

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

à l'Université de PARIS XI - Centre d'Orsay

par Takao MATUMOTO

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse :

Variétés simpliciales d'homologie et
variétés topologiques métrisables

Soutenue le 15 octobre 1976

devant le jury composé de :

MM. J. CERF	Président
A'CAMPO	
V. POENARU	Examineurs
L. SIEBENMANN	
P. VOGEL	

VARIETES SIMPLICIALES D'HOMOLOGIE ET VARIETES TOPOLOGIQUES METRISABLES

Par

Takao MATUMOTO

INTRODUCTION

Le présent mémoire étudie l'existence d'une relation entre les variétés¹⁾ simpliciales d'homologie entière et les variétés²⁾ topologiques métrisables; leurs sigles seront respectivement HML et TOP. L'origine de ce travail, c'est le problème de savoir si toute variété TOP admet une triangulation simpliciale, autrement dit s'il existe toujours une variété HML qui lui soit homéomorphe.

On commencera d'abord par étudier le problème inverse: Est-ce que toute variété HML possède une structure sous-jacente de variété TOP? Bien entendu il existe des variétés HML qui ne sont pas variétés TOP; par exemple, une suspension d'une sphère d'homologie PL non-simplement connexe. Cependant, la réponse est "oui" en un certain sens: à partir

1) Une telle variété n'est rien d'autre qu'un complexe simplicial localement fini ayant l'homologie locale entière d'un (demi-)espace euclidien.

2) On l'appellera simplement variété topologique par la suite.

de chaque n -variété HML M , on construit, de façon unique à homéomorphisme filtré près, une $(n+1)$ -variété topologique filtrée N , par traduction en TOP d'une décomposition de $M \times S^1$ en les produits de cellules duales de M avec S^1 ; ensuite, si $\dim M \neq 4$ et $\dim \partial M \neq 4$, une n -variété topologique M_{TOP} est obtenue de façon unique à homéomorphisme près par un scindement canonique de N . En principe, nous regarderons M_{TOP} comme structure "sous-jacente" de M .

Dans ce cadre, par analogie avec le lissage des variétés PL, nous saurons classifier les structures de variétés HML sur chaque variété TOP donnée. Pour cela nous construirons une flèche entre les espaces classifiants des fibrés normaux HML et TOP et nous établirons une théorie de la chirurgie sur les variétés HML compactes. Il intervient dans la théorie de classification ci-dessus un seul groupe d'obstruction, noté $\ker \alpha$; le calculer, ou bien même, déterminer s'il est trivial ou non, est cependant difficile.

Pour aborder le problème de la triangulation des variétés TOP, nous observons que la construction $M \mapsto M_{\text{TOP}}$ mentionnée déjà redonne $M_{\text{TOP}} = M$, toutes les fois que M est localement euclidienne. Or, la conjecture généralisée de la suspension double des sphères d'homologie HML affirme qu'en fait, toute variété HML est localement euclidienne sauf aux sommets dont les links sont non-simplement connexes.

R. D. Edwards [Ed₂] toutefois a démontré une partie importante de cette conjecture, la partie dans laquelle intervient typiquement la sphère de Poincaré $SO(3)/A_5$ étant cependant laissée de côté.

Notre conclusion principale concernant le problème de triangulations s'énonce ainsi (sous forme simplifiée);

Toute variété TOP sans bord de dimension $n \geq 6$ admet une triangulation simpliciale, si et seulement s'il existe une 3-sphère d'homologie H^3 qui satisfait aux trois conditions suivantes:

- (i) H^3 borde une 4-variété PL parallélisable de signature 8,
- (ii) la suspension (n-3)-uple de H^3 est homéomorphe à la n-sphère, et
- (iii) la somme connexe orientée $H^3 \# H^3$ est le bord d'une 4-variété PL acyclique.

Ce travail a été réalisé sous la direction de M. L. C. Siebenmann. C'est dans son séminaire que MM. R. D. Edwards et J. Bryant ont exposé leurs résultats permettant d'obtenir les théorèmes dans le chapitre 5. En outre, le manuscrit de son livre "Foundational Essays on Topological Manifolds Smoothings and Triangulations" écrit en collaboration avec M. R. Kirby, m'a été précieux pour la rédaction définitive. Je lui en exprime toute ma gratitude. Je remercie également M. J.-L. Mauclaire, qui m'a aidé à corriger la rédaction en langue française.

Sommaire

- Chapitre 1 : Construction de variétés topologiques "sous-jacentes",
- Chapitre 2 : Construction de sous-variétés topologiques et de voisinages topologiques en codimension ≥ 3 ,
- Chapitre 3 : Chirurgie sur les variétés HML compactes de dimension ≥ 5 ,
- Chapitre 4 : Structures HML sur les variétés topologiques,
- Chapitre 5 : Etude du problème de la triangulation simpliciale de variétés topologiques en dimension ≥ 5 .

Chaque chapitre est précédé par une introduction détaillée.

Notations et définitions initiales

- \mathbb{R}^n , S^n , T^n et D^n désignent respectivement l'espace euclidien, une sphère, un tore et une boule fermée de dimension n .
- $Lk(\sigma, X)$ et $St(\sigma, X)$ sont respectivement le link et l'étoile d'un simplexe σ dans le complexe simplicial X .
- CX et $S^n X$ désignent respectivement le cône et la suspension n -uple de l'espace X .
- \simeq , \simeq_s , \approx et \cong désignent respectivement une équivalence

d'homotopie, une équivalence d'homotopie simple, un homéomorphisme et un homéomorphisme PL (ou un isomorphisme de groupes).

- On peut définir de façon équivalente une n -variété HML comme un complexe simplicial localement fini tel que $H_*(Lk(\sigma^k, M); Z)$ est $\cong H_*(S^{n-k-1}; Z)$ ou nul pour tout k -simplexe de M . Voir par exemple [ST] et [Mau₁].

- Une variété PL signifie une variété combinatoire et de même une application PL, une application linéaire par morceaux.

- CAT représente un des sigles HML, TOP, PL ou DIFF.

- ∂ signifie le bord d'une variété CAT.

- Une n -sphère d'homologie CAT est une n -variété CAT fermée ayant le même groupe d'homologie entière que S^n .

- Une variété CAT W avec deux bord $\partial W = W_1 \cup W_2$ est appelée un s-cobordisme CAT, un h-cobordisme CAT ou un H_* -cobordisme CAT si les inclusions : $W_i \rightarrow W$ sont respectivement des équivalences d'homotopie simple, des équivalences d'homotopie ou des isomorphismes en homologie entière.

- H^3 désigne le groupe abélien pour la somme connexe de classes de H_* -cobordisme PL de 3-sphères d'homologie PL orientées.

- $\alpha : H^3 \rightarrow Z_2$ est un homomorphisme de groupes défini par $\alpha(H^3) = \text{signature}(P^4)/8 \pmod{2}$ où P^4 est une 4-variété PL parallélisable avec $\partial P^4 = H^3$. α est appelé l'homomorphisme de Kervaire-Milnor-Rohlin.

- La lettre M désigne habituellement une variété HML; la lettre V une variété TOP.

CHAPITRE 1

Construction de variétés topologiques "sous-jacentes"

§. Introduction

Soit M une n -variété HML. Le but de ce chapitre est de construire de façon canonique sa variété TOP "sous-jacente", notée M_{TOP} , avec la restriction que $\dim M \neq 4$ et $\dim \partial M \neq 4$.

En premier lieu, sans aucune restriction de dimension, on va construire une $(n+1)$ -variété topologique filtrée N comme une réunion de fausses-cellules duales rondes qui sont traduction en TOP de produits de cellules duales de M avec S^1 . Les fausses-cellules duales rondes et, par conséquent, N sont déterminées de façon unique à homéomorphisme filtré près.

La filtration donnée par les fausses-cellules duales rondes de N nous permet de faire un scindement filtré de $N \times E1$ pour une variété $E1$ PL fermée 1-connexe de dimension positive dont le nombre d'Euler $\chi(E1) = 1$; par exemple on pourra avoir $E1 = CP^2 \times CP^2 \# 4(S^3 \times S^5)$. Avec la restriction de dimension énoncée, nous obtiendrons un scindement canonique de N , i.e.: une n -variété topologique M_{TOP} , plongée dans N , unique à homéomorphisme près telle que $M_{TOP} \times E1$ est isotope au scindement filtré de $N \times E1$.

Puisque la construction est canonique, il est facile de vérifier qu'il existe de façon canonique une équivalence d'homotopie simple, $f : M_{TOP} \rightarrow M$, et $f^* \alpha_* o(M) = k(M_{TOP})$ dans $H^4(M_{TOP} ; Z_2)$ où $k(M_{TOP})$ est la classe d'obstruction de Kirby-Siebenmann $[KS_1]$ et $o(M) \in H^4(M ; H^3)$ est la classe d'obstruction de Sullivan - Cohen - Sato $[Su, Co, Sa]$ pour obtenir une résolution PL acyclique en variété PL. On peut remarquer que la classe d'homéomorphisme associée à M_{TOP} ne dépend pas de la subdivision de M .

Le §1 contient les lemmes géométriques qui seront utilisés dans la construction des fausses-cellules duales rondes. Dans le §2, on traite la construction de la variété topologique N ; ensuite, dans le §3, celle de la variété TOP "sous-jacente" M_{TOP} , en supposant que M est compacte; enfin le cas non-compact dans le §4. Dans le §5 on démontrera que M_{TOP} est homéomorphe à $(M')_{TOP}$ pour toute subdivision M' de M , et dans le §6 que $(M_1 \times M_2)_{TOP} \approx (M_1)_{TOP} \times (M_2)_{TOP}$. Enfin, dans le §7, on montrera que, si M est elle-même une variété TOP, M_{TOP} est homéomorphe à M .

§1. Lemmes locaux géométriques

Le lemme 1.1 suivant est fondamental pour la démonstration des lemmes 1.2 et 1.3. On utilisera la théorie de la chirurgie topologique pour démontrer le lemme 1.1.

LEMME 1.1. Soit V une $(n+m)$ -variété TOP fermée, et soit
 $f : V \rightarrow S^n \times T^m$ une équivalence d'homotopie. Supposons $n + m \geq 5$.
Alors, il existe une $(n+m+1)$ -variété TOP compacte L et une
équivalence d'homotopie $g_L : L \rightarrow CS^n \times T^m$ telles que $\partial L = V$ et
 $g_L|_V = f$. En plus, si $m \leq 3$, il existe un homéomorphisme
 $h : V \rightarrow S^n \times T^m$ tel que h et f induisent le même isomorphisme
sur $\pi_1(S^n \times T^m)$.

Preuve. Comme f est homotope à un homéomorphisme dans le cas où $n \leq 1$, il suffit de démontrer le lemme en supposant que $n \geq 2$. On considère le diagramme commutatif suivant dont les suites horizontales sont les suites exactes du type de Sullivan-Wall associées à la chirurgie topologique:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & S_{\text{TOP}}(D^{n+1} \times T^m) & \xrightarrow{\eta} & [D^{n+1} \times T^m, G/\text{TOP}] & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \uparrow \downarrow & & \downarrow \\
 \theta \rightarrow & L_{n+m+1}(\pi_1(T^m)) & \rightarrow & S_{\text{TOP}}(S^n \times T^m) & \xrightarrow{\eta} & [S^n \times T^m, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\theta} & L_{n+m}(\pi_1(T^m)) \\
 & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 \theta \rightarrow & L_{n+m+1}(\pi_1(T^m)) & \rightarrow & S_{\text{TOP}}(D^n \times T^m, \partial) & \xrightarrow{\eta} & [D^n \times T^m/\partial, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\cong} & L_{n+m}(\pi_1(T^m))
 \end{array}$$

En utilisant le fait que $\theta : [S^i(D^n \times T^m/\partial), G/\text{TOP}] \rightarrow L_{n+m+i}(\pi_1(T^m))$,

$i \geq 0$, est un isomorphisme et la formule de Kunneth pour

$[\cdot, G/TOP]$ -théorie, on vérifie que, pour $i \geq 0$,

$$0 \rightarrow [S^i(D^{n+1} \times T^m), G/TOP] \rightarrow [S^i(S^n \times T^m), G/TOP] \xrightarrow{\eta} L_{n+m+i}(\pi_1(T^m)) \rightarrow 0,$$

est une suite exacte d'ensembles pointés. Alors, si l'on remarque

l'existence des opérations transitives des groupes de Wall $L_*(\cdot)$

sur les préimages $\eta^{-1}(0)$, on voit facilement par chasse du diagramme

que l'application induite par restriction sur le bord,

$S_{TOP}(D^{n+1} \times T^m) \rightarrow S_{TOP}(S^n \times T^m)$, est une bijection; d'où la première

assertion du lemme.

Plus précisément, η induit une bijection de $S_{TOP}(S^n \times T^m)$ sur $[T^m, G/TOP]$ et, en plus, parce que l'on a la stabilité

$G_{n+1}/\widetilde{TOP}_{n+1} \xrightarrow{\cong} G/TOP$ pour $n \geq 2$, tout élément de $S_{TOP}(S^n \times T^m)$

est représenté par une équivalence entre le fibré sphérique d'un

fibré bloc TOP sur T^m et le fibré TOP produit $S^n \times T^m$. Or,

comme $Spin-\widetilde{TOP}_{n+1}$ est 2-connexe, l'application d'un complexe simplicial

de dimension ≤ 3 vers $G_{n+1}/\widetilde{TOP}_{n+1}$ est remonté à l'application

vers $Spin-G_{n+1}$ dans la suite suivante dont chaque deux flèches

successives représentent une fibration homotopique: $Spin-\widetilde{TOP}_{n+1}$

$\rightarrow Spin-G_{n+1} \rightarrow G_{n+1}/\widetilde{TOP}_{n+1} \rightarrow BSpin-\widetilde{TOP}_{n+1}$; tout fibré bloc TOP sur

T^m est donc trivial si $m \leq 3$ et s'il est trivial comme fibré

sphérique.

c. q. f. d.

LEMME 1.2. Soit H^n un complexe CW fini tel que $H_*(H^n) \cong H_*(S^n)$

et soit V une $(n+m)$ -variété TOP fermée munie d'une équivalence

d'homotopie, $f : V \rightarrow H^n \times T^m$. Supposons $n \geq 2$ et $n + m \geq 4$.

Alors, V borde une $(n+m+1)$ -variété TOP compacte K et il existe
une équivalence d'homotopie $g_K : K \rightarrow CH^n \times T^m$ telle que $g_K|_{\partial K} = f$.

REMARQUE. Etant donné une 3-sphère d'homologie H^3 dont l'invariant $\alpha(H^3)$ est non-nul, on pose $V = H^3 \times S^1$; dans ce cas la variété topologique K du lemme 1.2 ne peut avoir aucune structure PL relative à $H^3 \times S^1$. En effet, il existait alors une 5-variété PL fermée qui aurait le même type d'homotopie que $X \times S^1$ où X est une 4-variété HML fermée avec $w_1(X) = w_2(X) = 0$ et $\text{sign}(X) = -8$; ceci donnerait un contre-exemple au théorème de Rohlin par une application de la transversalité en PL.

Preuve du lemme 1.2. Supposons d'abord $n + m \geq 5$. On va construire un H_* -cobordisme topologique W entre V et une autre variété V_0 tel que $V_0 \simeq S^n \times T^m$ et l'inclusion de V_0 dans W soit une équivalence d'homotopie. Soit $c : H^n \rightarrow S^n$ une application de degré 1 et soit $\phi : V \rightarrow S^n \times T^m$ l'application définie par $\phi = (c \times (\text{id}|_{T^m})) \circ f$. Alors, $\pi_1(\phi)$ est isomorphe à $\pi_1(H^n)$. On prend un système fini de générateurs de $\pi_1(H^n)$; les générateurs sont représentés par les plongements des S^1 avec fibrés normaux triviaux dans V . On attache les anses $D^2 \times D^{n+m-1}$ à $V \times I$ en utilisant des trivialisations des fibrés normaux des S^1 et l'on obtient une variété topologique W_1 et une extension $\phi_1 : W_1 \rightarrow S^n \times T^m$ de ϕ . On définit une variété TOP connexe W_2 par $\partial W_1 = V \cup W_2$ et ϕ_2 par $\phi_2 = \phi_1|_{W_2}$. Alors, par

construction, $\pi_1(\phi_2) = 0$ et, pour l'applications induite sur les revêtements universels $\tilde{\phi}_2 : \tilde{W}_2 \rightarrow (S^n \times T^m)^\sim$, $H_2(\tilde{\phi}_2)$ est un $Z[\pi_1(T^m)]$ -module libre. Comme on peut choisir les trivialisations des S^1 telles que $w_2 \cap H_2(\tilde{\phi}_2) = 0$, on peut supposer que l'on a des plongement des S^2 avec fibrés normaux triviaux dans W_2 qui représentent les générateurs du $Z[\pi_1(T^m)]$ -module libre $\pi_2(\phi_2) = H_2(\tilde{\phi}_2)$. Comme on a fait précédemment, on attache les anses $D^3 \times D^{n+m-2}$ à W_1 en utilisant des trivialisations des fibrés normaux des S^2 et l'on obtient une variété topologique W_3 et une extension $\phi_3 : W_3 \rightarrow S^n \times T^m$ de ϕ_1 et, en outre, une variété TOP connexe W_4 par $\partial W_3 = V \cup W_4$ et ϕ_4 par $\phi_4 = \phi_3|_{W_4}$. On vérifie que $\pi_1(\phi_4) = 0$ et que, pour le revêtement universel $\tilde{\phi}_4 : \tilde{W}_4 \rightarrow (S^n \times T^m)^\sim$ et pour $i \geq 2$, $H_i(\tilde{\phi}_4) = 0$. Par conséquent, ϕ_4 est une équivalence d'homotopie. En plus, on voit que $\phi_3 : W_3 \rightarrow S^n \times T^m$ lui-même est une équivalence d'homotopie. D'après le lemme 1.1, on a une extension, $g = \phi_3 \cup g_L : W_3 \cup L \rightarrow CS^n \times T^m$, qui satisfait à la condition.

Si $n + m = 4$, on fait la chirurgie de l'application $\phi \times (\text{id}|_{S^1}) : V \times S^1 \rightarrow S^n \times T^{m+1}$ et l'on obtient une équivalence d'homotopie $\phi'_4 : W'_4 \rightarrow S^n \times T^{m+1}$. Alors, comme $n \geq 2$ implique $m + 1 \leq 3$ on a un homéomorphisme $h : W'_4 \rightarrow S^n \times T^{m+1}$ tel que $(\phi'_4)_* = h_*$ sur $\pi_1(S^n \times T^{m+1})$ d'après le lemme 1.1. Or, on s'arrange pour que les modifications sphériques sont effectuées dans un voisinage de $V \times 1/2 \subset V \times S^1$, on a alors un plongement naturel $V \times 0 \subset W'_4$. En considérant un revêtement fini, on peut obtenir un plongement disjoint de $V \times 0 \cup h^{-1}(S^n \times T^m)$ dans W'_4 . Soit W une des deux composantes du complémentaire $W'_4 - (V \times 0 \cup h^{-1}(S^n \times T^m))$. Alors, W est le

H_* -cobordisme TOP désiré entre $V \times 0$ et $S^n \times T^m$, car, par construction, le revêtement universel \tilde{W} est aussi un H_* -cobordisme. Enfin, on définit une variété topologique K par $K = V \times I \cup W \cup D^{n+1} \times T^m$ et une application $g : K \rightarrow CH^n \times T^m$ par l'unique extension de l'application composée $(d \times (\text{id}|T^m)) \circ (f \times (\text{id}|I))$ de $V \times I$ vers $CH^n \times T^m$ où $d : H^n \times I \rightarrow CH^n$ est une contraction de $H^n \times 1$ sur le sommet du cône. Comme g induit un isomorphisme sur π_1 et que l'application induite sur les revêtements universels induit un isomorphisme sur l'homologie, g est une équivalence d'homotopie.

c. q. f. d.

LEMME 1.3. La variété topologique K dans le lemme 1.2 est déterminée de façon unique à homéomorphisme près.

Preuve. Soient K_1 et K_2 deux variétés TOP avec $\partial K_1 = \partial K_2$. Supposons qu'elles satisfont à la condition dans le lemme 1.2. On définit une variété TOP fermée V par $V = K_1 \cup \partial K_1 \times I \cup K_2$. Alors, on a une équivalence d'homotopie $g : V \rightarrow SH^n \times T^m$ comme réunion de deux équivalences d'homotopie $g_i : K_i \rightarrow CH^n \times T^m$ pour $i = 1, 2$, qui coïncident sur les bords. Par conséquent, comme $n + m \geq 4$ et que $SH^n \times T^m \simeq S^{n+1} \times T^m$, on obtient une variété TOP compacte K et une équivalence d'homotopie $h' : K \rightarrow CSH^n \times T^m$ telles que $\partial K = V$ et $h'|V = g$, d'après le lemme 1.1. Alors, K fournit un h -cobordisme TOP relatif entre K_1 et K_2 . Ici, on a $\dim K = n + m + 2 \geq 6$, $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}$ et $Wh(\mathbb{Z}) = 0$. Donc d'après le théorème du s -cobordisme topologique [KS, III], on obtient un homéomorphisme $h : K_1 \rightarrow K_2$ avec $h|\partial K_1 = \text{id}$.

c. q. f. d.

§2. s-décomposition et construction de la variété topologique N

Soit M une n -variété HML. Nous construirons la $(n+1)$ -variété topologique N du théorème 1.4 de la façon exposée dans l'introduction. Le type d'homotopie simple de N est traité dans le théorème 1.4.a et les classes d'obstruction, dans le théorème 1.4.b. Nous rappelons d'abord la définition d'une s -décomposition.

DEFINITION ([KS,III]). Une s-décomposition de l'espace X est une filtration finie de X ,

$$X_0 \subset X_0^+ \subset X_1 \subset X_1^+ \subset \dots \subset X_n \subset X_n^+ = X$$

en sous-ensembles fermés telle que

- (i) $X_i \hookrightarrow X_i^+$ est une équivalence d'homotopie,
- (ii) en désignant $B_i(X) = \overline{X_i - X_{i-1}^+}$ et $\partial_{-B_i}(X) = B_i(X) \cap X_{i-1}^+$, l'inclusion $\partial_{-B_i}(X) \rightarrow X_i$ est une cofibration, et
- (iii) chaque composante connexe de $B_i(X)$ et de $\partial_{-B_i}(X)$ possède un type d'homotopie simple, et ces types simples sont compatibles l'un avec l'autre.

Un premier exemple d'une s -décomposition est associé à la décomposition en cellules duales d'une n -variété HML M . Pour simplifier l'écriture, si un simplexe σ se situe dans le bord ∂M , on traitera les deux cellules duales $D(\sigma, M)$ et $D(\sigma, \partial M)$ par la même notation $D(\sigma)$. Une s -décomposition de M est définie par:

$M_i = \cup \{D(\sigma) = D(\sigma, M) \text{ ou } D(\sigma, \partial M) ; \dim D(\sigma) \leq i\}$ et M_i^+ sera le voisinage dérivé second de M_i dans M_{i+1} .

Dans ce cas on voit facilement, que

$$B_i(M) \cong \cup \{D(\sigma) ; \dim D(\sigma) = i\} \text{ et } \partial_{-} B_i(M) \cong \cup \partial D(\sigma).$$

Les réunions sont disjointes, $\partial D(\sigma, M) = \delta D(\sigma, M) \cup D(\sigma, \partial M)$, où $\delta D(\sigma, \partial M) = \partial D(\sigma, \partial M)$ et $\delta D(\sigma, M) = \cup \{D(\tau, M) ; \tau > \sigma\}$.

Si X est un espace avec une s -décomposition et Y est un complexe simplicial fini, on a une s -décomposition induite sur $X \times Y$ par $(X \times Y)_i = X_i \times Y$ et $(X \times Y)_i^+ = X_i^+ \times Y$.

DEFINITION. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre les espaces avec s -décompositions est dite filtrée (ou par blocs) si

$$f(X_i - X_{i-1}) \subset Y_i - Y_{i-1}, \quad f(B_i(X)) \subset B_i(Y) \text{ et } f(\partial_{-} B_i(X)) \subset \partial_{-} B_i(Y)$$

pour tout $i \geq 0$. Une application filtrée est dite équivalence

d'homotopie filtrée (ou équivalence par blocs) si les applications

induites, $B_i(X) \rightarrow B_i(Y)$ et $\partial_{-} B_i(X) \rightarrow \partial_{-} B_i(Y)$, sont des équivalences

d'homotopie simple. Si un homéomorphisme f et son inverse sont

filtrés, f est dit homéomorphisme filtré.

THEOREME ([KS, III]). Une s -décomposition fournit de façon unique

un type d'homotopie simple. Une équivalence d'homotopie filtrée

entre les espaces munies de s -décomposition est une équivalence

d'homotopie simple.

Maintenant, on peut énoncer notre premier théorème:

THEOREME 1.4. Soit M une n -variété HML. On considère la

s-décomposition sur $M \times S^1$ qui est induit naturellement par la
décomposition en cellules duales de M . Alors, il existe, de façon
unique à homéomorphisme filtré près, une $(n+1)$ -variété TOP notée N
munie d'une s-décomposition et d'une équivalence d'homotopie filtrée
 $g : N \rightarrow M \times S^1$.

Preuve. On observe d'abord que $\partial D(\sigma)$ possède le même groupe
d'homologie entière qu'une sphère et qu'il est une réunion de cellules
duales de dimensions inférieures; $\partial D(\sigma) = \cup D(\tau)$. De plus, dans
 $\partial D(\sigma)$, l'intérieur $\text{int } D(\tau) = D(\tau) - \partial D(\tau)$ de chaque cellule duale $D(\tau)$
admet un voisinage ouvert qui est homéomorphe à $\text{int } D(\tau) \times R^t$ avec
 $t = \dim D(\sigma) - 1 - \dim D(\tau)$.

On construira, par récurrence sur i , les espaces N_i et les
équivalences d'homotopie $g_i : N_i \rightarrow M_i \times S^1$.

(a) $i \leq 3$. On pose: $N_3 = M_3 \times S^1$ et $g_3 = \text{id}$; et,
si $\dim D(\sigma) \leq 3$, $E(\sigma) = D(\sigma) \times S^1$.

(b) $i = 4$. Soit $D(\sigma)$ une cellule duale de dimension 4. Alors,
 $\partial D(\sigma)$ est une 3-sphère d'homologie PL et $D(\sigma) = C\partial D(\sigma)$ est
identifié avec le cône $C\partial D(\sigma)$. Rappelons que $\partial D(\sigma) \times S^1$ borde
une variété topologique $K^5(\sigma)$ d'après le lemme 1.2. On définit une
fausse-cellule duale ronde $E(\sigma)$ par $E(\sigma) = K^5(\sigma)$ et une équivalence
d'homotopie $g_\sigma = g_K : E(\sigma) \rightarrow D(\sigma) \times S^1$ suivant le lemme 1.2. On
remarque que $E(\sigma)$ est déterminée à homéomorphisme près fixant
 $\partial D(\sigma) \times S^1$ en vertu du lemme 1.3. On définit alors N_4 par

$$N_4 = N_3 \cup (\cup \{E(\sigma) ; \dim D(\sigma) = 4\})$$

et $g_4 : N_4 \rightarrow M_4 \times S^1$ par la réunion de g_3 et des g_σ .

(c) $i \geq 5$. Soit $D(\sigma)$ une cellule duale de dimension i .

Avant de définir $E(\sigma)$, on définit son bord $\partial E(\sigma)$ par

$$\partial E(\sigma) = \cup \{E(\tau) ; D(\tau) \subset \partial D(\sigma)\} \subset N_{i-1}.$$

Il est bien défini à homéomorphisme près, car les $E(\tau)$ et les inclusions $E(\tau_1) \subset E(\tau_2)$ sont déterminées à homéomorphisme près par notre hypothèse de récurrence. Par construction, la restriction de f_{i-1} sur $\partial E(\sigma)$ induit une équivalence d'homotopie filtrée, $g_{i-1}|_{\partial E(\sigma)} : \partial E(\sigma) \rightarrow \partial D(\sigma) \times S^1$. En plus, $\partial E(\sigma)$ est une variété TOP; ceci résulte du fait que les intérieurs $\text{int } E(\tau)$ des $E(\tau)$ sont variétés TOP par l'induction et qu'ils admettent des voisinages ouverts dans $\partial E(\sigma)$ homéomorphes à $\text{int } E(\tau) \times \mathbb{R}^t$,

$t = \dim D(\sigma) - \dim D(\tau) - 1$, tels que la réunion des voisinages

recouvre $\partial E(\sigma)$. D'après le lemme 1.2, on peut définir une fausse-

cellule duale ronde $E(\sigma)$ par la variété topologique $E(\sigma) = K^{i+1}(\sigma)$

avec $\partial E(\sigma) = \partial K(\sigma)$ et une équivalence d'homotopie $g_\sigma : E(\sigma) \rightarrow D(\sigma) \times S^1$

par $g_\sigma = (j \times (\text{id}|S^1)) \circ g_K$, où $j : C\partial D(\sigma) \rightarrow C\delta D(\sigma) = D(\sigma)$ est

l'équivalence d'homotopie canonique. On remarque que $E(\sigma)$

est déterminée de façon unique à homéomorphisme près en vertu du

lemme 1.3. On définit alors N_i par

$$N_i = N_{i-1} \cup (\cup \{E(\sigma) ; \dim D(\sigma) = i\})$$

et $g_i : N_i \rightarrow M_i \times S^1$ par la réunion de g_{i-1} et des g_σ .

(d) On se retrouve maintenant dans une situation analogue à celle où l'on était précédemment juste avant (c); on peut donc recommencer le processus suivi dans (c) si $i \leq n$.

(e) On arrive enfin à obtenir un espace $N = N_n$ avec une s-décomposition et une équivalence d'homotopie filtrée

$$g = g_n : N \rightarrow M \times S^1.$$

(f) Dans l'espace N , les intérieurs $\text{int } E(\sigma)$ des fausses-cellules duales rondes $E(\sigma)$ admettent des voisinages ouverts homéomorphes soit à $\text{int } E(\sigma) \times R^t$, soit, si $\sigma \subset \partial M$ et si $D(\sigma) = D(\sigma, \partial M)$, à $\text{int } E(\sigma) \times R_+^t$, où $t = n - \dim D(\sigma) + 1$, tels que la réunion de ces voisinages recouvre N . Comme les $\text{int } E(\sigma)$ sont variétés TOP sans bord, on voit que N est une $(n+1)$ -variété TOP.

c. q. f. d.

REMARQUE. Si la n -variété HML M est une réunion $M_1 \cup M_2$ de deux variétés HML telles que $M_3 = M_1 \cap M_2$ est une $(n-1)$ -variété HML, alors, N est de façon canonique homéomorphe à $N_1 \cup N_2$. En effet, pour $\sigma \subset M_1 \cap M_2$ désignons par $E(\sigma, N_i)$ la fausse-cellule duale ronde $E(\sigma)$ correspondant à $D(\sigma, M_i)$; alors, on déduit par la récurrence que $E(\sigma, N_1) \cap E(\sigma, N_2) = E(\sigma, N_3)$ et que, en vertu du lemme 1.3, $E(\sigma, N)$ est homéomorphe à $E(\sigma, N_1) \cup E(\sigma, N_2)$, (si M est bordée et si $\sigma \subset \partial M \cap M_1 \cap M_2$, on doit observer d'abord que $E(\sigma, \partial N)$ est homéomorphe à la fermeture de $E(\sigma, \partial N_1) \cup E(\sigma, \partial N_2) - E(\sigma, N_3)$ d'après le lemme 1.3) et

l'on arrive enfin à ce que $N_1 \cap N_2 = N_3$ et $N \approx N_1 \cup N_2$.

D'après [KS,III], chaque variété TOP possède son type d'homotopie simple canonique. On va montrer:

THEOREME 1.4.a. Le type d'homotopie simple canonique de la (n+1)-variété topologique N est équivalent à celui défini par l'équivalence d'homotopie filtrée $g : N \rightarrow M \times S^1$.

Preuve. On définit une autre s-décomposition en anses X de M par

$$X_i = X_i^+ = \cup \{D(b_\sigma, M') ; \dim \sigma \leq i\}$$

où $D(b_\sigma, M')$ est l'étoile du barycentre du simplexe σ dans la seconde subdivision barycentrique M'' de M.

Supposons, pour le moment, que M est sans bord. Alors, X_{n-i-1} est la fermeture du complémentaire du voisinage dérivé de M_i dans M et, par conséquent, $B_i(X) \approx B_{n-i}(M) \times D^i$ et $\partial_{-}B_i(X) \approx B_{n-i}(M) \times \partial D^i$; on peut choisir une s-décomposition Y de N telle que $B_i(Y) \approx B_{n-i}(N) \times D^i$, $\partial_{-}B_i(Y) \approx B_{n-i}(N) \times \partial D^i$ et que $g : N \rightarrow M \times S^1$ est une équivalence d'homotopie filtrée par rapport aux s-décompositions X et Y.

Or, les types d'homotopie simple des $\partial_{-}B_i(Y)$ et des $B_i(Y)$ sont déterminés indépendamment des choix, car leurs composantes connexes sont compactes et ont des groupes fondamentaux abéliens libres. En outre, les $B_i(Y)$ sont sous-variétés TOP de codimension 0 de N. Par conséquent, Y est une s-décomposition TOP dans le sens de la

définition 5.9 de [KS,III], qui fournit le type d'homotopie simple canonique de N grâce au théorème 5.10 de [loc. cit.]; d'où le résultat dans le cas sans bord.

Si M possède un bord non-vide, on remplace respectivement M_i , $B_{n-i}(M)$ et $B_{n-i}(N)$ dans le paragraphe précédent par $\overline{M_i - (M_i \cap \partial M)}$, $u \{D(\sigma, M) ; \dim \sigma = i\}$ et $u \{E(\sigma, N) ; \dim \sigma = i\}$. On peut remarquer qu'on ne compte pas ici les $E(\sigma, \partial N)$ pour la filtration; On en déduit le résultat.

c. q. f. d.

La classe d'obstruction pour résoudre M en variété PL est définie par [Su], [Co] et [Sa] (Cf. [Mr₂] et Appendice du ch. 3), et l'on a $o(M) \in H^4(M ; H^3)$. On va la comparer avec la classe d'obstruction de Kirby-Siebenmann [KS₁], pour la triangulation en variété PL d'une variété topologique N construite de la façon énoncée dans le théorème 1.4. Selon la définition dans ce cas, on a $k(N) \in H^4(N ; Z_2)$. Soit $m : N \rightarrow M$ la composition de l'équivalence d'homotopie simple $g : N \rightarrow M \times S^1$ avec la projection : $M \times S^1 \rightarrow M$. Soit $n : M \rightarrow N$ la composition de l'inclusion : $M \rightarrow M \times S^1$ avec l'inverse d'équivalence d'homotopie : $M \times S^1 \rightarrow N$ de g ; on a $m \circ n \simeq \text{id}$. En $\alpha : H^3 \rightarrow Z_2$ désignant l'homomorphisme de Kervaire-Milnor-Rohlin, on obtiendra:

THEOREME 1.4.b. Pour la variété topologique N construite dans le théorème 1.4, on a

$$n^*k(N) = \alpha_*(o(M)) \text{ dans } H^4(M ; Z_2).$$

Preuve. On peut supposer que M est sans bord. Soit U_i le voisinage

dérivé de la filtration M_i dans M et soit V_i le voisinage correspondant à N_i dans N , i.e.: U_i et V_i sont respectivement la fermeture du complémentaire de X_{n-i-1} dans M et celle de Y_{n-i-1} dans N ; les inclusions $M_i \rightarrow U_i$ et $N_i \rightarrow V_i$ sont des équivalences d'homotopie. Désignons par j et i respectivement les inclusions $V_4 \rightarrow N$ et $U_4 \rightarrow M$. Alors, $j^* : H^4(N ; Z_2) \rightarrow H^4(V_4 ; Z_2)$ et $i^* : H^4(M ; Z_2) \rightarrow H^4(U_4 ; Z_2)$ sont des injections. Rappelons que $V_3 = U_3 \times S^1$ est une variété PL et que, si $\alpha(H^3)$ ne s'annule pas, comme on l'a remarqué, K du lemme 1.2 n'a aucune structure PL relative à $H^3 \times S^1$. D'où, $j^*k(N) \in H^4(V_4, V_3 ; Z_2)$, et c'est l'image par m^* de $\alpha_*\sigma$ qui correspond à $\prod \alpha_*\sigma(\sigma)$ par l'isomorphisme: $H^4(U_4, U_3 ; Z_2) \cong \prod H^4(D(\sigma), \partial D(\sigma) ; Z_2)$. Ici, $\alpha_*\sigma(\sigma)$ est la classe de cohomologie définie par $\alpha_*\sigma(\sigma)(x) = \alpha(\partial D(\sigma))$ pour le générateur $x \in H_4(D(\sigma), \partial D(\sigma) ; Z_2) \cong Z_2$, le produit étant effectué sur toutes les 4-cellules duales de M . En conséquence, sachant que $i^*\alpha_*(M)$ est l'image de $\alpha_*\sigma$, on a $j^*k(N) = m^*i^*\alpha_*(M)$, et donc $k(N) = m^*\alpha_*(M)$. Comme $m \circ n \simeq \text{id}$, on obtient immédiatement le résultat $n^*k(N) = \alpha_*(M)$.

§3. Structure de variété topologique "sous-jacente"

Soit M une variété HML. Nous allons obtenir sa variété topologique "sous-jacente" M_{TOP} comme un scindement canonique de la variété topologique N du théorème 1.4. Personne ne sait scinder convenablement en dimension 4; donc nous n'essayons pas

directement le scindement filtré. Si l'on fait le produit avec une variété PL fermée $E1$ telle que $\pi_1(E1) = 0$, $\chi(E1) = 1$ et $\dim E1 \geq 4$, il est facile d'obtenir un scindement filtré par rapport à la s -décomposition induite sur $N \times E1$. Si la dimension est ≥ 5 , on obtiendra en plus un scindement global de N qui est isotope au scindement filtré de $N \times E1$ après avoir passé au produit avec $E1$.

Enonçons maintenant le théorème principal de ce chapitre:

THEOREME 1.5. Soit M une n -variété HML (éventuellement non-compacte) et soit N la $(n+1)$ -variété TOP associée à M par le théorème 1.4. Supposons $\dim M \neq 4$ et $\dim \partial M \neq 4$. Alors, il existe de façon unique à homéomorphisme près une n -variété TOP, notée M_{TOP} , possédant:

- (i) une équivalence d'homotopie simple $f : M_{TOP} \rightarrow M$,
- (ii) un homéomorphisme $h : M_{TOP} \times S^1 \rightarrow N$ tel que $g \circ h \simeq f \times (id|S^1)$,
- (iii) une s -décomposition sur la variété $M_{TOP} \times E1$,
- (iv) une équivalence d'homotopie filtrée $F : M_{TOP} \times E1 \rightarrow M \times E1$ telle que $F \simeq f \times (id|E1)$, et
- (v) un homéomorphisme filtré $H : M_{TOP} \times S^1 \times E1 \rightarrow N \times E1$, isotope à $h \times (id|E1)$, tel que $(g \times (id|E1)) \circ H \simeq F \times (id|S^1)$.

REMARQUE. La détermination de la classe d'homéomorphie de M_{TOP} et de la classe d'homotopie de f ne dépend pas du choix de la variété $E1$, ce qui est facile à vérifier, par exemple, en considérant le produit $E1 \times E1'$.

DEFINITION 1.5.a. La variété TOP M_{TOP} du théorème 1.5 est appelée variété topologique "sous-jacente" de la variété HML M .

COROLLAIRE 1.5.b. On a

$$k(M_{TOP}) = f^* \alpha_* \sigma(M) \quad \text{dans} \quad H^4(M_{TOP}; Z_2).$$

La preuve du corollaire est immédiate à partir du théorème 1.4.b et des conclusions (i) et (ii) du théorème 1.5.

Démonstration du théorème 1.5. D'après le théorème 1.4, il existe une équivalence d'homotopie filtrée $g : N \rightarrow M \times S^1$ et on en déduit un revêtement cyclique infini \tilde{N} de N associé à la projection $p : N \rightarrow S^1$. Tout abord, si l'on fait le produit avec $E1$, on obtiendra un scindement par blocs de $\tilde{N} \times E1$ formé d'une sous-variété TOP de $\tilde{N} \times E1$, que nous noterons $(M \times E1)_{TOP}$, tel que, pour chaque $i \geq 0$, $((M \times E1)_{TOP} \cap \tilde{N}_i \times E1) \times R^1 \approx \tilde{N}_i \times E1$; $(M \times E1)_{TOP} \cap \tilde{N}_i \times E1$ est défini par récurrence sur i : jusqu'à $i = 3$, on pose $(M \times E1)_{TOP} \cap \tilde{N}_3 \times E1 = M_3 \times E1 \times 0$ dans $\tilde{N}_3 \times E1 = M_3 \times E1 \times R^1$. Si $i \geq 4$, pour le revêtement cyclique infini $\tilde{E}(\sigma)$ induit par chaque fausse-cellule duale ronde $E(\sigma)$, on peut supposer que $\partial \tilde{E}(\sigma) \times E1$ est déjà scindé par l'hypothèse de récurrence; car $\tilde{E}(\sigma) \approx D(\sigma)$, $\pi_1(\tilde{E}(\sigma) \times E1) = 0$ et $\dim \tilde{E}(\sigma) \times E1 \geq 9$, on en obtient

*) Justification de la notation sera donnée dans le théorème 1.7.

un scindement de $\hat{E}(\sigma) \times E1$ relatif au bord $[Si_1]$. Enfin, dans la dernière étape de la récurrence, on arrive au scindement filtré de $\hat{N} \times E1$.

On suppose $\dim M \geq 5$ et, en outre, pour le moment que M est une variété HML fermée. Comme on a une égalité,

$$\sigma(\hat{N} \times E1) = \chi(E1)\sigma(\hat{N}) \text{ dans } K_0Z[\pi_1(\hat{N})],$$

entre les obstructions pour les scindements de $\hat{N} \times E1$ et de \hat{N} $[Si_1]$, \hat{N} peut également être scindé. Soit L une sous-variété TOP de \hat{N} telle que $L \times R^1 \approx \hat{N}$. Alors, $L \times E1$ est un autre scindement de $\hat{N} \times E1$ et donc il existe un h-cobordisme TOP $(W_1 ; L \times E1, (M \times E1)_{TOP})$ avec une torsion $\tau \in Wh(\pi_1(L))$. La variété topologique M_{TOP} est définie par l'autre bord que L du h-cobordisme TOP $(W ; L, M_{TOP})$ dont la torsion est égale à τ . La classe d'homéomorphie de M_{TOP} ne dépend pas du choix de L . Evidemment, $M_{TOP} \times R^1 \approx \hat{N}$ et la classe d'isotopie de la sous-variété M_{TOP} de \hat{N} est déterminée.

On voit facilement de la formule produit des torsions [KWS] qu'il existe un s-cobordisme TOP entre $M_{TOP} \times E1$ et $(M \times E1)_{TOP}$ qui se situe dans $N \times E1$. Par conséquent, les deux variétés sont homéomorphes et de plus le scindement $M_{TOP} \times E1$ est isotope au scindement $(M \times E1)_{TOP} [Si_1]$. En particulier, une s-décomposition sur $M_{TOP} \times E1$ est induite par celle de $(M \times E1)_{TOP}$.

Pour montrer que $M_{TOP} \times S^1 \approx N$, on forme le produit de N avec S^1 et l'on considère l'application $q : N \times S^1 \rightarrow S^1$ définie

par la composition de la projection sur la première composante avec $p : N \rightarrow S^1$. D'une part, par induction sur i , on peut déformer q en q' de sorte que l'intersection $((q')^{-1}(\ast) \cap N_i) \times S^1$, de façon canonique, homéomorphe à N_i . D'autre part, par le scindement global effectué précédemment, on peut déformer q en q'' de telle façon que $(q'')^{-1}(\ast) = M_{\text{TOP}} \times S^1$. On obtient ainsi un h-cobordisme TOP $(W_2 ; M_{\text{TOP}} \times S^1, N')$ dans $N \times S^1$ avec $N' \approx N$. Mais, si l'on forme le produit de $N \times S^1$ une fois encore avec $E1$, les variétés $(q')^{-1}(\ast) \times E1$ et $(q'')^{-1}(\ast) \times E1$ sont isotopes dans $N \times S^1 \times E1$; en plus, il existe un homéomorphisme filtré

$H : M_{\text{TOP}} \times S^1 \times E1 \rightarrow N \times E1$. En particulier, la torsion du h-cobordisme topologique $W_2 \times E1$ s'annule et la torsion du h-cobordisme topologique W_2 s'annule aussi. Par conséquent, il existe un homéomorphisme $h : M_{\text{TOP}} \times S^1 \rightarrow N$ tel que $h \times (\text{id}|E1)$ est isotope à H .

L'équivalence d'homotopie filtrée $F : M_{\text{TOP}} \times E1 \rightarrow M \times E1$ est définie par la composition des applications,

$$M_{\text{TOP}} \times E1 \xrightarrow{\text{incl}} M_{\text{TOP}} \times S^1 \times E1 \xrightarrow{H} N \times E1 \xrightarrow{g \times \text{id}} M \times S^1 \times E1 \xrightarrow{\text{proj}} M \times E1.$$

Alors, $(g \times (\text{id}|E1)) \circ H \approx F \times (\text{id}|S^1)$. L'application

$f : M_{\text{TOP}} \rightarrow M$ est définie de la même façon et $g \circ h \approx f \times (\text{id}|S^1)$;

f est une équivalence d'homotopie simple, car F l'est et que l'on a $F \approx f \times (\text{id}|E1)$ [KwS], ce qui termine la preuve du théorème 1.5 dans le cas où M est fermée.

Si M est une variété HML compacte avec un bord non-vide, on fait d'abord le scindement du bord ∂N et, ensuite, le scindement

de N qui s'identifie au bord à celui de ∂N déjà considéré, de la même façon que précédemment. On peut maintenant remarquer que, si une n -variété HML M compacte est une réunion $M_1 \cup M_2$ telle que $M_3 = M_1 \cap M_2$ est une $(n-1)$ -variété HML, alors $M_{TOP} = (M_1)_{TOP} \cup (M_2)_{TOP}$.

Le cas où M n'est pas compacte sera traité séparément dans la section suivante.

§4. Cas où M est non-compacte *)

Maintenant, soit M une n -variété HML non-compacte sans bord. D'après le théorème 1.4 on a une variété topologique N avec une s -décomposition et une équivalence d'homotopie filtrée $g : N \rightarrow M \times S^1$. De plus, on connaît déjà le scindement filtré $(M \times El)_{TOP}$ de $N \times El$. Cependant, pour effectuer le scindement de N , on va reconstruire N de la façon suivante: On prend une suite de sous-variétés compactes M_i de M telle que $M_i \subset \text{int } M_{i+1}$ et que $M = \cup M_i$. Alors, d'après la remarque du théorème 1.4, on a une suite de sous-variétés compactes N_i de N telle que $N_i \subset \text{int } N_{i+1}$ et $N = \cup N_i$. On peut supposer que $g_{i+1} : N_{i+1} \rightarrow M_{i+1} \times S^1$ est une extension de g_i et que $g = \cup g_i$. Si $\dim M \neq 4$ ou 5 , d'après ce qu'on a montré précédemment, on a par récurrence une suite de n -variétés TOP compactes $(M_i)_{TOP}$ telle que $(M_i)_{TOP} \subset \text{int}(M_{i+1})_{TOP}$ et que les homéomorphismes

*) Dans cette section on n'utilise plus les notations M_i, N_i pour les filtrations données par la décomposition en cellules duales.

$h_{i+1} : (M_{i+1})_{\text{TOP}} \times S^1 \rightarrow N_{i+1}$ et $H_{i+1} : (M_{i+1})_{\text{TOP}} \times S^1 \times E1 \rightarrow N_{i+1} \times E1$
 sont respectivement des extensions de h_i et de H_i . Alors, on définit
 une variété M_{TOP} par $M_{\text{TOP}} = \cup (M_i)_{\text{TOP}}$ et l'on a des homéomorphismes
 $h = \cup h_i : M_{\text{TOP}} \times S^1 \rightarrow N$ et $H = \cup H_i : M_{\text{TOP}} \times S^1 \times E1 \rightarrow N \times E1$.
 D'après la remarque du théorème 1.4, l'homéomorphisme H induit un
 homéomorphisme entre $M_{\text{TOP}} \times E1$ et $(M \times E1)_{\text{TOP}}$ et l'on peut supposer
 que H est un homéomorphisme filtré par rapport aux s -décompositions
 originales de $(M \times E1)_{\text{TOP}}$ et de N . Par construction, H est
 isotope à $h \times (\text{id}|E1)$. Les f et F sont définis de la même façon
 que dans le cas compact; F est une équivalence d'homotopie filtré et
 $F \simeq f \times (\text{id}|E1)$; par conséquent, f est une équivalence d'homotopie
 simple (infinie) [Si₃].

Si M est de dimension 5, on fait le scindement de $(\partial N_i) \times S^1$
 au lieu de ∂N_i ; il induit le scindement de $(\partial N_i) \times R^1$ qui est
 identifié avec un voisinage de ∂N_i dans N [Br]. Alors, par l'argument
 précédent, le problème se trouve être réduit à celui du scindement
 relatif à un voisinage-produit de l'infini; on peut supposer que M est
 réunion d'une variété HML compacte M_1 avec une autre variété HML
 $\partial M_1 \times [0, 1[$ et que la sous-variété topologique $\partial N_1 \times]0, 1[$ de
 N est déjà scindée. Or, on peut remarquer que les h -cobordismes
 relatifs à un voisinage produit de l'infini sont classifiés par
 $\text{Wh}(\pi_1(M))$; si l'on obtient un scindement L de N , la variété M_{TOP} et
 les homéomorphismes h et H peuvent être définis de la même façon
 que dans le cas compact. Maintenant, pour faire un scindement L , on
 prend d'abord une extension de l'application transversale

$N \rightarrow M \times S^1 \rightarrow S^1$ relative au voisinage de l'infini [KS,III] et l'on obtient une donnée de chirurgie topologique $L' \rightarrow M$ relative à ce voisinage de l'infini; On opère la même manière que dans le cas de la chirurgie relative au bord des variétés compactes. Comme $N \times (CP^2 \times CP^2 \# 4(S^3 \times S^5))$ admet un scindement relatif, l'obstruction pour la chirurgie correspondante s'annule. D'après la périodicité de l'obstruction pour la chirurgie [Wa], on peut effectuer celle-ci de $L' \rightarrow M$; Son résultat dans la variété ambiante N donne un scindement L de N , ce qui termine aussi la preuve dans le cas $\dim = 5$.

Le cas où M est non-compacte et avec un bord non-vide est aussi facile que le cas traité ici.

§5. Sur les subdivisions et les résolutions acycliques locales

Le théorème 1.6 va montrer que la construction de la variété TOP "sous-jacente" M_{TOP} ne dépend pas de la subdivision de M et de plus qu'elle conserve les isomorphismes. On commence par une définition:

DEFINITION. L'application propre PL surjective entre les variétés HML de même dimension $f : M_1 \rightarrow M_2$ est dite résolution acyclique locale, si $f(\partial M_1) = \partial M_2$, si chaque préimage $f^{-1}(x)$ est acyclique et si $f_* : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ est un isomorphisme.

THEOREME 1.6. Une résolution acyclique locale de n-variété HML, $f : M_1 \rightarrow M_2$, induit un homéomorphisme $h : (M_1)_{TOP} \rightarrow (M_2)_{TOP}$.

Preuve. On subdivise les variétés HML de sorte que f est une application simpliciale de M_1' sur M_2' . Soit $M(f)$ le cylindre de l'application. Alors, il existe une structure K de complexe simplicial sur $M_1 \times [-1, 0] \cup M(f) \cup M_2 \times [0, 1]$ telle que $K|_{M_i \times 0} = M_i'$ et $K|_{M_i \times (-1)^i} = M_i$ pour $i = 1, 2$. Le complexe simplicial K est lui-même une variété HML, car on peut facilement montrer que $H_*(K, K - pt; Z)$ est $\cong H_*(R^{n+1}, R^{n+1} - pt; Z)$ ou nul pour tout point de K . De plus, K est un s -cobordisme entre M_1 et M_2 , parce que l'application induite sur les revêtements universels est aussi une résolution acyclique. Par conséquent, il suffira d'employer le théorème suivant:

THEOREME 1.6.a. Soit $(W; M_1, M_2)$ un s -cobordisme HML. On suppose que $\dim M_1 \geq 5$ et en outre que, si $\partial M_1 \neq \emptyset$ et $\dim M_1 = 5$, ∂M_1 est une variété PL et $W - \text{int}(M_1 \cup M_2)$ est un cobordisme produit PL. Alors, $(M_1)_{\text{TOP}}$ est homéomorphe à $(M_2)_{\text{TOP}}$.

Preuve. En appliquant le théorème 1.5 à la variété HML W , on a un s -cobordisme TOP entre $(M_1)_{\text{TOP}}$ et $(M_2)_{\text{TOP}}$. Si $\partial M_1 \neq \emptyset$, on peut supposer qu'il est déjà un s -cobordisme TOP relatif d'après le théorème du s -cobordisme dans le cas où $\dim M \geq 6$; si $\dim M_1 = 5$, il en est de même d'après notre hypothèse initiale. Donc, le résultat découle immédiatement du théorème du s -cobordisme TOP de dimension ≥ 6 , ce qui termine aussi la démonstration du théorème 1.6.

REMARQUE. Pour montrer le théorème 1.6, on n'a pas besoin du théorème du s-cobordisme pour les variétés non-compactes, car le s-cobordisme HML donné par la résolution acyclique locale est une limite des s-cobordismes de variétés HML compactes.

§6. Structure produit

On va montrer la naturalité de notre construction pour le produit cartésien.

PROPOSITION 1.7. Soit M_1 et M_2 deux variétés HML. Supposons,
pour $i = 1, 2$, ou bien que $\dim M_i \neq 4$ et $\dim \partial M_i \neq 4$, ou bien que M_i
est une variété PL et $(M_i)_{TOP}$ représente M_i . Alors,

$$(M_1 \times M_2)_{TOP} \approx (M_1)_{TOP} \times (M_2)_{TOP}$$

Preuve. D'abord, en vertu de la remarque suivant le théorème 1.4, on observe que:

Si une n-variété HML M est reconstruite par une collection des sous n-variétés de telle façon que, dans toutes les étapes d'attachement, l'intersection et la réunion soient des variétés HML, alors, N est reconstruite par la collection des sous (n+1)-variétés TOP par le même processus.

Une telle filtration est donnée par la s-décomposition en anses, qui est exposée dans la preuve du théorème 1.4.a. (Grâce au théorème 1.6, le fait que les B_i soient des sous-variétés de la seconde

subdivision barycentrique de M n'intervient pas.)

Une s -décomposition en anses de $M = M_1 \times M_2$ est définie par le produit des s -décompositions $X = X_1 \times X_2$, i.e.:

$B_i(X) = \cup B_r(X_1) \times B_{i-r}(X_2)$, et $\partial_-(B_r(X_1) \times B_{i-r}(X_2)) = \partial_{-r}(X_1) \times B_{i-r}(X_2) \cup B_r(X_1) \times \partial_{-i+r}(X_2)$; les $B_i(X)$ sont évidemment sous-variétés d'une structure de complexe simplicial de $M_1 \times M_2$.

Par conséquent il faut montrer que, de façon canonique,

$N \times S^1 \approx N_1 \times N_2$. Mais, c'est immédiat parce que la filtration $(X \times S^1) \times S^1$ est la même que celle de $(X_1 \times S^1) \times (X_2 \times S^1)$. On en obtient $(M_1 \times M_2)_{TOP} \approx (M_1)_{TOP} \times (M_2)_{TOP}$, après deux scindements canoniques par rapport aux facteurs S^1 .

c. q. f. d.

§7. Commentaire sur le cas où M est localement homéomorphe à l'espace euclidien

Dans cette section on va montrer:

THEOREME 1.8. Soit M une n -variété HML. Supposons que M elle-même possède une structure de variété TOP. Alors, $M \times S^1$ est homéomorphe à N , et si $n \neq 4$ (et $n \neq 5$ dans le cas où ∂M n'est pas vide), M est homéomorphe à M_{TOP} .

Preuve. Puisque l'étoile d'un $(n-p)$ -simplexe σ est le "joint" $\sigma * Lk(\sigma)$, un voisinage ouvert de l'intérieur du simplexe σ est homéomorphe PL à $\text{int } CLk(\sigma) \times R^{n-p}$ où $\text{int } C$ désigne le cône ouvert; d'après notre hypothèse, il est localement euclidien. Alors, en examinant le voisinage de la singularité, on remarque sans peine que

$\text{CLk}(\sigma) \times \mathbb{R}^{n-p+1}$, et donc $\text{CLk}(\sigma) \times T^{n-p+1}$, sont localement euclidiens.

Maintenant, on considère le produit des fausses-cellules duales rondes dans N avec T^{n-1} ; on reconstruit $N \times T^{n-1}$, en remplaçant S^1 par T^1 ; il est homéomorphe filtré à $M \times T^n$ par rapport aux filtrations données par les produits {fausses-cellules duales rondes de N } $\times T^{n-1}$ et celles de {cellules duales de M } $\times T^n$. Supposons maintenant que M est compacte. Alors, après avoir fait $(n-1)$ -fois des scindements de la même façon que dans la preuve du théorème 1.5, on obtient un homéomorphisme de N sur $M \times S^1$; Un scindement de plus nous donne un homéomorphisme de M_{TOP} sur M . Pour appliquer le théorème du s -cobordisme TOP, il suffit de remarquer que $M \times T^i$ est une sous-variété TOP plate dans $M \times T^{i+1}$ d'après notre hypothèse.

Dans le cas où M n'est pas compacte, on peut effectuer les scindements en se limitant toutefois à opérer au niveau des variétés compactes dont M est la limite inductive et l'on atteint le résultat par passage à la limite.

CHAPITRE 2

Construction de sous-variétés topologiques et de voisinages
topologiques en codimension 3 et plus

§. Introduction

Le but de ce chapitre est de construire pour $r \geq 3$ une flèche canonique $\beta : \text{BHML}_r \rightarrow \text{BTOP}_r$ de l'espace classifiant des r -fibrés H_* -cobordismes $\text{HML} [\text{MrM}]$ à celui des r -voisinages $\text{TOP} [\text{RS}_3]$. En particulier, β induit un homomorphisme : $\pi_3(\text{HML}_r/\widetilde{\text{PL}}_r) \rightarrow \pi_3(\text{TOP}_r/\widetilde{\text{PL}}_r)$ qui sera identifié avec l'homomorphisme de Kervaire-Milnor-Rohlin $\alpha : H^3 \rightarrow Z_2$. Pour cela on généralise les résultats du chapitre 1 à une paire formée d'une $(n+r)$ -variété $\text{HML } Q$ et de sa sous-variété $\text{HML } M$ de codimension $r \geq 3$. Notre démonstration dépend d'un théorème du type de celui de Casson-Sullivan-Wall, mais en TOP , qui sera établi à partir du théorème du voisinage TOP régulier.

Le §1 est un passage en des résultats concernant les voisinages TOP . Moyennant une restriction de dimension, on construira un plongement TOP localement plat $M_{\text{TOP}} \subset Q_{\text{TOP}}$ dans le §2. Après avoir défini un voisinage TOP $\beta(E)$ pour chaque voisinage HML dérivé second E , la construction de β général dans le §3 est un travail de routine. On a inséré, entre le §2 et §3, un §2a nécessaire pour la construction de M_{TOP} dans un espace euclidien. Le §4 concernera la structure stable et la structure produit. Pour finir, on discutera dans le §5 la canonicité de β pour les fibrés tangentiels instables.

§1. Rappels sur les voisinages topologiques

On résume dans cette section des résultats de [RS₃]. Une paire de r -microfibrés TOP est une paire $\varepsilon^n \subset \zeta^{n+r}$ où ε^n désigne le microfibré TOP trivial de rang n . Deux paires sont équivalentes si, à l'adjonction éventuelle près de fibrés triviaux aux deux éléments des paires considérées, elles sont isomorphes, l'isomorphisme restreint aux sous-fibrés triviaux étant l'identité; $\underline{\underline{BTOP}}_r$ est son espace classifiant. D'autre part, un r -voisinage TOP de V est un plongement TOP localement plat $i : V \rightarrow N$ dans une variété sans bord. Deux paires, (i, N) et (i', N') , sont équivalentes s'il y a un homéomorphisme h de N vers N' défini sur un voisinage de $i(V)$ tel que $h \circ i = i'$. $N_r(V)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence, "germes de r -voisinages TOP" de V .

Soit (i, N) un r -voisinage TOP de V . On choisit un microfibré normal stable ν de V avec une trivialisation fixée de $\tau(V) \oplus \nu$ et l'on définit une application $c(i, N) : V \rightarrow \underline{\underline{BTOP}}_r$ par l'application classifiant d'une paire de r -microfibrés $(i^*\tau(N) \oplus \nu, \tau(V) \oplus \nu)$.

THEOREME (Rourke-Sanderson [RS₃]). Soit V une variété TOP.

Alors, la flèche

$$c : N_r(V) \rightarrow [V, \underline{\underline{BTOP}}_r]$$

est définie. C'est une bijection si $n + r \geq 6$ ou bien si $n + r = 5$ et $\partial V = \emptyset$.

REMARQUE. Il est immédiat que la flèche naturelle $\widetilde{B\text{TOP}}_r \rightarrow \underline{B\text{TOP}}_r$ ($r \geq 3$) est une équivalence d'homotopie, puisque: $\widetilde{PL}_r \xrightarrow{\cong} \underline{PL}_r$ ($r \geq 1$), $\underline{\text{TOP}}_r / \underline{PL}_r \xrightarrow{\cong} \text{TOP} / \text{PL}$ ($r \geq 3$) et $\widetilde{\text{TOP}}_r / \widetilde{PL}_r \xrightarrow{\cong} \text{TOP} / \text{PL}$ ($r \geq 3$).

Les deux premiers résultats sont établis dans [RS₃] et le dernier se démontre facilement, par exemple en utilisant la méthode de [MtM].

A partir de maintenant, moyennant une restriction de dimension, on identifiera un r -voisinage TOP avec l'application continue d'une variété topologique soit vers $\underline{B\text{TOP}}_r$ soit vers $\widetilde{B\text{TOP}}_r$; la classe d'équivalence du voisinage TOP ne dépend que de la classe de concordance du plongement TOP localement plat.

§2. Construction de sous-variétés topologiques de codimension 3 et plus

Soit M une sous-variété HML compacte dans une variété HML compacte Q et soit E son voisinage dérivé second. Dans le chapitre 1, on a montré qu'il existe un plongement canonique $E_{\text{TOP}} \subset Q_{\text{TOP}}$. Or, on a une équivalence canonique d'homotopie simple $f : M_{\text{TOP}} \rightarrow E_{\text{TOP}}$. Alors, pour obtenir un plongement TOP localement plat $M_{\text{TOP}} \rightarrow Q_{\text{TOP}}$ de façon unique à concordance près, il suffit alors d'appliquer le théorème suivant, qui est une traduction en TOP du théorème de Casson-Sullivan-Wall [Wa, p.120]:

THEOREME 2.1. Soient V^n un $(m+1)$ -ade TOP compact, Q^{n+r} un $(m+2)$ -ade TOP compact, $r \geq 3$ et $f : V \rightarrow \delta_{m+1}Q$ une équivalence d'homotopie dont la restriction $\partial_m V \rightarrow \partial_m \delta_{m+1}Q$ est un plongement TOP localement plat. Alors, f est homotope relatif $\partial_m V$ à un plongement TOP localement plat.

La preuve du théorème 2.1 dépend du concept de voisinage topologique régulier.

THEOREME (R. D. Edwards [Ed₁]). Soit $V^n \subset Q^q$ un plongement TOP localement plat d'une n-variété TOP fermée dans une q-variété TOP fermée. Si $q = 5$ et $n \leq 2$, alors, il existe un ~~microfibré~~ normal avec ^{en} fibres de boules fermées. Si $q \neq 4$ et $q \neq 5$, alors, il existe de façon unique un voisinage TOP régulier W de V ; i.e.: W est une sous-variété TOP compacte en codimension 0, et il existe une rétraction ^{*)} $r : W \rightarrow V$ telle que la paire formée de l'objet et du cylindre de la rétraction, $V \subset M(r)$, soit homéomorphe à la paire de variétés TOP, $V \subset W$.

*) Dans la preuve du théorème 2.1, on ne utilise que l'existence d'une équivalence d'homotopie (simple) r . Comme le manuscrit [Ed₁] n'est pas encore paru, on esquisse la preuve de cette version faible en trouvant un bord pour un voisinage ouvert régulier W' de V défini par [Si₆]. En effet, si X est l'espace total du fibré en boules du fibré ξ TOP normal stable de V , X admet une structure d'une variété PL et ξ est étendable sur W' ; son espace total, noté $X_{W'} = E(\xi|W')$, est alors homéomorphe à un fibré en boules ouvertes du fibré η bloc TOP sur X représentant la classe du voisinage topologique $X \subset X_{W'}$. Comme le bout de W' possède le même type d'homotopie que $K \times R^1$ où K est l'espace total du fibré en sphères du fibré η admettant une structure d'un complexe simplicial fini, on obtient un bord $\delta W'$ tel que $\delta W' \times R^1$ est homéomorphe au bout de W' d'après le théorème de Siebenmann [Si₁]. On définit W par la variété bordée par un bord et l'on voit que l'inclusion $V \hookrightarrow W$ est une équivalence d'homotopie simple car $X \hookrightarrow X_{W'} = E(\xi|W)$ l'est.

On va esquisser la preuve du théorème 2.1 dans le cas où V est fermée; le cas bordé est traité de la même façon, car le théorème précédant de Edwards est également valable dans le cas relatif. On remarque l'absence du théorème de la transversalité en voisinages TOP réguliers dans notre démonstration.

En effet, si $n \leq 3$, le résultat est immédiat, puisque le théorème 2.1 existe dans le cas PL. Si $n + 3 \geq 7$, on peut supposer que l'homomorphisme naturel $\pi_1(\partial Q) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme; sinon, on prend une décomposition en anses de Q relative à ∂Q , qui ne contient aucune 0-anse [KS, III]. On considère le coefficient $Z[\pi_1(Q)]$ dans l'homologie. Comme $H_1(Q, \partial Q) = 0$, on peut choisir une section $s : H_1(Q_{(1)}, \partial Q) \rightarrow H_2(Q_{(2)}, Q_{(1)})$ telle que $\partial \circ s = \text{id}$. On ajoute m paires standard de 2-anses et 3-anses. Désignons par respectivement ξ_1, \dots, ξ_m et x_1, \dots, x_m les classes représentées par les 1-anses et les 2-anses ajoutées. Après modification appropriée des 2-anses, l'image de la section s' , définie par $s'(\xi_i) = x_i + s(\xi_i)$ pour $i = 1, \dots, m$, est engendrée par les 2-anses dont la réunion avec $Q_{(1)}$ s'écrit $Q_{(2')}$. Soit $Q_2 = Q - \text{int } Q_{(2')}$. Alors, Q_2 ne contient aucune 1-anse et l'inclusion $Q_2 \rightarrow Q$ est une équivalence d'homotopie car $\pi_1(Q_2) \cong \pi_1(Q)$ et $H_i(Q_2) \cong H_i(Q)$ pour tout i . Comme $H_2(Q_2, \partial Q_2) = 0$, on peut appliquer le même processus aux 3-anses de Q_2 et l'on obtient une sous-variété Q_3 de codimension 0 de Q telle que l'inclusion $Q_3 \rightarrow Q$ est une équivalence d'homotopie et que Q_3 ne contient pas d'anses d'indices ≤ 2 et donc $\pi_1(\partial Q_3) \rightarrow \pi_1(Q_3)$ est un isomorphisme.

Par conséquent, on peut supposer que $\partial Q \rightarrow Q$ est à homotopie près un fibré sphérique ξ . Comme $\xi \oplus f^* \nu(Q)$ est un fibré sphérique de

Spivak [Sp] sur V , ξ possède une structure de voisinage TOP stable $v(V) - f^*v(Q)$ et, d'après la stabilité de G_r/\underline{TOP}_r , celle de r -voisinage TOP. Soit $W \supset V$ un r -voisinage TOP régulier qui représente cette classe de ξ . L'équivalence des espaces totaux des fibrés sphériques, $\partial W \rightarrow \partial Q$ est étendable en une équivalence d'homotopie $g : W \rightarrow Q$ et, par construction, c'est une application normale TOP nul-cobordante. Soit $(W_1 ; \partial W, B)$ un h -cobordisme TOP dont la torsion $\tau(W_1, \partial W)$ égale $\tau(g)$. Alors, l'extension naturelle $g_1 : W \cup W_1 \rightarrow Q$ de g est une équivalence d'homotopie simple, parce que la torsion de l'inverse homotopique de g_1 est égale à $-\tau(g) + \tau(W \cup W_1, W) = -\tau(g) + \tau(W_1, \partial W) = 0$. En plus, $L_{q+1}(\pi_1(\partial Q) \rightarrow \pi_1(Q)) = 0$, car $\pi_1(\partial Q) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme. Par conséquent, compte tenu de la suite exacte du type de Sullivan-Wall associée à la variété à bord Q , $g_1 : W \cup W_1 \rightarrow Q$ est homotope à un homéomorphisme. Or, le plongement $V \subset W \subset W \cup W_1 \xrightarrow{\cong} Q$ appartient à la classe d'homotopie donnée originalement, de qui termine la preuve du théorème 2.1 dans le cas où V est une variété TOP fermée.

On peut déduire ainsi, du théorème 2.1, le théorème suivant dans le cas où V est une variété TOP fermée et $\dim Q \geq 6$.

THEOREME 2.2. Soit $M \subset Q$ un plongement propre d'une n -variété HML dans une $(n+r)$ -variété HML. On suppose $r \geq 3$ et que les dimensions des variétés $M, \partial M, Q$ et ∂Q ne sont pas égales à 4. Alors, il existe de façon canonique et unique à concordance près un plongement TOP localement plat de M_{TOP} dans Q_{TOP} .

Ce théorème est d'ailleurs vrai en général:

(1) Si $n + r = 5$, M est une variété PL car $\dim M \leq 2$. En plus, comme $\pi_i(HML_r, \tilde{PL}_r) = 0$ pour $i \leq 2$, on a une équivalence de fibrés

H_* -cobordismes HML entre le voisinage dérivé second E et un fibré bloc PL \tilde{E} sur M . On peut réaliser l'équivalence par un s-cobordisme HML W . Soit \tilde{Q} la variété HML définie par $\partial(Q \times I \cup W) - Q$. Alors, \tilde{Q}_{TOP} se construit comme réunion de \tilde{E} et $(\tilde{Q} - \tilde{E})_{TOP}$ et, donc, contient M . Or, \tilde{Q}_{TOP} est s-cobordant, et par conséquent, est aussi homéomorphe à Q_{TOP} .

(2) Dans le cas à bord, on plonge d'abord $(\partial M)_{TOP}$ dans $(\partial_1 E)_{TOP}$ et, ensuite, considère le plongement relatif au bord.

(3) Le cas non-compact se démontre en utilisant une argumentation analogue à celle qui est présentée dans l'établissement du théorème 1.5.

DEFINITION 2.3. Pour le voisinage dérivé second E de M dans Q , $\beta(E) : M_{TOP} \rightarrow \underline{B}_{TOP}_r$ est défini comme la classe de concordance du plongement TOP localement plat $M_{TOP} \rightarrow Q_{TOP}$ dont l'existence et l'unicité a été établi dans le théorème 2.2.

§2a. Construction de M_{TOP} dans l'espace euclidien

Comme sous-produit du §2, on va obtenir une construction d'une variété M_{TOP} approchant une variété M dans l'espace euclidien.

COROLLAIRE 2.4. Soit une variété HML M plongée PL dans l'espace euclidien avec la codimension ≥ 3 . Soit V un voisinage ouvert de M . Alors, M_{TOP} peut être plongée TOP localement platement dans V .

En effet, d'après le théorème 1.8, V_{TOP} s'identifie avec V et le corollaire est immédiat par le théorème 2.2.

§3. La flèche $\beta : BHML_r \rightarrow \underline{B}_{TOP}_r$ ($r \geq 3$)

On va définir pour $r \geq 3$ une flèche canonique de l'espace

classifiant des r -fibrés H_* -cobordisme (bloc) HML vers celui des r -voisinages TOP, $\beta : \text{BHML}_r \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r$.

Soit E un fibré H_* -cobordisme (bloc) HML avec fibres D^r sur un complexe simplicial fini M qui a une structure de variété HML (fibré "bloc" signifie: fibré sur un complexe simplicial). Par la note de [MrM, p.90], on a un boule-fibré H_* -cobordisme équivalent à E , qui possède M comme section de zéro (Si E est un fibré H_* -cobordisme sur un complexe des cellules acycliques M , la section n'est qu'équivalente par cellules à M .) Par conséquent, on peut supposer que $E \supset M$. En plus, E est une variété HML compacte d'après la proposition 3.4 de [MrM]. En outre, d'après la section précédente, $\beta(E) : M_{\text{TOP}} \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r$ est bien définie.

LEMME 2.5. $\pi_i(\text{BHML}_r)$ est dénombrable pour $i \geq 1$ et $r \geq 3$.

Preuve. On sait que $\pi_i(\tilde{\text{PL}}_r)$ est dénombrable et que $\text{HML}_r/\tilde{\text{PL}}_r \simeq K(H^3, 3)$ [MtM]. Par conséquent, il suffit de montrer que H^3 est dénombrable. Or, ceci est clair, parce qu'il n'y a que les classes dénombrables de variétés combinatoires à équivalence PL près.

c. q. f. d.

A l'aide de ce lemme on peut avoir une suite de sous-polyèdres de BHML_r ,

$$T_1 \subset \dots \subset T_k \subset T_{k+1} \subset \dots \subset \text{BHML}_r$$

tel que $\text{BHML}_r = \cup T_k$. En prenant un plongement T_k dans R^n , pour n assez grand, on a une variété PL compacte avec un bord et avec un

fibré PL tangentiel trivial ayant le même type d'homotopie simple que T_k . On peut supposer que T_k est une variété PL, $T_k \subset T_{k+1}$ et $BHML_r \cong \cup T_k$. Soit γ_r un r -boule-fibré H_* -cobordisme (bloc) HML universel. E_k désigne l'espace total du r -fibré $\gamma_r|_{T_k}$ induit sur T_k . La paire de variétés HML $E_k \supset T_k$ détermine un r -voisinage TOP $\beta(E_k) : T_k \rightarrow \underline{BTOP}_r$ par la définition 2.3. On peut supposer que $\beta(E_{k+1})$ est une extension de $\beta(E_k)$ et l'on obtient une flèche $\beta : BHML_r \rightarrow \underline{BTOP}_r$ pour $r \geq 3$, définie à homotopie ^{*}) près.

THEOREME 2.6. Pour $r \geq 3$, il existe une flèche canonique,

$$\beta : BHML_r \rightarrow \underline{BTOP}_r$$

telle que l'application induite $\pi_3(HML_r/\widetilde{PL}_r) \rightarrow \pi_3(\underline{TOP}_r/\widetilde{PL}_r)$ s'identifie avec $\alpha : H^3 \rightarrow Z_2$. En particulier, on a une fibration homotopique,

$$K(\ker \alpha, 4) \rightarrow BHML_r \rightarrow \underline{BTOP}_r.$$

Preuve. D'après notre définition de β , il est clair que $\beta \circ PH \simeq PT$ pour les flèches naturelles $PH : B\widetilde{PL}_r \rightarrow BHML_r$ et $PT : B\widetilde{PL}_r \rightarrow \underline{BTOP}_r$. La définition 2.3 de $\beta(E)$ pour un fibré H_* -cobordisme HML, $E : M \rightarrow BHML_r$, est compatible avec la composition de $(\beta \circ E) : M \rightarrow \underline{BTOP}_r$ au sens de notre nouvelle définition et de l'équivalence naturelle d'homotopie simple, $f : M_{TOP} \rightarrow M$.

Soit H^3 une 3-sphère d'homologie PL et soit $(W ; H^3 \times S^{r-1}, S^3 \times S^{r-1})$ un H_* -cobordisme orienté PL obtenu

^{*}) Pour éviter les fantômes, on peut utiliser le r -fibré h-cobordisme HML universel dont les trivialisations locales sont transformées en h-cobordismes TOP, et par conséquent, en homéomorphismes, ce qui donne $\beta' : BhML_r \rightarrow \widetilde{BTOP}_r$ pour $r \geq 3$ (Cf. Théorème 3.B).

comme trace de la chirurgie pour tuer les éléments de $\pi_1(H^3 \times S^{r-1})$. Alors, $E = CH^3 \times S^{r-1} \cup W$ représente un élément de $\pi_3(HML_r/\widetilde{PL}_r)$ considéré comme un sphère-fibré H_* -cobordisme HML sur $\Delta^3 \times I$ avec la condition qu'il se réduit à un fibré bloc PL sur $\partial\Delta^3 \times I$ et à un fibré produit sur $\Delta^3 \times 0 \cup \Delta^3 \times 1 \cup \Delta^2 \times I$ avec $I = [0, 1]$. L'isomorphisme naturel $\pi_3(HML_r/\widetilde{PL}_r) \rightarrow H^3$ est défini par $E \rightarrow o(E, \partial E) \in H^4(E, \partial E; H^3) \cong H^3$, i.e.: $E \rightarrow \{H^3\} \in H^3$.

D'autre part, la variété $TOP E_{TOP}$ est considérée comme un sphère-fibré bloc TOP sur $\Delta^3 \times I$, avec une condition analogue à celle de E; elle représente un élément de $\pi_3(\widetilde{TOP}_r/\widetilde{PL}_r)$. L'isomorphisme: $\pi_3(\widetilde{TOP}_r/\widetilde{PL}_r) \rightarrow Z_2$ l'envoie sur la classe d'obstruction $k(E_{TOP}, \partial E_{TOP}) \in H^4(E_{TOP}, \partial E_{TOP}; Z_2) \cong Z_2$, qui s'identifie avec $\alpha(H^3)$ d'après le théorème 1.5.b.

Par conséquent, β induit une flèche: $\pi_3(HML_r/\widetilde{PL}_r) \rightarrow \pi_3(\widetilde{TOP}_r/\widetilde{PL}_r)$, qui s'identifie avec $\alpha: H^3 \rightarrow Z_2$; d'où le résultat, par l'isomorphisme naturel de $\pi_3(\widetilde{TOP}_r/\widetilde{PL}_r)$ sur $\pi_3(\underline{TOP}_r/\widetilde{PL}_r)$.

REMARQUE. Si $n \geq 5$, $\beta(v(M)) = v(M_{TOP})$ pour toute n -variété HML sans bord M. Ici, v représente le fibré normal stable HML ou TOP.

Cette remarque est immédiate d'après la définition de v et de β et le théorème 1.8; $M \hookrightarrow R^q$ donne $M_{TOP} \hookrightarrow R^q$.

§4. Structure stable et produit

L'espace BHML et sa structure d'H-espace faible sont définis dans [Mau₂]. On va montrer:

PROPOSITION 2.7. Soient $s : \text{BHML}_n \rightarrow \text{BHML}_{n+1}$ et $s : \text{BTOP}_n \rightarrow \text{BTOP}_{n+1}$ des suspensions. Alors, $\beta \circ s \approx s \circ \beta.$ De plus, l'application induite stable $\beta : \text{BHML} \rightarrow \text{BTOP}$ est un homomorphisme des H-espaces faibles.

Preuve. On observe d'abord, que l'énoncé de la proposition 1.7 est aussi valable pour deux paires de variétés HML compactes $M \subset Q$ et $M' \subset Q'$; on a, en effet: $((M \times M')_{\text{TOP}} \subset (Q \times Q')_{\text{TOP}})$ est homéomorphe à $(M_{\text{TOP}} \times M'_{\text{TOP}} \subset Q_{\text{TOP}} \times Q'_{\text{TOP}})$. Par conséquent, la première assertion est immédiate, car la suspension pour les boules-fibrés revient à faire le produit avec l'intervalle I . La deuxième assertion est immédiate d'après la définition; la loi du H-espace faible $\mu : \text{BHML}_r \times \text{BHML}_s \rightarrow \text{BHML}_{r+s}$ est définie comme la limite des fibrés sur T_k induit par $E(\gamma_r | T_k) \times E(\gamma_s | T_k)$ en reprenant les notation de la section précédente.

c. q. f. d.

§5. Sur les fibrés tangentiels instables

Comme un autre corollaire du théorème 2.1, on montrera:

THEOREME 2.8. Soit M une n -variété HML sans bord et $n \neq 4.$

Alors,

$$\beta(f^*\tau(M)) = \tau(M_{\text{TOP}}),$$

où $f : M_{\text{TOP}} \rightarrow M$ est l'équivalence canonique d'homotopie simple, et τ représente les fibrés tangentiels instables HML ou TOP.

Preuve. $\tau(M)$ est défini par le fibré H_* -cobordisme HML normal de la diagonale $\Delta(M)$ de $M \times M$. On peut supposer $n \geq 5$. Alors, l'intérieur d'un voisinage TOP régulier W de la diagonale $\Delta(M_{\text{TOP}})$ de $M_{\text{TOP}} \times M_{\text{TOP}}$ peut être considéré comme un représentant d'un voisinage topologique $\tau(M_{\text{TOP}})$. Comme dans la preuve du théorème 1.7, on peut choisir un plongement TOP localement plat $g : \Delta(M)_{\text{TOP}} \rightarrow M_{\text{TOP}} \times M_{\text{TOP}}$ avec un voisinage TOP équivalent à $\beta(\tau(M))$ de telle façon que $g(\Delta(M)_{\text{TOP}}) \subset \text{int } W$ et que l'inclusion soit une équivalence d'homotopie, pourvu que l'on prenne une subdivision suffisamment fine; le résultat découle alors du théorème 2.1.

CHAPITRE 3

Chirurgie sur les variétés HML compactes de dimensions ≥ 5

§. Introduction

On va maintenant exposer la théorie de la chirurgie dans le sens de Wall [Wa] dans la catégorie HML. L'obstruction à la chirurgie est, par définition, celle de la situation TOP "sous-jacente" dans le sens des chapitres 1 et 2. En n'utilisant que le théorème de la transversalité en micro-fibré PL produit dû à Williamson [Wi], on établira un lemme-clef qui réduit simplement la théorie de la chirurgie HML à celle de la chirurgie TOP. La chirurgie DIFF et PL de Wall [Wa] s'applique entièrement au cas TOP en utilisant les résultats de Kirby et Siebenmann [KS, III].

En étudiant la position générale en HML, Maunder [Mau₄] donne une théorie de la chirurgie HML qui est dans certain sens restrictive; la dimension doit être ≥ 7 et le cas relatif n'est pas assez général. Matsui [Mtsi] et Quinn [Q] ont exposé les autres preuves de la théorie de la chirurgie HML au cas simplement connexe.

Dans le §1, on présente le résultat. Le §2 est consacré à sa démonstration. A la fin du §2, on s'intéresse au cas de $(n+1)$ -ade de variétés HML compactes pour compléter la théorie. Dans le §3 on présente la suite exacte du type de Sullivan-Wall dans la théorie de la chirurgie HML.

On ajoutera deux appendices à ce chapitre: dans le §4, on établira une égalité entre deux types d'obstruction d'une variété HML M celle pour obtenir une résolution PL acyclique en variété PL, et celle pour une réduction en PL du groupe structural du fibré H_* -cobordisme HML normal stable; elle sera utilisée dans le §2 et également dans les §1 et 3 du chapitre 4. Dans le §5, on discutera brièvement les fibrés h-cobordismes HML.

§1. Chirurgie sur les variétés HML compactes

Soient X un complexe de Poincaré fini, ξ un fibré H_* -cobordisme bloc HML sur X ("bloc" signifie fibré sur un complex simplicial), M une n -variété HML fermée, $\phi : M \rightarrow X$ une application de degré 1 et F un morphisme de fibrés H_* -cobordismes blocs HML: $\tau(M) \rightarrow \xi$ sur ϕ . Soit x la classe de cobordisme normal HML du triple (M, ϕ, F) ; par définition, (M, ϕ, F) est équivalent à (M', ϕ', F') , s'il existe un triple (W, ϕ_W, F_W) tel que W est un cobordisme entre M et M' , que $\phi_W : W \rightarrow X$ est une extension de ϕ et ϕ' , et que le morphisme F_W est une extension de F et F' . Supposons $n \geq 5$. Alors, avec ces données il existe de façon unique une n -variété TOP M_{TOP} fermée et une équivalence d'homotopie simple $f : M_{TOP} \rightarrow M$ telle que $\tau(M_{TOP}) = \beta(f^*\tau(M))$, où τ désigne le fibré tangentiel stable HML ou TOP, ceci par le théorèmes 1.5 et la remarque suivant le
(Cf. Théorème 2.8.)
théorème 2.6.] On considère $\beta(\xi)$ comme un fibré TOP stable parce que $\underline{BTOP} \simeq BTOP$ naturellement [RS₃]. Soit $\phi_{TOP} = f \circ \phi$ et soit

F_{TOP} un morphisme induit des fibrés TOP: $\tau(M_{TOP}) \rightarrow \beta(\xi)$ sur ϕ_{TOP} .

On a ainsi une classe x_{TOP} de cobordisme normal TOP du triple

$(M_{TOP}, \phi_{TOP}, F_{TOP})$ sur la paire formée du complexe de Poincaré

fini X et de $\beta(\xi)$. La théorie de la chirurgie dans la catégorie

des variétés TOP compactes définit une classe d'obstruction $\theta(x_{TOP})$

dans le groupe de Wall $L_n(\pi_1(X), w_1(X))$. On définit donc $\theta(x)$

par $\theta(x_{TOP})$; si $n \leq 4$, $\theta(x)$ est défini par la périodicité, c'est

à dire, par $\theta(x) = \theta(x \times CP^2)$.

THEOREME 3.1. L'obstruction $\theta(x)$ ainsi définie ne dépend que de la

classe de cobordisme normal HML x . Cette obstruction s'annule si

x contient une équivalence d'homotopie simple. Inversement, si

$\theta(x) = 0$ et $n \geq 5$, alors x admet une représentation (M_0, ϕ_0, F_0)

avec ϕ_0 une équivalence d'homotopie simple.

θ ne dépend que de la classe de cobordisme normal HML de (M, ϕ, F) , parce qu'un cobordisme normal HML induit un cobordisme normal TOP et que θ est un invariant de la classe de cobordisme normal TOP. Si ϕ est une équivalence d'homotopie simple, ϕ_{TOP} l'est également; d'où $\theta(x) = 0$. Par conséquent, il faut montrer que, si $\theta(x) = 0$, on peut effectuer la chirurgie appropriée.

On peut remarquer ici que le cas où M est compacte à bord est traité de la même façon, si $\phi|_{\partial M} : \partial M \rightarrow \partial X$ est une équivalence d'homotopie simple et si l'on ne considère que la chirurgie où $\phi|_{\partial M}$ est fixé.

§2. Preuve du théorème 3.1

Soient (X, ν) et (M, ϕ, F) les données dans le §1. Soit $\alpha \in \pi_{r+1}(\phi)$ et $r \leq 2$. Les objets F_{TOP} et $\alpha_{\text{TOP}} \in \pi_{r+1}(\phi_{\text{TOP}})$ induits par F et α dans la situation TOP "sous-jacente" déterminent une classe d'homotopie régulière d'immersions TOP: $S^r \times D^{n-r} \rightarrow M_{\text{TOP}}$ et l'on peut faire une chirurgie TOP associée à α_{TOP} relativement à tout plongement TOP: $S^r \times D^{n-r} \rightarrow M_{\text{TOP}}$ appartenant à cette classe.

LEMME-CLEF 3.2. Soit $\alpha \in \pi_{r+1}(\phi)$, où $r \leq n - 2$ et $n \geq 5$. Supposons qu'il existe un plongement TOP $j : S^r \times D^{n-r} \rightarrow M_{\text{TOP}}$ appartenant à la classe d'homotopie régulière d'immersions TOP définie par F_{TOP} et α_{TOP} . Alors, il existe un s-cobordisme HML W entre M et \bar{M} et une application $\Psi : W \rightarrow M_{\text{TOP}}$ où l'on a les propriétés suivantes:

- (i) L'application $\psi = \Psi|_M : M \rightarrow M_{\text{TOP}}$ est un inverse homotopique de l'équivalence d'homotopie simple canonique $f : M_{\text{TOP}} \rightarrow M$,
- (ii) \bar{M} contient une sous-variété PL P contenant $S^r \times D^{n-r}$ en sens PL,
- (iii) $\Psi|_P : P \rightarrow M_{\text{TOP}}$ est un plongement TOP, et
- (iv) $\Psi|_{S^r \times D^{n-r}} : S^r \times D^{n-r} \rightarrow M_{\text{TOP}}$ est TOP-régulièrement homotope à $j : S^r \times D^{n-r} \rightarrow M_{\text{TOP}}$.

Ce lemme permet de faire une chirurgie HML associée à α
ou, si $r=3$ et $n-r \geq 3$, plongement modifié par $\text{TOP}_{n-r}/\text{HML}_{n-r} \simeq \text{TOP}/\text{HML}$ [MtM]
 (à l'aide de plongement $S^r \times D^{n-r} \subset M$) chaque fois que l'on peut

faire une chirurgie TOP associée à α_{TOP} . Ceci permet de réduire entièrement la théorie de la chirurgie HML à celle de TOP (Cf. [Wa] et [KS, III]).

Preuve du lemme-clef 3.2. On peut déformer ψ de façon à ce que ψ soit transverse à la section nulle $j(S^r \times 0)$ du micro-fibré produit $j(S^r \times D^{n-r}) \subset M_{TOP}$ dans le sens de la transversalité de Williamson [Wi]. Alors, $K = \psi^{-1}(j(S^r \times 0))$ est un sous-complexe de M qui possède un voisinage régulier $K \times D^{n-r}$ dans M ; il est facile de vérifier que K est une r -variété HML.

SOUS-LEMME 3.3. $\psi|_K : K \rightarrow j(S^r \times 0)$ se complète naturellement en une donnée de chirurgie HML dont l'obstruction s'annule.

En effet, α est représenté par le diagramme suivant où j' est l'application $f \circ (j | S^r \times 0) : S^r \rightarrow M$. L'inclusion $k : K \rightarrow M$ est homotope à $j' \circ (\psi | K)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{\psi|_K} & S^r & \xrightarrow{i} & D^{r+1} \\
 & \searrow k & \downarrow j' & \swarrow j & \downarrow j_D \\
 & & M & \xrightarrow{\psi} & M_{TOP} \xrightarrow{\phi_{TOP}} X \\
 & & & \nwarrow f &
 \end{array}$$

Alors, $\tau(K) = k^*\tau(M) = (\psi|_K)^*(j')^*\tau(M) = (\psi|_K)^*i^*j_D^*\xi$. Comme D^{r+1} est contractile, $j_D^*\xi$ possède une trivialisation canonique, qui induit une trivialisation de $\tau(K)$. On considère la situation TOP

"sous-jacente" $((\psi|K) \times (id|CP^2))_{TOP} : (K \times CP^2)_{TOP} \rightarrow S^r \times CP^2$.

Alors, on voit que ceci est TOP normalement cobordant à l'identité, en appliquant la transversalité TOP relative à l'homotopie $(M \times CP^2)_{TOP} \times I \rightarrow M_{TOP} \times CP^2$ entre les applications induites respectivement par ψ et par l'identité. Par conséquent, $\psi|K$ est de degré 1 ; le triple $(K, \psi|K, \text{la trivialisat} \text{ion HML de } \tau(K) \text{ induite par } F)$ forme une donnée de chirurgie HML. Son obstruction dans $L_r(0)$ s'annule par la définition; d'où le sous-lemme 3.3.

Maintenant, on remarque qu'il existe un H_* -cobordisme HML L entre K et une variété PL \bar{K} de sorte que $\pi_1(CK \cup L) = 0$. En effet, comme $\tau(K)$ est stablement trivial, l'obstruction pour obtenir une résolution PL acyclique en variété PL $\sigma(K) = \rho(\tau(K))$ s'annule (Cf. Appendice à ce chapitre): si $\dim K \neq 4$, on obtient une résolution PL acyclique locale en variété PL et le cylindre de l'application est un s -cobordisme HML entre K et une variété PL; si $\dim K = 4$, comme le bord d'un voisinage contractile N des points singuliers de K borde une variété PL acyclique P , on peut prendre

$\bar{K} = (K - \text{int } N) \cup P$ et $L = K \times I \cup C(N \cup P)$. Soit $W_1 = M \times I \cup L \times D^{n-r}$

et $M_1 = \partial W_1 - M$. Alors, parce que le plongement $K \times D^{n-r} \rightarrow M$ induit un homomorphisme nul sur π_1 , l'inclusion $M \rightarrow W_1$ induit un isomorphisme sur π_1 . Par conséquent, on vérifie que W_1 est un s -cobordisme HML. Il est facile d'étendre ψ sur W_1 de façon que l'extension $\Psi_1 : W_1 \rightarrow M_{TOP}$ soit transverse à $j(S^r \times 0)$ et

$(\psi_1)^{-1}(j(S^r \times 0)) \cap M_1 = \bar{K}$. Alors, quitte à remplacer M par M_1 on peut supposer que K lui-même est une sous-variété PL de M .

La chirurgie de la variété PL K est effectuée par l'attachement de l'anse de l'indice $i \leq r/2 + 1 \leq n/2$, $\psi_1 : K^r \times D^i \times D^{r-i} \rightarrow j(S^r \times 0)$. En effet, si $r \geq 5$, il est conséquence de la théorie de la chirurgie PL. Si $r = 4$, on peut supposer que K est simplement connexe; en faisant, si nécessaire, la somme connexe avec les $S^2 \times S^2$, on peut identifier K à une somme connexe de S^4 avec des $S^2 \times S^2$ [Wa₁]; on peut alors effectuer la chirurgie. Si $r = 3$, on peut supposer que K est connexe et, en outre, qu'il existe un cobordisme PL stablement parallélisé entre K et S^3 .

En reconstruisant la variété TOP "sous-jacente" M_{TOP} par la réunion $K \times D^{n-r} \cup (M - \text{int } K \times D^{n-r})_{TOP}$, on obtient un plongement $j_1 : K^r \cup D^i \times D^{r-i} \times D^{n-r} \rightarrow M_{TOP}$ de sorte que $j_1|_{K^r} = \text{id}$ et $j_1|_{K \cup D^i \times D^{r-i} \times 0} \simeq j \circ \psi_1$. Alors, on peut déformer ψ sur $M - K$ de façon que ψ soit transverse à $j_1(D^i \times 0)$ dans le sens de Williamson comme précédemment. Soit $K_1 = \psi^{-1}(j_1(D^i \times 0))$. Comme dans la preuve du sous-lemme 3.3, la trivialisation F induit une trivialisation HML du fibré tangentiel stable d'un voisinage de $K \cup K_1 \times D^{r-i} \times D^{n-r}$, car $j' \circ (\psi|_{K \cup K_1 \times D^{r-i} \times D^{n-r}})$ est homotope à l'inclusion naturelle $k_1 : K \cup K_1 \times D^{r-i} \times D^{n-i} \rightarrow M$. Par conséquent, $\psi|_{K_1} : (K_1, S^{i-1}) \rightarrow j_1((D^i, S^{i-1}) \times 0)$ se complète en une donnée de chirurgie HML relative au bord. En utilisant la version avec bord de la preuve du sous-lemme 3.3, on voit que son obstruction

s'annule dans $L_i(0)$.

Comme précédemment, on peut supposer que K_1 est une sous-variété PL dans $M - \text{int } K$. Puisqu'on désire effectuer la chirurgie PL de K_1 dans la variété ambiante, on se retrouve dans une situation analogue à celle l'on était précédemment pour effectuer la chirurgie PL de la sous-variété PL K dans la variété ambiante M . Cependant, les problèmes des chirurgies ambiantes pour plonger les anses à effectuer la chirurgie de K_1 ont les dimensions inférieures à $\dim K_1$, si $i \geq 3$. En effet, si $i \geq 4$, c'est immédiat et, si $i = 3$, on peut choisir un cobordisme PL stablement parallélisé entre K_1 et D^3 qui se décompose en 2-anses [Wal, p.520]. Or, si $i = 1$, on n'a pas besoin de faire la chirurgie sur K_1 car K_1 contient D^1 . Si $i = 2$, on prend une subdivision de M telle que K soit un sous-complexe de M ; on peut supposer alors que $f|_{j_1(\partial D^2 \times 0)} = \text{id}$ et l'image $f(j_1(D^2 \times 0))$ est contenue dans un voisinage N de la réunion, (le 3-squelette dual de M) $\cup K$, qui est une sous- n -variété PL; comme $n \geq 5$, on en obtient un plongement PL $k_1 : D^2 \times 0 \rightarrow N$ de façon que $k_1|_{\partial D^2 \times 0} = f \circ j_1|_{\partial D^2 \times 0}$ et $k_1 \simeq f \circ j_1|_{D^2 \times 0}$, et l'on peut déformer ψ de sorte que ψ soit transverse à $j_1(D^2 \times 0)$ et que $\psi^{-1}(j_1(D^2 \times 0)) = k_1(D^2 \times 0)$; on pose de nouveau $K_1 = k_1(D^2 \times 0)$. Par conséquent, à l'aide de la récurrence sur les dimensions des chirurgies ambiantes, on peut effectuer la chirurgie ambiante sur K_1 et l'on obtient un plongement $K^r \cup D^i \times D^{r-i} \times D^{n-r}$ dans M . En déformant ψ sur une sous-variété PL contenant $K^r \cup D^i \times D^{r-i} \times D^{n-r}$, on peut supposer que ψ est

transverse à $j(S^r \times 0)$ et $\psi^{-1}(j(S^r \times 0))$ est le résultat de la modification sphérique sur K^r par l'attachement de l'anse $K^r \cup D^1 \times D^{r-1}$. Après certains attachements des anses à K^r , on arrive enfin au résultat de la chirurgie de K^r , i.e.: on obtient un plongement PL de $S^r \times D^{n-r}$ dans \bar{M} , une variété HML s-cobordant à M , tel que ψ est transverse à $j(S^r \times 0)$ et $\psi^{-1}(j(S^r \times 0)) \cong S^r \times 0$. Il est facile d'étendre ψ , défini sur $M \cup \bar{M}$, à une application Ψ qui soit définie sur un s-cobordisme HML W entre M et \bar{M} . En plus, puisque les plongements TOP $\Psi|_{S^r \times D^{n-r}}$ et j se sont homotopes et qu'ils déterminent le même monomorphisme du fibré TOP tangentiel stable $\tau(S^r \times D^{n-r})$ vers le fibré TOP $j^*\tau(M_{TOP})$, ils se sont TOP-régulièrement homotopes d'après la classification des immersions TOP [L].

c. q. f. d.

Plus généralement, à l'aide du lemme-clef 3.2 et sa version relative on peut suivre les §4 et 9 " π - π Theorems" et "Completion of Proof in the general case" de [Wa] et l'on obtient:

THEOREME 3.1'. L'énoncé du théorème 3.2 de [Wa, p.37] est vrai également dans le cas où M est un $(n+1)$ -ade de variétés HML compactes, et ν est un fibré H_* -cobordisme bloc HML stable sur X .

§3. Structure d'homotopie HML sur un complexe de Poincaré fini

Soit X un complexe de Poincaré fini de dimension formelle n ; une équivalence d'homotopie simple, $\phi : M \rightarrow X$, d'une variété HML fermée est appelée une structure d'homotopie HML sur X . Deux structures d'homotopie HML, $\phi : M \rightarrow X$ et $\phi' : M' \rightarrow X$, sont dites équivalentes, s'il existe un s -cobordisme HML $(W ; M, M')$ avec une équivalence d'homotopie simple $\phi_W : W \rightarrow X$ qui est une extension de ϕ et de ϕ' . $S_{\text{HML}}(X)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences de structures d'homotopie HML sur X .

On a naturellement une flèche à homotopie près, $HG : \text{BHML}_r \rightarrow \text{BG}_r$, $r \geq 3$, de l'espace classifiant des fibrés H_* -cobordismes HML dans l'espace classifiant des fibrations sphériques, avec l'intermédiaire d'un inverse de l'équivalence naturelles d'homotopie $hH : \text{BhML}_r \rightarrow \text{BHML}_r$, $r \geq 3$, établie par la proposition 3.B de l'appendice à ce chapitre. (AB signifie une flèche naturelle de la catégorie "A" à celle de "B".) Soit $\nu(X)$ fibration de Spivak du complexe de Poincaré fini X [Sp]. Une structure tangentielle HML sur X est un fibré H_* -cobordisme HML stable ξ sur X avec une trivialisatoin stable du fibré sphérique $\xi \oplus \nu(X) \rightarrow \mathbb{R}^N$. $T_{\text{HML}}(X)$ désigne l'ensemble des structures tangentielles HML sur X . Soit $N_{\text{HML}}(X)$ l'ensemble des classes de cobordisme normaux HML stables des applications normales HML de degré 1, (M, ϕ, F) sur (X, ξ) , i.e.: l'ensemble des classes de cobordisme des données de chirurgie HML.

THEOREME 3.4. Soit X un complexe de Poincaré fini. Alors, il existe une bijection naturelle,

$$NT : N_{\text{HML}}(X) \rightarrow T_{\text{HNL}}(X).$$

Preuve. La philosophie est la même que celle de l'Appendice B de [KS]. On considère que l'espace total $E(\nu(X))$ du fibré de Spivak $\nu(X)$ est un voisinage régulier de X plongé dans un espace euclidien de dimension assez grande. Etant donné un fibré H_* -cobordisme HML bloc ξ sur X , on identifie l'espace total $E(\xi \oplus \nu(X))$ avec l'espace total $E(\nu^*\xi)$ où $\nu : E(\nu(X)) \rightarrow X$ est la projection du fibré sphérique $\nu(X)$. Alors, on peut remarquer que l'intérieur de $E(\xi \oplus \nu(X))$ est une variété HML [MrM].

Soit (M, ϕ, F) une donnée de la chirurgie HML sur (X, ξ) . Alors, si nécessaire, en augmentant la dimension de $\nu(X)$, on peut supposer que $\phi : M \rightarrow X \subset E(\nu(X))$ est homotope à un plongement dans l'intérieur de $E(\nu(X))$. Alors, comme le fibré H_* -cobordisme HML normal de M dans $E(\nu(X))$ est $\nu(M)$, le fibré H_* -cobordisme HML normal de M dans l'intérieur de $E(\xi \oplus \nu(X))$ est équivalent à $\phi^*\xi \oplus \nu(M)$ qui possède une trivialisatation donnée. En stabilisant $\xi \oplus \nu(X)$ une fois, on peut supposer que M est plongé dans le fibré $\delta\eta$ en sphères associé à $\eta^k = \xi \oplus \nu(X) \oplus 1$. En utilisant la trivialisatation de $\phi^*\xi \oplus \nu(M)$ et la construction de Thom-Pontrjagin, on en obtient une application $E(\delta\eta) \rightarrow S^{k-1}$ de degré 1 sur chaque fibré. Son cône donne une trivialisatation du fibré sphérique stable $\xi \oplus \nu(X) \oplus 1 \rightarrow R^k$.

Inversement, soit ξ un fibré H_* -cobordisme HML bloc sur X et soit $F : \xi \oplus \nu(X) \rightarrow \mathbb{R}^N$ une trivialisat on stable du fibré sphérique. On peut supposer que $F|E(\xi \oplus \nu(X))$ est transverse au point 0 de \mathbb{R}^N dans le sens de Williamson [Wi]. On pose $M = F^{-1}(0)$. Alors, M est une variété HML comme on a fait dans la preuve du lemme-clef 3.2. Pour la projection $\rho : E(\xi \oplus \nu(X)) \rightarrow \nu(X)$, si nécessaire, en augmentant la dimension de $\nu(X)$, on peut supposer que $\rho|_M$ est homotope à un plongement. Donc, $\phi^*\xi \oplus \nu(M)$ s'identifie naturellement avec le fibré H_* -cobordisme HML normal de M dans $E(\xi \oplus \nu(X))$ qui possède une trivialisat on à cause de la transversalité. En ajoutant $\tau(M)$, on en obtient un isomorphisme stable entre $\phi^*\xi$ et $\tau(M)$.

Il n'est pas difficile de voir que les correspondences sont bien définies et inverses l'une de l'autre.

c. q. f. d.

En outre, si X est une variété HML et si G/HML désigne la fibre de la fibration homotopique $BHML \rightarrow BG$, il existe une bijection naturelle et standard entre $T_{HML}(X)$ et $[X, G/HML]$.

$S_{TOP}(X)$ et $T_{TOP}(X)$ désignent respectivement l'ensemble des classes de structure d'homotopie TOP et des structures tangentiellles TOP sur X . La flèche $\beta : BHML \rightarrow \underline{BTOP}$ induit une flèche naturelle $\beta'' : T_{HML}(X) \rightarrow T_{TOP}(X)$. Si $n \geq 5$, la construction d'une variété TOP fermée M_{TOP} et d'une équivalence d'homotopie simple

$f : M_{\text{TOP}} \rightarrow M$ à partir d'une variété HML fermée M , fournit une flèche naturelle $\beta' : S_{\text{HML}}(X) \rightarrow S_{\text{TOP}}(X)$. Si X lui-même est une variété HML fermée, on a un élément nul dans $S_{\text{HML}}(X)$ et dans $T_{\text{HML}}(X)$.

THEOREME 3.5. Soit X une variété HML fermée de dimension $n \geq 5$. Alors, on a le diagramme commutatif suivant dont les suites horizontales sont des suites exactes d'ensembles pointés:

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_{n+1}(\pi) & \xrightarrow{\partial} & S_{\text{HML}}(X) & \xrightarrow{\eta} & T_{\text{HML}}(X) & \xrightarrow{\theta} & L_n(\pi) \\
 & & \beta' \downarrow & & \beta'' \downarrow & & \\
 L_{n+1}(\pi) & \xrightarrow{\partial} & S_{\text{TOP}}(X) & \xrightarrow{\eta} & T_{\text{TOP}}(X) & \xrightarrow{\theta} & L_n(\pi)
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, (π) est l'abréviation de $(\pi_1(X), w_1(X))$.

Preuve. Comme la réalisation des éléments de $L_{n+1}(\pi)$ peut être effectuée dans une sous-variété PL qui est un voisinage du 3-squelette dual, $L_{n+1}(\pi)$ opère sur $S_{\text{HML}}(X)$ et ∂ est défini par cette opération (Cf. Théorèmes 5.8 et 6.5 de [Wa]); on en déduit $\beta' \circ \partial = \partial$. En utilisant l'isomorphisme entre $N_{\text{HML}}(X)$ et $T_{\text{HML}}(X)$, on définit les flèches η et θ . Maintenant, l'exactitude de la suite horizontale en $T_{\text{HML}}(X)$ est conséquence du théorème 3.1. L'exactitude de cette même suite en $S_{\text{HML}}(X)$ vient de la définition de l'opération de $L_{n+1}(\pi)$ sur $S_{\text{HML}}(X)$.

c. q. f. d.

§4. Appendice: sur l'obstruction pour obtenir une résolution en PL

Soit M une n -variété HML sans bord ou avec un bord qui est une variété PL. D'une part, désignons par $o(M, \partial M) \in H^4(M, \partial M; H^3)$ l'obstruction pour obtenir une résolution PL acyclique de M rel. ∂M en variété PL qui est définie par [Su], [Co] et [Sa]. D'autre part, $\rho(v(M), v(M)|\partial M) \in H^4(M, \partial M; \pi_3(\text{HML}_r/\widetilde{\text{PL}}_r))$ est l'obstruction définie de façon standard pour réduire le groupe structural du fibré H_* -cobordisme bloc HML normal $v(M)$ de M dans R^{n+r} avec r assez grand en celui de fibré bloc PL relativement à la réduction en PL de $v(M)|\partial M$ (Cf. [ES]).

On rappelle que l'isomorphisme $\phi : \pi_3(\text{HML}_r/\widetilde{\text{PL}}_r) \rightarrow H^3$ pour $r \geq 3$, est défini comme on l'avait déjà vu dans la preuve du théorème 2.6 de la façon suivante. Soit E une représentation d'un élément de $\pi_3(\text{HML}_r/\widetilde{\text{PL}}_r)$ comme un fibré H_* -cobordisme (bloc) HML en sphères sur $\Delta^3 \times I$ qui se réduit à un fibré bloc PL sur $\partial\Delta^3 \times I$ et à un fibré produit sur $\Delta^3 \times 0 \cup \Delta^3 \times 1 \in \Delta^2 \times I$. Alors, $\phi(E)$ est défini par $o(E, \partial E) \in H^4(E, \partial E; H^3) \cong H^3$.

THEOREME 3.A. Soit M une n -variété HML sans bord ou avec un bord qui est une variété PL. Alors, dans $H^4(M, \partial M; H^3)$, on a

$$o(M, \partial M) = -(\rho(v(M), v(M)|\partial M)) = \rho(\tau(M), \tau(M)|\partial M)$$

Preuve. Comme on l'a observé dans la preuve du théorème 1.4.a, il suffit de démontrer le théorème dans le cas $(M, \partial M)$ est $(CH^3, H^3) \times D^{n-4}$, où H^3 est une 3-sphère d'homologie PL. On peut supposer $n = 4$; les autres cas en découlent en effet, puisque les

obstructions de $(CH^3, H^3) \times D^{n-4}$ pour $n \geq 5$ se décomposent en obstruction sur (CH^3, H^3) et sur D^{n-4} de façon naturelle. Soit $H^3 \subset S^{r+3}$ un plongement PL localement plat avec r assez grand. On considère le fibré E en sphères du fibré H_* -cobordisme HML normal de CH^3 associé au plongement du cône $CH^3 \subset CS^{r+3}$. Il faut remarquer que la variété PL E n'est pas un fibré H_* -cobordisme bloc HML sur une 4-boule. On prend un 4-simplexe Δ^4 de la seconde subdivision barycentrique K de CH^3 tel que $|H^3| \cap \Delta^4 = \Delta^3$. On peut définir F un fibré H_* -cobordisme bloc HML sur K par $F|(K - \text{int } \Delta^4) = (K - \text{int } \Delta^4) \times S^{r-1}$ $F|\Delta^4 = C(-H^3) \times S^{r-1} \cup$ (un H_* -cobordisme PL entre $F|(\partial\Delta^4 - \text{int } \Delta^3)$ et $-(H^3 - \tau) \times S^{r-1}$), où τ est un 3-simplexe. Alors, E est équivalent à F en tant que fibré H_* -cobordisme bloc HML sur K relatif à la réduction en PL sur ∂K , car $E|\partial K = F|\partial K$ et $o(E, \partial E) = 0 = o(F, \partial F)$. En conséquence, $\rho(v(CH^3), v(H^3)) \in H^4(CH^3, H^3; \phi_*(\pi_3(\text{HML/PL})) \cong H^3)$ est égal à l'obstruction $o(F(\Delta^4), \partial F(\Delta^4)) \in H^4(F(\Delta^4), \partial F(\Delta^4); H^3) \cong H^3$; $o(F(\Delta), \partial F(\Delta))$ est la classe de $-H^3$ dans H^3 , tandis que $o(CH^3, H^3)$ est la classe de H^3 dans $H^3(CH^3, H^3; H^3) \cong H^3$.

c. q. f. d.

§5. Appendice: les fibrés h-cobordismes HML

La proposition 3.B qui va suivre est intéressante dans la théorie des fibrés HML; en effet, elle nous permet de définir l'application instable: $BHML_n \rightarrow BG_n$ pour $n \geq 3$ directement. Un r -fibré h-cobordisme

HML est un r -fibré H_* -cobordisme dont les trivialisations locales sont données par les h -cobordisme HML $[Mr_1]$.

PROPOSITION 3.B. Désignons par $BhML_r$ l'espace classifiant des r -fibrés h -cobordismes HML. Alors, la flèche naturelle,

$hH : BhML_r \rightarrow BHML_r$ est une équivalence d'homotopie pour $r \geq 3$.

En effet, la preuve est immédiat d'après le lemme des cinq et le fait que $\pi_i(hML_r, \widetilde{PL}_r) = \pi_i(HML_r, \widetilde{PL}_r) = 0$ ($i \neq 3$) et qu'il existe des isomorphismes respectivement de $\pi_3(hML_r, \widetilde{PL}_r)$ et de $\pi_3(HML_r, \widetilde{PL}_r)$ sur H^3 , compatible avec l'homomorphisme induit par hH ; le cas HML_r est démontré dans notre article [MtM] et le cas hML_r peut être traité de la même façon.

CHAPITRE 4

Structures HML sur les variétés topologiques

§. Introduction

Une structure HML sur une n -variété topologique V est, par définition, une paire formée d'une n -variété HML M et d'un homéomorphisme de M_{TOP} sur V . Cette définition ne peut bien sûr se justifier que si $\dim M \neq 4$ et $\dim \partial M \neq 4$. Désignons par b_α l'opération de Bockstein pour la cohomologie associée à la suite exacte,

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow H^3 \rightarrow Z_2 \rightarrow 0,$$

où $\alpha : H^3 \rightarrow Z_2$ est l'homomorphisme de Kervaire-Milnor-Rohlin.

En premier lieu, on montrera qu'une n -variété TOP V admet une structure HML si et seulement si,

$$b_\alpha k(V) = 0 \text{ dans } H^5(V ; \ker \alpha),$$

pourvu que $n \geq 5$, et que, en outre, si $n = 5$, $\partial V = \emptyset$ (Théorème 4.2).

La classification des structures HML sur V sera également présentée de façon standard (Théorème 4.3).

Pour pouvoir tirer des conclusions précises dès qu'on sait l'ordre d'un seul élément de H^3 , on va prendre une 3-sphère d'homologie PL H^3 et considérer une sous-catégorie $\text{HML}(H^3)$ de HML ; une n -variété $\text{HML}(H^3)$ (sans bord) est, par définition, une n -variété HML (sans bord)

M dont le $Lk(\sigma, M)$ pour chaque $(n-4)$ -simplexe σ est une somme connexe de plusieurs répliques de H^3 ou de $-H^3$. On suppose $\alpha(H^3) \neq 0$ et l'on pose $2\ell = (\text{ordre de } H^3 \text{ dans } H^3)$. Désignons par b_ℓ l'opération de Bockstein associé à la suite exacte, $0 \rightarrow Z_\ell \rightarrow Z_{2\ell} \rightarrow Z_2 \rightarrow 0$ avec les conventions $Z_\infty = Z$ et $Z_1 = 0$. De la même façon que précédemment, la classe de cohomologie

$$b_\ell k(V) \in H^5(V; Z_\ell)$$

est l'unique obstruction pour que V admette une structure $HML(H^3)$ avec la restriction de dimension énoncée précédemment (Théorème 4.7).

Par conséquent, on obtient le résultat vivant;

Soit V une n -variété TOP avec $b_\infty k(V) = 0$. Alors, V admet une structure HML, pourvu que $n \geq 6$, ou que $n = 5$ et $\partial V = \phi$.

En contre partie, si une variété TOP V avec $b_{2\ell} k(V) \neq 0$ admettait une structure HML, on obtiendrait une 3-sphère d'homologie PL H^3 possédant les deux propriétés:

$$\alpha(H^3) \neq 0 \text{ dans } Z_2, \text{ et } 2\ell H^3 \equiv 0 \text{ dans } H^3.$$

Dans le §1, on traitera les structures HML, et dans le §3 les structures $HML(H^3)$, après avoir étudié la sous-catégorie $HML(H^3)$ dans le §2. Le dernier énoncé donné plus haut sera démontré dans le §4.

Dans le §5, on sera concerné par le cas $\ell = 1$.

§1. Structures HML sur une variété TOP

Les structures PL ou DIFF sur variétés TOP ont été beaucoup étudiées (Voir [KS] pour références). Pour le cas de structures HML, on utilisera la théorie de la chirurgie HML et non un analogue HML du "Product Structure Theorem" de [KS]; mais bien sûr un tel analogue découle enfin de compte de la classification des structures HML.

Soit V une variété TOP. On fixe un complexe simplicial localement fini dénombrable X muni d'une équivalence d'homotopie simple propre (infinie) $p : X \rightarrow V$. On note $k(V)$, où $k(V) \in H^4(V; \mathbb{Z}_2)$, la classe de Kirby-Siebenmann [KS₁]. Un r -voisinage TOP sur V s'identifie avec une application continue $v : V \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r$ et un r -fibré H_* -cobordisme (bloc) HML sur X avec une application continue $\xi : X \rightarrow \text{BHML}_r$. Rappelons que, pour $r \geq 3$, $\beta : \text{BHML}_r \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r$ désigne la flèche canonique construite au chapitre 2 et il existe une fibration homotopique:

$$K(\ker \alpha, 4) \rightarrow \text{BHML}_r \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r \quad (r \geq 3).$$

LEMME 4.1. Soit V une n -variété TOP et soit $\tau(V) : V \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r$ son fibré TOP tangentiel stable avec r assez grand. Alors,

$$b_\alpha k(V) \in H^5(V; \ker \alpha)$$

est l'unique obstruction pour obtenir un r -fibré H_* -cobordisme (bloc) HML, $\xi : X \rightarrow \text{BHML}_r$ tel que $\beta(\xi) \simeq \tau(V) \circ p$.

Preuve. Pour $r \geq 3$, on a un diagramme commutatif à homotopie

près dont toutes les suites sont des fibrations homotopiques:

$$\begin{array}{ccccc}
 K(H^3, 3) & = & K(H^3, 3) & \rightarrow & * \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \\
 K(Z_2, 3) & \rightarrow & \widetilde{BPL}_r & \rightarrow & \underline{\underline{BTOP}}_r \\
 \downarrow b_\alpha & & \downarrow & & \\
 K(\ker \alpha, 4) & \rightarrow & BHML_r & \rightarrow & \underline{\underline{BTOP}}_r
 \end{array}$$

On induit les fibrations homotopiques sur X par $\tau(V) \circ p : X \rightarrow \underline{\underline{BTOP}}_r$,

$$\begin{array}{ccccc}
 K(Z_2, 3) & \rightarrow & (\tau(V) \circ p)^* \widetilde{BPL}_r & \rightarrow & X \\
 \downarrow b_\alpha & & \downarrow & & \parallel \\
 K(\ker \alpha, 4) & \rightarrow & (\tau(V) \circ p)^* BHML_r & \rightarrow & X
 \end{array}$$

Alors, par l'argument classique de la théorie des obstructions pour obtenir des sections des fibrations [St], $b_\alpha p^*(k(V))$ est la classe d'obstruction pour obtenir une section de la fibration à la deuxième ligne, car $p^*(k(V))$ est l'obstruction pour obtenir une section de la fibration de la première ligne.

c. q. f. d.

Venons en au théorème principal:

THEOREME 4.2. Soit V une n -variété TOP avec $n \geq 6$, ou bien $n = 5$ et $\partial V = \emptyset$. Supposons qu'il existe un fibré H_* -cobordisme (bloc) HML , $\xi : X \rightarrow BHML_r$ tel que $\beta \circ \xi \simeq \tau(V) \circ p$ où $\tau(V) : V \rightarrow \underline{\underline{BTOP}}_r$ est le fibré TOP tangentiel (stable) de V . Il existe alors une structure HML (M, f) sur V , telle que le fibré

H_* -cobordisme HML tangentiel de M induit un fibré H_* -cobordisme (bloc) HML sur X qui est stablement équivalent à ξ . En particulier,

$$b_{\alpha} k(V) = 0 \text{ dans } H^5(V ; \ker \alpha)$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que V admette une structure HML.

Preuve. On peut supposer que ξ est un fibré h-cobordisme bloc HML d'après le théorème 3.B.

Pour simplifier l'écriture on suppose pour le moment que V est fermée. Puisque l'on peut identifier naturellement $\nu(X)$ avec le fibré sphérique sous-jacent à $p^*\nu(V)$, on a une équivalence entre les fibrés sphériques stables, $\xi \oplus \nu(X) \rightarrow \beta(\xi) \oplus p^*(\nu(V)) = p^*(\tau(V) \oplus \nu(V))$. Alors, la trivialisation naturelle de $\tau(V) \oplus \nu(V)$ induit une trivialisation du fibré sphérique stable $\xi \oplus \nu(X) \rightarrow R^N$, i.e.: une structure tangentiel HML sur X dans le sens du chapitre 3. En vertu du théorème 3.4, on en obtient une donnée de chirurgie HML $x = (M, \phi, F)$ sur (X, ξ) , formée d'une variété HML M et d'une application normale $\phi : M \rightarrow X$ avec une équivalence des fibrés H_* -cobordismes HML blocs $F : \tau(M) \rightarrow \phi^*\xi$. La structure tangentiel TOP "sous-jacente" est, par la définition, la trivialisation canonique de $\beta(\xi) \oplus p^*(\nu(V)) = p^*(\tau(V) \oplus \nu(V))$ et donc elle est l'élément-nul de $T_{TOP}(X)$. Comme l'obstruction $\theta(x)$ pour effectuer la chirurgie HML est défini par $\theta(x_{TOP})$ et x_{TOP} représentent

l'élément-nul de $N_{\text{TOP}}(X) \cong T_{\text{TOP}}(X)$, l'obstruction $\theta(x)$ dans $L_n(\pi_1(X), w_1(X))$ s'annule. Par conséquent, on peut supposer que ϕ est déjà une équivalence d'homotopie simple, i.e.: (M, ϕ) est inclus dans $S_{\text{HML}}(X)$. D'après le théorème 3.5, il existe un élément $\theta \in L_{n+1}(\pi_1(V), w_1(X))$ tel que $\theta \cdot \beta(M, \phi) = (V, p^{-1})$ car $\eta(\beta(M, \phi)) = \eta(V, p^{-1})$ dans $T_{\text{TOP}}(X)$. Puisque $\theta \cdot \beta(M, \phi) = \beta(\theta \cdot (M, \phi))$, si l'on écrit à nouveau (M, ϕ) pour $\theta \cdot (M, \phi)$, $\beta(M, \phi)$ représente l'élément-nul de $S_{\text{TOP}}(V)$; par conséquent, il existe un homéomorphisme de M_{TOP} sur V .

Dans le cas où V est compacte et non-fermée, ∂V possède une structure HML qui est concordante avec ξ et on peut obtenir une structure HML sur V qui est une extension de la structure sur ∂V par l'argument du cas relatif.

Si V n'est pas compacte, on considère une suite de sous-variétés compactes TOP V_i de V avec $V_i \subset \text{int } V_{i+1}$ et $V = \cup V_i$ et une suite de sous-complexes simpliciaux finis X_i de X qui correspondent à V_i . Alors, on peut obtenir avec une restriction de dimension une suite de structures HML (M_i, f_i) sur V_i par induction telle que $M_i \subset \text{int } M_{i+1}$ et que f_{i+1} soit une extension de f_i . En passant à la limite, la paire formée de la variété HML $M = \cup M_i$ et de l'homéomorphisme $f = \cup f_i$ est une structure HML sur V . Le cas où V est non-compacte et $\dim V = 5$ est traité de la même façon qu'au §4 du ch. 1.

La dernière assertion du théorème est immédiate d'après le lemme 4.1.

c. q. f. d.

Maintenant, la classification des structures HML est facile:

DEFINITION. Deux structures HML (M_i, f_i) sur V sont concordantes,

s'il existe une structure HML (W, F) sur $V \times I$ telle que

$$\partial W = M_1 \cup -M_2 \quad \text{et} \quad F|_{M_i} = f_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

THEOREME 4.3. Soit V une n-variété TOP; on suppose $n \geq 6$, ou,

$n = 5$ et $\partial V = \phi$. Si V admet une structure HML M_0 , alors,

il existe une bijection de $H^4(V; \ker \alpha)$ sur l'ensemble des classes

de concordance des structures HML sur V . En outre, l'homomorphisme

naturel, $H^4(V; \ker \alpha) \rightarrow H^4(V; H^3)$, à la classe de $M - M_0$ fait

correspondre celle de $\sigma(M) - \sigma(M_0)$.

Preuve. Un fibré H_* -cobordisme HML tangentiel d'une structure

HML sur V induit naturellement un fibré H_* -cobordisme bloc HML

$\xi : X \rightarrow \text{BHML}_r$ pour r assez grand. Soit ξ_0 un tel fibré

H_* -cobordisme bloc pour la structure HML originale M_0 sur V .

Alors, chaque structure HML sur V détermine un fibré

$\text{TOP}_r/\text{HML}_r$, $(\xi - \xi_0)$, sur X et donc un élément de $H^4(X, \ker \alpha)$

à cause de l'isomorphisme existant entre $[X, \text{TOP}_r/\text{HML}_r]$ et $H^4(X, \ker \alpha)$.

D'autre part, grâce à la structure de H -espace faible sur BHML ,

chaque élément de $H^4(V, \ker \alpha)$ détermine de façon unique à stabilisation

près un fibré H_* -cobordisme bloc HML $\xi : X \rightarrow \text{BHML}_r$ tel que

$\beta(\xi) \approx \tau(V) \circ p$, pour r assez grand. D'après le théorème 4.2 on a une structure HML dont le fibré H_* -cobordisme HML tangentiel induit ξ ; la correspondance $(M, f) \rightarrow \xi - \xi_0$ est donc une surjection.

L'injectivité s'obtient par le cas bordé du théorème 4.2.

Pour la dernière assertion, on considère $\xi - \xi_0$ comme la classe d'application, $X \rightarrow \text{BHML}$; alors, son obstruction est $\rho(\xi) - \rho(\xi_0)$ qui égale $o(M) - o(M_0)$ d'après le théorème 3.A.

c. q. f. d.

Comme corollaire immédiat des théorèmes 4.2 et 4.3, on a:

COROLLAIRE 4.3.a. (Théorème des structures HML-produits). S'il existe une structure HML (N, F) sur $V \times R^1$ il existe alors une structure HML (M, f) sur V telle que $(M \times R^1, f \times (\text{id}|R^1))$ soit équivalente à (N, F) .

§2. Variété HML(H^3) et fibré H_* -cobordisme bloc HML(H^3)

Soit H^3 une 3-sphère d'homologie PL. Une n -variété HML M est dite n -variété HML(H^3) si le link $\text{Lk}(\sigma^{n-4}, M)$ de chaque $(n-4)$ -simplexe de M et le link $\text{Lk}(\sigma^{n-5}, M)$ de chaque $(n-5)$ -simplexe de ∂M sont homéomorphes PL ou bien à une somme connexe

$$H^3\# \dots H^3\# -H^3\# \dots \# -H^3$$

de nombres de H^3 et de nombres de H^3 avec orientations opposées, ou bien à une telle somme connexe moins une 3-boule ouverte. D'après la définition, ∂M et le $\text{Lk}(\sigma, M)$ pour chaque simplexe de M

sont également des variétés $HML(H^3)$; si une variété HML M est une réunion de deux sous-variété $HML(H^3)$, alors M est elle-même une variété $HML(H^3)$.

LEMME 4.4. La qualité d'une n-variété HML M d'être $HML(H^3)$ est indépendante des subdivisions de M .

Preuve. Pour simplifier l'écriture, on suppose que M est sans bord. L'intérieur d'un $(n-4)$ -simplexe σ' d'une subdivision M' est contenu dans un unique p -simplexe σ de M avec $p \geq n - 4$. Si $p = n - 4$, on considère des subdivisions stellaires M_1 et M'_1 de M et de M' respectivement en adjoignant un barycentre b de σ' . Alors, $St(b, M'_1)$ est homéomorphe PL à $St(b, M_1)$ par un homéomorphisme PL dont la restriction à σ est un homéomorphisme PL de σ sur σ' . Par conséquent, $Lk(\sigma', M')$ est homéomorphe PL à $Lk(\sigma, M)$. Si $p \geq n - 3$, le même argument donne un homéomorphisme PL de $Lk(\sigma', M')$ sur $Lk(\sigma', \sigma) * Lk(\sigma, M)$; ce dernier est évidemment homéomorphe PL à S^3 . Dans le cas où M est avec un bord, la preuve est la même.

c. q. f. d.

Soit $HML(H^3)_r$ le sous Δ -semi-groupe de HML dont le k -simplexe typique est un auto-isomorphisme $HML(H^3)$ du fibré produit sur Δ^k , i.e.: un bloc-préservant H_* -cobordisme donné par une variété $HML(H^3)$ entre un $\Delta^k \times S^{r-1}$ et un autre que l'on identifie avec le premier. Le Δ -semi-groupe $HML(H^3)_r$ satisfait à la condition de Kan parce que tout bloc-préservant H_* -cobordisme $HML(H^3)$ entre $\Delta_{k-1} \times S^{r-1}$

et lui-même est prolongeable en celui entre $\Delta^k \times S^{r-1}$ et lui-même exactement comme dans la preuve du théorème 3.5 de [MrM]. Un fibré H_* -cobordisme (bloc) $HML(H^3)$ est, par définition, un fibré H_* -cobordisme (bloc) HML dont les trivialisations locales sont données par un H_* -cobordisme $HML(H^3)$ du fibré-produit.

PROPOSITION 4.5. Soit $M \subset Q$ un plongement propre d'une variété $HML(H^3)$ dans une variété $HML(H^3)$. Alors, le fibré H_* -cobordisme HML normal de M est équivalent à un fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$.

En effet, il suffit de voir que les trivialisations locales données par la proposition 5.1 de [MrM, p.108] sont des H_* -cobordismes $HML(H^3)$; on obtient alors un fibré H_* -cobordisme $HML(H^3)$ normal sur la décomposition en cellules duales de M et il est équivalent à un fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$ sur le complexe simplicial M .

Le concept de "prolongation", dû à Rourke-Sanderson [RS₂], donne la fibration de Kan de Δ -ensembles $HML(H^3)_r \rightarrow EHML(H^3)_r \rightarrow BHML(H^3)_r$ telle que $EHML(H^3)_r$ est contractile. L'espace $|BHML(H^3)_r|$, que l'on désignera par $BHML(H^3)_r$ s'il n'y a pas de confusion à craindre, est l'espace classifiant du fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$ avec fibres S^{r-1} . D'après la méthode de [MtM], on peut montrer facilement, que pour $r \geq 3$, $\pi_i(HML(H^3)_r, \tilde{PL}_r) = 0$ ($i \neq 3$), et $\pi_3(HML(H^3)_r, \tilde{PL}_r) = H^3(H^3)$ où \tilde{PL}_r est un sous Δ -ensemble de $HML(H^3)_r$ qui a le même type d'homotopie que le Δ -groupe de structure des r -fibrés bloc PL , et $H^3(H^3)$ est le sous-groupe cyclique de H^3 engendré par H^3 . Par le

théorème 2.6, on obtient:

THEOREME 4.6. Il existe un espace classifiant $BHML(H^3)_r$ de
 r -fibrés H_* -cobordismes blocs $HML(H^3)$ et une flèche naturelle
 $j : BHML(H^3)_r \rightarrow BHML_r$. On suppose $\alpha(H^3) \neq 0$ et l'on pose
 $2\ell = (\text{ordre de } H^3 \text{ dans } H^3)$. Alors, pour $r \geq 3$ on a une fibration
homotopique

$$K(Z_\ell, 4) \rightarrow BHML(H^3)_r \xrightarrow{\beta \circ j} \underline{BTOP}_r.$$

§3. Structures $HML(H^3)$ sur une variété TOP

Soit H^3 une 3-sphère d'homologie PL dont l'invariant $\alpha(H^3)$ est non-nul. On pose $2\ell = (\text{ordre de } H^3 \text{ dans } H^3)$.

THEOREME 4.7. Soit V une n -variété TOP. On suppose $n \geq 6$, ou
bien $n = 5$ et $\partial V = \emptyset$. Alors, V admet une structure $HML(H^3)$
 (M, f) si et seulement si

$$b_\ell k(V) = 0 \text{ dans } H^5(V; Z_\ell).$$

Preuve. De façon analogue à la preuve du lemme 4.1, $b_\ell k(V)$ est l'unique obstruction pour obtenir un r -fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$, $\xi : X \rightarrow BHML(H^3)_r$, tel que $(\beta \circ j)(\xi) \simeq \tau(V) \circ p$, où $\tau(V) : V \rightarrow \underline{BTOP}_r$ est le fibré TOP tangentiel stable de V avec r assez grand. Par conséquent, si V admet une structure $HML(H^3)$, alors $b_\ell k(V) = 0$ d'après la proposition 4.5.

Supposons maintenant $b_\ell k(V) = 0$. Alors, il existe un r -fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$, $\xi : X \rightarrow BHML(H^3)_r$, tel que

$(\beta \circ j)(\xi) \simeq \tau(V) \circ p$. D'après le théorème 4.2, V admet une structure HML (M, f) et le fibré H_* -cobordisme HML tangentiel de M est équivalent à un fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$. Ce qui suffit à montrer que:

COROLLAIRE 4.7.a. Si $b_{\infty k}(V) = 0$, V admet une structure HML.

Pour compléter la démonstration du théorème 4.7 il suffit de montrer le lemme suivant:

LEMME 4.8. Soit M une n-variété HML. Supposons que le fibré H_* -cobordisme HML tangentiel de M est équivalent à un fibré H_* -cobordisme bloc $HML(H^3)$. Alors, il existe une résolution PL acyclique locale^{*)}: $\tilde{M} \rightarrow M$ telle que M soit une n-variété $HML(H^3)$.

Preuve. Pour simplifier l'écriture, on suppose d'abord $\partial M = \emptyset$. Du fait de notre hypothèse, l'obstruction $\rho(\tau(M)) \in H^4(M; H^3)$ pour obtenir une réduction du groupe structural en PL est une image naturelle d'un élément de $H^4(M; H^3(H^3))$. Par le théorème 3.A, de l'appendice du ch. 3, on a $o(M) = \rho(\tau(M))$, où $o(M)$ est l'obstruction pour obtenir une résolution PL acyclique en variété PL. Par conséquent, d'après la définition de l'obstruction $o(M)$, il existe une 3-cochaîne g sur les cellules duales des $(n-3)$ -simplexes à valeurs dans des 3-sphères d'homologie PL, telle que pour chaque $(n-4)$ -simplexe σ de M ,

*) 'locale' veut dire qu'elle induit un isomorphisme sur π_1 .

$$\sum g(D(\tau_i)) + \text{Lk}(\sigma, M) \equiv k(\sigma)H^3 \text{ dans } H^3,$$

avec $-\infty < k(\sigma) < \infty$, où $D(\tau_i)$ sont les cellules duales des $(n-3)$ -simplexes τ_i de M avec $\tau_i > \sigma$; désignons par W_σ un H_* -cobordisme PL qui représente la congruence.

Maintenant on suit exactement la construction de la résolution en variété PL, en utilisant notre 3-cochaîne g défini en haut; on pose:

$$\tilde{M}_3 = M_2 \cup (\cup C'Lk(\tau)) \text{ où } C'Lk(\tau) = CLk(\tau) \# g(D(\tau)),$$

$$\tilde{M}_4 = \tilde{M}_3 \cup (\cup C'Lk'(\sigma)) \text{ où } C'Lk'(\sigma) = C(k(\sigma)H^3) \cup W_\sigma \cup (Lk(\sigma) \# \sum g(D(\tau))),$$

et pour $i \geq 5$,

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}_{i-1} \cup (\cup CLk'(\sigma)),$$

$CLk'(\sigma)$ désignant le cône du link modifié qui est défini, par récurrence, par $Lk'(\sigma) = \cup \{C'Lk'(\tau) ; \tau > \sigma\}$ où $C'Lk'(\tau)$ représente, soit $C'Lk(\tau)$ pour $\dim \tau = n - 3$, soit $C'Lk'(\tau)$ pour $\dim \tau = n - 4$ et soit $CLk'(\tau)$ pour $\dim \tau \leq n - 5$. Alors, l'espace PL $\tilde{M} = \tilde{M}_n$ est une variété $HML(H^3)$, car le voisinage de chaque point est évidemment une variété $HML(H^3)$. Pour obtenir une application d'une résolution acyclique PL, $f : \tilde{M} \rightarrow M$, on contracte d'abord chaque $g(D(\tau)) - \text{int } D^3$ en un point et, ensuite, chaque $C'Lk'(\sigma)$ en $CLk(\sigma)$ par induction.

Si f induit un isomorphisme sur π_1 , la preuve est terminée; sinon, on construit une autre variété $HML(H^3)$ \tilde{M}' à partir de la première subdivision barycentrique M' de M de la même façon: Pour chaque

simplexe σ' de M' , σ désigne l'unique simplexe de M qui contient σ' dans son intérieur. Puisque, si $\dim \tau = n - 3$, $g(D(\tau')) = g(D(\tau))$ et que, sinon, $g(D(\tau')) = S^3$, notre \hat{M}' possède une s -décomposition \hat{X} en anses définie par $\hat{X}_i = \hat{X}_i^+ = \cup \{CLk'(b_\sigma) ; \dim \sigma \leq i\}$. On observe que $B_i(\hat{X}) \cong \cup \{CLk'(b_\sigma) ; \dim \sigma = i\}$ et $\partial_- B_i(\hat{X}) \cong \cup \{C'Lk'(\sigma) ; \dim \sigma = i\} \times S^{i-1}$ et que, si $\dim \sigma \geq 3$, $C'Lk'(\sigma)$ est contenu dans un vrai cône $CLk(\sigma)$ qui est un sous-complexe de \hat{X}_2 . Par conséquent, d'après le théorème de Van Kampen, l'homomorphisme naturel $\pi_1(\hat{X}_2) \rightarrow \pi_1(\hat{X})$ est un isomorphisme. Soit maintenant X la s -décomposition en anses canoniques de M' . Alors, $\pi_1(X_2) \rightarrow \pi_1(X)$ et $f'_* : \pi_1(\hat{X}_2) \rightarrow \pi_1(X_2)$ sont des isomorphismes; d'où $f' : \hat{M}' \rightarrow M'$ induit un isomorphisme sur π_1 .

Dans le cas où M est bordée, on peut d'abord obtenir une résolution PL acyclique locale $\partial f : \partial \hat{M} \rightarrow \partial M$ de ∂M en variété $HML(H^3)$ et, par conséquent, une résolution PL acyclique locale $f : M \cup M(\partial f) \rightarrow M$. Pour résoudre la variété HML $M_1 = M \cup M(\partial f)$ dont le bord $\partial \hat{M}$ est une variété $HML(H^3)$, on peut supposer en plus que son bord possède un voisinage produit; comme on ne modifie que l'intérieur de M_1 , on peut faire la même construction que précédemment.

c. q. f. d.

De façon standard, on déduit la classification des structures $HML(H^3)$; on peut ainsi remplacer les termes HML et $\ker \alpha$ dans la définition \int ^{de concordances} et dans le théorème 4.3 par $HML(H^3)$ et Z_ℓ respectivement.

§4. Conséquence de l'existence d'une telle variété

Soit M une n -variété HML. $H^3(M)$ désigne le sous-groupe de H^3 qui est engendré par les éléments $H^3(\sigma)$ i.e.: $Lk(\sigma, M)$, où les σ sont tous les $(n-4)$ -simplexes contenus dans l'intérieur de M . On remarque que $H^3(M)$ ne dépend pas des subdivisions de M , d'après la preuve du lemme 4.4. Alors, l'obstruction $o(M)$ est induite naturellement par un élément $o_0(M)$ de $H^4(M; H^3(M))$ d'après la définition du cocycle de l'obstruction $o(M)$.

On peut remarquer que $H^3(\partial M)$ est un sous-groupe de $H^3(M)$, car $Lk(\sigma, \partial M) = \partial Lk(\sigma, M)$ pour tout $(n-5)$ -simplexe de ∂M .

PROPOSITION 4.9. Soit $1 \leq \ell < \infty$ et soit M une n -variété HML. Le link $Lk(\sigma, M)$ d'un $(n-4)$ -simplexe de $M - \partial M$ sera désigné par $H^3(\sigma)$. On suppose que

$$2\ell H^3 \neq 0 \text{ dans } H^3$$

pour toute combinaison linéaire finie de la forme

$$H^3 = \sum n_i H^3(\sigma_i)$$

où $\alpha(H^3) \neq 0$ et le plus grand diviseur commun des n_i est 1.

Alors,

$$b_{2\ell} \alpha_* o(M) = 0.$$

Preuve. Soit $\ell = q \cdot 2^p$ avec q impair. On va d'abord traiter le cas où M est compacte. Comme $H^3(M)$ est un groupe abélien

de type fini, il existe un système de générateurs linéairement indépendants H_1, \dots, H_m tels que $H^3(M) = H^3(H_1) \oplus \dots \oplus H^3(H_m)$. Par notre hypothèse, si $\alpha(H_i) \neq 0$, le composant d'ordre 2-primaire de H_i dans H^3 est $\geq 4 \cdot 2^p$. Par conséquent, on a un homomorphisme $\alpha_{4\ell} : H^3(M) \rightarrow Z_{4\ell}$ tel que $\alpha \equiv \alpha_{4\ell} \pmod{2}$; pour les générateurs, si $\alpha(H_i) = 0$, on pose $\alpha_{4\ell}(H_i) = 0$ et si $\alpha(H_i) \neq 0$, $\alpha_{4\ell}(H_i) = q \cdot 2^{p(i)} \pmod{4\ell}$, où $2^{p(i)}$ est le composant d'ordre 2-primaire de H_i dans H^3 . L'élément $(\alpha_{4\ell})_*(o_0(M))$ de $H^4(M; Z_{4\ell})$ induit $\alpha_*(o(M))$; par conséquent, $b_{2\ell} \alpha_*(o(M)) = 0$.

Dans le cas où M est non-compacte, on prend une suite de sous-variétés compactes M_i telle que $M = \cup M_i$. Comme le module de type fini sur l'anneau fini $Z_{2\ell}$ est artinien, on voit, de la proposition (13. 2. 3) du EGA III [Gr], que l'homomorphisme canonique de la cohomologie singulière, $H^*(M; Z_{2\ell}) \rightarrow \lim\text{-proj } H^*(M_i; Z_{2\ell})$, est un isomorphisme. Or, on a évidemment $b_{2\ell} \alpha_*(o(M))|_{M_i} = b_{2\ell} \alpha_*(o(M_i))$ et, comme on a montré précédemment que $b_{2\ell} \alpha_*(o(M_i)) = 0$ pour tout i , on vérifie immédiatement que $b_{2\ell} \alpha_*(o(M)) = 0$.

c. q. f. d.

Par conséquent, on obtient:

COROLLAIRE 4.9.a. Supposons qu'il existe une n-variété HML M avec $b_{2\ell} \alpha_*(o(M)) \neq 0$. Alors, il existe une 3-sphère d'homologie PL H^3 telle que $\alpha(H^3) \neq 0$ et $2\ell H^3 \equiv 0$ dans H^3 .

§5. Commentaire de l'équivalence de plusieurs conjectures

On va discuter sur la possibilité de scindement de la fibration,

$$K(\ker \alpha, 4) \rightarrow \text{BHML}_r \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r,$$

qui est défini du ch. 2 pour $r \geq 3$.

THEOREME 4.10. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

(1) Il existe une 3-sphère d'homologie PL H^3 avec $\alpha(H^3) \neq 0$ et $2H^3 \equiv 0$ dans H^3 .

(2) Il existe une section de la fibration homotopique

$$\beta : \text{BHML}_r \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r \text{ pour } r \geq 3.$$

(3) Pour $n \geq 5$, toute n -variété TOP V admet une structure HML.

(4) Pour $n \geq 5$, toute n -variété TOP fermée V admet une structure d'homotopie HML; i.e.: il existe une n -variété HML fermée M ayant le même type d'homotopie (simple) que V .

Preuve. On suppose toujours $r \geq 3$ et $n \geq 5$. Si l'on suppose

(1), la flèche naturelle $\beta \circ j : \text{BHML}(H^3)_r \rightarrow \underline{\text{BTOP}}_r$ est une équivalence d'homotopie. Par conséquent, l'inverse homotopique de $(\beta \circ j)$ composé avec j donne une section homotopique de la fibration β ; i.e.:

(1) entraîne donc (2). Il est immédiat que (2) entraîne (3) d'après le théorème 4.2, et que (3) entraîne (4) est trivial. Prouvons

enfin que (4) entraîne (1). On remarque qu'il existe une 5-variété

TOP fermée V avec $\text{Sq}^1 k(V) \neq 0$ et $\pi_1(V) = Z_2$. D'après Morita [Mo],

$k(M_{\text{TOP}}) = k(V)$ pour n'importe quelle équivalence d'homotopie

$M_{\text{TOP}} \simeq V$. En particulier, $\text{Sq}^1 k(M_{\text{TOP}}) \neq 0$; la condition (1) en

découle d'après le corollaire 4.9.a, car $\text{Sq}^1 = b_2$.

c. q. f. d.

CHAPITRE 5

Etude du problème de la triangulation simpliciale de
variétés topologiques de dimension 5 et plus

§. Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera en premier lieu les suspensions multiples des sphères d'homologie HML, en généralisant le théorème de R. D. Edwards; ensuite, si M est une n -variété HML sans bord, on obtiendra une condition nécessaire et suffisante exprimée en termes de $Lk(\sigma^{n-4}, M)$ et de $Lk(\sigma^0, M)$, pour que M soit elle-même une variété TOP.

En outre, grâce à l'étude des structures $HML(H^3)$ faite au chapitre 4, et celle des résolutions PL acycliques locales, on obtiendra une condition nécessaire et suffisante en termes des 3-sphères d'homologie PL pour qu'une variété TOP sans bord de dimension au moins 5 admette elle-même une triangulation simpliciale; plus précisément, après avoir défini le groupe abélien $H^{3,n}$, on pourra donner le résultat suivant (Théorème 5.1.).

DEFINITION. Si $n \geq 6$, $H^{3,n}$ est le sous-groupe de H^3 , engendré par les 3-sphères d'homologie PL dont les suspensions $(n-3)$ -uples sont homéomorphes à la n -sphère. $H^{3,5}$ est le groupe abélien,

engendré par les 3-sphères d'homologie PL dont les suspensions doubles sont homéomorphes à la 5-sphère, dont la loi de composition est la somme connexe géométrique, et la relation: $H^3 \equiv 0$ est vrai dans $H^{3,5}$ s'il existe une 5-variété HML contractile C avec un bord collié telle que ∂C est une réunion de CH^3 avec une 4-variété PL acyclique et que $\text{int } C$ est elle-même une variété TOP.

THEOREME 5.1. Soit $0 \leq \ell < \infty$ et soit V une n-variété TOP sans bord telle que

$$b_{\ell}k(V) = 0 \text{ dans } H^5(V ; Z_{\ell}),$$

$$k(V) \neq 0 \text{ dans } H^4(V ; Z_2)$$

et, si $\ell \neq 0$,

$$b_{2\ell} k(V) \neq 0 \text{ dans } H^5(V ; Z_{2\ell}).$$

Supposons $n \geq 5$. Alors, pour que V admette une triangulation simpliciale, il faut et il suffit qu'il existe une 3-sphère d'homologie PL H^3 satisfaisant aux trois conditions suivantes:

- (i) H^3 borde une 4-variété PL parallélisable dont la signature est 8, i.e.: $\alpha(H^3) \neq 0$,
- (ii) $S^{n-3}H^3 \approx S^n$, et
- (iii) $2\ell H^3 \equiv 0$ dans $H^{3,n}$.

Ici, on désigne par $k(V)$ la classe d'obstruction de Kirby-Siebenmann dans $H^4(V; Z_2)$ pour que V admette une triangulation en variété PL et par b_ℓ l'opération de Bockstein associée à la suite exacte, $0 \rightarrow Z_\ell \rightarrow Z_{2\ell} \rightarrow Z_2 \rightarrow 0$ avec les conventions $Z_0 = Z$ et $Z_1 = 0$.

Evidemment, toute variété TOP sans bord est classée soit dans les cas $0 \leq \ell < \infty$ traités dans le théorème 5.1, soit dans l'autre cas, où $k(V) = 0$, V étant triangulable en variété PL. La triangulation des variétés TOP avec un bord non-vide sera traitée également dans le §4.

Par rapport au théorème 5.1, le cas $(n, \ell) = (5, 0)$ est traité par Siebenmann [Si₅] avec une hypothèse superflue d'orientabilité, et les cas $\ell = 0$ et $6 \leq n \leq 8$ par Scharleman [Sc].

Dans le chapitre 4, l'opération entière de Bockstein s'écrit b_∞ au lieu de b_0 .

Dans le §1, on traite le cas des suspensions multiples des sphères d'homologie HML; on obtiendra de suite dans le §2 un critère pratique pour qu'une variété HML soit elle-même une variété TOP. Dans le §3 on revient à l'étude du groupe $H^{3,5}$. Le §4 est consacré à la preuve du théorème 5.1. On finira, en discutant brièvement dans le §5 la classification des structures TOP triangulées sur une variété TOP en termes de la théorie des obstructions.

§1. Suspension multiple des sphères d'homologie HML

Commençons par citer des théorèmes relatifs aux suspensions des sphères d'homologie PL. On généralisera ensuite au cas des sphères d'homologie HML.

THEOREME 5.2 (Edwards[Ed₂]) Soit H^n une sphère d'homologie PL de dimension $n \geq 4$. Alors,

$$S^2 H^n \approx S^{n+2}.$$

THEOREME 5.3 (Edwards-Scharlemann [ESc] et Bryant-Edwards-Seebeck [BES]). Soient H_1 et H_2 deux 3-sphères d'homologie PL et $n \geq 5$. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $S^{n-3} H_i \approx S^n$, pour $i = 1$ et 2 , et
 (ii) $S^{n-3} (H_1 \# H_2) \approx S^n$.

Le théorème 5.2 est un résultat surprenant qui a été établi récemment par R. D. Edwards; et il a même démontré en plus, pour toute 3-sphère d'homologie PL H^3 éventuellement non-simplement connexe qui borde une variété TOP compacte contractile, que $S^2 H^3 \approx S^5$ [Ed₂]. Dans l'énoncé du théorème 5.3, l'implication (i) \Rightarrow (ii) a été prouvée par [ESc] et (ii) \Rightarrow (i) l'a été récemment par [BES].

On se rappelle qu'une variété HML fermée possédant les mêmes groupes d'homologie entière que S^n est dite une n -sphère d'homologie HML .

THEOREME 5.4. Soit H^n une n-sphère d'homologie HML de dimension

$n \geq 4$. Supposons que $H^n \times R^m$ est localement euclidien. Alors,

$$S^m H^n \approx S^{m+n},$$

si $m = 1$ et H^n est simplement connexe, ou si $m \geq 2$ et $n \geq 5$.

Le cas $m \geq 2$ et $n = 4$ est traité séparément par le théorème suivant.

THEOREME 5.4.a. Soit H^4 une 4-sphère d'homologie HML. Si $m \geq 2$ et si $H^4 \times R^m$ est localement euclidien, alors,

$$S^m H^4 \approx S^{m+4}.$$

En général, on utilise sans l'indiquer explicitement, le lemme suivant qui est facilement démontré par une simple observation géométrique et par la conjecture de Poincaré TOP en dimension ≥ 5 .

LEMME 5.5. Supposons $m + n \geq 5$. Soit H^n une n-sphère d'homologie HML. Alors,

$$S^m H^n \approx S^{m+n}$$

si et seulement si $C'H^n \times M^{m-1}$ est localement euclidien pour une $(m-1)$ -variété PL sans bord M , $C'H^n$ désignant le cône ouvert de H^n .

Pour démontrer le théorème 5.4, on a besoin de:

LEMME 5.6 (Cf. Siebenmann [Si₅]). Soient H_1 et H_2 des espaces compacts métrisables et $h : H_1 \times T^m \rightarrow H_2 \times T^m$ un homéomorphisme

tel que

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(H_1 \times T^m) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(H_2 \times T^m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(T^m) & = & \pi_1(T^m) \end{array}$$

est commutatif. Alors, il existe un homéomorphisme

$$f : S^m H_1 \rightarrow S^m H_2$$

qui se réduit à l'identité sur la sphère de suspension.

Preuve. Un homéomorphisme $h' : H_1 \times R^m \rightarrow H_2 \times R^m$, qui revêt h , satisfait à:

$$\|p_2(x) - p_2 h'(x)\| < \text{constante}$$

pour tout $x \in H_1 \times R^m$, où p_2 désigne la projection sur R^m .

Soit $r : R^m \rightarrow \text{int } D^m = \{x \in R^m ; \|x\| < 1\}$ un homéomorphisme préservant les rayons. Alors, $f_0 : H_1 \times \text{int } D^m \rightarrow H_2 \times \text{int } D^m$, défini par $f_0 = ((\text{id}|_{H_1}) \times r) \circ h' \circ ((\text{id}|_{H_2}) \times r^{-1})$, est prolongeable en un homéomorphisme $f : S^m H_1 \rightarrow S^m H_2$.

c. q. f. d.

Preuve du théorème 5.4. Si l'on suppose que $n \geq 5$ et que $H^n \times R^m$ est localement euclidien, alors, $H^n \times T^m$ est une variété TOP et on a un homéomorphisme $h : H^n \times T^m \rightarrow H_{\text{TOP}}^n \times T^m$ qui

satisfait à l'hypothèse du lemme 5.6; ceci découle de la proposition 1.7 et du théorème 1.8: $H^n \times T^m \approx (H^n \times T^m)_{TOP} \approx H_{TOP}^n \times T^m$ naturellement. En outre, H_{TOP}^n admet une structure PL car $H^4(H_{TOP}^n; Z_2) = 0$. Par conséquent, $S^m H^n \approx S^{m+n}$ d'après le théorème 5.2 et le lemme 5.6, pourvu que $m \geq 2$.

Si l'on suppose $\pi_1(H^n) = 0$, $n + m \geq 5$, $m = 1$ et que $H^n \times R^m$ est localement euclidien, on peut prendre S^n au lieu de H_{TOP}^n dans l'argumentation précédente d'après le lemme 1.1; on en déduit, par le lemme 5.6, que $S^m H^n \approx S^{m+n}$.

c. q. f. d.

Pour le cas restant à traiter, c'est à dire, pour démontrer le théorème 5.4.a, on utilise le lemme suivant qui généralise l'implication (ii) \Rightarrow (i) du théorème 5.3.

LEMME 5.7. Soit D_1 et D_2 deux 4-variétés HML acycliques avec $\partial D_1 = \partial D_2$. Si $S^m(D_1 \cup D_2) \approx S^{m+4}$, et $S^{m+1}(\partial D_1) \approx S^{m+4}$, alors, $S^m(D_1 \cup C\partial D_1) \approx S^{m+4}$.

Preuve du théorème 5.4.a à partir du lemme 5.7. On choisit dans H^4 un 1-polygone acyclique P , qui contient tout point de singularité de H^4 , et l'on désigne par D le complémentaire fermé du voisinage dérivé second de P . Alors, ∂D est une 3-sphère d'homologie PL qui est homéomorphe PL à une somme connexe des 3-sphères d'homologie PL autour des points de singularité. On obtient une résolution PL acyclique $f : H^4 \rightarrow D \cup C\partial D$ en effondrant P en un point.

D'après notre hypothèse et le théorème 5.3, on a $S^{m+1}(\partial D) \approx S^{m+4}$.
 De plus, comme D est une variété PL acyclique, $S^m \partial(D \times I) \approx S^{m+4}$
 d'après le théorème 5.2. Par conséquent, $S^m(D \cup C\partial D) \approx S^{m+4}$
 en vertu du lemme 5.7. Mais, l'homéomorphisme naturel $H^4 \times T^m \rightarrow$
 $(D \cup C\partial D) \times T^m$ donne un homéomorphisme de $S^m H^4$ sur $S^m(D \cup C\partial D)$
 à l'aide du lemme 5.6.

Or, le lemme 5.7 est un corollaire du théorème suivant:

THEOREME (Cannon [Ca], Cf. Bryant-Edwards-Seebeck [BES]). Soit $X \supset Y$
une paire de sphères d'homologie HML de dimensions respectives
 $n - 2$ et $n - 3$. On suppose que $S^2 X$ et $S^2 Y \times R^1$ sont des variétés
TOP de dimension n , où $n \geq 5$. Alors, si \bar{U} est la fermeture
d'une composante connexe U du complémentaire $S^2 X - S^2 Y$, il existe
un plongement TOP

$$f : \bar{U} \rightarrow S^2 X$$

tel que f soit prolongeable en un plongement TOP de $(\bar{\partial U} \times I) \cup \bar{U}$
dans $S^2 X$.

Preuve du lemme 5.7. On peut supposer $m \geq 2$. On pose
 $X = S^{m-2}(D_1 \cup D_2)$, $Y = S^{m-2}(\partial D_1)$ et $\bar{U} = S^m D_1$. Alors, $S^2 X \approx S^{m+4} \approx SS^2 Y$,
 et d'après le théorème, $C\bar{\partial U} \cup \bar{U}$ est une variété TOP ayant le même
 type d'homotopie que S^{m+4} ; par conséquent, $C\bar{\partial U} \cup \bar{U} \approx S^{m+4}$. Mais, par
 la définition de S et C , $S^m(C\partial D_1 \cup D_1) \approx C\bar{\partial U} \cup \bar{U}$, ce qui termine
 la démonstration du lemme 5.7 et donc du théorème 5.4.a.

§2. Un critère pour qu'une variété HML soit une variété TOP

Comme corollaire des théorèmes 5.4 et 5.4.a, on obtiendra le critère pratique suivant (théorème 5.8) et ensuite, le corollaire 5.9 qui sera utile pour obtenir une triangulation simpliciale.

THEOREME 5.8^{*)}. Supposons $n \geq 5$. Soit M une n -variété HML sans bord. Alors, elle est localement euclidienne si et seulement si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

- (i) $S^{n-3} \text{Lk}(\sigma^{n-4}, M) \approx S^n$ pour tout $(n-4)$ -simplexe de M et
- (ii) $\text{Lk}(v, M)$ est simplement connexe pour tout sommet de M .

On observe d'abord:

LEMME. Pour $k \leq n + 1$, soit M_k une $(k-1)$ -variété HML fermée. Alors, l'espace $M_k \times R^{n-(k-1)}$ est une n -variété TOP si et seulement si pour tout simplexe σ de M_k ,

$$S^{n-k'+1} \text{Lk}(\sigma^{k-1-k'}, M_k) \approx S^n.$$

En effet, les sous-espaces ouverts $C' \text{Lk}(\sigma^{k-1-k'}, M_k) \times R^{k-k'} \times R^{n-k+1}$

*) Le critère, donné originalement par l'auteur, a contenu la condition sur les suspensions $(n-4)$ -uples des links de dimension 4; elle est exclue en vertu du théorème de Cannon cité précédemment. En effet, cette amélioration est énoncée à la première fois par D. Galewski et R. Stern [GS]. L'auteur remercie M. R. Stern pour lui avoir communiqué son résultat et le papier de J. Cannon.

recouvrent $M_k \times R^{n-k+1}$ et le lemme en résulte immédiatement d'après le lemme 5.5.

Preuve du théorème 5.8. D'après le lemme précédent les conditions (i) et (ii) sont évidemment nécessaires. On suppose maintenant réalisées les conditions (i) et (ii). Si $k \leq 4$, $C'Lk(\sigma^{n-k}, M) \times R^{n-k}$ est localement euclidien d'après le lemme 5.5 et notre hypothèse (i). Grâce aux théorèmes 5.4 et 5.4.a et à notre hypothèse (ii), pour montrer que $C'Lk(\sigma^{n-k}, M) \times R^{n-k}$ est localement euclidien dans le cas $k \geq 5$, il suffit de démontrer que $Lk(\sigma^{n-k}, M) \times R^{n-k+1}$ est localement euclidien; ceci sera effectué par induction sur k où $5 \leq k \leq n$: On pose $M_k = Lk(\sigma^{n-k}, M)$. Soit σ' un $(k-1-k')$ -simplexe de M_k , où $k' \leq k - 1$. Alors, comme $Lk(\sigma', Lk(\sigma, M)) = Lk(\sigma' * \sigma, M)$, $Lk(\sigma', Lk(\sigma, M)) \times R^{n-k'+1}$ est localement euclidien par hypothèse d'induction. Par conséquent, $C'Lk(\sigma', M_k) \times R^{n-k'}$ est localement euclidien soit par les théorèmes 5.4 et 5.4.a soit par notre hypothèse (i); d'où $M_k \times R^{n-k+1}$ est localement euclidien par le lemme précédent.

c. q. f. d.

On prend un 3-sphère d'homologie PL H^3 avec $\alpha(H^3) \neq 0$.

COROLLAIRE 5.9. On suppose

$$S^{n-3}H^3 \approx S^n.$$

Soit M une n -variété $HML(H^3)$ sans bord. Alors, $M - \{\text{sommets}\}$

est localement euclidienne. De plus si $n \geq 6$, on peut résoudre les sommets et l'on obtient une résolution PL acyclique locale

$$f : \tilde{M} \rightarrow M$$

telle que \tilde{M} est une n -variété $HML(H^3)$ et que $Lk(\tilde{v}, \tilde{M})$ est simplement connexes pour tout sommet \tilde{v} de \tilde{M} , i.e.: \tilde{M} est elle-même une n -variété TOP.

Preuve. D'après le théorème 5.4, la suspension $(n-3)$ -uple de toute somme connexe de H^3 et $-H^3$ est homéomorphe à S^n . Par conséquent, la première assertion du corollaire découle immédiatement par le théorème 5.8.

La résolution au voisinage d'un sommet v est donnée de la façon suivante: M'' désignant la seconde subdivision barycentrique de M , on fait la chirurgie pour tuer les éléments de π_1 d'une sphère d'homologie HML $Lk(v, M'')$ de dimension ≥ 5 ; la chirurgie est effectuée comme on l'a faite dans le cas d'une sphère d'homologie PL de dimension ≥ 5 , mais dans une sous-variété PL qui est un voisinage du 3-squelette dual de $Lk(v, M'')$. Soit W_v la trace de la chirurgie et $Lk'(v) = \partial W_v - Lk(v, M'')$. Pour chaque sommet on attache $Lk(v, M'') \times I \cup W_v \cup CLk'(v)$ à $M - \text{int}(\text{St}(v, M''))$ en $Lk(v, M'')$ au lieu de $CLk(v, M'')$ et l'on obtient une variété $HML(H^3)$ \tilde{M} qui possède la propriété que $Lk(\tilde{v}, \tilde{M})$ est simplement connexe pour tout sommet \tilde{v} de \tilde{M} . Une résolution acyclique locale $f : \tilde{M} \rightarrow M$ est construite par l'effondrement de $W_v \cup CLk'(v)$ en v .

c. q. f. d.

§3. Le groupe $H^{3,5}$

On justifie la définition de $H^{3,5}$ qui est présentée dans l'introduction. D'après le théorème 5.3, si H_1 et H_2 sont contenus dans $H^{3,5}$, $H_1 \# H_2$ l'est également. En outre, le semi-groupe $H^{3,5}$ est un groupe; en effet, si l'on considère une 4-sphère d'homotopie HML $H^4 = CH^3 \cup H^3 \times I \cup C(-H^3)$, alors, d'après les théorèmes 5.4 et 5.5, $\text{int } CH^4$ est une variété TOP, en supposant que $S^{n-3}H^3 \approx S^n$. Ceci implique que $H^3 \# -H^3 \equiv 0$ dans $H^{3,5}$, car H^4 est une réunion de $C(H^3 \# -H^3)$ avec une variété PL acyclique. Or, l'homomorphisme naturel $\gamma_5 : H^{3,5} \rightarrow H^3$ est bien défini, puisque, si $H^3 \equiv 0$ dans $H^{3,5}$, H^3 doit être le bord d'une 4-variété PL acyclique.

REMARQUE. On désigne par $H^{4,5}$ le groupe abélien engendré par les 4-sphères d'homologie HML H^4 telles que $H^4 \times R^1$ sont des variétés TOP, l'opération interne étant la somme connexe aux bords des 4-boules et la relation $H^4 \equiv 0$ est vrai dans $H^{4,5}$ si H^4 borde une 5-variété HML contractile C avec un bord collié telle que $\text{int } C$ est une variété TOP. Alors, l'homomorphisme $H^{4,5} \rightarrow H^{3,5}$ défini par la somme connexe des links des points singuliers de H^4 est un isomorphisme sur $\ker \gamma_5$. En effet, la différence des complémentaires du voisinages des points singuliers compose une 4-sphère d'homologie PL qui borde toujours une 5-variété PL contractile.

PROPOSITION 5.10. On suppose que $S^2H^3 \approx S^5$. Alors, $H^3 \equiv 0$ dans $H^{3,5}$ si et seulement s'il existe une 4-variété PL P avec

$\partial P = H^3 \cup (\cup H_i \# -H_i)$, $CH^3 \cup P \cup (\cup CH_i \cup C(-H_i)) \approx S^4$ et
 $S^2 H_i \approx S^5$ pour chaque 3-sphère d'homologie PL H_i .

En effet, la condition est suffisante par le théorème 5.4. Pour la nécessité, soit Σ la réunion des simplexes σ dans la 5-variété HML contractile C^5 avec un bord collié tel que $Lk(\sigma, M)$ n'est pas PL; Σ est un sous-complexe de dimension 1. Si Σ n'est pas acyclique, on le coupe aux petits voisinages des barycentres des 1-simplexes de façon à ce que le nombre de coupures soit minimal et l'on obtient un sous-complexe acyclique Σ' de Σ , contenant le sommet du cône CH^3 . Le bord d'un voisinage régulier de Σ' est une 4-variété HML X de la forme $X = CH^3 \cup P \cup (\cup CH_i \cup C(-H_i))$ telle que P est une variété PL, $X \approx S^4$ et que, comme H_i est un link dans $\text{int } C^5$, $S^2 H_i \approx S^5$; d'où le résultat.

§4. Démonstration du théorème 5.1

Après avoir donné la preuve du théorème 5.1, on discutera brièvement le cas où M est bordée. Soit $\gamma_n : H^{3,n} \rightarrow H^3$ l'homomorphisme canonique.

Preuve de la partie nécessité du théorème 5.1. Soit M une n -variété HML sans bord qui est elle-même une n -variété TOP. Une 4-cochaîne $\hat{\lambda}(M) \in C^4(M; H^{3,n})$ est définie par

$$\hat{\lambda}(M)(D(\tau)) = \text{la classe de } Lk(\tau, M) \text{ dans } H^{3,n}.$$

C'est un cocycle, parce que $S^{n-4} Lk(\sigma^{n-5}, M)$ est toujours

homéomorphe à S^n d'après notre hypothèse; on désigne par $\tilde{o}(M)$ la classe de cohomologie définie par $\tilde{\lambda}(M)$. Alors, $(\gamma_n)_* \tilde{o}(M) = o(M)$ et $(\alpha \circ \gamma_n)_* \tilde{o}(M) = k(M)$.

On définit $H^{3,n}(M)$ et $\tilde{o}_0(M) \in H^4(M; H^{3,n}(M))$ de la même façon que dans le ch. 4 §4. Comme l'argument de la preuve de la proposition 4.9 ou 4.9.a est valable dans ce cas, on voit que, si $1 \leq \ell < \infty$ et $b_{2\ell} k(M) \neq 0$, il existe alors une somme connexe géométrique H^3 d'une combinaison linéaire des $Lk(\sigma^{n-4}, M)$ telle que $\alpha(H^3) \neq 0$ et que $2\ell H^3 \equiv 0$ dans $H^{3,n}$. Pour cette 3-sphère d'homologie PL H^3 , on a $S^{n-3}H^3 \approx S^n$ d'après les théorèmes 5.3 et 5.8; si $\ell = 0$ et $k(M) \neq 0$, il existe de même une 3-sphère d'homologie H^3 telle que $\alpha(H^3) \neq 0$ et $S^{n-3}H^3 \approx S^n$.

c. q. f. d.

Preuve de la partie suffisance du théorème 5.1. On suppose qu'il existe une 3-sphère d'homologie PL H^3 réalisant les trois conditions dans l'énoncé du théorème 5.1 pour un ℓ . On désigne par $H^{3,n}(H^3)$ le sous-groupe cyclique de $H^{3,n}$ engendré par H^3 . Soit V une n -variété TOP sans bord, qui satisfait à $b_\ell k(V) = 0$. Alors, d'après le théorème 4.7, il existe une n -variété HML(H^3) M telle que $M_{TOP} \approx V$. En outre, si $n \geq 6$, à l'aide du corollaire 5.9 on obtient une résolution PL acyclique locale $f: \tilde{M} \rightarrow M$ telle que $\tilde{M} \approx \tilde{M}_{TOP} \approx M_{TOP} \approx V$; ceci fournit une triangulation simpliciale sur V .

Si $n = 5$, on définit une 4-cochaîne $\tilde{\lambda}(M) \in C^4(M; H^{3,5}(H^3))$ par $\tilde{\lambda}(M)(D(\tau)) = \{Lk(\tau, M)\}$, qui n'est pas nécessairement un cocycle. Comme $\{(\gamma_n)_* \tilde{\lambda}(M)\} = o(M)$, on peut choisir par l'argument standard une 4-cochaîne h à valeurs dans les sommes connexes multiples des

H^3 telle que:

(1) $\tilde{\lambda}(M) + h$ est un cocycle, et

(2) $(\gamma_5)_* h = 0$ dans $C^4(M; H^3(H^3))$.

On modifie la construction de la résolution de telle sorte que \tilde{M} est une variété TOP triangulée. Par (2), pour tout 1-simplexe τ , $h(D(\tau))$ est le bord d'une 4-variété PL acyclique P_τ et l'on pose $C''Lk(\tau) = CLk(\tau) \# (Ch(D(\tau)) \cup P_\tau)$, et

$$\tilde{M}_4 = M_3 \cup (\cup C''Lk(\tau)).$$

Ensuite, par (1), pour les sommets v la somme connexe des links des points singuliers de $Lk''(v) = \cup \{C''Lk(\tau); \tau > v\}$ est nul dans $H^{3,5}(H^3)$. Par conséquent, d'après la remarque qui précède la proposition 5.10, $Lk''(v)$ est le bord d'une variété HML C_v contractile avec un bord collié telle que $\text{int } C_v$ est une variété TOP. On pose:

$$\tilde{M} = \tilde{M}_5 = \tilde{M}_4 \cup (\cup C''Lk''(v)) \text{ avec } C''Lk''(v) = C_v.$$

Alors, \tilde{M} admet une structure de variété HML, n'étant plus de $HML(H^3)$. Il n'est pas difficile de voir que \tilde{M} est une variété TOP triangulée et qu'il existe une résolution PL acyclique locale $f: \tilde{M} \rightarrow M$.

Par conséquent, $\tilde{M} \approx \tilde{M}_{TOP} \approx M_{TOP} \approx V$; d'où le résultat.

c. q. f. d.

Dans le cas où M est bordée on peut montrer de la même façon:

S'il existe une 3-sphère d'homologie PL H^3 qui satisfait à (i) $\alpha(H^3) \neq 0$, (ii) $S^{n-4}H^3 \approx S^{n-1}$, (iii) $2\ell H^3 \equiv 0$ dans $H^{3,n-1}$, alors, toute variété TOP avec un bord non-vide de dimension $n \geq 6$, satisfaisant à $b_\ell k(V) = 0$, est triangulable.

§5. A propos des théories des obstructions

Pour classifier les variétés TOP triangulées à concordance près, il est utile de présenter, dans le cas de dimension ≥ 5 , les théories générales d'obstruction de la façon suivante:

On expose d'abord la différence entre la catégorie PL et celle de TOP triangulée: Soit M une n-variété TOP triangulée sans bord. Alors, comme on l'a définie dans le §4, la classe $\tilde{\sigma}(M) = \{\tilde{\lambda}(M)\} \in H^4(M; H^{3,n})$ est l'unique obstruction pour obtenir une structure PL qui est concordante à M par une variété TOP triangulée. Si $\tilde{\sigma}(M) = 0$, les structures PL sur M sont classifiées par $H^3(M; (\gamma_n)_* H^{3,n})$. La preuve est la même que dans le cas en HML.

Maintenant, soit V une n-variété TOP sans bord et soit $\alpha_n : H^{3,n} \rightarrow Z_2$ la composition $\alpha_n = \alpha \circ \gamma_n$. La première obstruction possible pour obtenir une triangulation simpliciale sur V est contenue dans $H^4(V; \text{Coker } \alpha_n)$; Il y a deux cas possibles:

(a) Cas où $\text{Coker } \alpha_n = Z_2$: L'obstruction est égale à la classe d'obstruction $k(V)$ pour obtenir une triangulation en variété PL et il n'y en a pas d'autre; si $k(V) = 0$, il existe une structure PL M_0 sur V et les structures TOP triangulées sur V sont classifiées par la première obstruction et l'unique obstruction pour obtenir une structure PL concordante, c'est à dire, il existe un isomorphisme de l'ensemble des structures TOP triangulées sur

$H^3(V ; Z_2) \oplus H^4(V ; (\gamma_n)_* H^{3,n})$; en effet, à partir de la variété PL M_0 , on peut construire les autres structures en modifiant M_0 par un 3-cocycle g et par un 4-cocycle h , tous les deux à valeurs dans $H^{3,n}$; les structures sont classifiées par les classes $\{(\alpha_n)_* g\}$ et $\text{Im}\{h\}$.

(b) Cas où $\text{Coker } \alpha_n = 0$: On a l'unique obstruction dans $H^5(V ; \ker \alpha_n)$ et, c'est $b_{\alpha,n} k(V)$ où $b_{\alpha,n}$ est l'opération de Bockstein associée à la suite exacte: $0 \rightarrow \ker \alpha_n \rightarrow H^{3,n} \rightarrow Z_2 \rightarrow 0$. Si $b_{\alpha,n} k(V) = 0$, les structures sont classifiées par $H^4(V ; (\gamma_n)_*(\ker \alpha_n))$. La preuve est la même que dans le cas en HML.

On a encore une théorie de l'obstruction pour obtenir une structure TOP triangulée sur une variété HML M . La première obstruction possible est contenue dans $H^4(M ; \text{Coker } \gamma_n)$, la deuxième dans $H^5(M ; \ker \gamma_n)$ et il n'y en a pas d'autres. En plus, $\ker \gamma_n = 0$ pour $n \geq 6$.

Pour finir, on remarque dans notre méthode l'absence de la théorie des fibrés normaux dans la catégorie TOP triangulée.

Bibliographies

- [Br] M. Brown: Locally flat embeddings of topological manifolds, Ann. of Math. 75(1962), 331-342.
- [BES] J. Bryant, R. D. Edwards et C. L. Seebeck III: Approximating codimension one manifolds by locally flat manifolds (à paraître).
- [Ca] J. Cannon: Taming codimension one generalized submanifolds of S^n (Preprint).
- [Co] M. Cohen: Homeomorphisms between homotopy manifolds and their resolutions, Inv. Math. 10(1970), 239-250.
- [Ed₁] R. D. Edwards: Topological regular neighborhoods (à paraître).
- [Ed₂] ————— : The double suspension of PL homology n-spheres (en préparation).
- [Ed₃] ————— : The double suspension of a certain homology 3-sphere is S^5 , Notices Amer. Math. Soc. 22(1975), A334.
- [ESc] R. D. Edwards et M. G. Scharlemann: A remark on suspensions of homology spheres, Notices Amer. Math. Soc. (Feb. 1974), A-324.
- [ES] A. L. Edmonds et R. J. Stern: Resolutions of homology manifolds: a classification theorem, J. London Math. Soc. 11(1975), 474-480.
- [GS] D. Galewski - R. Stern: Classification of simplicial triangulations of topological manifolds (en préparation, cf. Bull. Amer. Soc.).
- [GS₁] ————— : The relationship between homology and topological manifolds via homology transversality (Preprint).
- [GH] H. Gluck: Unknotting S^1 in S^4 , Bull. Amer. Math. Soc. 69(1963), 91-94.
- [Gr] A. Grothendieck: Eléments de géométrie algébrique III, Publ. Math. IHES n°11, Paris, 1961.

- [Hu] J. F. P. Hudson: Piecewise-linear topology, Benjamin Inc., New-York, 1969.
- [KM] M. A. Kervaire et J. W. Milnor: Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math. 77(1963), 504-537.
- [KS] R. C. Kirby et L. C. Siebenmann: Foundational essays on topological manifolds smoothings and triangulations (à paraître).
- [KS,III] ————— : Some basic theorems about topological manifolds, Essay III du [KS].
- [KS₁] ————— : On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 742-749.
- [KS₂] ————— : Some theorems on topological manifolds, Manifolds edited by N. Kuiper, Springer Lecture Notes 197(1971), 1-7.
- [Ki] J. M. Kister: Microbundles are fiber bundles, Ann. of Math. 80(1964), 190-199.
- [KwS] K. W. Kwun et R. H. Szczarba: Product and sum theorems for Whitehead torsions, Ann. of Math. 82(1965), 183-190.
- [L] J. A. Lees: Immersions and surgeries of topological manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 529-534.
- [Mr₁] N. Martin: Cobordism of homology manifolds, Proc. Camb. Phil. Soc. 71(1972), 247-270.
- [Mr₂] ————— : On the difference between homology and piecewise-linear bundles, J. London Math. Soc. 6(1973), 197-204.
- [Mr₃] ————— : Transverse regularity for maps of homology manifolds (à paraître).
- [MrM] N. Martin et C. R. F. Maunder: Homology cobordism bundles, Topology 10(1971), 93-110.
- [MtM] T. Matumoto et Y. Matsumoto: The unstable difference between homology cobordism and piecewise-linear bloc bundles, Tôhoku Math. J. 27(1975), 57-68.
- [Mtsi] A. Matsuï: Surgery on 1-connected homology manifolds, Tôhoku Math. J. 25(1974), 169-172.

- [Mau₁] C. R. F. Maunder: Algebraic topology, Van Nostrand, London, 1970.
- [Mau₂] ————— : On the Pontryagin classes of homology manifolds, *Topology* 10(1971), 111-118.
- [Mau₃] ————— : General position theorems for homology manifolds, *J. London Math. Soc.* 4(1972), 760-768.
- [Mau₄] ————— : Surgery on homology manifolds I, II, *Proc. London Math. Soc.* 32(1976), 480-520; *J. London Math. Soc.* 12(1976), 169-175.
- [Mc] C. McCrory: Cone complexes and PL transversality, *Trans. Amer. Math. Soc.* 207(1975), 269-291.
- [Mil] R. T. Miller: Closed isotopies on piecewise-linear manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* 151(1970), 597-628.
- [Mi] J. Milnor: Microbundles I, *Topology* 3, Supplement 1(1964), 53-80.
- [Mo] S. Morita: Some remarks on the Kirby-Siebenmann class, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA*, 18(1972), 155-161.
- [Q] F. Quinn: Semifree group actions and surgery on PL homology manifolds, *Geometric Topology*, Springer Lecture Notes 438(1975), 395-414.
- [RS₁] C. P. Rourke et B. J. Sanderson: Block bundles I, *Ann. of Math.* 87(1968), 1-28.
- [RS₂] ————— : Δ -sets II: Block bundles and bloc fibrations, *Q. J. Math. Oxford Ser. 2*, 22(1971), 465-486.
- [RS₃] ————— : On topological neighborhoods, *Compositio Math.* 22(1970), 387-424.
- [Sa] H. Sato: Constructing manifolds by homotopy equivalences I, An introduction to constructing PL manifolds from homology manifolds, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 22(1972), 271-286.
- [Sa₁] ————— : ————— II, *Tôhoku Math. J.* 27(1975), 569-599.
- [Sc] M. G. Scharlemann: Simplicial triangulation of non-combinatorial manifolds of dimension less than 9 (à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.*).
- [ST] H. Seifert et W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, Teubner Leibniz 1934.

- [Si₁] L. C. Siebenmann: The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five, Thesis Princeton, 1965.
- [Si₂] ————— : On the homotopy type of compact topological manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968), 738-742.
- [Si₃] ————— : Infinite simple homotopy types, Indag. Math. 32(1970), 479-495.
- [Si₄] ————— : Disruption of low-dimensional handlebody theory by Rohlin's theorem, Topology of manifolds edited by Cantrell-Edwards, Markham, Chicago(1970), 57-76.
- [Si₅] ————— : Are non-triangulable manifolds triangulable Topology of manifolds edited by Cantrell-Edwards, Markham, Chicago(1970), 77-84.
- [Si₆] ————— : Regular (or canonical) open neighborhoods, General Topology and its Applications 3(1973), 51-61.
- [Sp] M. Spivak: Spaces satisfying Poincaré duality, Topology 6(1967), 77-102.
- [St] N. Steenrod: The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press N. J. 1951.
- [Su] D. Sullivan: Singularities in spaces, Liverpool Symp., Springer Lecture Notes 209(1971), 196-206.
- [Su₁] ————— : Triangulating and smoothin homotopy equivalences and homeomorphisms, Geometric Topology seminar notes, Princeton Univ., 1967.
- [Wa] C. T. C. Wall: Surgery on compact manifolds, Academic Press, London, 1971.
- [Wa₁] ————— : On simply-connected 4-manifolds, Proc. London Math. Soc. 39(1964), 141-149.
- [Wa₂] ————— : Poincaré complexes I, Ann. of Math. 86(1967), 213-245.
- [Wal] A. H. Wallace: Modifications and cobounding manifolds I, Canad. J. Math. 12(1960), 503-528.
- [Wi] J. Williamson: Cobordism of combinatorial manifolds, Ann. of Math. 83(1966), 1-33.