquivalenz zu den Hindernissen <u>umständlich</u>.
  - Hindernisse <u>nicht entkoppelt</u>.

Walls Programm

- “The theory of quadratic structures on chain complexes should provide a simple and satisfactory algebraic version of the whole setup.”
  - C.T.C.Wall, *Surgery on compact manifolds*, 1970

- Diese Theorie ist jetzt verfügbar.
  - Ranicki, *Algebraic L-theory and topological manifolds*, 1992

Der Satz von Siebenmann

- Die lokalen Kerngruppen einer Abbildung $f : M \to N$ sind die relativen Homologiegruppen

  $$K_r(x) \;=\; H_{r+1}(f^{-1}(x) \to \{x\}) \;\; (x \in N)\ .$$

- Exakte Folge

  $$\begin{aligned} \cdots \to K_r(x) \to\; & H_r(f^{-1}(x)) \to H_r(\{x\}) \\ & \to K_{r-1}(x) \to \dots\ . \end{aligned}$$

- $K_*(x) = 0$ für einen Homöomorphismus f.

- **Satz** (Siebenmann, 1972)
  Eine Homotopieäquivalenz

  $$f : M^n \to N^n \text{ mit } K_*(x) \;=\; 0 \;\; (x \in N)$$

  ist zu einem Homöomorphismus homotop.

Neue Lösung der Eindeutigkeitsfrage

- Das totale Chirurgiehindernis $s(f)$ einer Homotopieäquivalenz $f : M^n \to N^n$ ist die Kobordismusklasse
  - der Garbe von $\mathbb{Z}$-Modul-Kettenkomplexen
  - mit n-dimensionaler Poincaré-Dualität
  - über N
  - mit Halmenhomologie $K_*(x)$ $(x \in N)$.

- Kobordismus und Poincaré-Dualität sind rein algebraisch zu verstehen.

- **Satz** *Eine Homotopieäquivalenz f ist zu einem Homöomorphismus homotop genau dann, wenn $s(f) = 0$.*

Poincaré-Dualität

- **Satz** (Poincaré, 1895)
  Die Homologie und Kohomologie einer kompakten orientierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M sind isomorph:

  $$H^{n-r}(M) \ \cong \ H_r(M) \ (r = 0, 1, 2, \dots) \ .$$

- **Definition** (Browder, 1962)
  Ein <u>n-dimensionaler Dualitätsraum</u> X ist ein Raum mit Isomorphismen:

  $$H^{n-r}(X) \ \cong \ H_r(X) \ (r = 0, 1, 2, \dots) \ .$$

Existenzfrage

- *Ist ein n-dimensionaler Dualitätsraum X zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent?*
  - Für $n = 1, 2$: Ja.
  - Für $n \geq 3$: im allgemeinen Nein.

Alte Lösung der Existenzfrage

- **Satz**
  (Browder, Novikov, Sullivan, Wall, 1970)
  Ein n-dimensionaler Dualitätsraum X ist zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent genau dann, wenn zwei Hindernisse verschwinden.

- Die 2 Hindernisse (wie zur Eindeutigkeit):

  1. In der <u>topologischen K-Theorie</u> der Vektorbündel über X.

  2. In der <u>algebraischen L-Theorie</u> der quadratischen Formen über dem Fundamentalgruppenring $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$.

- Gleiche Vor- und Nachteile wie alte Lösung der Eindeutigkeitsfrage.

Der Satz von Galewski und Stern

- Die lokalen Kerngruppen $K_r(x)$ eines n-dimensionalen Dualitätsraumes X passen in die exakte Folge

$$\cdots \to K_r(x) \to H^{n-r}(\{x\}) \to H_r(X, X\backslash\{x\}) \\ \to K_{r-1}(x) \to \dots \ .$$

- $K_*(x) = 0$ für eine Mannigfaltigkeit.

- **Satz** (Galewski und Stern, 1977)
  Ein Dualitätsraum X mit

  $K_*(x) = 0$ $(x \in X)$ *(Homologiemannigfaltigkeit)*

  ist zu einer Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent.

Neue Lösung der Existenzfrage

- Das totale Chirurgiehindernis $s(X)$ eines n-dimensionalen Dualitätsraumes X ist die Kobordismusklasse
  - der Garbe von $\mathbb{Z}$-Modul-Kettenkomplexen
  - mit $(n-1)$-dimensionaler Poincaré-Dualität
  - über X
  - mit Halmenhomologie $K_*(x)$ $(x \in X)$.
- Kobordismus und Poincaré-Dualität sind rein algebraisch zu verstehen.
- **Satz** *Ein Dualitätsraum X ist zu einer Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent genau dann, wenn $s(X) = 0$.*

Quadratische Algebra

- Kettenkomplexe mit den homologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten und Dualitätsräume.

- Ein n-dimensionaler Dualitätskomplex ist ein Kettenkomplex

  $$C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} C_{n-2} \rightarrow \ldots \rightarrow C_0 \ (d^2 = 0)$$

  mit Isomorphismen

  $$H^{n-r}(C) \cong H_r(C) \ (r = 0, 1, 2, \ldots) \ .$$

  – Verallgemeinerte quadratische Formen.

- Kobordismus von Dualitätskomplexen.

Lokale und globale Dualitätskomplexe

X = zusammenhängender Raum

- Die <u>globale Chirurgiegruppe</u> $L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ von Wall ist die Kobordismusgruppe der n-dimensionalen Dualitätskomplexe von $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-Moduln.
  - Allgemeine Wittgruppe.

- Die <u>lokale Chirurgiegruppe</u> $H_n(X;\mathbb{L}(\mathbb{Z}))$ ist die Kobordismusgruppe der n-dimensionalen Dualitätskomplexe von $\mathbb{Z}$-Modul-Garben über X.
  - Allgemeine Homologiegruppe mit Koeffizienten $L_*(\mathbb{Z})$.

Exakte Folge

- **Satz** *Die lokalen und globalen Chirurgiegruppen sind durch eine exakte Folge verbunden*

$$\ldots \rightarrow H_n(X;\mathbb{L}(\mathbb{Z})) \stackrel{A}{\rightarrow} L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]) \\ \rightarrow \mathbb{S}_n(X) \rightarrow H_{n-1}(X;\mathbb{L}(\mathbb{Z})) \rightarrow \ldots .$$

- Die Assembly-Abbildung A ist der Übergang von lokalen zu globalen Dualitätskomplexen.

- Die Strukturgruppe $\mathbb{S}_n(X)$ ist die Kobordismusgruppe der $(n-1)$-dimensionalen lokalen Dualitätskomplexe über X, die global trivial sind.

Die totalen Chirurgiehindernisse

- **Eindeutigkeit**: das totale Chirurgiehindernis einer Homotopieäquivalenz $f : M^n \to N^n$

$$s(f) \in \mathbb{S}_{n+1}(N) \ .$$

  - $s(f)$ ist die Kobordismusklasse des n-dimensionalen lokalen Dualitätskomplexes mit den Kerngruppen $K_*(x)$ $(x \in N)$ als Halmenhomologie, der global trivial ist.

- **Existenz**: das totale Chirurgiehindernis eines n-dimensionalen Dualitätsraumes X

$$s(X) \in \mathbb{S}_n(X) \ .$$

  - $s(X)$ ist die Kobordismusklasse des $(n-1)$-dimensionalen lokalen Dualitätskomplexes mit den Kerngruppen $K_*(x)$ $(x \in X)$ als Halmhomologie, der global trivial ist.

Topologie und Homotopietheorie

- Unterschied zwischen der Topologie von Mannigfaltigkeiten und der Homotopietheorie der Dualitätsräume
  = Unterschied zwischen den Kobordismustheorien der lokalen und globalen Dualitätskomplexe.

$$\begin{tikzcd}
\text{Mannigfaltigkeiten} \arrow[r] \arrow[d] & \text{lokale Dualität} \arrow[d, "A"] \\
\text{Dualitätsräume} \arrow[r] & \text{globale Dualität}
\end{tikzcd}$$

- Umkehrung der Poincaré-Dualität:
  ein Dualitätsraum mit genügend lokaler Dualität ist zu einer Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent.

Die Vermutungen von Novikov und Borel

- Die Vermutung von Novikov über die Homotopieinvarianz der höheren Signaturen ist <u>algebraisch</u>:

  - $A : H_*(B\pi; \mathbb{L}(\mathbb{Z})) \to L_*(\mathbb{Z}[\pi])$ ist rational injektiv, für jede Gruppe π.

- Die Vermutung von Borel über die Existenz und Eindeutigkeit von asphärischen Mannigfaltigkeiten ist <u>algebraisch</u>:

  - $A : H_*(B\pi; \mathbb{L}(\mathbb{Z})) \to L_*(\mathbb{Z}[\pi])$ ist ein Isomorphismus, falls $B\pi$ ein Dualitätsraum ist.

- Die verschiedenen Lösungsmethoden können in <u>Algebra</u> umgesetzt werden:

  - Topologie, Geometrie, Analysis (C^*-Algebra), Indexsätze, ...

Anwendungsgebiete

- Algebraische Berechnungen der L-Gruppen
  - Zahlentheorie
- Singuläre Räume
  - algebraische Varietäten
- Differentialgeometrie
  - hyperbolische Geometrie
- Nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten
  - kontrollierte Topologie
- 3- und 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten